

Mecánica de materiales

Séptima edición

James M. Gere • Barry J. Goodno



Mecánica de materiales

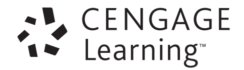
SÉPTIMA EDICIÓN

James M. Gere
Profesor Emérito, Stanford University

Barry J. Goodno
Georgia Institute of Technology

Traducción:
Javier León Cárdenas
Profesor de Ciencias Básicas
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Revisión técnica:
José Nicolás Ponciano Guzmán
Instituto Tecnológico de Morelia
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Morelia



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Mecánica de materiales. Séptima Edición
James M. Gere y Barry J. Goodno

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora editorial:
María Rosas López

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Editor de producción:
Timoteo Eliosa García

Ilustrador:
Peter Papayanakis

Diseño de portada:
Ansialab

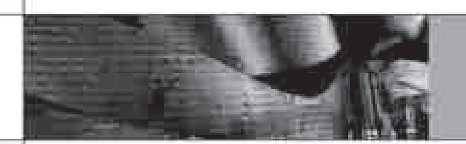
Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Traducido del libro *Mechanics of Materials*, *Seventh ed*.
Publicado en inglés por Cengage Learning © 2009
ISBN: 0-534-55397-4

Datos para catalogación bibliográfica:
Gere, James y Barry J. Goodno
Mecánica de materiales. Séptima Ed.
ISBN-13: 978-607-481-315-9
ISBN-10: 607-481-315-9

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com





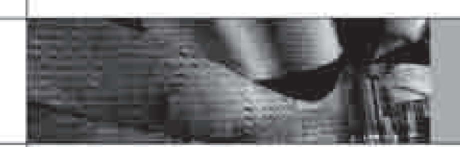
Contenido

*Especializado y/o temas avanzados.

*Especializado y/o temas avanzados.

**Temas avanzados.

**Temas avanzados.

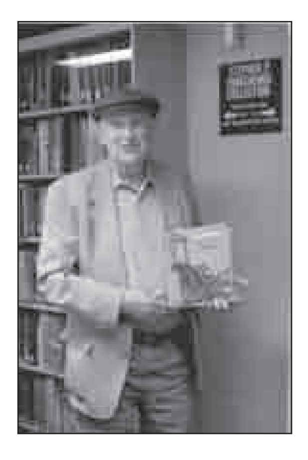


James Monroe Gere
(1925-2008)



James Monroe Gere, Profesor Emérito de Ingeniería Civil en la Stanford University, nació el 14 de junio de 1925 en Syracuse, Nueva York, y murió el 30 de enero de 2008 en Portola Valley, California. En 1942, a la edad de 17 años, ingresó al U.S. Army Air Corps y desempeñó su servicio militar en Inglaterra, Francia y Alemania. Después de la Segunda Guerra Mundial obtuvo los grados de ingeniero y la maestría en ingeniería civil en el Rensselaer Polytechnic Institute en 1949 y 1951, respectivamente. Trabajó como instructor y después como Investigador asociado en Rensselaer entre 1949 y 1952. Fue premiado con una de las primeras becas NSF y decidió estudiar en la Stanford University. En 1954 recibió su grado de Ph.D. y se le ofreció un puesto en la facultad de ingeniería civil, dando inicio así a una carrera de 34 años en la que hizo que los estudiantes participaran en temas estimulantes en ingeniería mecánica, estructural y sísmica. Fue jefe de departamento y decano asociado de ingeniería y en 1974 fue cofundador del John A. Blume Earthquake Engineering Center en Stanford. En 1980, Jim Gere también fue el principal fundador del Stanford Committee on Earthquake Preparedness, que exhortó a los miembros del campus universitario a asegurar y reforzar el equipo de oficina, mobiliario y otros artículos que pudieran representar un peligro para la vida en caso de un sismo. Ese mismo año fue uno de los primeros extranjeros en ser invitado a estudiar la ciudad devastada por un sismo de Tangshan, China. Jim se jubiló de Stanford en 1988, pero continuó siendo un miembro muy apreciado en la comunidad de Stanford ya que en su tiempo libre aconsejó y guió estudiantes en varios viajes de campo a la zona de temblores de California.

Jim Gere fue conocido por su comportamiento sociable, su alegre personalidad y maravillosa sonrisa, su afición al atletismo y su habilidad como educador en ingeniería civil. Fue autor de nueve libros sobre varios temas de ingeniería; el primero fue en 1972 con *Mecánica de materiales*, un libro inspirado por su maestro y mentor Stephan P. Timoshenko. Sus otros libros famosos, utilizados en cursos de ingeniería en todo el mundo incluyen: *Teoría de estabilidad elástica*, coescrito con S. Timoshenko; *Análisis matricial de marcos* y *Álgebra matricial para ingenieros*, los dos coescritos con W. Weaver; *Distribución de momentos; Tablas sísmicas: manual de diseño estructural y construcción*, coescrito con H. Krawinkler y *Terra Non Firma: Comprensión y preparación para sismos*, coescrito con H. Shah.



Jim Gere en la Biblioteca Timoshenko en la Stanford University, mostrando una copia de la 2a. edición de este libro (fotografía cortesía de Richard Weingardt Consultants, Inc)

Respetado y admirado por los estudiantes, profesorado y personal de la Stanford University, el profesor Gere siempre sintió que la oportunidad de trabajar y dar servicio a los jóvenes, tanto dentro como fuera del aula, fue una de sus mayores alegrías. Le gustaba caminar y a menudo visitaba los Parques Nacionales de Yosemite y Grand Canyon. Realizó más de 20 ascensiones al Half Dome en Yosemite así como la "excursión a pie John Muir" de hasta 50 millas en un solo día. En 1986 llegó hasta el campo base del Monte Everest, y le salvó la vida a un compañero de viaje. James fue un corredor activo y completó el Maratón de Boston a la edad de 48 años, con un tiempo de 3:13.

John Gere siempre será recordado por todos los que lo conocieron como un hombre considerado y amoroso que con su buen humor hizo más placenteros los aspectos de la vida y el trabajo. Su último proyecto (en progreso y ahora continuado por su hija Susan en Palo Alto, California) fue un libro basado en las memorias de su bisabuelo, un coronel (112d NY) en la Guerra Civil.



Créditos de fotografías

Capítulo 1. 2: Foto de Bryan Tokarczyk, PE/KPFF Tower Engineers **15**: Cortesía de MTS Systems Corporation **16:** Cortesía de MTS Systems Corporation **18:** Cortesía de MTS Systems Corporation **32:** © Barry Goodno **60:** Barry Goodno **66:** © Barry Goodno **67:** Vince Streano/Getty Images **67:** © Barry Goodno **67:** © Barry Goodno **68:** © Barry Goodno **68:** © Barry Goodno **72:** © Barry Goodno **76:** Cortesía de American Superconductor **83:** © Barry Goodno **76:** Cortesía de Tilt-Up Concrete Association.

Capítulo 2. 88: Joe Raedle/Getty Images **93:** © Barsik/Dreamstime.com **118:** Barros & Barros/Getty Images **163:** Cortesía de MTS Systems Corporation **188:** © Barry Goodno.

Capítulo 3. 220: Harald Sund/Getty Images **232:** Louie Psihoyos/Getty Images **233:** Peter Ginter/Getty Images **290:** © Barry Goodno **290:** Bontrager Race XXX Lite Flat Handlebar, cortesía de Bontrager.

Capítulo 4. 304: © Jupiter Images, 2007 **307:** Joe Gough/Sthutterstock **309:** Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering EERC, University of California, Berkeley **339:** Thomasz Gulla/Shutterstock.

Capítulo 5. 350: Lester Lefkowitz/Getty Images **374:** Cortesía del AISC **413:** Lester Lefkowitz/Getty Images **427:** Gabriel M. Covian/Getty Images.

Capítulo 6. 454: Chris Harvey/Shutterstock **479:** Franz Pflueg/Shutterstock **527:** Barry Goodno **527:** © Barry Goodno.

Capítulo 7. 536: Alfred Pasieka/Peter Arnold, Inc. **548:** Cortesía de Eann Patterson **548:** Frans Lemmens/Getty Images **594:** Cortesía de Omega Engineering Inc.

Capítulo 8. 618: Cortesía de Christian Michel, www.modernairships.info **621:** Harald Høilan Tjøstheim/Getty Images **627:** Wayne Eastep/Getty Images.

Capítulo 9. 676: Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering EERC, University of California, Berkeley **698:** Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering EERC, University of California, Berkeley **700:** Tom Brakefield/Getty Images **709:** Cortesía del National Service for Earthquake Engineering EERC, University of California, Berkeley **720:** Malcom Fife/Getty Images.

Capítulo 10: 770: © David Sanger photography/Alamy **776:** Lopatinsky Vladislav/Shutterstock **812:** Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering EERC, University of California, Berkeley.

Capítulo 11. 816: LUSHPIX/UNLISTED IMAGES, INC. **833:** Lester Lefkowitz/Getty Images **834:** Digital Vision/Getty Images **887:** © Barry Goodno.

Capítulo 12. 900: Bob Scott/Getty Images **903:** Fotografía cortesía de Louis Geschwinder **906:** Don Farral/Getty Images **Prefacio:** Richard Weingardt Consultants Inc.

Prefacio

La **mecánica de materiales** es un tema básico de ingeniería que debe comprender quien tenga interés en la resistencia y el desempeño físico de las estructuras, sean hechas por el hombre o naturales. La materia incluye conceptos fundamentales como esfuerzos y deformaciones unitarias, deformaciones y desplazamientos, elasticidad e inelasticidad, energía de deformación y capacidad de carga. En estos conceptos se basa el diseño y análisis de una gran variedad de sistemas mecánicos y estructurales.

En el nivel universitario la mecánica de materiales por lo general se enseña durante los primeros años. La materia es un requisito para la mayoría de los alumnos de ingeniería mecánica, estructural, civil, biomédica, aeronáutica y aeroespacial. Además, muchos estudiantes de campos tan diversos como ciencia de materiales, ingeniería industrial, arquitectura e ingeniería agrícola también encuentran útil estudiar este tema.

Acerca de este libro

Los temas principales que se estudian en este libro son el análisis y diseño de elementos estructurales sometidos a tensión, compresión, torsión y flexión, incluidos los conceptos fundamentales mencionados en el primer párrafo. Otros temas de interés general son las transformaciones de esfuerzo y deformación unitaria, cargas combinadas, concentraciones de esfuerzo, deflexiones de vigas y estabilidad de columnas.

Entre los temas especializados se incluyen los siguientes: efectos térmicos, cargas dinámicas, elementos no prismáticos, vigas de dos materiales, centros de cortante, recipientes a presión y vigas estáticamente indeterminadas. Para mayor alcance y referencia ocasional, también se incluyen temas elementales como fuerzas cortantes, momentos flexionantes, centroides y momentos de inercia. Como ayuda para el lector estudiante, cada capítulo inicia con los *Aspectos generales del capítulo* y termina con un *Resumen y repaso del capítulo* en donde se destacan los puntos clave presentados en el capítulo para un repaso rápido (en preparación para exámenes sobre el material). Cada capítulo también empieza con una fotografía de un componente o de una estructura que ilustra los conceptos clave que se estudiarán en ese capítulo.

El libro incluye mucho más material del que se puede enseñar en un solo curso, de modo que los maestros tienen la oportunidad de seleccionar los temas que quieran exponer. Como una guía, algunos de los temas más especializados se identifican con una estrella en la tabla de contenido.

Se ha hecho un esfuerzo considerable para revisar y corregir las pruebas del texto para eliminar errores, pero si encontrara alguno, sin importar

lo trivial que sea, por favor notifíqueme por correo electrónico (bgoodno@ce.gatech.edu), para que podamos corregir cualquier error en la siguiente reimpresión.

Ejemplos

En todo el libro se presentan ejemplos para ilustrar los conceptos teóricos y mostrar cómo se pueden emplear en situaciones prácticas. En algunos casos se han agregado fotografías que muestran las estructuras o componentes reales en ingeniería para reforzar el vínculo entre teoría y aplicación. Los ejemplos varían en extensión de una o cuatro páginas, dependiendo de la complejidad del material que se ilustra. Cuando el énfasis recae sobre los conceptos, los ejemplos se resuelven en términos simbólicos para ilustrar mejor las ideas y cuando el énfasis se centra en la resolución de problemas, los ejemplos son de carácter numérico. En ejemplos seleccionados en todo el libro se ha agregado una representación gráfica de los resultados (por ejemplo, esfuerzos en vigas) para destacar la comprensión del estudiante de los resultados del problema.

Problemas

En todos los cursos de mecánica, la resolución de problemas es una parte importante del proceso de aprendizaje. Este libro ofrece más de 1000 problemas de tarea y de análisis en el aula. En esta séptima edición casi 40 por ciento de ellos son nuevos o han sido revisados de manera significativa. Los problemas se encuentran al final del cada capítulo de manera que se puedan encontrar con facilidad y no interrumpan la presentación del tema principal. Además, los problemas muy difíciles o extensos se indican con una o más estrellas (dependiendo del grado de dificultad) en el número del problema, alertando así a los estudiantes del tiempo necesario para su resolución. En general los problemas se presentan en orden de dificultad. Las respuestas para todos los problemas se encuentran cerca del final del libro.

Unidades

En los ejemplos y problemas se utilizan tanto el sistema internacional de unidades (SI) como el sistema inglés de uso acostumbrado en Estados Unidos. En el apéndice A se explican los dos sistemas y se da una tabla de factores de conversión. Para los problemas que comprenden resoluciones numéricas, los problemas impares están en unidades inglesas y los pares en unidades SI. Esta convención facilita saber de antemano qué sistema de unidades se usa en cualquier problema particular. Además, en el apéndice E se han agregado tablas que contienen propiedades de perfiles estructurales de acero tanto en unidades inglesas como en SI, de manera que la resolución de análisis de vigas y de los ejemplos de diseño y los problemas al final de cada capítulo se pueda llevar a cabo en unidades inglesas o SI.

Referencias y notas históricas

Inmediatamente después del último capítulo del libro se encuentran las referencias y notas históricas que consisten en fuentes originales para el tema

en cuestión más información biográfica breve acerca de los científicos, ingenieros y matemáticos precursores, fundadores del campo de la mecánica de materiales. Un índice onomástico facilita consultar cualquiera de estos personajes históricos.

Apéndices

El material de referencia aparece en los apéndices al final del libro. Gran parte del material se da en tablas: propiedades de áreas planas, propiedades de perfiles estructurales de acero, propiedades de la madera estructural, deflexiones y pendientes de vigas y propiedades de materiales (apéndices D a H, respectivamente).

En cambio, los apéndices A y B son descriptivos; el primero da una descripción detallada de los sistemas de unidades SI e inglés y el segundo presenta la metodología para resolver problemas en mecánica. En el último se abordan temas como consistencia dimensional y cifras significativas. Por último, el apéndice C, de referencia rápida, proporciona una lista de las fórmulas matemáticas de uso común.

S.P. Timoshenko (1878-1972) y J.M. Gere (1925-2008)

Muchos lectores de este libro reconocerán el nombre de Stephen P. Timoshenko que probablemente sea el más famoso en el campo de la mecánica aplicada. Timoshenko es reconocido en general como el precursor más extraordinario del mundo en mecánica aplicada. Contribuyó con muchas ideas y conceptos nuevos y se hizo famoso tanto por su erudición como por su enseñanza. A través de sus numerosos libros ejerció un efecto profundo en la enseñanza de la mecánica no sólo en este país sino en cualquier parte donde se estudie la mecánica. Timoshenko fue maestro y mentor de James Gere y estimuló la primera edición de este libro de la autoría de James M. Gere, publicada en 1972; la segunda edición y cada subsiguiente de este libro fueron escritas por James Gere durante el transcurso de su larga y distinguida carrera como autor, educador e investigador en la Stanford University. James Gere empezó sus estudios de doctorado en la Stanford University en 1952, de donde se jubiló como profesor en 1988 después de haber escrito éste y otros ocho libros bien conocidos sobre mecánica e ingeniería estructural y sísmica. Permaneció activo en la Stanford University como Profesor Emérito hasta su deceso en enero de 2008.

Al final del libro en la primera referencia se presenta una biografía breve de Timoshenko y en la edición de agosto de 2007 de la *revista STRUCTURE* aparece un artículo intitulado *"Stephen P. Timoshenko: Father of Engineering Mechanics in the U.S."* de Richard G. Weingardt, P.E. Este artículo proporciona una perspectiva histórica excelente sobre éste y muchos otros libros sobre ingeniería mecánica escritos por estos autores.

Agradecimientos

Es imposible agradecer a todos los que contribuyeron de alguna manera en este libro, pero tengo una gran deuda con mis profesores de la Stanford University, en especial con mi mentor, amigo y autor principal, James M. Gere.

También estoy en deuda con los muchos maestros de mecánica y los revisores del libro que ayudaron a conformarlos en sus varias ediciones al paso de los años. Con cada nueva edición, sus consejos y sugerencias han resultado en mejoras significativas tanto en el contenido como en la pedagogía.

También quiero agradecer a mis colegas de ingeniería estructural y mecánica del Georgia Institute of Technology: James Craig, Reggie DesRoches, Mulalo Doyoyo, Bruce Ellingwood, Leroy Emkin, Rami Haj-Ali, Larry Jacobs, Larry Kahn, Kim Kurtis, Roberto Leon, Yang Wang, Don White, Kenneth (Mac) Will, Arash Yavari y Abdul Zureick. Un agradecimiento especial para Jim Craig, Rami Haj-Ali, Larry Jacobs, Larry Kahn, Roberto Leon, Don White, Mac Will y Abdul Zureick, quienes me dieron valiosos consejos sobre varios aspectos de las revisiones y adiciones que condujeron a la séptima edición. Es un privilegio trabajar con todos estos educadores y poder aprender de ellos en las interacciones y discusiones casi diarias acerca de la ingeniería estructural y mecánica en el contexto de la investigación y educación superior.

Dos de mis asistentes de investigación, el señor Kanoknart Leelardcharoen y la señora Jee-Eun Hur, aportaron una ayuda invaluable al evaluar y resolver muchos de los problemas nuevos y revisados. Su atención al detalle fue una contribución importante para esta edición.

Los aspectos de edición y producción del libro siempre estuvieron en manos habilidosas y experimentadas, gracias al personal talentoso y erudito de Cengage Learning (antes Thompson Learning). Su objetivo fue el mismo que el mío, producir la séptima edición mejor posible de este libro, sin comprometer ningún aspecto de éste.

La gente con la que he tenido contacto personal en Cengage Learning son Christopher Carson, Director, del Global Engineering Program Cengage Learning, quien, junto con Jim Gere, ayudaron a involucrarme y luego me guiaron en el proyecto; Hilda Gowans, Senior Developmental Editor en el área de Ingeniería de Cengage Learning, quien siempre estuvo disponible para darme información y ánimo; Nicola Winstanley quien administró todos los aspectos de la nueva selección de fotografías; Andrew Adams, quien elaboró las cubiertas; Peter Papayanakis, que diseñó el interior del libro y Lauren Betsos, Global Marketing Services Coordinator, que desarrolló material promocional de apoyo para el libro. Quiero de manera personal reconocer el trabajo de Rose Kerman de RPK Editorial Services, que editó el manuscrito y compuso las páginas. A cada uno de estos individuos les expreso mi más sincero agradecimiento no sólo por un trabajo bien realizado, sino también por la manera amistosa y considerada de hacerlo.

Estoy muy agradecido por la paciencia y el aliento proporcionados por mi familia, en especial mi esposa, Lana, durante todo este proyecto.

Por último, me siento muy honrado y complacido de estar involucrado en este proyecto, por la invitación de mi mentor y amigo desde hace 30 años, Jim Gere, que amplia este libro hacia la marca de los 40 años. Yo también estoy comprometido con la excelencia continua de este libro y agradeceré todo tipo de comentarios y sugerencias. Por favor siéntase en libertad de expresarme sus comentarios críticos en *bgoodno@ce.gatech.edu.*

BARRY J. GOODNO
Atlanta, Georgia

Símbolos



A	área
A_f, A_w	área de un patín; área del alma
a, b, c	dimensiones, distancias
C	centroide, fuerza de comprensión, constante de integración
c	distancia del eje neutro a la superficie exterior de una viga
D	diámetro
d	diámetro, dimensión, distancia
E	módulo de elasticidad
E_r, E_t	módulo de elasticidad reducido; módulo de elasticidad tangente
e	excentricidad, dimensión, distancia, cambio de volumen unitario (dilatación)
F	fuerza
f	flujo cortante, factor de forma para flexión plástica, flexibilidad, frecuencia (Hz)
f_T	flexibilidad torsional de una barra
G	módulo de elasticidad en cortante
g	aceleración de la gravedad
H	altura, distancia, fuerza o reacción horizontal, caballo de potencia
h	altura, dimensiones
I	momento de inercia (o segundo momento) de un área plana
I_x, I_y, I_z	momentos de inercia con respecto a los ejes x, y y z
I_{x1}, I_{y1}	momentos de inercia con respecto a los ejes x_1 y y_1 (ejes girados)
I_{xy}	producto de inercia con respecto a los ejes xy
I_{x1y1}	producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 (ejes girados)
I_P	momento polar de inercia
I_1, I_2	momentos principales de inercia
J	constante de torsión
K	factor de concentración de esfuerzo, módulo de elasticidad volumétrico, factor de longitud efectiva para una columna
k	constante de resorte, rigidez, símbolo para $\sqrt{P/EI}$

k_T	rigidez a la torsión de una barra
L	longitud, distancia
L_E	longitud efectiva de una columna
ln, log	logaritmo natural (base e); logaritmo común (base 10)
M	momento flexionante, par, masa
M_P, M_Y	momento plástico para una viga; momento de fluencia para una viga
m	momento por unidad de longitud, masa por unidad de longitud
N	fuerza axial
n	factor de seguridad, entero, revoluciones por minuto (rpm)
O	origen de coordenadas
O'	centro de curvatura
P	fuerza, carga concentrada, potencia
P_{perm}	carga permisible (o carga de trabajo)
P_{cr}	carga crítica para una columna
P_p	carga plástica para una estructura
P_r, P_t	carga de módulo reducido para una columna; carga de módulo tangente para una columna
P_Y	carga de fluencia para una estructura
p	presión (fuerza por unidad de área)
Q	fuerza, carga concentrada, momento estático de un área plana
q	intensidad de carga distribuida (fuerza por unidad de distancia)
R	reacción, radio
r	radio, radio de giro $(r = \sqrt{I/A})$
S	módulo de sección de la sección transversal de una viga, centro de cortante
s	distancia, distancia a lo largo de una curva
T	fuerza de tensión, par de torsión, temperatura
T_P, T_Y	par de torsión plástico; par de torsión de fluencia
t	espesor, tiempo, intensidad de par de torsión (par de torsión por unidad de distancia)
t_{f}, t_{w}	espesor del patín; espesor del alma
U	energía de deformación
u	densidad de energía de deformación (energía de deformación por unidad de volumen)
u_r, u_t	módulo de resistencia; módulo de tenacidad
V	fuerza cortante, volumen, fuerza vertical o reacción
v	deflexión de una viga, velocidad
v', v'', etc.	dv/dx, d^2v/dx^2, etc.
W	fuerza, peso, trabajo
w	carga por unidad de área (fuerza por unidad de área)
x, y, z	ejes rectangulares (origen en el punto O)
x_c, y_c, z_c	ejes rectangulares (origen en el centroide C)

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	coordenadas del centroide
Z	módulo plástico de la sección transversal de una viga
α	ángulo, coeficiente de dilatación térmica, razón adimensional
β	ángulo, razón adimensional, constante de resorte, rigidez
β_R	rigidez a la rotación de un resorte
γ	deformación unitaria por esfuerzo cortante, densidad de peso (peso por unidad de volumen)
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	deformaciones unitarias por esfuerzos cortantes en los planos *xy*, *yz* y *zx*
$\gamma_{x_1y_1}$	deformación unitaria por esfuerzo cortante con respecto a los ejes x_1y_1 (ejes girados)
γ_θ	deformación por esfuerzo cortante para ejes inclinados
δ	deflexión de una viga, desplazamiento, alargamiento de una barra o un resorte
ΔT	diferencial de temperatura
δ_P, δ_Y	desplazamiento plástico, desplazamiento de fluencia
ϵ	deformación unitaria normal
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	deformaciones unitarias normales en las direcciones *x*, *y* y *z*
$\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}$	deformaciones unitarias normales en las direcciones x_1 y y_1 (ejes girados)
ϵ_θ	deformación unitaria normal para ejes inclinados
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	deformaciones unitarias normales principales
ϵ'	deformación unitaria lateral en esfuerzo uniaxial
ϵ_T	deformación unitaria térmica
ϵ_Y	deformación unitaria de fluencia
θ	ángulo, ángulo de rotación del eje de una viga, razón de torsión de una barra en torsión (ángulo de torsión por unidad de longitud)
θ_p	ángulo con respecto a un plano principal o a un eje principal
θ_s	ángulo con respecto a un plano de esfuerzo cortante máximo
κ	curvatura ($\kappa = 1/\rho$)
λ	distancia, acortamiento por curvatura
ν	relación de Poisson
ρ	radio, radio de curvatura ($\rho = 1/\kappa$), distancia radial en coordenadas polares, densidad de masa (masa por unidad de volumen)
σ	esfuerzo normal
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	esfuerzos normales sobre planos perpendiculares a los ejes *x*, *y* y *z*
$\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}$	esfuerzos normales sobre los planos perpendiculares a los ejes x_1y_1 (ejes girados)
σ_θ	esfuerzo normal sobre un plano inclinado
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	esfuerzos normales principales
σ_{perm}	esfuerzo permisible (o esfuerzo de trabajo)
σ_{cr}	esfuerzo crítico para una columna ($\sigma_{cr} = P_{cr}/A$)
σ_{pl}	esfuerzo en el límite de proporcionalidad
σ_r	esfuerzo residual
σ_T	esfuerzo térmico
σ_U, σ_Y	esfuerzo último; esfuerzo de fluencia

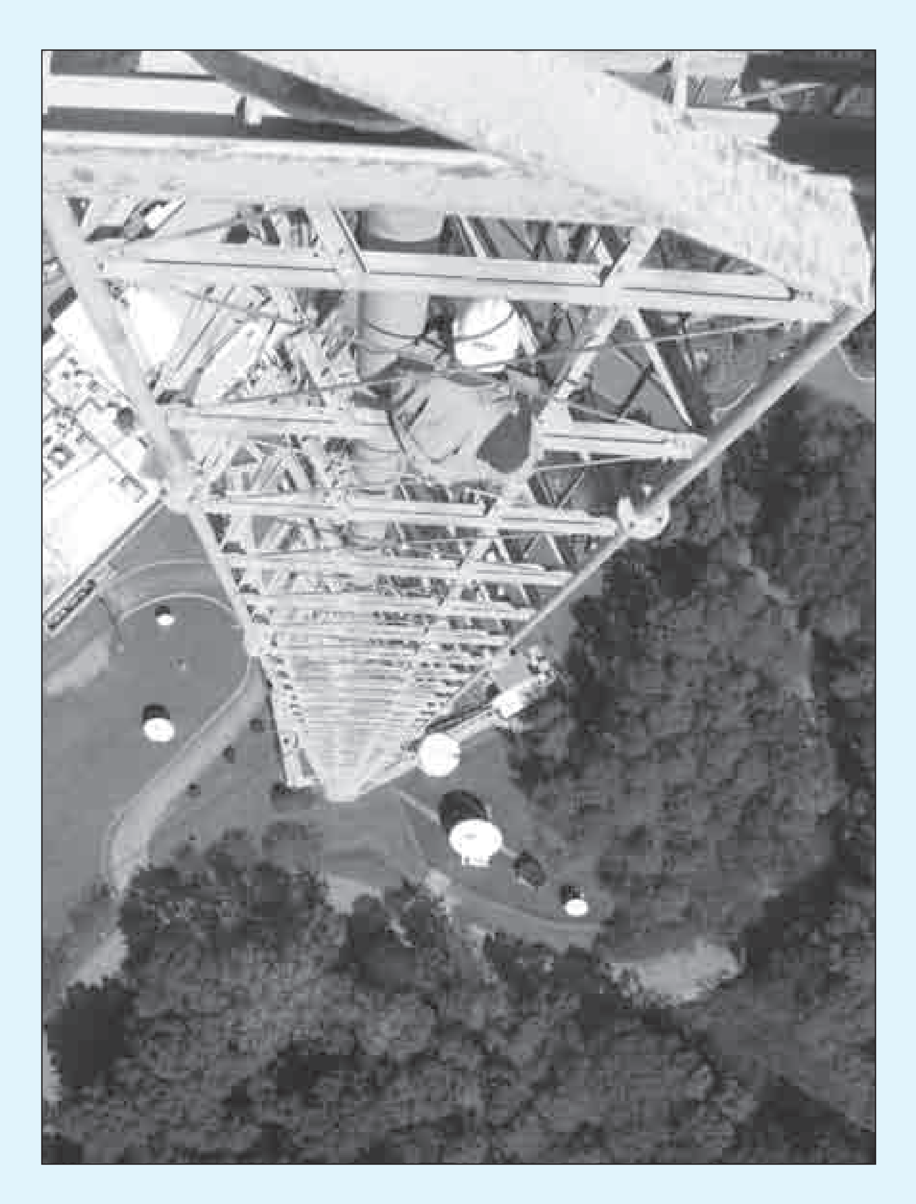
τ	esfuerzo cortante
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares a los ejes x, y y z actuando paralelos a los ejes y, z y x
$\tau_{x_1y_1}$	esfuerzo cortante sobre un plano perpendicular al eje x_1 y actuando paralelo al eje y_1 (ejes girados)
τ_θ	esfuerzo cortante sobre un plano inclinado
τ_{perm}	esfuerzo permisible (o esfuerzo de trabajo) en cortante
τ_U, τ_Y	esfuerzo último en cortante; esfuerzo de fluencia en cortante
ϕ	ángulo, ángulo de torsión de una barra en torsión
ψ	ángulo, ángulo de rotación
ω	velocidad angular, frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$)

✶Una estrella junto a un número de sección indica que se trata de un tema especializado o avanzado. Una o más estrellas anexas a un número de problema indican un nivel creciente de dificultad en su resolución.

Alfabeto griego

Α	α	Alfa	Ν	ν	Ni
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gama	Ο	o	Ómicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Épsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	ϕ	Fi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Ji
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mi	Ω	ω	Omega

Mecánica de materiales



Esta torre de telecomunicaciones es un conjunto de muchos elementos que trabajan principalmente en tensión y compresión.

1

Tensión, compresión y cortante

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presenta una introducción a la mecánica de materiales, que analiza los *esfuerzos,* las *deformaciones unitarias* y los *desplazamientos* en barras de diferentes materiales sometidas a cargas axiales aplicadas en los centroides de sus secciones transversales. Aprenderemos acerca del *esfuerzo normal* (σ) y la *deformación unitaria normal* (ϵ) en materiales empleados en aplicaciones estructurales, luego identificaremos las propiedades clave de diversos materiales, como el módulo de elasticidad (E), la fluencia (σ_y) y los esfuerzos de rotura (σ_u), a partir de gráficas del esfuerzo (σ) en función de la deformación unitaria (ϵ). También graficaremos el esfuerzo cortante (τ) en función de la deformación unitaria por esfuerzo cortante (γ) e identificaremos el coeficiente de elasticidad en cortante (G). Si estos materiales sólo se desempeñan en el modo elástico, el esfuerzo y la deformación unitaria están relacionadas por la ley de Hooke para esfuerzo normal y deformación unitaria normal ($\sigma = E \cdot \epsilon$) y también para el esfuerzo cortante y la deformación unitaria en cortante ($\tau = G \cdot \gamma$). Veremos que los cambios en las dimensiones laterales y en el volumen dependen de la relación de Poisson (ν). De hecho, las propiedades de los materiales E, G y ν, están directamente relacionadas entre sí y no son propiedades independientes del material.

El ensambaje de barras para formar estructuras (como armaduras) nos lleva a considerar los esfuerzos cortante promedio (τ) y de aplastamiento (σ_b) en sus conexiones, así como los esfuerzos normales que actúan sobre el área neta de la sección transversal (si está en tensión) o sobre toda el área de la sección transversal (si está en compresión). Si restringimos los esfuerzos máximos en cualquier punto a valores *permisibles* mediante el uso de factores de seguridad, podemos identificar los niveles permisibles de las cargas axiales para sistemas simples, como cables y barras. Los *factores de seguridad* relacionan la resistencia real con la requerida de los elementos estructurales, y consideran una variedad de incertidumbres, como variaciones en las propiedades del material y la probabilidad de una sobrecarga accidental. Por último, consideraremos el *diseño*: que es el proceso iterativo mediante el cual se determina el tamaño apropiado de los elementos estructurales para cumplir con una variedad de *requisitos* tanto de *resistencia* como de *rigidez* para una estructura particular sometida a una variedad de cargas diferentes.

El capítulo 1 está organizado como sigue:

1.1 INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE MATERIALES

La **mecánica de materiales** es una rama de la mecánica aplicada que trata del comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a diversas cargas. Otros nombres para este campo de estudio son *resistencia de materiales* y *mecánica de los cuerpos deformables*. Los cuerpos sólidos considerados en este libro incluyen barras sometidas a cargas axiales, ejes en torsión, vigas en flexión y columnas en compresión.

El objetivo principal de la mecánica de materiales es determinar los esfuerzos, las deformaciones unitarias y los desplazamientos en estructuras y sus componentes debidas a las cargas que actúan sobre ellas. Si podemos determinar estas cantidades para todos los valores de las cargas incluyendo las que causan la falla, tendremos una representación completa del comportamiento mecánico de esas estructuras.

Comprender el comportamiento mecánico es esencial para el diseño seguro de todos los tipos de estructuras, ya sean aeroplanos y antenas, edificios y puentes, máquinas y motores o barcos y naves espaciales. Esta es la razón por la cual la mecánica de materiales es una disciplina básica en muchos campos de la ingeniería. La estática y la dinámica también son esenciales, pero estos temas tratan principalmente con las fuerzas y los movimientos asociados con partículas y cuerpos rígidos. En la mecánica de materiales vamos un paso más allá al analizar los esfuerzos y las deformaciones unitarias dentro de cuerpos reales; es decir, cuerpos de dimensiones finitas que se deforman con cargas. Para determinar los esfuerzos y las deformaciones unitarias, empleamos las propiedades físicas de los materiales, así como numerosas leyes y conceptos teóricos.

Los análisis teóricos y los resultados experimentales desempeñan papeles igualmente importantes en la mecánica de materiales. Empleamos teorías para deducir fórmulas y ecuaciones para predecir el comportamiento mecánico, pero no se pueden usar esas expresiones en un diseño práctico, a menos que se conozcan las propiedades físicas de los materiales. Esas propiedades se conocen sólo después de que se han efectuado experimentos cuidadosos en el laboratorio. Además, no todos los problemas prácticos facilitan al análisis teórico y en esos casos las pruebas físicas son una necesidad.

El desarrollo histórico de la mecánica de materiales es una mezcla fascinante tanto de teoría como de experimentación, la teoría ha señalado el camino para obtener resultados útiles en algunos casos y la experimentación lo ha hecho en otros. Algunos personajes famosos como Leonardo da Vinci (1452-1519) y Galileo Galilei (1564-1642) realizaron experimentos para determinar la resistencia de alambres, barras y vigas, si bien no desarrollaron teorías adecuadas (con respecto a las normas actuales) para explicar los resultados de sus pruebas. En contraste, el famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783) desarrolló la teoría matemática de las columnas y en 1744 calculó la carga crítica de una columna, mucho antes que existiera alguna evidencia experimental que demostrara la importancia de sus resultados. Sin ensayos apropiados para apoyar sus teorías, los resultados de Euler permanecieron sin usarse durante más de cien años, aunque en la actualidad constituyen la base del diseño y análisis de la mayoría de las columnas.*

---

*La historia de la mecánica de materiales, iniciando con Leonardo da Vinci y Galileo Galilei, se encuentra en las referencias 1-1, 1-2 y 1-3.

Problemas

Al estudiar la mecánica de materiales descubrirá que el tema está dividido de manera natural en dos partes: primero, en comprender el desarrollo de los conceptos y segundo, aplicar estos conceptos a situaciones prácticas. Lo primero se logra estudiando las deducciones, explicaciones y ejemplos que aparecen en cada capítulo, y lo segundo se logra resolviendo los problemas al final de cada capítulo. Algunos de los problemas son de carácter numérico y otros son simbólicos (o algebraicos).

Una ventaja de los *problemas numéricos* es que las magnitudes de todas las cantidades son evidentes en cada etapa de los cálculos, lo que permite observar si los valores son razonables o no. La ventaja principal de los *problemas simbólicos* es que conducen a fórmulas de propósito general. Una fórmula presenta las variables que afectan los resultados finales; por ejemplo, en la solución es posible cancelar una cantidad, un hecho que no sería evidente en una solución numérica. Además, una solución algebraica muestra la manera en que cada variable afecta los resultados, como cuando una variable aparece en el numerador y otra en el denominador. Además, una solución simbólica permite comprobar las dimensiones en cada etapa del trabajo.

Por último, la razón más importante para resolver problemas de manera algebraica es obtener una fórmula general que se pueda emplear para muchos problemas diferentes. En contraste, una solución numérica sólo se aplica a un conjunto de circunstancias. Como los ingenieros deben ser expertos en las dos clases de soluciones, usted encontrará una mezcla de problemas numéricos y simbólicos en todo el libro.

Los problemas numéricos requieren trabajar con unidades específicas de medida. De acuerdo con la práctica actual de la ingeniería moderna, en este libro se utiliza tanto el Sistema Internacional de unidades (SI) como el sistema inglés (acostumbrado en Estados Unidos). En el apéndice A se encuentra una descripción de los dos sistemas, donde también se encuentran muchas tablas útiles, incluida una de factores de conversión.

Todos los problemas se localizan al final de los capítulos con sus números respectivos y los números subsiguientes identifican las secciones a que pertenecen. En el caso de los problemas que requieren soluciones numéricas, los problemas impares están planteados en unidades inglesas y los pares en unidades SI.

En el apéndice B se describen con detalle las técnicas para resolver problemas, además de una lista de procedimientos ingenieriles sólidos. El apéndice B incluye secciones sobre homogeneidad dimensional y cifras significativas. Estos temas son especialmente importantes, debido a que cada ecuación debe ser homogénea dimensionalmente y cada resultado numérico debe expresarse con el número adecuado de dígitos significativos. En este libro los resultados numéricos finales, en general, se presentan con tres dígitos significativos, cuando un número inicia con los dígitos 2 al 9, y con cuatro dígitos significativos cuando un número principia con el dígito 1. Con frecuencia los valores intermedios se registran con dígitos adicionales para evitar perder precisión debido al redondeo de números.

1.2 ESFUERZO NORMAL Y DEFORMACIÓN UNITARIA NORMAL

Los conceptos fundamentales en mecánica de materiales son el **esfuerzo** y la **deformación unitaria**. Estos conceptos se pueden ilustrar en su forma más elemental considerando una barra prismática sometida a fuerzas axiales. Una **barra prismática** es un elemento estructural recto que tiene la misma sección transversal en toda su longitud y una **fuerza axial** es una carga dirigida a lo largo del eje del elemento, lo que resulta en esfuerzos de tensión o de compresión en la barra. En la figura 1.1 se muestran ejemplos donde la barra de arrastre es un elemento prismático en tensión y el puntal del tren de aterrizaje es un elemento en compresión. Otros ejemplos son los elementos de la armadura de un puente, las bielas en motores de automóviles, los rayos de las ruedas de bicicletas, las columnas en edificios y los puntales de las alas de aeroplanos pequeños.

Para fines explicativos, consideremos la barra de arrastre de la figura 1.1 y aislemos un segmento de ella como un cuerpo libre (figura 1.2a). Al dibujar este diagrama de cuerpo libre no tomamos en cuenta el peso de la barra misma y suponemos que las únicas fuerzas activas son las fuerzas axiales P en los extremos. Luego, consideramos dos vistas de la barra; la primera muestra la misma barra *antes* de la aplicación de las cargas (figura 1.2b) y la segunda la muestra *después* de aplicar las cargas (figura 1.2c). Observe que la longitud original de la barra se denota con la letra L y el incremento en longitud debido a las cargas se denota con la letra griega δ (delta).

Las fuerzas internas en la barra quedan expuestas si hacemos un corte imaginario por la barra en la sección mn (figura 1.2c). Como esta sección se toma perpendicularmente al eje longitudinal de la barra, se denomina **sección transversal.**

Ahora aislamos la parte de la barra a la izquierda de la sección transversal mn como un cuerpo libre (figura 1.2d). En el extremo derecho de este cuerpo libre (sección mn) mostramos la acción de la parte eliminada de la barra (es decir, la parte a la derecha de la sección mn) sobre la parte restante. Esta acción consiste en *esfuerzos* distribuidos en forma continua que actúan sobre toda la sección transversal y la fuerza axial P que actúa en la sección transversal es la *resultante* de estos esfuerzos. (La fuerza resultante se muestra con una línea discontinua en la figura 1.2d.)

El **esfuerzo** tiene unidades de fuerza por unidad de área y se denota por la letra griega σ (sigma). En general, los esfuerzos σ que actúan sobre una superficie plana pueden ser uniformes en toda el área o bien variar en intensidad de un punto a otro. Supongamos que los esfuerzos que actúan sobre

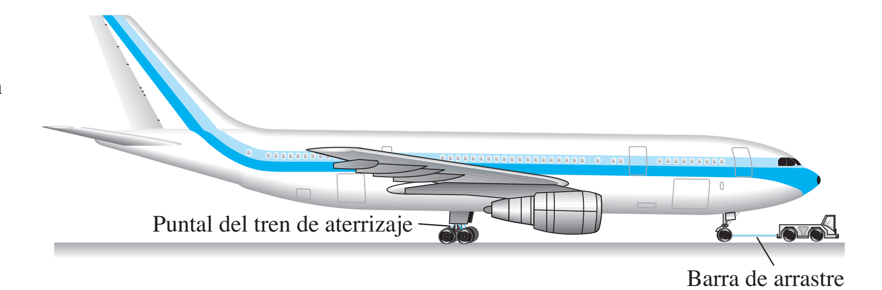


FIGURA 1.1 Elementos estructurales sometidos a cargas axiales. (La barra de arrastre está en tensión y el puntal del tren de aterrizaje está en compresión.)

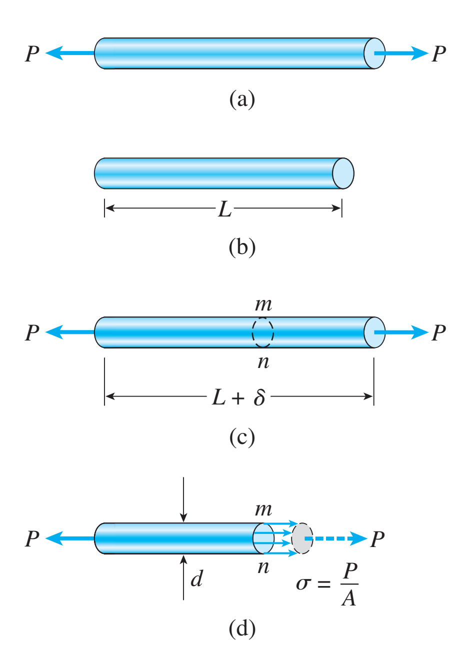


FIGURA 1.2 Barra prismática en tensión: (a) diagrama de cuerpo libre de un segmento de la barra, (b) segmento de la barra antes de la aplicación de las cargas, (c) segmento de la barra después de la aplicación de las cargas y (d) esfuerzos normales en la barra.

la sección transversal *mn* (figura 1.2d) *están distribuidos uniformemente* sobre el área. Entonces la resultante de estos esfuerzos debe ser igual a la magnitud del esfuerzo por el área de la sección transversal A de la barra, es decir, $P = \sigma A$. Por tanto, obtenemos la expresión siguiente para la magnitud de los esfuerzos:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.1}$$

Esta ecuación expresa la intensidad de un esfuerzo uniforme en una barra prismática con sección transversal arbitraria cargada axialmente.

Cuando la barra es estirada por las fuerzas P, los esfuerzos son **esfuerzos de tensión;** si se invierte la dirección de las fuerzas, la barra se comprime y tenemos **esfuerzos de compresión**. Puesto que los esfuerzos actúan en una dirección perpendicular a la superficie cortada, se denominan **esfuerzos normales**. Y, por tanto, los esfuerzos normales pueden ser de tensión o de compresión. Más adelante, en la sección 1.6, analizaremos otro tipo de esfuerzo, denominado *esfuerzo cortante*, que actúa paralelo a la superficie.

Cuando se requiere una **convención de signos** para los esfuerzos normales, se acostumbra definir a los esfuerzos de tensión como positivos y a los esfuerzos de compresión como negativos.

Puesto que el esfuerzo normal σ se obtiene dividiendo la fuerza axial entre el área de la sección transversal, tiene **unidades** de fuerza por unidad de área. Cuando se emplean unidades inglesas, el esfuerzo suele expresarse en libras por pulgada cuadrada (psi) o kips por pulgada cuadrada (ksi).* Por ejemplo, suponga que la barra de la figura 1.2 tiene un diámetro d de 2.0 in

*Un kip, o kilolibra, es igual a 1000 lb.

y que la carga P tiene una magnitud de 6 kips. Entonces el esfuerzo en la barra es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{6\text{ k}}{\pi(2.0\text{ in})^2/4} = 1.91\text{ ksi (o 1910 psi)}$$

En este ejemplo el esfuerzo es de tensión o positivo.

Cuando se utilizan unidades SI, la fuerza se expresa en newtons (N) y el área en metros cuadrados (m^2). En consecuencia, el esfuerzo tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), es decir, pascales (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad de esfuerzo tan pequeña que es necesario trabajar con múltiplos grandes, usualmente con el megapascal (MPa).

Para demostrar que un pascal es en efecto pequeño, sólo tenemos que observar que se requieren casi 7000 pascales para igualar un psi.* Como un ejemplo, el esfuerzo en la barra descrita en el ejemplo anterior (1.91 ksi) se convierte en 13.2 MPa, que es igual a 13.2×10^6 pascales. Aunque no se recomienda emplearlo en el SI, algunas veces el esfuerzo se expresa en newtons por milímetro cuadrado (N/mm^2), que es una unidad igual al megapascal (MPa).

Limitaciones

La ecuación $\sigma = P/A$ sólo es válida si el esfuerzo está uniformemente distribuido sobre la sección transversal de la barra. Esta condición se cumple si la fuerza axial P actúa en el centroide del área de la sección transversal, como se demuestra más adelante en esta sección. Cuando la carga P no actúa en el centroide, se tendrá una flexión de la barra y se requiere de un análisis más complicado (consulte las secciones 5.12 y 11.5). Sin embargo, en este libro (así como en la práctica común) se entiende que las fuerzas axiales se aplican en los centroides de las secciones transversales a menos que se indique otra cosa.

La condición de esfuerzo uniforme representada en la figura 1.2d se tiene en toda la longitud de la barra, excepto cerca de los extremos. La distribución del esfuerzo en el extremo de la barra depende de cómo se transmite la carga P a la barra. Si sucede que la carga está uniformemente distribuida sobre el extremo, entonces el patrón de esfuerzos será el mismo en otras partes. Sin embargo, es más probable que la carga se transmita mediante un pasador o un perno, produciendo esfuerzos muy localizados denominados **concentraciones de esfuerzos.**

Una posibilidad se ilustra mediante la barra de ojo de la figura 1.3. En este caso las cargas P se transmiten a la barra mediante pasadores que pasan por los agujeros (u ojos) en los extremos de la barra. Por tanto, las fuerzas mostradas en la figura en realidad son las resultantes de las presiones de apoyo entre los pasadores y la barra de ojo, y la distribución de esfuerzo alrededor de los agujeros es muy compleja. No obstante, conforme nos alejamos de los extremos hacia el centro de la barra, la distribución del esfuerzo gradualmente tiende a la distribución uniforme representada en la figura 1.2d.

Como regla práctica, se puede emplear la fórmula $\sigma = P/A$, con buena precisión en cualquier punto dentro de una barra prismática que esté alejado

*Los factores de conversión entre las unidades inglesas y las unidades SI, se encuentran en la tabla A.5 del apéndice A.

FIGURA 1.3 Barra de ojo hecha de acero sometida a cargas de tensión P.

de la concentración de esfuerzos al menos una distancia igual a la dimensión lateral mayor de la barra. En otras palabras, la distribución del esfuerzo en la barra de ojo de la figura 1.3 es uniforme a distancias b o mayores desde los extremos agrandados, donde b es el ancho de la barra, y la distribución del esfuerzo en la barra prismática de la figura 1.2 es uniforme a distancias d o mayores desde los extremos, donde d es el diámetro de la barra (figura 1.2d). En la sección 2.10 se analizan con más detalle las concentraciones de esfuerzos producidas por cargas axiales.

Por supuesto, aun cuando el esfuerzo *no* esté distribuido uniformemente, la ecuación $\sigma = P/A$ es de utilidad debido a que proporciona el esfuerzo normal *promedio* sobre la sección transversal.

Deformación unitaria normal

Como ya vimos, una barra recta cambiará su longitud al cargarla axialmente, haciéndose más larga en tensión y más corta en compresión. Por ejemplo, considere de nuevo la barra prismática de la figura 1.2. El alargamiento δ de esta barra (figura 1.2c) es el resultado acumulativo del alargamiento de todos los elementos del material en todo el volumen de la barra. Supongamos que el material es el mismo en toda la barra. Entonces, si consideramos la mitad de la barra (longitud $L/2$), tendrá un alargamiento igual a $\delta/2$ y si consideramos un cuarto de la barra, tendrá un alargamiento igual a $\delta/4$.

En general, el alargamiento de un segmento es igual a su longitud dividida entre la longitud total L y multiplicada por el alargamiento δ. Por tanto, una longitud unitaria de la barra tendrá un alargamiento igual a $1/L$ por δ. Esta cantidad se denomina *alargamiento por unidad de longitud*, o **deformación unitaria** y se denota con la letra griega ϵ (épsilon). Podemos observar que la deformación unitaria está dada por la ecuación

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{1.2}$$

Si la barra está en tensión, la deformación unitaria se denomina **deformación unitaria por tensión**, que representa un alargamiento o estiramiento del material. Si la barra está en compresión, la deformación unitaria es una **deformación unitaria por compresión** y la barra se acorta. En general, la deformación unitaria por tensión se considera positiva y la deformación unitaria por compresión como negativa. La deformación unitaria ϵ se denomina **deformación unitaria normal** debido a que está asociada con los esfuerzos normales.

Como la deformación unitaria normal es la razón de dos longitudes, es una **cantidad adimensional,** es decir, no tiene unidades. Por tanto, la deformación unitaria se expresa simplemente como un número, independiente de cualquier sistema de unidades. Los valores numéricos de la deformación unitaria suelen ser muy pequeños, debido a que las barras hechas de material estructural sólo experimentan cambios pequeños de longitud cuando se someten a cargas.

Como ejemplo, considere una barra de acero con longitud L igual a 2.0 m. Al ser sometida a una carga de tensión muy pesada, podría alargarse 1.4 mm, lo que significa que la deformación unitaria es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.4 \text{ mm}}{2.0 \text{ m}} = 0.0007 = 700 \times 10^{-6}$$

En la práctica, las unidades originales de δ y L algunas veces se dan en la deformación unitaria misma y entonces ésta se registra en formas como mm/m, μm/m e in/in. Por ejemplo, la deformación unitaria ϵ en el ejemplo anterior podría expresarse como 700 μm/m o 700×10^{-6} in/in. Además, en ocasiones la deformación unitaria se expresa como un porcentaje, en especial cuando es grande. (En el ejemplo anterior, la deformación es 0.07 por ciento).

Esfuerzo uniaxial y deformación unitaria uniaxial

Las definiciones de esfuerzo normal y deformación unitaria normal se basan en consideraciones puramente estáticas y geométricas, lo que significa que las ecuaciones (1.1) y (1.2) se pueden emplear para cargas de cualquier magnitud y para cualquier material. El requisito principal es que la deformación de la barra sea uniforme en todo su volumen, lo que a su vez requiere que la barra sea prismática, que las cargas pasen por los centroides de las secciones transversales y que el material sea **homogéneo** (es decir, que sea el mismo en todas las partes de la barra). El estado de esfuerzo y de deformación unitaria resultantes se denomina **esfuerzo uniaxial y deformación unitaria uniaxial.**

Más adelante en la sección 2.6 se darán explicaciones adicionales del esfuerzo uniaxial, incluyendo esfuerzos en otras direcciones además de la dirección longitudinal de la barra. En el capítulo 7 también analizaremos estados de esfuerzos más complicados, como el esfuerzo biaxial y el esfuerzo plano.

Línea de acción de las fuerzas axiales para una distribución uniforme del esfuerzo

En todo el análisis anterior del esfuerzo y de la deformación unitaria en una barra prismática supusimos que el esfuerzo normal σ estaba distribuido uniformemente sobre su sección transversal. Ahora demostraremos que esta condición se cumple si la línea de acción de las fuerzas axiales pasa por el centroide del área de la sección transversal.

Considere una barra prismática con sección transversal arbitraria sometida a fuerzas axiales P que producen esfuerzos σ distribuidos uniformemente (figura 1.4a). Sea p_1 el punto en la sección transversal donde la línea de acción de las fuerzas interseca la sección transversal (figura 1.4b). Si trazamos un conjunto de ejes xy en el plano de la sección transversal y denotamos las coordenadas del punto p_1 con $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Para determinar esas coordenadas, observamos que los momentos M_x y M_y de la fuerza P con respecto a los ejes x y y, respectivamente, deben ser iguales a los momentos correspondientes de los esfuerzos distribuidos uniformemente.

Los momentos de la fuerza P son

$$M_x = P\bar{y} \qquad M_y = -P\bar{x} \tag{a,b}$$

en donde un momento se considera positivo cuando su vector (empleando la regla de la mano derecha) actúa en la dirección positiva del eje correspondiente.*

*Para visualizar la regla de la mano derecha, imagine que toma un eje de coordenadas con la mano derecha, de tal manera que los dedos estén alrededor del eje y el dedo pulgar apunta en la dirección positiva del eje. Entonces un momento es positivo si actúa con respecto al eje en la misma dirección de los dedos.

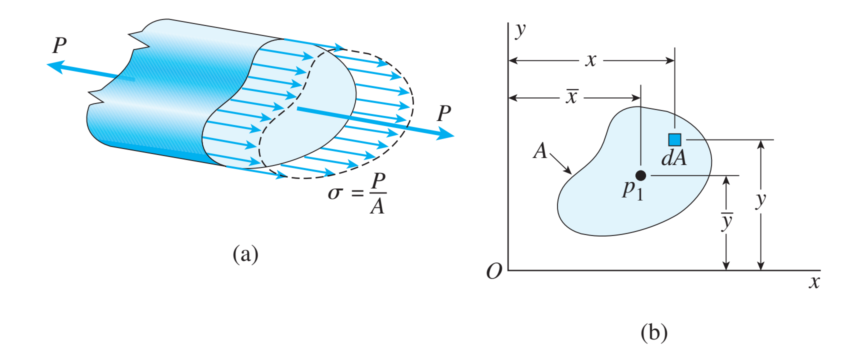


FIGURA 1.4 Distribución uniforme de esfuerzos en una barra prismática: (a) fuerzas axiales P y (b) sección transversal de la barra.

Los momentos de los esfuerzos distribuidos se obtienen integrando sobre el área de la sección transversal A. La fuerza diferencial que actúa sobre un elemento del área dA (figura 1-4b) es igual a σdA. Los momentos de esta fuerza elemental con respecto a los ejes x y y son $\sigma y dA$ y $-\sigma x dA$, respectivamente, en donde x y y denotan las coordenadas del elemento dA. Los momentos totales se obtienen integrando sobre el área de la sección transversal:

$$M_x = \int \sigma y\, dA \qquad M_y = -\int \sigma x\, dA \tag{c,d}$$

Estas expresiones dan los momentos producidos por los esfuerzos σ.

Luego, igualamos los momentos M_x y M_y obtenidos para la fuerza P (ecuaciones a y b) con los momentos obtenidos a partir de los esfuerzos distribuidos (ecuaciones c y d):

$$P\bar{y} = \int \sigma y\, dA \qquad P\bar{x} = \int \sigma x\, dA$$

Como los esfuerzos σ están distribuidos uniformemente, sabemos que son constantes sobre el área A de la sección transversal y se pueden poner fuera de los signos de integración. Además, sabemos que σ es igual a P/A. Por tanto, obtenemos las fórmulas siguientes para las coordenadas del punto p_1:

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad \bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \tag{1.3a,b}$$

Estas ecuaciones son iguales a las que definen las coordenadas del centroide de un área (consulte las ecuaciones 12.3a y b en el capítulo 12). Por tanto, ahora hemos llegado a una conclusión importante: *a fin de tener una tensión o compresión uniforme en una barra prismática, la fuerza axial debe actuar en el centroide del área de la sección transversal*. Como explicamos antes, siempre suponemos que estas condiciones se cumplen a menos que se especifique de otra manera.

Los ejemplos siguientes ilustran el cálculo de esfuerzos y deformaciones unitarias en barras prismáticas. En el primer ejemplo ignoramos el peso de la barra y en el segundo lo incluimos. (Cuando se resuelven problemas del libro de texto es usual omitir el peso de la estructura a menos que se pida incluirlo).

Ejemplo 1.1

Un poste corto, construido con un tubo circular hueco de aluminio, soporta una carga de compresión de 26 kips (figura 1.5). Los diámetros interior y exterior del tubo son $d_1 = 4.0$ in y $d_2 = 4.5$ in, respectivamente, y su longitud es 16 in. El acortamiento del poste debido a la carga es de 0.012 in.

Determine el esfuerzo de compresión y la deformación unitaria en el poste. (No tenga en cuenta el peso del poste y suponga que éste no se pandea con la carga.)

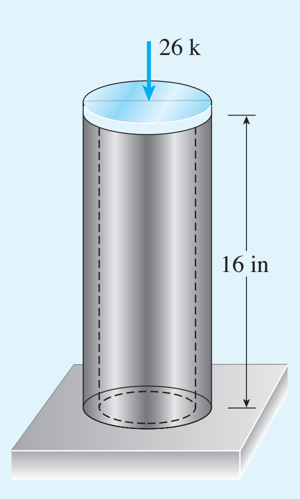


FIGURA 1.5 Ejemplo 1.1. Poste hueco de aluminio en compresión.

Solución

Suponiendo que la carga de compresión actúa en el centro del tubo hueco, podemos emplear la ecuación $\sigma = P/A$ (ecuación 1.1) para calcular el esfuerzo normal. La fuerza P es igual a 26 k (o 26,000 lb) y el área A de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right) = \frac{\pi}{4}\left[(4.5 \text{ in})^2 - (4.0 \text{ in})^2\right] = 3.338 \text{ in}^2$$

Por tanto, el esfuerzo de compresión en el poste es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{26{,}000 \text{ lb}}{3.338 \text{ in}^2} = 7790 \text{ psi}$$

La deformación unitaria de compresión (de la ecuación 1.2) es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.012 \text{ in}}{16 \text{ in}} = 750 \times 10^{-6}$$

De esta manera hemos calculado el esfuerzo y la deformación unitaria en el poste.

Nota: como se explicó antes, la deformación unitaria es una cantidad adimensional y, por tanto, no se requiere indicar unidades para ella. Sin embargo, por claridad, a menudo se le dan unidades. En este ejemplo, ϵ se podría escribir como 750 $\times 10^{-6}$ in/in o 750 μin/in.

Ejemplo 1.2

Una barra circular de acero con longitud L y diámetro d cuelga en el tiro de una mina y en su extremo inferior sostiene un balde con mineral con peso W (figura 1.6).

(a) Obtenga una fórmula para el esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en la barra, tomando en cuenta el peso de ésta.

(b) Calcule el esfuerzo máximo si $L = 40$ m, $d = 8$ mm y $W = 1.5$ kN.

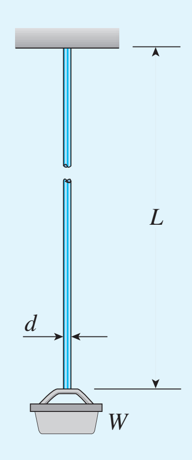


FIGURA 1.6 Ejemplo 1.2. Barra de acero soportando un peso W.

Solución

(a) La fuerza axial máxima $F_{\text{máx}}$ en la barra se tiene en el extremo superior y es igual al peso W del balde con mineral más el peso W_0 propio de la barra. Este último es igual al peso específico γ del acero por el volumen V de la barra; o sea

$$W_0 = \gamma V = \gamma A L \tag{1.4}$$

en donde A es el área de la sección transversal de la barra. Por tanto, la fórmula para el esfuerzo máximo (de la ecuación 1.1) es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{F_{\text{máx}}}{A} = \frac{W + \gamma A L}{A} = \frac{W}{A} + \gamma L \tag{1.5}$$

(b) Para calcular el esfuerzo máximo, sustituimos los valores numéricos en la ecuación anterior. El área de la sección anterior A es igual a $\pi d^2/4$, donde $d = 8$ mm y el peso específico γ del acero es 77.0 kN/m^3 (de la tabla H-1 del apéndice H). Por tanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1.5\,\text{kN}}{\pi(8\ \text{mm})^2/4} + (77.0\ \text{kN/m}^3)(40\ \text{m})$$
$$= 29.8\ \text{MPa} + 3.1\ \text{MPa} = 32.9\ \text{MPa}$$

En este ejemplo, el peso de la barra contribuye de manera considerable al esfuerzo máximo y no debe ignorarse.

1.3 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

El diseño de máquinas y estructuras para que funcionen apropiadamente requiere que comprendamos el **comportamiento mecánico** de los materiales empleados. En general, la única forma para determinar cómo se comportan los materiales cuando se someten a cargas es realizar experimentos en el laboratorio. El procedimiento usual es colocar muestras pequeñas del material en máquinas de ensayo, aplicar las cargas y luego medir las deformaciones resultantes (como cambios de longitud y diámetro). La mayor parte de los laboratorios de pruebas de materiales están equipados con máquinas capaces de cargar las muestras de diversas maneras, incluyendo cargas estáticas y dinámicas en tensión y compresión.

En la figura 1.7 se muestra una **máquina para ensayos de tensión común.** La muestra de ensayo se coloca entre las dos mordazas grandes de la máquina y luego se carga a tensión. Dispositivos de medición registran las deformaciones unitarias y los sistemas de control automático y de procesamiento de datos (a la izquierda en la fotografía) tabulan y grafican los resultados.

En la figura 1.8 se muestra una vista más detallada de una **muestra para ensayo de tensión.** Los extremos de la muestra circular se amplían en la región donde se colocan en las mordazas para que no ocurra la falla cerca de éstas. Una falla en los extremos no producirá la información deseada acerca del material, debido a que la distribución del esfuerzo cerca de las mordazas no es uniforme, como se explicó en la sección 1.2. En una muestra apropiadamente diseñada, la falla sucederá en su parte prismática donde la distribución del esfuerzo es uniforme y la barra está sometida sólo a tensión pura. Esta situación se muestra en la figura 1.8, donde la muestra de acero se fracturó ante la carga. El dispositivo a la derecha, que está conectado me-



FIGURA 1.7 Máquina para ensayos de tensión con sistema automático de procesamiento de datos. (Cortesía de MTS Systems Corporation.)

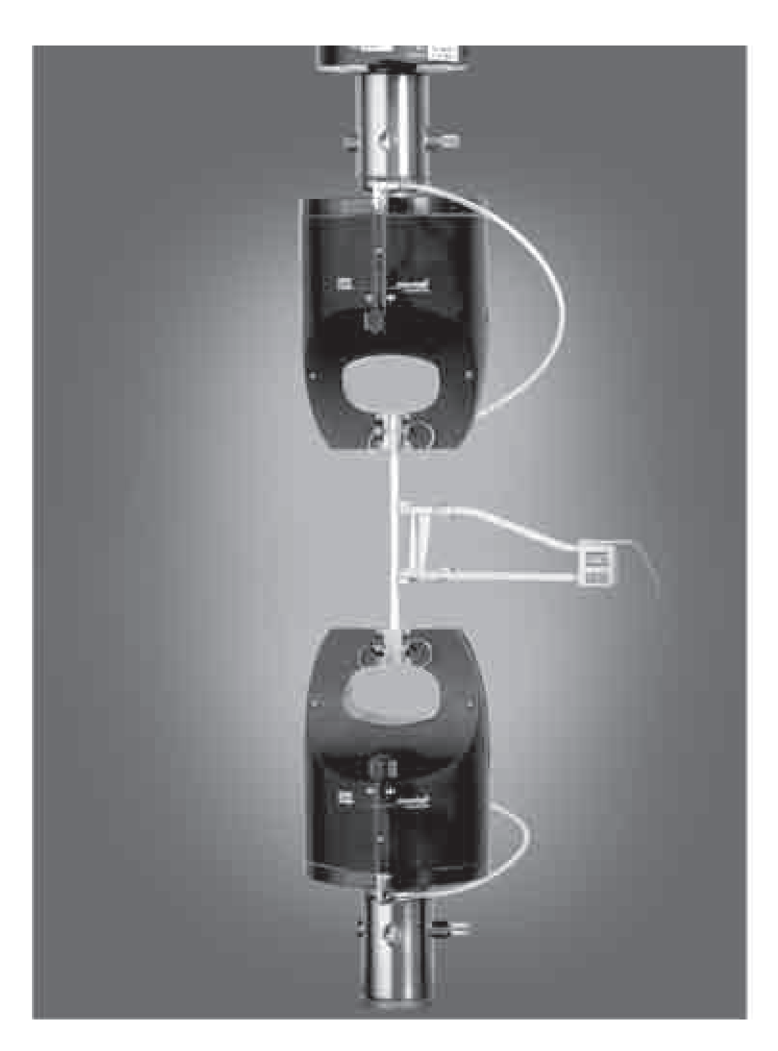


FIGURA 1.8 Muestra común para ensayo de tensión con extensómetro conectado; la muestra se fracturó en tensión. (Cortesía de MTS Systems Corporation.)

diante dos brazos a la muestra, es un **extensómetro** que mide el alargamiento durante la aplicación de la carga.

A fin de que se puedan comparar los resultados de los ensayos, se deben estandarizar las dimensiones de las muestras para ensayo y los métodos de aplicación de las cargas. Una de las principales organizaciones normativas en Estados Unidos es la American Society for Testing and Materials (ASTM), una sociedad técnica que publica especificaciones y normas para materiales y pruebas. Otras organizaciones normativas son la American Standards and Association (ASA) y el National Institute of Standards and Technology (NIST). En otros países existen organizaciones similares.

La muestra para tensión estándar de la ASTM tiene un diámetro de 0.505 in y una **longitud calibrada** de 2.0 in entre las marcas de calibración, que son los puntos donde los brazos del extensómetro están conectados a la muestra (consulte la figura 1.8). Conforme se jala la muestra, se mide y se registra la carga axial, ya sea de forma automática o bien tomando una lectura de una carátula. El alargamiento sobre la longitud calibrada se mide de

manera simultánea, mediante dispositivos mecánicos del tipo que se muestra en la figura 1.8 o con deformímetros por resistencia eléctrica.

En un **ensayo estático**, la carga se aplica lentamente y la *velocidad* exacta de carga no es de interés debido a que no afecta el comportamiento de la muestra. Sin embargo, en un **ensayo dinámico** la carga se aplica rápidamente y en algunas ocasiones de una manera cíclica. Como la naturaleza de una carga dinámica afecta las propiedades de los materiales, también se debe medir la velocidad de carga.

Los **ensayos de compresión** de metales suelen realizarse en muestras pequeñas con forma de cubos o cilindros circulares. Por ejemplo, los cubos pueden tener 2.0 in por lado y los cilindros diámetros de 1 in, y longitudes de 1 a 12 in y se pueden medir la carga aplicada por la máquina y el acortamiento de la muestra. El acortamiento se debe medir sobre una longitud calibrada que sea menor que la longitud total de la muestra a fin de eliminar efectos de borde.

El concreto se ensaya a la compresión en proyectos importantes de construcción para asegurar que se haya obtenido la resistencia requerida. Un tipo de muestra para ensayo de concreto tiene 6 in de diámetro, 12 in de longitud y una edad de 28 días (la edad del concreto es importante debido a que adquiere más resistencia a medida que se cura). Muestras similares pero un tanto menores se emplean cuando se realizan ensayos de compresión en roca (figura 1-9).

Diagramas de esfuerzo-deformación unitaria

Los resultados de los ensayos, en general, dependen de las dimensiones de la muestra que se ensaya. Como es poco probable que diseñemos una estructura que tenga partes con el mismo tamaño que las muestras para ensayo, necesitamos expresar los resultados en una forma que se pueda aplicar a elementos de cualquier tamaño. Una forma simple de lograr este objetivo es convertir los resultados de los ensayos en esfuerzos y deformaciones unitarias.

El esfuerzo axial σ en una muestra para ensayo se calcula dividiendo la carga axial P entre el área de la sección transversal A (ecuación 1.1). Cuando se utiliza el área inicial de la muestra en los cálculos, el esfuerzo se denomina **esfuerzo nominal** (otros nombres son *esfuerzo convencional* y *esfuerzo ingenieril*). Un valor más exacto del esfuerzo axial, denominado **esfuerzo real**, se puede calcular empleando el área real de la barra en la sección transversal donde ocurre la falla. Como el área real en un ensayo de tensión siempre es menor que el área inicial (como se ilustra en la figura 1.8), el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal.

La deformación unitaria axial promedio ϵ en la muestra para ensayo se determina dividiendo el alargamiento medido δ en medio de las marcas de calibración, entre la longitud calibrada L (consulte la figura 1.8 y la ecuación 1.2). Si la longitud calibrada inicial se emplea en el cálculo (por ejemplo, 2.0 in), entonces se obtiene la **deformación unitaria normal.** Como la distancia entre las marcas de calibración aumenta conforme se aplica la carga de tensión, podemos calcular la **deformación unitaria verdadera** (o *deformación unitaria natural*) para cualquier valor de la carga empleando la distancia real entre las marcas de calibración. En tensión, la deformación



FIGURA 1.8 Muestra de roca ensayada en compresión para obtener la resistencia a la compresión, el módulo elástico y la relación de Poisson. (Cortesía de MTS Systems Corporation).

unitaria real siempre es menor que la deformación unitaria nominal. Sin embargo, para la mayor parte de los fines ingenieriles, el esfuerzo nominal y la deformación unitaria nominal son adecuadas, como se explica más adelante en esta sección.

Después de realizar un ensayo de tensión o compresión y de determinar el esfuerzo y la deformación unitaria para varias magnitudes de la carga, podemos trazar un diagrama del esfuerzo en función de la deformación unitaria. Ese **diagrama esfuerzo-deformación unitaria** es una característica del material particular que se ensaya y contiene información importante sobre sus propiedades mecánicas y el tipo de comportamiento.*

*Los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria fueron creados por Jacob Bernoulli (1654-1705) y J. V. Poncelet (1788-1867); consulte la referencia 1.4.

El primer material que analizaremos es el **acero estructural** conocido también como *acero dulce* o *acero al bajo carbono*. Es uno de los metales que se emplean y se encuentra en edificios, puentes, grúas, barcos, torres, vehículos y en muchos otros tipos de construcciones. Un diagrama de esfuerzo-deformación unitaria para un acero estructural común en tensión se muestra en la figura 1.10. Las deformaciones unitarias están trazadas en el eje horizontal y los esfuerzos en eje vertical. (A fin de mostrar todas las características importantes de este material, el eje de la deformación unitaria en la figura 1.10 no está dibujado a escala.)

El diagrama inicia con una línea recta desde el origen O hasta el punto A, que indica que la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria en esta región inicial no sólo es *lineal* sino también *proporcional*.* Más allá del punto A, ya no existe la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria; de aquí que al esfuerzo en A se le nombre **límite de proporcionalidad.** Para aceros al bajo carbono, este límite está en el intervalo de 30 a 50 ksi (210 a 350 MPa), pero los aceros de alta resistencia (con contenido mayor de carbono más otras aleaciones) pueden tener límites de proporcionalidad mayores que 80 ksi (550 MPa). La pendiente de la línea recta de O a A se denomina **módulo de elasticidad.** Debido a que la pendiente tiene unidades de esfuerzo dividido entre la deformación unitaria, el módulo de elasticidad tiene las mismas unidades que el esfuerzo. (Los módulos de elasticidad se analizan en la sección 1.5).

Con un incremento en el esfuerzo más allá del límite de proporcionalidad, la deformación unitaria comienza a aumentar más rápidamente con cada incremento del esfuerzo. En consecuencia, la curva esfuerzo-deformación unitaria tiene una pendiente cada vez menor, hasta que en el punto B la curva se vuelve horizontal (consulte la figura 1.10). A partir de este punto ocurre un alargamiento considerable de la muestra para ensayo sin un aumento notable en la fuerza de tensión (del punto B al C). Este fenómeno se conoce como **fluencia** del material y el punto B se denomina **punto de**

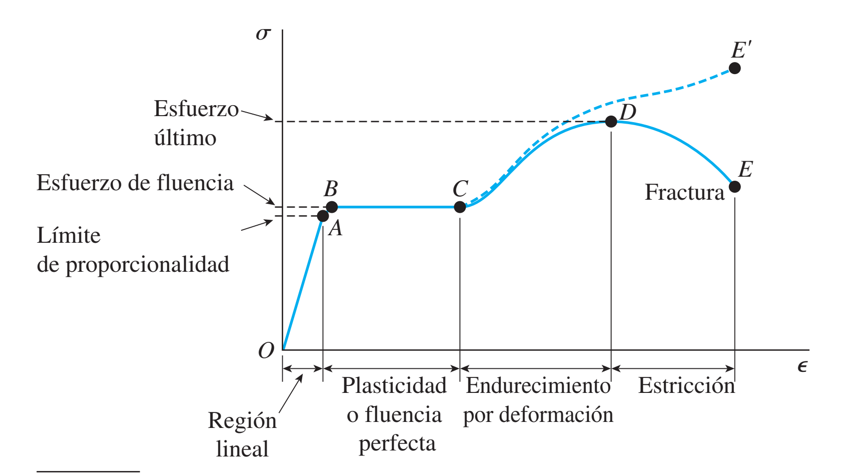


FIGURA 1.10 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un acero estructural común en tensión (no a escala).

*Se dice que dos variables son *proporcionales* si su relación permanece constante. Por tanto, una relación proporcional se puede representar mediante una recta que pasa por el origen. Sin embargo, una relación proporcional no es lo mismo que una relación *lineal*. Si bien una relación proporcional es lineal, la proposición inversa no es necesariamente cierta, debido a que una relación representada por una recta que *no* pasa por el origen es lineal pero no proporcional. La expresión empleada con frecuencia “directamente proporcional” es sinónimo de “proporcional” (referencia 1.5).

fluencia. El esfuerzo correspondiente se conoce como **esfuerzo de fluencia** del acero.

En la región de B a C (figura 1-10) el material se vuelve **perfectamente plástico,** lo cual significa que se deforma sin un aumento en la carga aplicada. El alargamiento de una muestra de acero dulce en la región perfectamente plástica usualmente es de 10 a 15 veces el alargamiento que ocurre en la región lineal (entre el inicio de la carga y el límite de proporcionalidad). La presencia de deformaciones unitarias muy grandes en la región plástica (y más allá de ésta) es la razón para no trazar este diagrama a escala.

Después de experimentar las grandes deformaciones unitarias que ocurren durante la fluencia en la región BC, el acero comienza a **endurecerse por deformación**. Durante el endurecimiento por deformación el material experimenta cambios en su estructura cristalina, resultando en una resistencia mayor del material ante una deformación adicional. La elongación de la muestra de ensayo en esta región requiere un aumento en la carga de tensión y, por tanto, el diagrama esfuerzo-deformación unitaria tiene una pendiente positiva de C a D. Al final, la carga llega a su valor máximo y el esfuerzo correspondiente (en el punto D) se denomina **esfuerzo último**. Un alargamiento adicional de la barra en realidad se acompaña de una reducción en la carga y la fractura finalmente ocurre en un punto como el E de la figura 1.10.

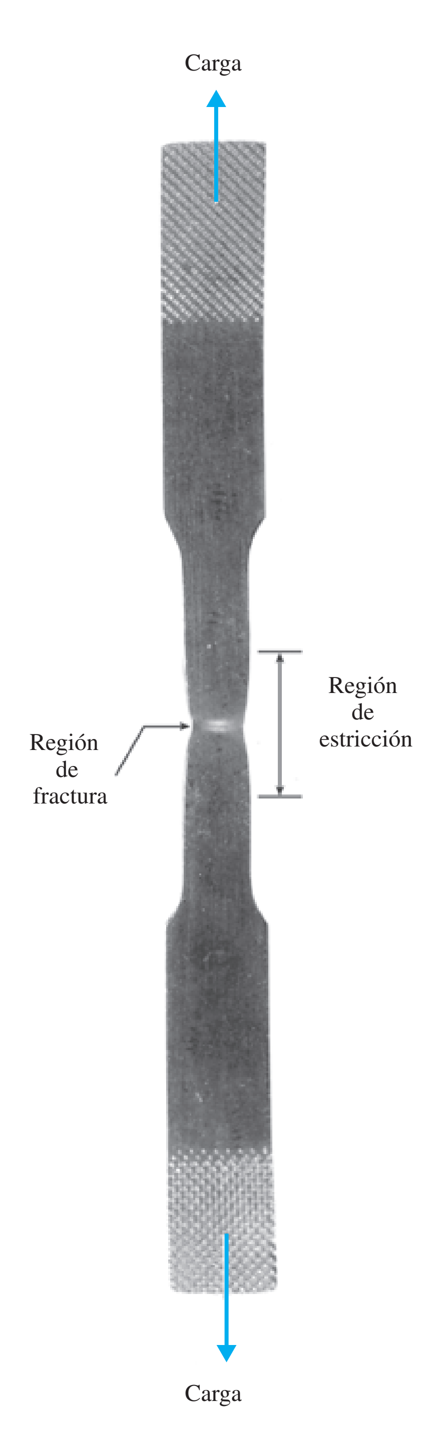


FIGURA 1.11 Estricción de una barra de acero dulce en tensión.

El esfuerzo de fluencia y el esfuerzo último de un material también se denominan **resistencia de fluencia** y **resistencia última**, respectivamente. **Resistencia** es un término general que se refiere a la capacidad de una estructura para resistir cargas. Por ejemplo, la resistencia de fluencia de una viga es la magnitud de la carga requerida para ocasionar fluencia en la viga y la resistencia última de una armadura es la carga máxima que puede soportar, es decir, la carga de falla. Sin embargo, al realizar un ensayo de tensión de un material particular, definimos la capacidad de soporte de carga por los esfuerzos en la muestra en vez de las cargas totales que actúan en la muestra. Como resultado, la resistencia de un material usualmente se estipula como un esfuerzo.

Cuando se estira una muestra de ensayo, sufre una **contracción lateral,** como ya se mencionó. La disminución resultante en el área de la sección transversal es demasiado pequeña para tener un efecto notable sobre los valores calculados de los esfuerzos aproximadamente en el punto C en la figura 1.10, pero más allá de ese punto la reducción del área comienza a alterar la forma de la curva. En la proximidad del esfuerzo último, la reducción del área de la barra es aparente y se presenta una **estricción** pronunciada de la barra (consulte las figuras 1.8 y 1.11).

Si se emplea el área real de la sección transversal en la parte angosta de la estricción para calcular el esfuerzo, se obtiene la **curva verdadera esfuerzo-deformación unitaria** (la línea discontinua CE' en la figura 1.10). La carga total que la barra puede soportar disminuye en efecto después que se alcanza el esfuerzo último (como lo muestra la curva DE), pero esta reducción se debe a la disminución del área de la barra y no a una pérdida de resistencia del propio material. En realidad, el material soporta un aumento en el esfuerzo verdadero hasta la falla (punto E'). Como se espera que la mayoría de las estructuras trabajen a esfuerzos menores que el límite de proporcionalidad, la **curva convencional esfuerzo-deformación unitaria** $OABCDE$, que se basa en el área original de la sección transversal de la muestra y es fácil de determinar, proporciona información adecuada para emplearla en el diseño de ingeniería.

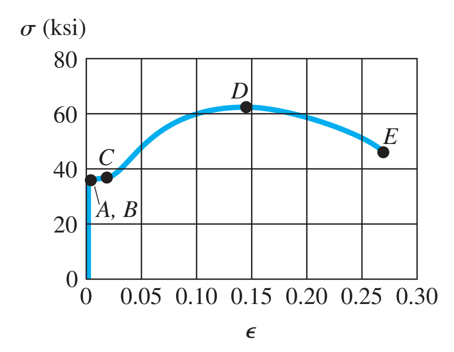


FIGURA 1.12 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un acero estructural típico en tensión (dibujado a escala).

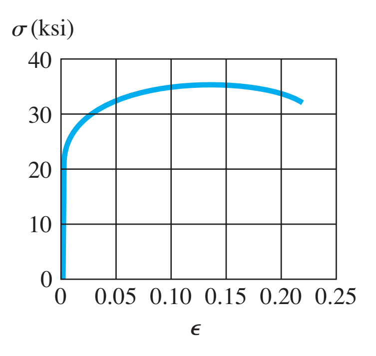


FIGURA 1.13 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria típico para una aleación de aluminio.

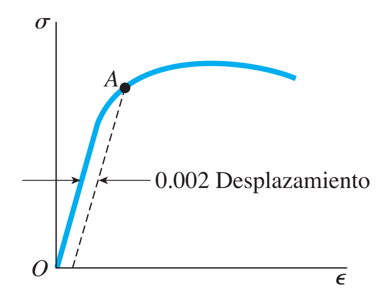


FIGURA 1.14 Esfuerzo de fluencia arbitrario determinado mediante el método de desplazamiento.

El diagrama de la figura 1.10 muestra las características generales de la curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero dulce, pero sus proporciones no son realistas debido a, como ya se mencionó, que la deformación unitaria que ocurre de B a C puede ser más de diez veces mayor que la deformación unitaria que ocurre de O a A. Además, las deformaciones unitarias de C a E son muchas veces mayores que las de B a C. Las relaciones correctas se representan en la figura 1.12, donde se muestra un diagrama esfuerzo-deformación unitaria para acero dulce dibujado a escala. En esta figura, las deformaciones unitarias desde el punto cero hasta el punto A son tan pequeñas comparadas con las deformaciones unitarias del punto A al punto E que no se pueden ver y parece que la parte inicial del diagrama es una línea vertical.

La presencia de un punto de fluencia bien definido, seguido por deformaciones unitarias plásticas grandes, es una característica importante del acero estructural que algunas veces se emplea en el diseño práctico (consulte, por ejemplo, los análisis del comportamiento elastoplástico en las secciones 2.12 y 6.10). Los metales como el acero estructural que sufren deformaciones unitarias *permanentes* antes de la falla se clasifican como **dúctiles**. Por ejemplo, la ductilidad es la propiedad que permite que una barra de acero se doble para formar un arco circular o se trefile para formar un alambre sin romperse. Una característica importante de los materiales dúctiles es que presentan una distorsión visible si las cargas son demasiado grandes, proporcionando así una oportunidad para tomar una acción correctiva antes de que ocurra la fractura. También, los materiales que presentan comportamiento dúctil son capaces de absorber grandes cantidades de energía de deformación antes de la fractura.

El acero estructural es una aleación de hierro que contiene aproximadamente 0.2 por ciento de carbono y, por tanto, se clasifica como acero al bajo carbono. Al aumentar el contenido de carbono, el acero se vuelve menos dúctil pero más resistente (mayor esfuerzo de fluencia y mayor esfuerzo último). Las propiedades físicas del acero también se ven afectadas por un tratamiento térmico, por la presencia de otros metales y por los procesos de manufactura como el laminado. Otros materiales que se comportan de una manera dúctil (en ciertas condiciones) son aluminio, cobre, magnesio, plomo, molibdeno, níquel, latón, bronce, metal monel, nailon y teflón.

Las **aleaciones de aluminio** si bien pueden tener una ductilidad considerable, no tienen un punto de fluencia bien definido, como se muestra en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.13, pero tienen una región lineal inicial con un límite de proporcionalidad reconocible. Las aleaciones producidas para fines estructurales tienen límites de proporcionalidad en el rango de 10 a 60 ksi (70 a 410 MPa) y esfuerzos últimos en el rango de 20 a 80 ksi (140 a 550 MPa).

Cuando un material, como el aluminio, no tiene un punto de fluencia bien determinado y, sin embargo, sufre grandes deformaciones unitarias después de rebasar el límite de proporcionalidad, se puede determinar un esfuerzo de fluencia *arbitrario* mediante el **método de desplazamiento**. Se traza una línea recta en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria paralela a la parte inicial lineal de la curva (figura 1.14), pero desplazada en cierta deformación unitaria estándar, como 0.002 (o 0.2 por ciento). La intersección de la línea desplazada y la curva esfuerzo-deformación unitaria (punto A en la figura) define el esfuerzo de fluencia. Como este esfuerzo se determina mediante una regla arbitraria y no es una propiedad física inherente del material, se debe distinguir de un esfuerzo verdadero de fluencia y referirse a él como **esfuerzo de fluencia desplazado.** Para un material como

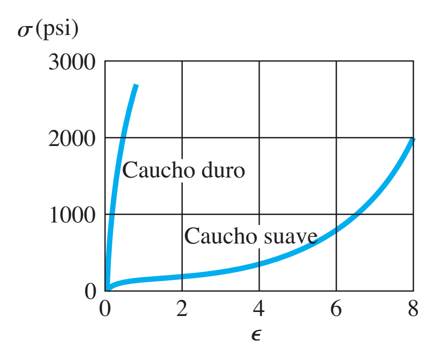


FIGURA 1.15 Curvas esfuerzo-deformación unitaria para dos clases de caucho en tensión.

el aluminio, el esfuerzo de fluencia desplazado está ligeramente arriba del límite de proporcionalidad. En el caso del acero estructural, con su abrupta transición de la región lineal a la región de alargamiento plástico, el esfuerzo desplazado es en esencia el mismo tanto en el esfuerzo de fluencia como en el límite de proporcionalidad.

El caucho mantiene una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria hasta llegar a deformaciones unitarias relativamente grandes (en comparación con los metales). La deformación unitaria en el límite de proporcionalidad puede ser tan alta como 0.1 o 0.2 (10 o 20 por ciento). Más allá del límite de proporcionalidad, el comportamiento depende del tipo de caucho (figura 1.15). Algunas clases de caucho suave se estirarán enormemente sin fallar, alcanzando longitudes de varias veces sus longitudes originales. El material termina presentando cada vez mayor resistencia a la carga y la curva esfuerzo-deformación unitaria se curva marcadamente hacia arriba. Este comportamiento característico se puede percibir estirando una banda de caucho con las manos. (Observe que aunque el caucho presenta deformaciones unitarias muy grandes, no es un material dúctil debido a que las deformaciones no son permanentes. Es, por supuesto, un material elástico; consulte la sección 1.4.)

La ductilidad de un material en tensión se puede caracterizar por su alargamiento y por la reducción de su área en la sección transversal donde ocurre la fractura. El **porcentaje de alargamiento** se define como sigue:

$$\text{Porcentaje de alargamiento} = \frac{L_1 - L_0}{L_0}(100) \tag{1.6}$$

en donde L_0 es la longitud calibrada original y L_1 es la distancia entre las marcas de calibración en la fractura. Ya que el alargamiento no es uniforme en toda la longitud de la muestra, sino que se concentra en la región de estricción, el porcentaje de alargamiento depende de la longitud calibrada. Por tanto, al dar el porcentaje de alargamiento, siempre se debe proporcionar la longitud calibrada. Para una longitud calibrada de 2 in, el acero puede tener un alargamiento en el rango de 3 a 40%, dependiendo de su composición; en el caso del acero estructural, son comunes valores de 20 o 30 por ciento. El alargamiento de las aleaciones de aluminio varía de 1 a 45 por ciento, dependiendo de su composición y su tratamiento.

El **porcentaje de reducción de área** mide la cantidad de estricción que ocurre y se define como sigue:

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = \frac{A_0 - A_1}{A_0}(100) \tag{1.7}$$

en donde A_0 es el área transversal original y A_1 es el área final en la sección de fractura. Para aceros dúctiles, la reducción es casi de 50 por ciento.

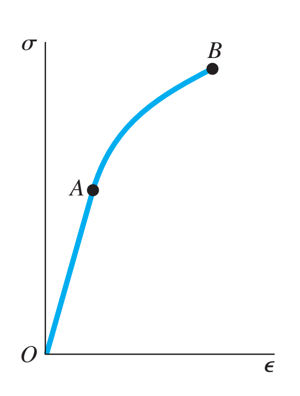


FIGURA 1.16 Diagrama típico de esfuerzo-deformación unitaria para un material frágil, que muestra el límite de proporcionalidad (punto *A*) y el punto de fractura (punto *B*).

Los materiales que fallan en tensión a valores relativamente bajos de deformación unitaria se clasifican como **frágiles.** Algunos ejemplos son concreto, piedra, hierro colado, vidrio, cerámica y una variedad de aleaciones metálicas. Los materiales frágiles fallan con poco alargamiento después que se sobrepasa el límite de proporcionalidad (el esfuerzo en el punto *A* en la figura 1.16). Además, la reducción del área es insignificante y por tanto el esfuerzo nominal de fractura (punto *B*) es el mismo que el esfuerzo último verdadero. Los aceros al alto carbono tienen esfuerzos de fluencia muy elevados —más de 100 ksi (700 MPa) en algunos casos— pero se comportan

de una manera frágil y la fractura ocurre con un alargamiento de tan sólo un porcentaje bajo.

El **vidrio** ordinario es un material frágil casi ideal, debido a que casi no presenta ductilidad. La curva esfuerzo-deformación unitaria del vidrio en tensión es en esencia una línea recta y la falla sucede antes de que tenga lugar alguna fluencia. El esfuerzo último es de casi 10 000 psi (70 MPa) para ciertas clases de vidrio en placa, pero hay grandes variaciones, dependiendo del tipo de vidrio, del tamaño de la muestra y de la presencia de defectos microscópicos. Las **fibras de vidrio** pueden desarrollar resistencias enormes y se han alcanzado esfuerzos últimos mayores que 1 000 000 psi (7 GPa).

Muchos tipos de **plásticos** se utilizan para fines estructurales debido a su peso ligero, a su resistencia a la corrosión y a sus buenas propiedades de aislamiento eléctrico. Sus propiedades mecánicas varían enormemente, tal que algunos plásticos son frágiles y otros dúctiles. Al diseñar con plásticos es importante tomar en cuenta que sus propiedades se afectan en gran medida por los cambios de temperatura y por el tiempo. Por ejemplo, el esfuerzo último de tensión de algunos plásticos disminuye a la mitad solamente elevando la temperatura de 10 a 40°C. Además, un plástico cargado se puede estirar gradualmente al paso del tiempo hasta que pierde su capacidad de servicio. Por ejemplo, una barra de cloruro de polivinilo sometida a una carga de tensión que inicialmente produce una deformación unitaria de 0.005 puede tener el doble de esa deformación después de una semana, aunque la carga permanezca constante. (Este fenómeno, conocido como *termofluencia*, se explica en la siguiente sección.)

Los esfuerzos últimos de tensión para plásticos usualmente se encuentran en el rango de 2 a 50 ksi (14 a 350 MPa) y sus pesos específicos varían entre 50 a 90 lb/ft^3 (8 a 14 kN/m^3). Un tipo de nailon tiene un esfuerzo último de 12 ksi (80 MPa) y un peso específico de sólo 70 lb/ft^3 (11 kN/m^3), que es sólo 12 por ciento más pesado que el agua. Debido a su peso ligero, la razón entre resistencia y peso para el nailon es casi la misma que para el acero estructural (consulte el problema 1.3-4).

Un **material reforzado con filamentos,** consiste en una base (o *matriz*) en la que están embebidos filamentos, fibras o microfibras de alta resistencia. El material compuesto resultante tiene una resistencia mucho mayor que el material base. Como ejemplo, el uso de fibras de vidrio puede aumentar a más del doble la resistencia de una matriz plástica. Los compuestos se emplean ampliamente en aviones, botes, cohetes y vehículos espaciales donde se requiere alta resistencia y peso ligero.

Compresión

Las curvas esfuerzo-deformación unitaria para materiales en compresión difieren de las curvas de tensión. Los metales dúctiles como el acero, el aluminio y el cobre tienen límites de proporcionalidad en compresión muy cercanos a los de tensión y las regiones iniciales de sus diagramas esfuerzo-deformación unitaria en compresión y tensión son casi iguales. Sin embargo, después que inicia la fluencia, el comportamiento es muy diferente. En un ensayo de tensión, la muestra se estira, puede ocurrir estricción y finalmente sucede la fractura. Cuando el material se comprime, se abulta hacia fuera en los lados y adopta una forma como de barril, debido a que la fricción entre la muestra y las placas extremas evita la expansión lateral. Al aumentar la carga, la muestra se aplana y presenta una resistencia mucho mayor a un

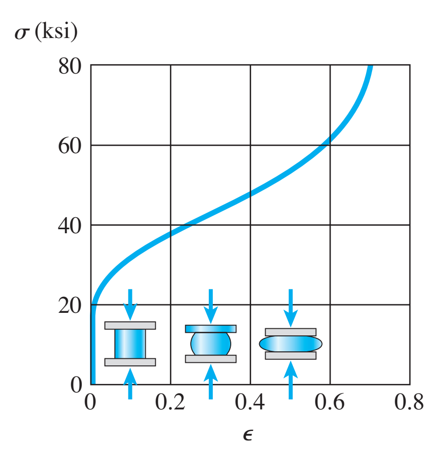


FIGURA 1.17 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el cobre en compresión.

acortamiento adicional (lo que significa que la curva esfuerzo-deformación unitaria se vuelve muy empinada). Esas características se ilustran en la figura 1.17, donde se muestra un diagrama esfuerzo-deformación unitaria en compresión para el cobre. Como el área de la sección transversal real de una muestra ensayada en compresión es mayor que el área inicial, el esfuerzo verdadero es un ensayo de compresión es menor que el esfuerzo nominal.

Los materiales frágiles cargados en compresión usualmente tienen una región lineal inicial seguida de una región en la que el acortamiento aumenta a una velocidad ligeramente mayor que la carga. Las curvas esfuerzo-deformación unitaria para compresión y tensión con frecuencia tienen formas similares, pero los esfuerzos últimos en compresión son mucho mayores que los de tensión. Además, a diferencia de los materiales dúctiles, que se aplanan cuando se comprimen, los materiales frágiles en realidad se fracturan con la carga máxima.

Tablas de propiedades mecánicas

Las propiedades de los materiales se listan en las tablas del apéndice H al final del libro. Los datos de materiales en las tablas son los típicos y adecuados para resolver problemas en este libro. Sin embargo, las propiedades de los materiales y las curvas esfuerzo-deformación unitaria varían en gran medida, incluso para el mismo material, debido a los diferentes procesos de manufactura, a la composición química, a defectos internos, a la temperatura y a muchos otros factores.

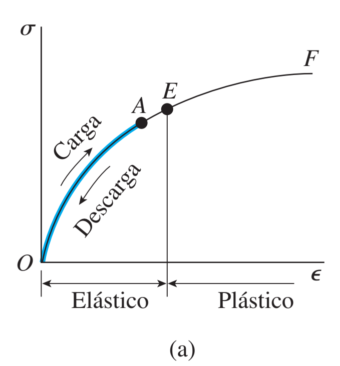
Por estas razones, los datos obtenidos del apéndice H (o de otras tablas de naturaleza similar) no se deben emplear para fines específicos de ingeniería o diseño. En cambio, se debe consultar los fabricantes o proveedores de materiales para obtener información sobre un producto particular.

1.4 ELASTICIDAD, PLASTICIDAD Y TERMOFLUENCIA

Los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria presentan el comportamiento de los materiales ingenieriles cuando están cargados en tensión o compresión, como se describió en la sección anterior. Para ir un paso más allá, consideremos que sucede cuando la carga se quita y el material se *descarga*.

Suponga por ejemplo, que aplicamos una carga de tensión a una muestra tal que el esfuerzo y la deformación unitaria vayan del origen *O* al punto *A* en la curva de esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.18a. Suponga además que cuando la carga se remueve, el material sigue exactamente la misma curva de regreso al origen *O*. Esta propiedad de un material, mediante la cual regresa a sus dimensiones originales durante la descarga, se denomina **elasticidad** y se dice que el propio material es *elástico*. Observe que la curva esfuerzo-deformación unitaria de *O* a *A* no tiene que ser lineal a fin de que el material sea elástico.

Ahora suponga que cargamos este mismo material hasta un nivel mayor, tal que se alcanza el punto *B* en la curva esfuerzo-deformación unitaria (figura 1.18b). Cuando la descarga sucede a partir del punto *B*, el material sigue la línea *BC* en el diagrama. Esta línea de descarga es paralela a la parte inicial de la curva de carga; es decir, la línea *BC* es paralela a una tangente a la curva esfuerzo-deformación unitaria en el origen. Cuando se alcanza el punto *C*, la carga se ha removido por completo, pero en el material permanece una **deformación unitaria residual** o *deformación unitaria permanente*, representada



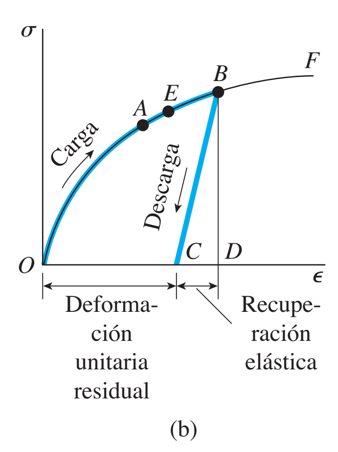


FIGURA 1.18 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria que ilustran (a) un comportamiento elástico y (b) un comportamiento parcialmente elástico.

por la línea *OC*. Como consecuencia, la barra ensayada es más larga ahora que antes de la aplicación de la carga. Este alargamiento residual de la barra se denomina **deformación permanente.** De la deformación total *OD* desarrollada durante la carga de *O* a *B*, la deformación unitaria *CD* se ha recuperado elásticamente y la deformación unitaria *OC* permanece como una deformación unitaria permanente. Así, durante la descarga la barra regresa parcialmente a su forma original y, por tanto, se dice que el material es **parcialmente elástico.**

Entre los puntos *A* y *B* en la curva esfuerzo-deformación unitaria (figura 1.18b), debe haber un punto antes del cual el material es elástico y después del cual el material es parcialmente elástico. Para encontrar este punto, cargamos el material hasta un valor seleccionado de esfuerzo y luego removemos la carga. Si no hay una deformación unitaria permanente (es decir, si el alargamiento de la barra regresa a cero), entonces el material es completamente elástico hasta el valor seleccionado del esfuerzo.

El proceso de carga y descarga se puede repetir para valores sucesivamente mayores del esfuerzo. Al final se alcanzará un esfuerzo tal que no toda la deformación unitaria se recupera durante la descarga. Mediante este procedimiento es posible determinar el esfuerzo en el límite superior de la región elástica, por ejemplo, el esfuerzo en el punto *E* en las figuras 1.18a y b. El esfuerzo en este punto se conoce como **límite elástico** del material.

Muchos materiales, incluyendo la mayor parte de los metales, tienen regiones lineales al inicio de sus curvas esfuerzo-deformación unitaria (por ejemplo, consulte las figuras 1.10 y 1.13). El esfuerzo en el límite superior de esta región lineal es el límite de proporcionalidad, como se explicó en la sección anterior. El límite elástico usualmente es igual o ligeramente mayor que el límite de proporcionalidad. De aquí que, para muchos materiales, a los dos límites se les asigne el mismo valor numérico. En el caso del acero dulce, el esfuerzo de fluencia también está muy cercano al límite de proporcionalidad, tal que para fines prácticos el esfuerzo de fluencia, el límite elástico y el límite de proporcionalidad se suponen iguales. Por supuesto, esta situación no es válida para todos los materiales. El caucho es un notable ejemplo de un material que es elástico mucho más allá de su límite de proporcionalidad.

La característica de un material por la cual experimenta deformaciones unitarias inelásticas, más allá de la deformación unitaria en el límite elástico, se conoce como **plasticidad**. Por tanto, en la curva esfuerzo-deformación unitaria de la figura 1.18a tenemos una región elástica seguida de una región plástica. Cuando suceden deformaciones unitarias grandes en un material dúctil cargado en la región plástica, se dice que el material experimenta **flujo plástico.**

Carga repetida de un material

Si el material permanece dentro del rango elástico, se puede cargar, descargar y cargar de nuevo sin cambiar significativamente su comportamiento. Sin embargo, cuando está cargado en el rango plástico, la estructura interna del material se altera y cambian sus propiedades. Por ejemplo, ya hemos observado que se da una deformación unitaria permanente en la muestra después de la descarga desde la región plástica (figura 1.18b). Ahora suponga que el material se **recarga** después de esa descarga (figura 1.19). La nueva carga inicia en el punto *C* en el diagrama y continúa hacia arriba hasta el punto *B*, el punto en el cual comenzó la descarga durante el primer ciclo de carga. Entonces el material sigue la curva original de esfuerzo-deformación unitaria hacia el punto *F*. Así, para la segunda carga, podemos imaginar que

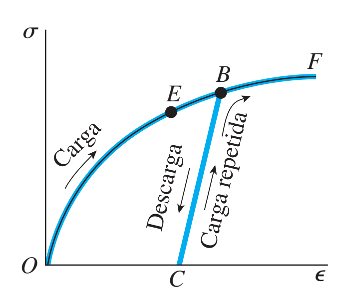


FIGURA 1.19 Carga repetida de un material y elevación de los límites elástico y de proporcionalidad.

tenemos un diagrama nuevo de esfuerzo-deformación unitaria con su origen en el punto *C*.

Durante la segunda carga el material se comporta de una manera linealmente elástica de *C* a *B*, donde la pendiente de la recta *CB* es igual que la pendiente de la tangente a la curva original de carga, en el origen *O*. Ahora el límite de proporcionalidad está en el punto *B*, el cual está mayor esfuerzo que el límite elástico original (punto *E*). Así, al estirar un material como el acero o el aluminio en el rango inelástico o plástico, *cambian las propiedades del material* —aumenta la región linealmente elástica, aumenta el límite de proporcionalidad y aumenta también el límite elástico—. Sin embargo, la ductilidad se reduce debido a que en el "nuevo material" la cantidad de fluencia más allá del límite elástico (de *B* a *F*) es menor que en el material original (de *E* a *F*).*

Termofluencia

Los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria descritos antes se obtuvieron a partir de ensayos de tensión en los que se aplicaba carga y descarga estática a las muestras y el paso del tiempo no entró en nuestros análisis. No obstante, cuando los materiales se cargan durante periodos largos, algunos de ellos desarrollan deformaciones unitarias adicionales y se dice que presentan **termofluencia.**

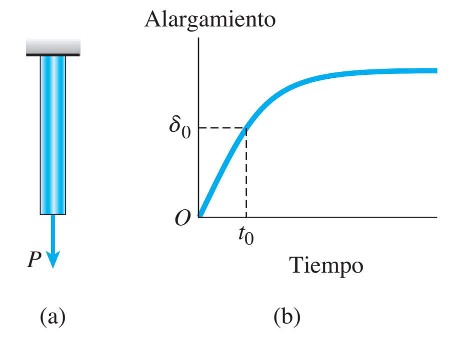


FIGURA 1.20 Termofluencia en una barra sometida a una carga constante.

Este fenómeno se manifiesta de diversas maneras. Por ejemplo, suponga que una barra vertical (figura 1.20a) se carga lentamente mediante una fuerza *P*, produciendo un alargamiento igual a δ_0. Supongamos que la carga y el alargamiento correspondiente tiene lugar durante un intervalo que dura t_0 (figura 1.20b). Después del tiempo t_0, la carga permanece constante. Sin embargo, debido a la termofluencia, la barra puede alargarse en forma gradual, como se muestra en la figura 1.20b, aunque la carga no cambie. Este comportamiento sucede en muchos materiales, aunque algunas veces el cambio es demasiado pequeño para considerarlo.

Como otra manifestación de termofluencia, considere un alambre que se estira entre dos soportes inmóviles, de manera tal que tiene un esfuerzo de tensión inicial σ_0 (figura 1.21). Una vez más, denotaremos el tiempo durante el cual el alambre se alarga inicialmente como t_0. Con el paso del tiempo el esfuerzo en el alambre disminuye de manera gradual y termina alcanzando un valor constante, aun cuando los soportes en los extremos del alambre no se muevan. Este proceso se denomina **relajación** del material.

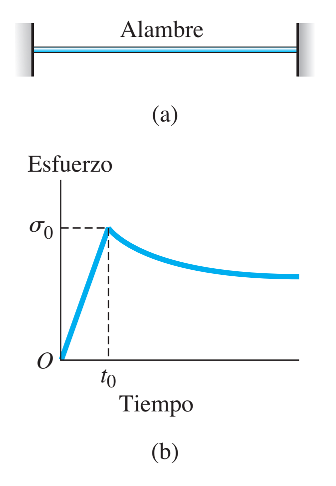


FIGURA 1.21 Relajación del esfuerzo en un alambre sometido a una deformación unitaria constante.

En general, la termofluencia es más importante a temperaturas elevadas que a temperaturas ordinarias y, por lo tanto, siempre se debe tomar en cuenta en el diseño de motores, chimeneas y otras estructuras que operan a temperaturas elevadas durante grandes periodos. Sin embargo, materiales como el acero, el concreto y la madera tendrán una termofluencia ligera aun a temperaturas ambiente. Por ejemplo, la termofluencia del concreto en el trascurso de grandes periodos puede crear ondulaciones en las calzadas de puentes debido a la flexión entre los apoyos. (Una solución es construir la calzada con una **contraflecha**, que es un desplazamiento inicial arriba de la horizontal, de modo que cuando ocurra la termofluencia, los tramos del puente bajen hasta su posición a nivel.)

---

*El estudio del comportamiento de materiales expuestos a diversas condiciones ambientales y sometidos a varias cargas es una rama importante de la mecánica aplicada. Para obtener información ingenieril más detallada sobre materiales, consulte un libro de texto enfocado en este tema.

1.5 ELASTICIDAD LINEAL, LEY DE HOOKE Y RELACIÓN DE POISSON

Muchos materiales estructurales, incluyendo la mayor parte de los metales, madera, plásticos y cerámicos, se comportan tanto de manera elástica como lineal cuando se cargan por primera vez. En consecuencia, sus curvas esfuerzo-deformación unitaria inician con una línea que pasa por el origen. Un ejemplo es la curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero estructural (figura 1.10), donde la región desde el origen O hasta el límite de proporcionalidad (punto A) es tanto lineal como elástica. Otros ejemplos son las regiones bajo los límites tanto de proporcionalidad como de elasticidad en los diagramas para el aluminio (figura 1.13), los materiales frágiles (figura 1.16) y el cobre (figura 1.17).

Cuando un material se comporta elásticamente y también presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria se dice que es **linealmente elástico.** Este tipo de comportamiento es muy importante en ingeniería por una razón obvia: al diseñar estructuras y máquinas para que trabajen en esta región, evitamos deformaciones permanentes debidas a la fluencia plástica.

Ley de Hooke

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria para una barra en tensión o compresión simple se expresa por la ecuación

$$\sigma = E\epsilon \tag{1.8}$$

en donde σ es el esfuerzo axial, ϵ es la deformación unitaria axial y E es una constante de proporcionalidad conocida como **módulo de elasticidad** del material. El módulo de elasticidad es la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación unitaria en la región linealmente elástica, como mencionamos en la sección 1.3. Como la deformación unitaria es adimensional, las unidades de E son las mismas que las del esfuerzo. Las unidades típicas de E son psi o ksi en unidades inglesas y pascales (o sus múltiplos) en unidades SI.

La ecuación $\sigma = E\varepsilon$ se conoce como **ley de Hooke,** nombrada en honor del famoso científico inglés Robert Hooke (1635-1703), quien fue la primera persona que investigó científicamente las propiedades elásticas de los materiales y probó varios de ellos como metal, madera, piedra, hueso y tendones. Hooke midió el alargamiento de alambres largos que soportaban pesos y observó que los estiramientos "siempre mantienen las mismas proporciones entre sí de acuerdo con los pesos que los causaron" (referencia 1.6). Así, Hooke estableció la relación lineal entre las cargas aplicadas y los alargamientos resultantes.

La ecuación (1.8) en realidad es una versión muy limitada de la ley de Hooke debido a que sólo se relaciona con los esfuerzos longitudinales y las deformaciones unitarias desarrolladas en tensión o compresión simple de la barra (*esfuerzo uniaxial*). Para tratar con estados más complicados de esfuerzos, como los encontrados en la mayoría de las estructuras y máquinas, debemos emplear ecuaciones más completas de la ley de Hooke (consulte las secciones 7.5 y 7.6).

El módulo de elasticidad tiene valores relativamente grandes para materiales que son muy rígidos, como los metales estructurales. El acero tiene

un módulo de elasticidad de aproximadamente 30 000 ksi (210 GPa) y el aluminio tiene valores típicos alrededor de 10 600 ksi (73 GPa). Los materiales más flexibles tienen un módulo menor —los valores para los plásticos varían de 100 a 2000 ksi (0.7 a 14 GPa)—. Algunos valores representativos de E se enlistan en la tabla H.2 del apéndice H. Para la mayor parte de los materiales el valor de E en compresión es casi el mismo que en tensión.

El módulo de elasticidad con frecuencia se llama **módulo de Young,** en honor de otro científico inglés, Thomas Young (1773-1829), quien introdujo la idea de un "módulo de la elasticidad" en conexión con una investigación de tensión y compresión de barras prismáticas. Sin embargo, su módulo no era el mismo que el empleado en la actualidad, debido a que comprendía propiedades de la barra así como del material (referencia 1.7).

Relación de Poisson

Cuando una barra prismática se somete a tensión, la elongación axial va acompañada de una **contracción lateral** (es decir, contracción normal a la dirección de la carga aplicada). Este cambio de forma se representa en la figura 1.22, donde en la parte (a) se muestra la barra antes de la carga y en la (b) después de la carga. En la parte (b), las líneas discontinuas representan la forma de la barra antes de la carga.

La contracción lateral se observa con facilidad estirando una banda de caucho, pero en los metales los cambios en las dimensiones laterales (en la región linealmente elástica) usualmente son demasiado pequeños para observarlos a simple vista. Sin embargo, se pueden detectar mediante dispositivos sensitivos de medición.

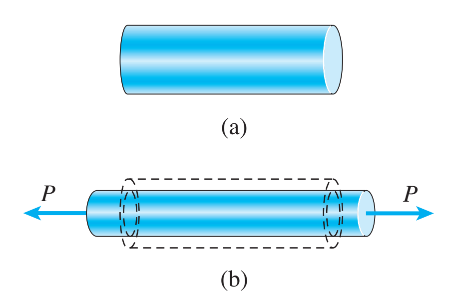


FIGURA 1.22 Alargamiento axial y contracción lateral de una barra prismática en tensión (a) antes de aplicar la carga y (b) barra después de aplicar la carga. (Las deformaciones de la barra se muestran muy exageradas.)

La **deformación unitaria lateral** ϵ' en cualquier punto en una barra es proporcional a la deformación unitaria axial ϵ en el mismo punto si el material es linealmente elástico. La relación de esas deformaciones unitarias es una propiedad del material conocida como **relación de Poisson.** Esta relación adimensional, que en general se denota por la letra griega ν (nu), se puede expresar mediante la ecuación

$$\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} \tag{1.9}$$

El signo menos agregado en la ecuación es para compensar el hecho de que las deformaciones unitarias lateral y axial por lo general tienen signos opuestos. Por ejemplo, la deformación unitaria axial en una barra en tensión es positiva y la deformación unitaria lateral es negativa (debido a que el ancho de la barra disminuye). Para compresión tenemos la situación opuesta ya que la barra se acorta (deformación unitaria axial negativa) y se hace más ancha (deformación unitaria lateral positiva). Por tanto, para materiales ordinarios la relación de Poisson tendrá un valor positivo.

Cuando se conoce la relación de Poisson para un material, podemos obtener la deformación unitaria lateral a partir de la deformación unitaria axial como sigue:

$$\epsilon' = -\nu\epsilon \tag{1.10}$$

Al emplear las ecuaciones (1.9) y (1.10) siempre debemos tener en cuenta que sólo se aplican a una barra sometida a esfuerzo axial, es decir, una barra para la cual el único esfuerzo es el esfuerzo normal σ en la dirección axial.

La relación de Poisson recibe su nombre en honor del matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840), quien intentó calcular esta relación mediante una teoría molecular de los materiales (referencia 1.8). Para materiales isotrópicos, Poisson determinó que $\nu = 1/4$. Cálculos más recientes basados en mejores modelos de estructura atómica dan como resultado $\nu = 1/3$. Esas dos cifras están cercanas a los valores reales medidos, que están en el rango de 0.25 a 0.35 para la mayor parte de los metales y para muchos otros materiales. Entre los materiales con un valor extremadamente bajo de la relación de Poisson se incluyen el corcho, para el cual ν es prácticamente cero y el concreto, para el cual ν es aproximadamente 0.1 o 0.2. Un límite teórico superior para la relación de Poisson es 0.5, como se explica en la sección 7.5. El caucho se acerca a este valor limitante.

En el apéndice H se da una tabla de relaciones de Poisson para varios materiales en el rango linealmente elástico (consulte la tabla H.2). Para la mayor parte de los fines se supone que la relación de Poisson es la misma tanto en tensión como en compresión.

Cuando las deformaciones unitarias en un material son grandes, la relación de Poisson cambia. Por ejemplo, en el caso del acero estructural la relación llega hasta 0.5 cuando ocurre la fluencia plástica. Así, la relación de Poisson permanece constante sólo en el rango linealmente elástico. Cuando el comportamiento del material es no lineal, la relación entre la deformación unitaria lateral y la deformación unitaria axial con frecuencia se denomina *relación de contracción*. Por supuesto, en el caso especial de comportamiento linealmente elástico, la relación de contracción es igual que la relación de Poisson.

Limitaciones

Para un material particular, la relación de Poisson permanece constante en todo el rango linealmente elástico, como ya se explicó antes. Por tanto, en cualquier punto dado en la barra prismática de la figura 1.22, la deformación unitaria lateral permanece proporcional a la deformación unitaria axial conforme la carga aumenta o disminuye. Sin embargo, para un valor dado de la carga (que significa que la deformación unitaria axial es constante en toda la barra), se deben cumplir condiciones adicionales si las deformaciones unitarias laterales deben ser las mismas en toda la barra.

En primer lugar, el material debe ser **homogéneo,** es decir, debe tener la misma composición (y en consecuencia las mismas propiedades elásticas) en cada punto. Sin embargo, tener un material homogéneo no significa que las propiedades elásticas en un punto particular sean las mismas en todas las *direcciones*. Por ejemplo, el módulo de elasticidad podría ser diferente en las direcciones axial y lateral, como en el caso de un poste de madera). Por tanto, una segunda condición para la uniformidad en las deformaciones unitarias laterales es que las propiedades elásticas deben ser las mismas en todas las direcciones *perpendiculares* al eje longitudinal. Cuando se cumplen las condiciones anteriores, como es el caso frecuente con los metales, las deformaciones unitarias laterales en una barra prismática sometida a una tensión uniforme serán las mismas en cada punto en la barra y también en todas las direcciones laterales.

Los materiales que tienen las mismas propiedades en todas las direcciones (ya sea axial, lateral o cualquier otra dirección) se llaman **isotrópicos.** Si las propiedades difieren en distintas direcciones, el material es **anisotrópicos (aeolotrópico).**

En este libro, todos los ejemplos y problemas se resuelven suponiendo que el material es linealmente elástico, homogéneo e isótropo, a menos que se especifique lo contrario.

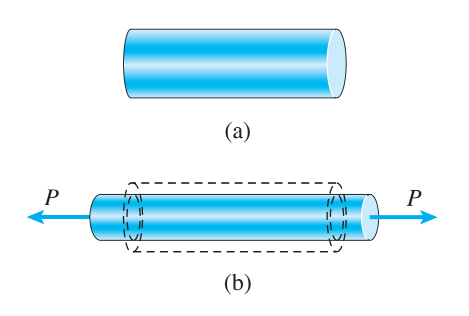


FIGURA 1.22 (Repetida.)

Ejemplo 1.3

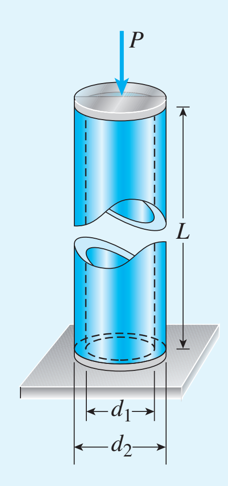


FIGURA 1.23 Ejemplo 1.3. Tubo de acero en compresión.

Un tubo de acero con longitud $L = 4.0$ ft, diámetro exterior $d_2 = 6.0$ in y diámetro interior $d_1 = 4.5$ in se comprime mediante una fuerza axial $P = 140$ k (figura 1.23). El material tiene un módulo de elasticidad $E = 30{,}000$ ksi y una relación de Poisson $\nu = 0.30$.

Determine las siguientes cantidades para el tubo: (a) su acortamiento δ, (b) la deformación unitaria lateral ϵ', (c) el aumento Δd_2 del diámetro exterior y el aumento Δd_1 del diámetro interior y (d) el aumento Δt en el espesor de la pared.

Solución

El área A de la sección transversal y el esfuerzo longitudinal σ se determinan como sigue:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right) = \frac{\pi}{4}\left[(6.0 \text{ in})^2 - (4.5 \text{ in})^2\right] = 12.37 \text{ in}^2$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} = -\frac{140 \text{ k}}{12.37 \text{ in}^2} = -11.32 \text{ ksi (compresión)}$$

Como el esfuerzo es mucho menor que el esfuerzo de fluencia (consulte la tabla H.3 del apéndice H), el material se comporta en forma linealmente elástica y la deformación unitaria axial se puede determinar a partir de la ley de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-11.32 \text{ ksi}}{30{,}000 \text{ ksi}} = -377.3 \times 10^{-6}$$

El signo de menos para la deformación unitaria indica que el tubo se acorta.

(a) Conociendo la deformación unitaria axial, ahora podemos determinar el cambio de longitud del tubo (consulte la ecuación 1.2)

$$\delta = \epsilon L = (-377.3 \times 10^{-6})(4.0 \text{ ft})(12 \text{ in/ft}) = -0.018 \text{ in}$$

De nuevo el signo negativo indica un acortamiento del tubo.

(b) La deformación unitaria lateral se obtiene de la relación de Poisson (consulte la ecuación 1.10):

$$\epsilon' = -\nu\epsilon = -(0.30)(-377.3 \times 10^{-6}) = 113.2 \times 10^{-6}$$

El signo positivo de ϵ' indica un aumento de las dimensiones laterales, como se esperaba para un esfuerzo de compresión.

(c) El aumento del diámetro exterior es igual a la deformación unitaria lateral por el diámetro:

$$\Delta d_2 = \epsilon' d_2 = (113.2 \times 10^{-6})(6.0 \text{ in}) = 0.000679 \text{ in}$$

De manera similar, el aumento del diámetro interior es

$$\Delta d_1 = \epsilon' d_1 = (113.2 \times 10^{-6})(4.5 \text{ in}) = 0.000509 \text{ in}$$

(d) El aumento del espesor de la pared se determina de la misma manera que el aumento de los diámetros; por tanto,

$$\Delta t = \epsilon' t = (113.2 \times 10^{-6})(0.75 \text{ in}) = 0.000085 \text{ in}$$

Este resultado se puede verificar observando que el aumento del espesor de la pared es igual a la mitad de la diferencia de los aumentos de los diámetros:

$$\Delta t = \frac{\Delta d_2 - \Delta d_1}{2} = \frac{1}{2}(0.000679 \text{ in} - 0.000509 \text{ in}) = 0.000085 \text{ in}$$

como se esperaba. Observe que en compresión las tres cantidades aumentan (diámetro exterior, diámetro interior y espesor).

Nota: los resultados numéricos obtenidos en este ejemplo ilustran que los cambios dimensionales en materiales estructurales ante condiciones normales de carga son extremadamente pequeños. A pesar de ello, los cambios de las dimensiones pueden ser importantes en ciertas clases de análisis (como el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas) y en la determinación experimental de esfuerzos y deformaciones unitarias.

1.6 ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACIÓN UNITARIA CORTANTE



Arriostramiento diagonal para un pasillo elevado; se muestra una horquilla y un pasador sometidos a cortante doble

En las secciones anteriores analizamos los efectos de los esfuerzos normales producidos por cargas axiales que actúan en barras rectas. Estos esfuerzos se denominan "esfuerzos normales" debido a que actúan en direcciones *perpendiculares* a la superficie del material. Ahora consideraremos otro tipo de esfuerzo, llamado **esfuerzo cortante,** que actúa de manera *tangencial* a la superficie del material.

Como un ejemplo de la acción de los esfuerzos cortantes, considere la conexión con perno que se muestra en la figura 1-24a. Esta conexión consiste de una barra plana A, una horquilla C y un perno B que pasa por agujeros en la barra y en la horquilla. Por la acción de las cargas de tensión P, la barra y la horquilla presionarán contra el perno en **compresión** y se desarrollarán esfuerzos de contacto, llamados **esfuerzos de compresión, esfuerzos en apoyos o esfuerzos de soporte.** Además, la barra y la horquilla tienden a *cortar* el perno, es decir, pasar a través de él, y esta tendencia es resistida por los esfuerzos cortantes en el perno. Como un ejemplo, considere el refuerzo para un pasillo peatonal elevado que se muestra en la fotografía.

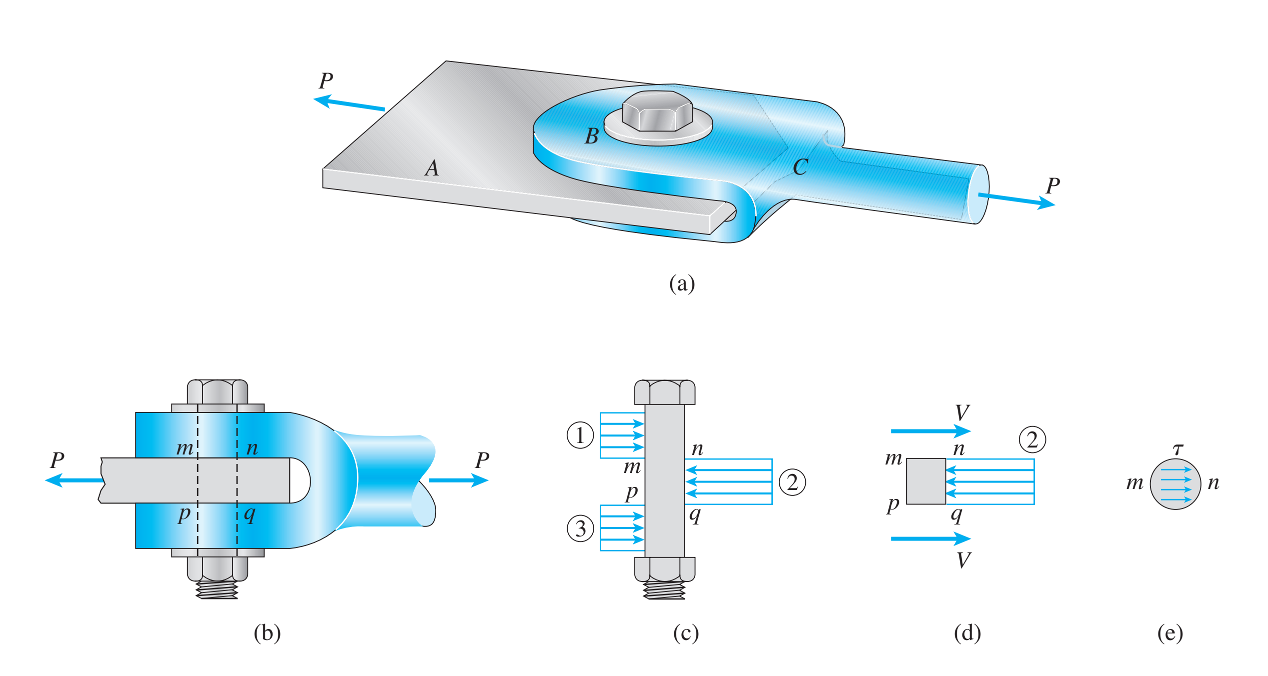


FIGURA 1.24 Conexión con perno en la que éste está sometido a cortante doble.

Para mostrar con más claridad las acciones de los esfuerzos de soporte y cortante, analicemos este tipo de conexión en una vista lateral esquemática (figura 1.24b). Con este esquema en mente, dibujamos un diagrama de cuerpo libre del perno (figura 1.24c). Los esfuerzos en los apoyos ejercidos por la horquilla contra el perno se muestran en el lado izquierdo del diagrama de cuerpo libre y se identifican con 1 y 3. Los esfuerzos de la barra aparecen en el lado derecho y se identifican con 2. La distribución real de los esfuerzos de soporte es difícil de determinar, por lo que se acostumbra suponer que están distribuidos uniformemente. Con base en la suposición de

distribución uniforme, podemos calcular un **esfuerzo de soporte promedio** σ_b dividiendo la fuerza de soporte total F_b entre el área de soporte A_b:

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} \tag{1.11}$$

El **área de soporte** se define como el área proyectada de la superficie curva de soporte. Por ejemplo, considere los esfuerzos de soporte identificados con 1. El área proyectada A_b sobre la cual actúan es un rectángulo que tiene una altura igual al espesor de la horquilla y un ancho igual al diámetro del perno. Además, la fuerza de soporte F_b representada por los esfuerzos identificados con 1 es igual a $P/2$. La misma área y la misma fuerza se aplican a los esfuerzos identificados con 3.

Ahora considere los esfuerzos de soporte entre la barra plana y el perno (los esfuerzos identificados con 2). Para estos esfuerzos, el área de soporte A_b es un rectángulo con una altura igual al espesor de la barra plana y con un ancho igual al diámetro del perno. La fuerza de soporte correspondiente F_b es igual a la carga P.

El diagrama de cuerpo libre de la figura 1.24c muestra que hay una tendencia a cortar el perno a lo largo de las secciones transversales *mn* y *pq*. A partir de un diagrama de cuerpo libre de la parte *mnpq* del perno (consulte la figura 1.24d), observamos que las fuerzas cortantes V actúan sobre las superficies cortadas del perno. En este ejemplo particular hay dos planos de corte (*mn* y *pq*) y, por tanto, se dice que el perno está en **cortante doble.** En cortante doble, cada una de las fuerzas de corte es igual a la mitad de la carga transmitida por el perno, es decir, $V = P/2$.

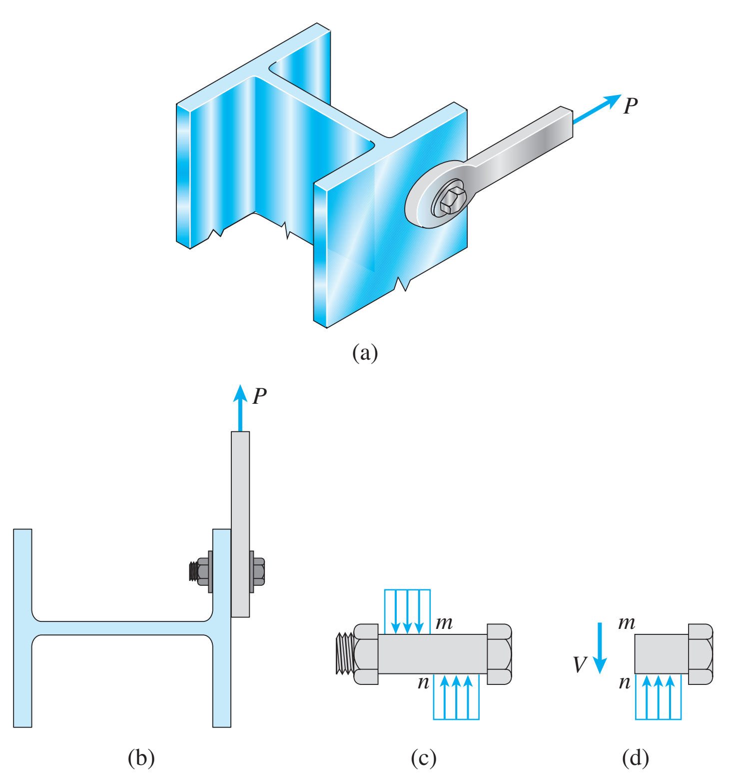


FIGURA 1.25 Conexión con perno en la que el perno está sometido a cortante simple.

Las fuerzas cortantes V son las resultantes de los esfuerzos cortantes distribuidos sobre el área de la sección transversal del perno. Por ejemplo, los esfuerzos cortantes que actúan en la sección transversal *mn* se muestran en la figura 1.24e. Estos esfuerzos actúan paralelos a la superficie de corte. La distribución exacta de los esfuerzos no se conoce, pero son máximos cerca del centro y se vuelven cero en ciertas ubicaciones en los bordes. Como se indica en la figura 1.24e, los esfuerzos cortantes se representan con la letra griega τ (tau).

Una conexión con perno en **cortante simple** se muestra en la figura 1.25a, donde la fuerza axial P en la barra metálica se transmite al patín de la columna de acero mediante un perno. Una vista de la sección transversal de la columna (figura 1.25b) muestra la conexión con más detalle. Además, un bosquejo del perno (figura 1.25c) muestra la distribución supuesta de los esfuerzos de soporte que actúan en el perno. Como ya se mencionó, la distribución real de estos esfuerzos de soporte es mucho más compleja que la mostrada en la figura. Además, también se desarrollan esfuerzos de soporte contra las superficies internas de la cabeza del perno y de la tuerca. Así, la figura 1.25c *no* es un diagrama de cuerpo libre, ya que sólo se muestran los esfuerzos de soporte idealizados actuando en el vástago del perno.

Al cortar el perno en la sección *mn* obtenemos el diagrama que se muestra en la figura 1.25d. Este diagrama incluye la fuerza cortante V (igual a la carga P) que actúa sobre la sección transversal del perno. Como ya se señaló, esta fuerza cortante es la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan en el área de la sección transversal del perno.

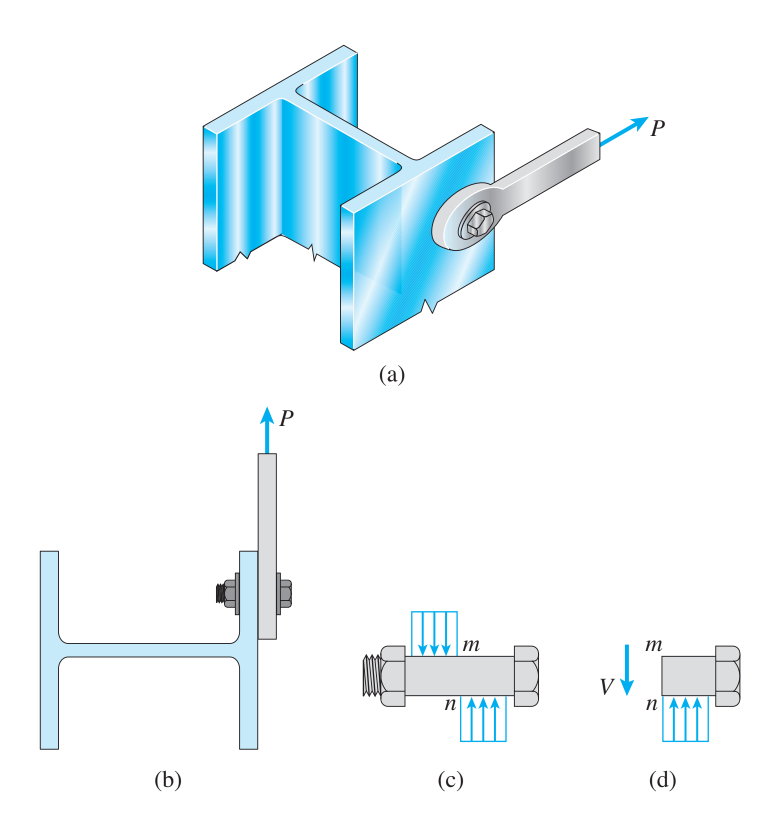


FIGURA 1.25 (Repetida.)

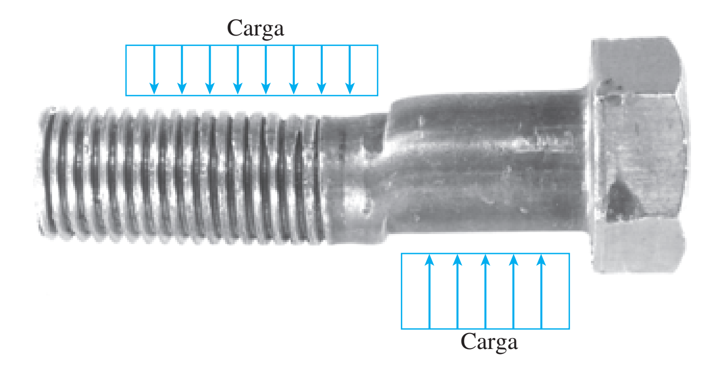


FIGURA 1.26 Falla de un perno en cortante simple.

La deformación de un perno, cargado casi hasta su fractura en cortante simple se muestra en la figura 1.26 (compare con la figura 1.25c).

En las explicaciones anteriores de conexiones con perno ignoramos la **fricción** (producida al apretar los pernos) entre los elementos de conexión. La presencia de fricción significa que parte de la carga es soportada por las fuerzas de fricción, y por ende reducen las cargas en los pernos. Como las fuerzas de fricción son poco confiables y difíciles de estimar, es práctica común pecar de conservador y omitirlas en los cálculos.

El **esfuerzo cortante promedio** sobre la sección transversal de un perno se obtiene dividiendo la fuerza cortante total V entre el área A de la sección transversal sobre la que actúa, como sigue:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{A} \tag{1.12}$$

En el ejemplo de la figura 1.25, que muestra un perno en cortante simple, la fuerza cortante V es igual a la carga P y el área A es el área de la sección transversal del perno. Sin embargo, en el ejemplo de la figura 1.24, donde el perno está en cortante doble, la fuerza cortante V es igual a $P/2$.

De la ecuación (1.12) observamos que los esfuerzos cortantes, al igual que los esfuerzos normales, representan una intensidad de la fuerza o fuerza por unidad de área. Así, las **unidades** del esfuerzo cortante son las mismas que para el esfuerzo normal, que son, psi o ksi en unidades inglesas y pascales o sus múltiplos en unidades SI.

Las configuraciones de carga que se muestran en las figuras 1.24 y 1.25 son ejemplos de **cortante directo** (o *cortante simple*) en los cuales los esfuerzos cortantes se originan por la acción directa de las fuerzas al tratar de cortar a través del material. El cortante directo se origina en el diseño de pernos, pasadores, remaches, cuñas, soldaduras y juntas pegadas.

También se producen esfuerzos cortantes de una manera indirecta cuando los elementos se someten a tensión, torsión y flexión, como se analiza más adelante en las secciones 2.6, 3.3 y 5.8, respectivamente.

Igualdad de los esfuerzos cortantes en planos perpendiculares

Para obtener una representación más completa de la acción de los esfuerzos cortantes, consideremos un elemento pequeño de material en la forma de un paralelepípedo rectangular con longitudes de sus lados a, b y c en las direc-

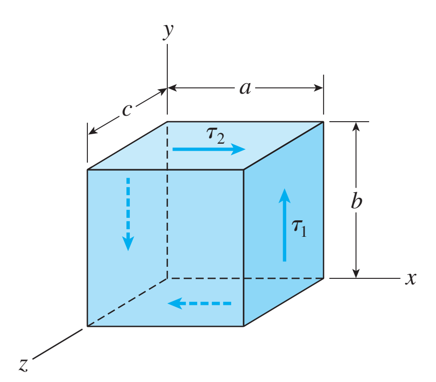


FIGURA 1.27 Elemento pequeño de material sometido a esfuerzos cortantes.

ciones x, y y z, respectivamente (figura 1.27).* Las caras anterior y posterior de este elemento están libres de esfuerzo.

Ahora suponga que un esfuerzo cortante τ_1 está distribuido uniformemente sobre la cara derecha, que tiene un área bc. A fin de que el elemento esté en equilibrio en la dirección y, la fuerza cortante total $\tau_1 bc$ que actúa sobre la cara derecha se debe equilibrar por una fuerza cortante igual pero en dirección opuesta en la cara izquierda. Como las áreas de estas dos caras son iguales, se deduce que los esfuerzos cortantes sobre las dos caras deben ser iguales.

Las fuerzas $\tau_1 bc$ que actúan sobre las caras laterales izquierda y derecha (figura 1.27) forman un par que tiene un momento con respecto al eje z, de magnitud $\tau_1 abc$, que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en la figura.** Para el equilibrio de los elementos se requiere que este momento esté equilibrado por un momento igual y opuesto resultante de los esfuerzos cortantes actuando sobre las caras superior e inferior del elemento. Si representamos los esfuerzos sobre las caras superior e inferior como τ_2, observamos que las fuerzas cortantes horizontales son iguales a $\tau_2 ac$. Estas fuerzas forman un par en el sentido de las manecillas del reloj de momento $\tau_2 abc$. Del equilibrio de momentos del elemento con respecto al eje z, observamos que $\tau_1 abc$ es igual a $\tau_2 abc$, o

$$\tau_1 = \tau_2 \tag{1.13}$$

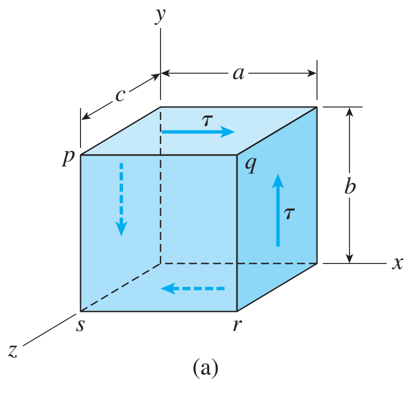
Por tanto, las magnitudes de los cuatro esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento son iguales, como se muestra en la figura 1.28a.

En resumen, hemos llegado a las siguientes observaciones generales acerca de los esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento rectangular:

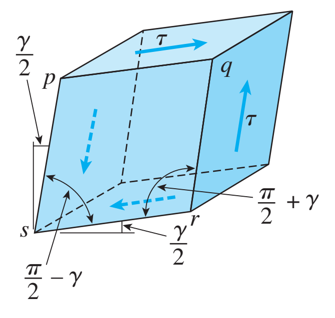
1. Los esfuerzos cortantes sobre caras opuestas (y paralelas) de un elemento son iguales en magnitud y opuestas en dirección.
2. Los esfuerzos cortantes sobre caras adyacentes (y perpendiculares) de un elemento son de igual magnitud y tienen direcciones tales que ambos esfuerzos apuntan alejándose de la línea de intersección de las caras.

Estas observaciones se obtuvieron para un elemento sujeto sólo a esfuerzos cortantes (no esfuerzos normales), como se representa en las figuras 1.27 y 1.28. Este estado de esfuerzo se denomina **cortante puro** y se describirá más adelante con más detalle (sección 3.5).

Para la mayor parte de los fines, las conclusiones anteriores son válidas aun cuando los esfuerzos normales actúen sobre las caras del elemento. La razón es que los esfuerzos sobre caras opuestas de un elemento pequeño usualmente son iguales en magnitud y opuestos en dirección; y de aquí que no modifiquen las ecuaciones de equilibrio empleadas para llegar a las conclusiones anteriores.



(a)



(b)

FIGURA 1.28 Elemento de material sometido a esfuerzos y deformaciones unitarias en cortante.

*Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos; así, un paralelepípedo tiene seis caras, cada una de ellas es un paralelogramo. Caras opuestas son paralelas y paralelogramos idénticos. Un **paralelepípedo rectangular** tiene todas sus caras en la forma de rectángulos.

Un **par consiste en dos fuerzas paralelas que son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

Deformación unitaria cortante

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento de material (figura 1.28a) van acompañados de *deformaciones unitarias cortantes*. Como una ayuda para visualizar esas deformaciones, observamos que los esfuerzos cortantes no tienen una tendencia a alargar o acortar el elemento en las direcciones x, y y z —en otras palabras, las longitudes de los lados del elemento no cambian—. Más bien, los esfuerzos cortantes producen un cambio en la *forma* del elemento (figura 1.28b). El elemento original, que es un paralelepípedo rectangular, se deforma en un paralelepípedo oblicuo y las caras anterior y posterior se transforman en romboides.*

Debido a esta deformación, cambian los ángulos entre las caras laterales. Por ejemplo, los ángulos en los puntos q y s, que eran $\pi/2$ antes de la deformación, se reducen en un ángulo pequeño γ a $\pi/2 - \gamma$ (figura 1.28b). Al mismo tiempo, los ángulos en los puntos p y r aumentan a $\pi/2 + \gamma$. El ángulo γ es una medida de la **distorsión** o cambio en la forma del elemento y se denomina **deformación unitaria cortante**. Como la deformación unitaria cortante es un ángulo, por lo general se mide en grados o radianes.

Convenciones de signo para esfuerzos cortantes y deformaciones unitarias cortantes

Como ayuda para establecer convenciones de signo para los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias cortantes, necesitamos un esquema en el que se indiquen las diferentes caras de un elemento de esfuerzo (figura 1.28a). De ahora en adelante nos referiremos a las caras orientadas hacia las direcciones positivas de los ejes como las caras positivas del elemento. En otras palabras, una cara positiva tiene su normal exterior dirigida en la dirección positiva de un eje coordenado. Las caras opuestas son caras negativas. Por tanto, en la figura 1.28a, las caras derecha, superior y frontal son las caras x, y y z, respectivamente, y las caras opuestas son las caras negativas x, y y z.

Empleando la terminología descrita en el párrafo anterior, podemos estipular la convención de signos para los esfuerzos cortantes de la siguiente manera:

> *Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara positiva de un elemento es positivo si actúa en la dirección positiva de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en la dirección negativa de un eje. Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara negativa de un elemento es positivo si actúa en la dirección negativa de un eje y negativo si actúa en una dirección positiva.*

Así, todos los esfuerzos cortantes que se muestran en la figura 1.28a son positivos.

La convención de signos para las deformaciones unitarias en cortante es como sigue:

> *La deformación unitaria cortante en un elemento es positiva cuando se reduce el ángulo entre dos caras positivas (o dos caras negativas). La deformación unitaria es negativa cuando aumenta el ángulo entre dos caras positivas (o entre dos negativas).*

---

*Un **ángulo oblicuo** puede ser agudo o bien obtuso, pero *no* es un ángulo recto. Un **romboide** es un paralelogramo con ángulos oblicuos y lados adyacentes *no* iguales. (Un *rombo* es un paralelogramo con ángulos oblicuos y todos sus cuatro lados iguales, algunas veces denominado *figura con forma de diamante*).

Por tanto, las deformaciones unitarias que se muestran en la figura 1.28b son positivas y observamos que los esfuerzos cortantes positivos van acompañados de deformaciones unitarias cortantes positivas.

Ley de Hooke en cortante

Las propiedades de un material en cortante se pueden determinar de manera experimental a partir de ensayos de cortante directo o de ensayos de torsión. Estos últimos ensayos se realizan torciendo tubos circulares huecos, lo que produce un estado de cortante puro, como se explica más adelante en la sección 3.5. A partir de los resultados de esos ensayos, podemos trazar **diagramas de esfuerzo-deformación unitaria cortante** (es decir, diagramas de esfuerzo cortante τ en función de la deformación unitaria cortante γ). Estos diagramas son similares en forma a los diagramas de ensayos de tensión (σ en función de ϵ) para los mismos materiales, aunque difieren en las magnitudes.

De los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria cortante podemos obtener propiedades de los materiales como el límite de proporcionalidad, el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo último. Estas propiedades en cortante por lo general son casi de la mitad de magnitud que las correspondientes en tensión. Por ejemplo, el esfuerzo de fluencia para el acero estructural en cortante es de 0.5 a 0.6 veces el esfuerzo de fluencia en tensión.

Para muchos materiales, la parte inicial del diagrama de esfuerzo-deformación unitaria en cortante es una recta que pasa por el origen, al igual que en tensión. Para esta región linealmente elástica, el esfuerzo cortante y la deformación unitaria en cortante son proporcionales y, por lo tanto, tenemos la ecuación siguiente para la **ley de Hooke en cortante:**

$$\tau = G\gamma \tag{1.14}$$

en donde G es el **módulo de elasticidad en cortante** (también denominado *módulo de rigidez*).

El módulo de corte G tiene las mismas **unidades** que el módulo de tensión E, que son, psi o ksi en unidades inglesas y pascales (o sus múltiplos) en unidades SI. Para el acero dulce, los valores comunes de G son 11 000 ksi o 75 GPa; para aleaciones de aluminio, los valores comunes son 4000 ksi o 28 GPa. En la tabla H-2 del apéndice H se enlistan valores adicionales.

Los módulos de elasticidad en tensión y en cortante están relacionados por la ecuación siguiente:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{1.15}$$

en donde ν es la relación de Poisson. Esta relación, que se deducirá después, en la sección 3.6, muestra que E, G y ν no son propiedades elásticas independientes del material. Debido a que la relación de Poisson para materiales ordinarios se encuentra entre cero y un medio, de la ecuación (1.15) observamos que G debe ser de un tercio a un medio de E.

Los siguientes ejemplos ilustran algunos análisis típicos que comprenden los efectos del esfuerzo cortante. El ejemplo 1.4 tiene que ver con esfuerzos cortantes en una placa, el ejemplo 1.5 trata de esfuerzos de soporte y cortantes en pasadores y pernos, y el ejemplo 1.6 implica determinar los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias cortantes en una placa elastomérica de soporte sometida a una fuerza cortante horizontal.

Ejemplo 1.4

En la figura 1.29a se muestra un punzón para hacer agujeros en placas de acero. Suponga que se utiliza un punzón con un diámetro $d = 20$ mm para hacer un agujero en una placa de 8 mm de espesor, como se muestra en la vista transversal correspondiente (figura 1.29b).

Si se requiere de una fuerza $P = 110$ kN para hacer el agujero, ¿cuál es el esfuerzo cortante promedio en la placa y el esfuerzo de compresión promedio en el punzón?

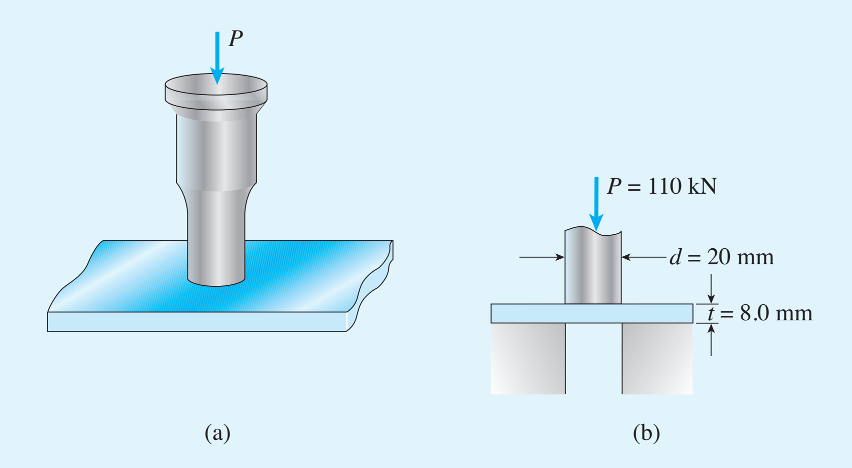


FIGURA 1.29 Ejemplo 1.4. Realización de un agujero con punzón en una placa de acero.

Solución

El esfuerzo cortante promedio en la placa se obtiene dividiendo la fuerza P entre el área en cortante de la placa. El área en cortante A_s es igual a la circunferencia del agujero por el espesor de la placa, o

$$A_s = \pi dt = \pi(20 \text{ mm})(8.0 \text{ mm}) = 502.7 \text{ mm}^2$$

en donde d es el diámetro del punzón y t es el espesor de la placa. Por lo tanto, el esfuerzo cortante promedio en la placa es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A_s} = \frac{110 \text{ kN}}{502.7 \text{ mm}^2} = 219 \text{ MPa}$$

El esfuerzo de compresión promedio en el punzón es

$$\sigma_c = \frac{P}{A_{\text{punzón}}} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{110 \text{ kN}}{\pi(20 \text{ mm})^2/4} = 350 \text{ MPa}$$

en donde $A_{\text{punzón}}$ es el área de la sección transversal del punzón.

Nota: este análisis está muy idealizado debido a que ignoramos los efectos de impacto que ocurren cuando se penetra una placa con un punzón. (Para incluirlos se requiere una metodología de análisis que están más allá del alcance de la mecánica de materiales.)

Ejemplo 1.5

Un puntal S de acero que sirve como riostra para un malacate marino transmite una fuerza de compresión $P = 12$ k a la plataforma de un muelle (figura 1.30a). El puntal tiene una sección transversal hueca con espesor de pared $t = 0.375$ in (figura 1.30b) y el ángulo θ entre el puntal y la horizontal es 40°. Un pasador que atraviesa el puntal transmite la fuerza de compresión del puntal a dos placas de unión G que están soldadas a la placa base B. Cuatro pernos de anclaje sujetan la placa base a la plataforma.

El diámetro del pasador es $d_{pasador} = 0.75$ in, el espesor de las placas de unión es $t_G = 0.625$ in, el espesor de la placa base es $t_B = 0.375$ in y el diámetro de los pernos de anclaje es $d_{perno} = 0.50$ in.

Determine los esfuerzos siguientes: (a) el esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador, (b) el esfuerzo cortante en el pasador, (c) el esfuerzo de soporte entre el pasador y las placas de unión, (d) el esfuerzo de soporte entre los pernos de anclaje y la placa base y (e) el esfuerzo cortante en los pernos de anclaje. (No tenga en cuenta la fricción entre la placa base y la plataforma.)

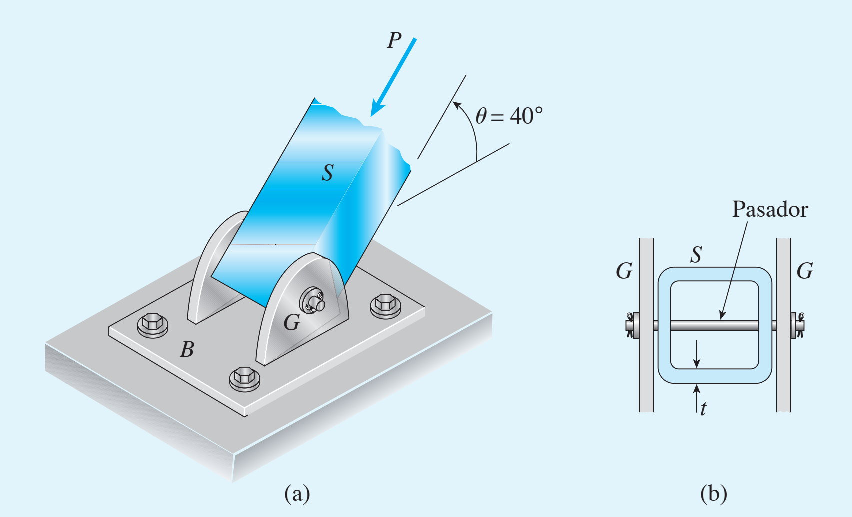


FIGURA 1.30 Ejemplo 1.5. (a) Conexión con pasador entre el puntal S y la placa base B. (b) Sección transversal a través del puntal S.

Solución

(a) *Esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador*. El valor promedio del esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador se determina dividiendo la fuerza en el puntal entre el área total de soporte del puntal contra el pasador. Ésta última es igual al doble del espesor del puntal (debido a que el soporte se tiene en dos ubicaciones) por el diámetro del pasador (consulte la figura 1.30b). Por tanto, el esfuerzo de soporte es

$$\sigma_{b1} = \frac{P}{2td_{perno}} = \frac{12\text{ k}}{2(0.375\text{ in})(0.75\text{ in})} = 21.3\text{ ksi}$$



Este esfuerzo de soporte no es excesivo para un puntal de acero estructural.

(b) *Esfuerzo cortante en el pasador*. Como se observa en la figura 1.30b, el pasador tiende a cortarse en dos planos, que son los planos entre el puntal y las placas de unión. Por tanto, el esfuerzo cortante promedio en el pasador (que está en cortante doble) es igual a la carga total aplicada al pasador dividida entre dos veces el área de su sección transversal.

$$\tau_{\text{pasador}} = \frac{P}{2\pi d_{\text{pasador}}^2/4} = \frac{12 \text{ k}}{2\pi(0.75 \text{ in})^2/4} = 13.6 \text{ ksi}$$

Normalmente el pasador se fabricaría con acero de alta resistencia (esfuerzo de fluencia en tensión mayor que 50 ksi) y con facilidad podría soportar este esfuerzo cortante (el esfuerzo de fluencia en cortante usualmente es al menos 50% del esfuerzo de fluencia en tensión).

(c) *Esfuerzo de soporte entre el pasador y las placas de unión*. El pasador se apoya contra las placas de unión en dos puntos, por tanto el área de soporte es el doble del espesor de las placas de unión por el diámetro del pasador; entonces,

$$\sigma_{b2} = \frac{P}{2t_G d_{\text{pasador}}} = \frac{12 \text{ k}}{2(0.625 \text{ in})(0.75 \text{ in})} = 12.8 \text{ ksi}$$

que es menor que el esfuerzo de soporte entre el puntal y el pasador (21.3 ksi).

(d) *Esfuerzo de soporte entre los pernos de anclaje y la placa base*. La componente vertical de la fuerza P (consulte la figura 1.30a) se transmite a la plataforma por soporte directo entre la placa base y la plataforma. Sin embargo, la componente horizontal se transmite a través de los pernos de anclaje. El esfuerzo de soporte promedio entre la placa base y los pernos de anclaje es igual a la componente horizontal de la fuerza P dividida entre el área de soporte de los cuatro pernos. El área de soporte para un perno es igual al espesor de la placa base por el diámetro del perno. En consecuencia, el esfuerzo de soporte es

$$\sigma_{b3} = \frac{P \cos 40°}{4t_B d_{\text{perno}}} = \frac{(12 \text{ k})(\cos 40°)}{4(0.375 \text{ in})(0.50 \text{ in})} = 12.3 \text{ ksi}$$

(e) *Esfuerzo cortante en los pernos de anclaje*. El esfuerzo cortante promedio en los pernos de anclaje es igual a la componente horizontal de la fuerza P dividida entre el área total de la sección transversal de los cuatro pernos (observe que cada perno está sometido a cortante simple). Por lo tanto,

$$\tau_{\text{perno}} = \frac{P \cos 40°}{4\pi d_{\text{perno}}^2/4} = \frac{(12 \text{ k})(\cos 40°)}{4\pi(0.50 \text{ in})^2/4} = 11.7 \text{ ksi}$$

Cualquier fricción entre la placa base y la plataforma reduciría la carga sobre los pernos de anclaje.

Ejemplo 1.6

Una placa de soporte del tipo empleado para sostener máquinas y trabes de puentes consiste en un material linealmente elástico (por lo general un elastómero como el caucho) cubierto con una placa de acero (figura 1.31a). Suponga que el espesor del elastómero es h, que las dimensiones de la placa son $a \times b$ y que la placa está sometida a una fuerza cortante horizontal V.

Obtenga fórmulas para el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en el elastómero y el desplazamiento horizontal d de la placa (figura 1.31b).

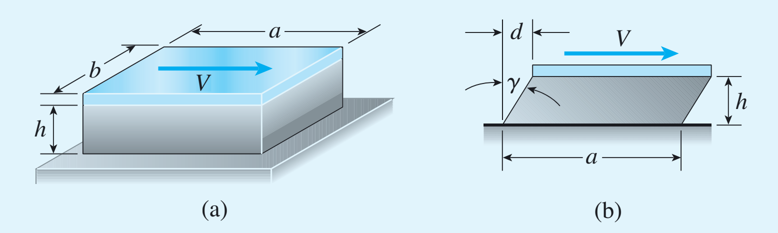


FIGURA 1.31 Ejemplo 1.6. Placa de soporte en cortante.

Solución

Suponga que los esfuerzos cortantes en el elastómero están distribuidos uniformemente en todo el volumen del mismo. Entonces el esfuerzo cortante sobre cualquier plano horizontal a través del elastómero es igual a la fuerza cortante V dividida entre el área ab de la placa (figura 1.31a):

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{ab} \tag{1.16}$$

La deformación unitaria cortante correspondiente (de la ley de Hooke para cortante; ecuación 1.14) es

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{prom}}}{G_e} = \frac{V}{abG_e} \tag{1.17}$$

en donde G_e es el módulo de corte del material elastomérico. Por último, el desplazamiento horizontal d es igual a $h \tan \gamma$ (de la figura 1.31b):

$$d = h \tan \gamma = h \tan\left(\frac{V}{abG_e}\right) \tag{1.18}$$

En la mayor parte de las situaciones prácticas la deformación unitaria por cortante γ es un ángulo pequeño y en esos casos $\tan \gamma$ se puede sustituir por γ y obtenemos

$$d = h\gamma = \frac{hV}{abG_e} \tag{1.19}$$

Las ecuaciones (1.18) y (1.19) dan resultados aproximados del desplazamiento horizontal de la placa, debido a que se basan en la suposición de que el esfuerzo cortante y la deformación unitaria cortante son constantes en todo el volumen del material elastomérico. En realidad, el esfuerzo cortante es cero en los bordes del material (porque no hay esfuerzos cortantes sobre las caras verticales libres) y, por tanto, la deformación del material es más compleja que la representada en la figura 1.31b. Sin embargo, si la longitud a de la placa es grande en comparación con el espesor h del elastómero, los resultados anteriores son satisfactorios para fines de diseño.

1.7 ESFUERZOS Y CARGAS PERMISIBLES

La ingeniería se ha descrito apropiadamente como la *aplicación de la ciencia a los propósitos comunes de la vida*. Al cumplir esta misión, los ingenieros diseñan una variedad aparentemente sin fin de objetos para satisfacer las necesidades básicas de la sociedad. Esas necesidades incluyen vivienda, agricultura, transporte, comunicación y muchos otros aspectos de la vida moderna. Los factores que se deben considerar en el diseño incluyen funcionalidad, resistencia, apariencia, economía y efectos ambientales. Sin embargo, al estudiar la mecánica de materiales, nuestro interés principal de diseño es la **resistencia**, es decir, *la capacidad del objeto para soportar o trasmitir cargas*. Entre los objetos que deben soportar cargas se incluyen edificios, máquinas, recipientes, camiones, aeronaves, barcos y similares. Por simplicidad, nos referiremos a estos objetos como **estructuras;** por tanto, *una estructura es cualquier objeto que debe soportar o transmitir cargas*.

Factores de seguridad

Como se debe evitar la falla estructural, las cargas que una estructura debe soportar deben ser mayores que las cargas a que se someterá cuando esté en servicio. Como la *resistencia* es la habilidad de una estructura para resistir cargas, el criterio anterior se puede volver a plantear como sigue: *la resistencia real de una estructura debe ser mayor que la resistencia requerida*. La razón entre la resistencia real y la resistencia requerida se denomina **factor de seguridad** n:

$$\text{Factor de seguridad } n = \frac{\text{Resistencia real}}{\text{Resistencia requerida}} \tag{1.20}$$

Por supuesto, para evitar la falla el factor de seguridad debe ser mayor que 1.0. Dependiendo de las circunstancias, se utilizan factores de seguridad un poco mayores que 1.0 y hasta de 10.

La incorporación de factores de seguridad en el diseño no es un asunto simple, porque tanto la resistencia como la falla pueden tener significados distintos. La resistencia se puede medir mediante la capacidad de soporte de carga de una estructura o por el esfuerzo en el material. Falla puede significar la fractura y el derrumbe completo de una estructura, o puede significar que las deformaciones son tan grandes que la estructura ya no puede realizar sus funciones propuestas. Éste último tipo de falla puede presentarse con cargas mucho menores que las que ocasionan el desplome real.

En la determinación de un factor de seguridad también deben tomarse en cuenta aspectos como los siguientes: probabilidad de sobrecarga accidental de la estructura, por cargas que sobrepasan las cargas de diseño; tipos de cargas (estáticas o dinámicas); si las cargas se aplican una vez o se repiten; qué tan exactamente se conocen las cargas; posibilidades de falla

por fatiga; imprecisiones de construcción; variabilidad en la calidad de la mano de obra; variaciones en las propiedades de los materiales; deterioro debido a corrosión u otros efectos ambientales; precisión de los métodos de análisis; si la falla es gradual (con advertencia suficiente) o repentina (sin advertencia); consecuencias de la falla (daño menor o catástrofe mayor) y otras consideraciones de este tipo. Si el factor de seguridad es muy bajo, la probabilidad de falla será alta y la estructura será inaceptable; si es muy grande, la estructura será un desperdicio de materiales y tal vez inadecuada para su función (por ejemplo, podría ser muy pesada).

Debido a estas complejidades e incertidumbres, los factores de seguridad deben determinarse con una base probabilística. En general son establecidos por grupos de ingenieros experimentados que escriben los códigos y las especificaciones empleadas por otros diseñadores y en algunas ocasiones se promulgan como leyes. Las previsiones de códigos y especificaciones tienen el propósito de proporcionar niveles de seguridad razonables sin costos exorbitantes.

En el diseño de aeronaves se acostumbra hablar del **margen de seguridad** en lugar del factor de seguridad. El margen de seguridad se define como el factor de seguridad menos uno:

$$\text{Margen de seguridad} = n - 1 \tag{1.21}$$

El margen de seguridad con frecuencia se expresa como un porcentaje, caso en el cual el valor dado antes se multiplica por 100. Por tanto, una estructura que tiene un resistencia real que es 1.75 veces la requerida tiene un factor de seguridad de 1.75 y un margen de seguridad de 0.75 (o 75 por ciento). Cuando el margen de seguridad se reduce a cero o menos, la estructura (probablemente) fallará.

Esfuerzos permisibles

Los factores de seguridad se definen e implantan de diversas maneras. Para muchas estructuras, es importante que el material permanezca dentro del rango elástico a fin de evitar deformaciones permanentes cuando se remuevan las cargas. En estas condiciones el factor de seguridad se establece con respecto a la fluencia de la estructura. La fluencia inicia cuando el esfuerzo de fluencia se alcanza en *cualquier* punto dentro de la estructura. Por tanto, al aplicar un factor de seguridad con respecto al esfuerzo de fluencia (o resistencia a la fluencia), obtenemos un **esfuerzo permisible** (o *esfuerzo de trabajo*) que no se debe rebasar en la estructura. Por tanto,

$$\text{Esfuerzo permisible} = \frac{\text{Resistencia a la fluencia}}{\text{Factor de seguridad}} \tag{1.22}$$

O bien, para tensión y cortante, respectivamente,

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_Y}{n_1} \quad \text{y} \quad \tau_{perm} = \frac{\tau_Y}{n_2} \qquad (1.23a,b)$$

donde σ_Y y τ_Y son los esfuerzos de fluencia y n_1 y n_2 son los factores de seguridad correspondientes. En el diseño de edificios, un factor de seguridad común con respecto a la fluencia en tensión es 1.67; por lo que un acero dulce que tenga una resistencia a la fluencia de 36 ksi tiene un esfuerzo permisible de 21.6 ksi.

En ocasiones el factor de seguridad se aplica al **esfuerzo último** en vez de al esfuerzo de fluencia. Este método es adecuado para materiales frágiles, como el concreto y algunos plásticos, y para materiales sin un esfuerzo de fluencia bien definido, como la madera y los aceros de alta resistencia. En estos casos los esfuerzos permisibles en tensión y cortante son

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_U}{n_3} \quad \text{y} \quad \tau_{perm} = \frac{\tau_U}{n_4} \qquad (1.24a,b)$$

donde σ_U y τ_U son los esfuerzos últimos (o resistencias últimas). Los factores de seguridad con respecto a la resistencia última de un material, en general, son mayores que los basados en la resistencia a la fluencia. En el caso de acero dulce, un factor de seguridad de 1.67 con respecto a la fluencia corresponde a un factor de aproximadamente 2.8 con respecto a la resistencia última.

Cargas permisibles

Después que se han establecido los esfuerzos permisibles para un material o una estructura particular, se puede determinar la **carga permisible** sobre esa estructura. La relación entre la carga permisible y el esfuerzo permisible depende del tipo de estructura. En este capítulo nos interesan sólo las clases más elementales de estructuras, que son las barras en tensión o compresión y los pasadores (o pernos) en cortante directo y en soporte.

En estos tipos de estructuras los esfuerzos están distribuidos uniformemente (o al menos se *supone* que lo están) sobre un área. Por ejemplo, en el caso de una barra en tensión, el esfuerzo está distribuido uniformemente sobre el área de la sección transversal, siempre que la fuerza axial resultante actúe en el centroide de la sección transversal. Lo mismo es válido para una barra en compresión con la condición que no se le someta a una carga excéntrica que provoque pandeo. En el caso de un pasador sometido a cortante, sólo consideramos el esfuerzo cortante promedio sobre la sección transversal, que es equivalente a suponer que el esfuerzo cortante está distribuido uniformemente. De manera similar, sólo consideramos un valor promedio del esfuerzo de soporte que actúa sobre el área proyectada del pasador.

Por tanto, en los cuatro casos anteriores la **carga permisible** (también llamada *carga segura*) es igual al esfuerzo permisible por el área sobre la que actúa:

$$\text{Carga permisible} = (\text{Esfuerzo permisible})(\text{Área}) \qquad (1.25)$$

Para barras en *tensión* y *compresión* directa (sin pandeo), esta ecuación se convierte en

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A \qquad (1.26)$$

donde σ_{perm} es el esfuerzo normal permisible y A es el área de la sección transversal de la barra. Si la barra tiene un agujero, cuando se somete a tensión es usual que se emplee el *área neta.* El **área neta** es el área total de la sección transversal menos el área del agujero. Para compresión, se puede emplear el área total si por el agujero pasa un perno o un pasador que pueda transmitir los esfuerzos de compresión.

Para pasadores en *cortante directo*, la ecuación (1.25) se transforma en

$$P_{\text{perm}} = \tau_{\text{perm}} A \qquad (1.27)$$

en donde τ_{perm} es el esfuerzo cortante permisible y A es el área sobre la que actúa el esfuerzo cortante. Si el pasador está en cortante simple, el área es el de la sección transversal del pasador; en cortante doble, es el doble del área de la sección transversal.

Por último, la carga permisible basada en *soporte* es

$$P_{\text{perm}} = \sigma_b A_b \qquad (1.28)$$

en donde σ_b es el esfuerzo normal permisible y A_b es el área proyectada del pasador u otra superficie sobre la que actúan los esfuerzos de soporte.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se determinan las cargas permisibles cuando se conocen los esfuerzos permisibles del material.

Ejemplo 1.7

Una barra de acero que trabaja como barra de suspensión para maquinaria pesada en una fábrica, está acoplada a un soporte mediante la conexión con perno que se muestra en la figura 1.32. La parte principal del colgante tiene una sección transversal rectangular con un ancho $b_1 = 1.5$ in y un espesor $t = 0.5$ in. En la conexión con perno la barra de suspensión se alarga hasta un ancho $b_2 = 3.0$ in. El perno, que transfiere la carga de la barra a las dos placas de unión, tiene un diámetro $d = 1.0$ in.

Determine el valor permisible de la carga de tensión P en la barra de suspensión con base en las siguientes consideraciones:

(a) El esfuerzo de tensión permisible en la parte principal de la barra de suspensión es 16,000 psi.

(b) El esfuerzo de tensión permisible en la barra de suspensión en su sección transversal que pasa por el agujero del perno es 11,000 psi. (El esfuerzo permisible en esta sección es menor debido a las concentraciones de esfuerzos alrededor del agujero).

(c) El esfuerzo de soporte permisible entre la barra de suspensión y el perno es 26,000 psi.

(d) El esfuerzo cortante permisible en el perno es 6500 psi.

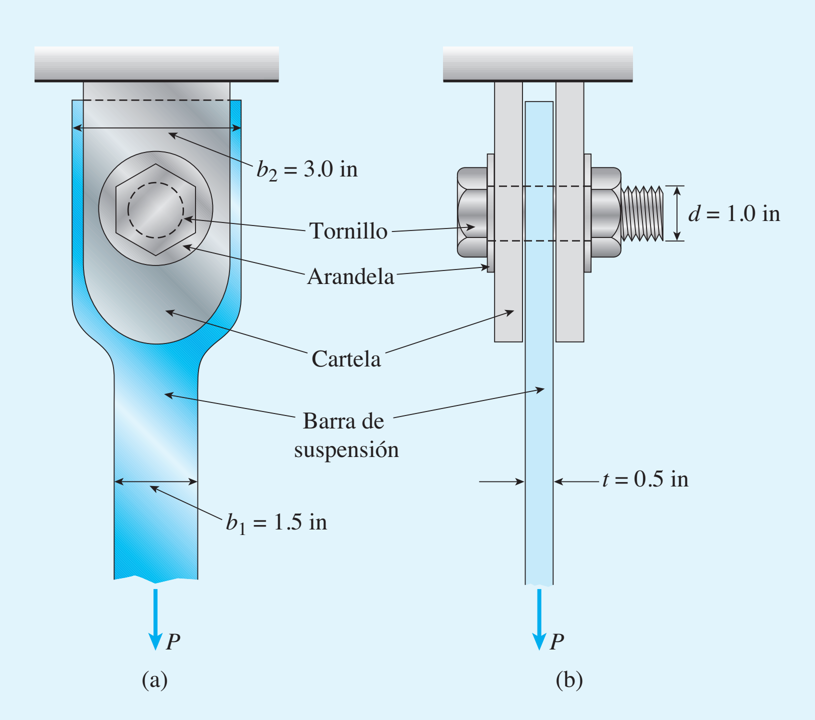


FIGURA 1.32 Ejemplo 1.7. Barra de suspensión vertical sometida a una carga de tensión P: (a) vista frontal de la conexión con perno y (b) vista lateral de la conexión.

Solución

(a) La carga permisible P_1 con base en el esfuerzo en la parte principal de la barra de suspensión es igual al esfuerzo permisible en tensión por el área de la sección transversal de la barra de suspensión (ecuación 1.26):

$$P_1 = \sigma_{perm} A = \sigma_{perm} b_1 t = (16{,}000 \text{ psi})(1.5 \text{ in} \times 0.5 \text{ in}) = 12{,}000 \text{ lb}$$

continúa

Una carga mayor que este valor provocará una tensión excesiva en la parte principal de la barra de suspensión, es decir, el esfuerzo real excederá el esfuerzo permisible y, en consecuencia, se reduciría el factor de seguridad.

(b) En la sección transversal de la barra de suspensión a través del perno debemos hacer un cálculo similar, pero con un esfuerzo permisible y un área diferentes. El área neta de la sección transversal es igual al ancho neto por el espesor. El ancho neto es igual al ancho total b_2 menos el diámetro d del agujero. Por tanto, la ecuación para la carga permisible P_2 en esta sección es

$$P_2 = \sigma_{perm} A = \sigma_{perm}(b_2 - d)t = (11{,}000 \text{ psi})(3.0 \text{ in} - 1.0 \text{ in})(0.5 \text{ in})$$
$$= 11{,}000 \text{ lb}$$

(c) La carga permisible basada en el soporte entre la barra de suspensión y el perno es igual al esfuerzo de soporte permisible por el área se soporte. El área de soporte es la proyección del área real de contacto, que a su vez es igual al diámetro del perno por el espesor de la barra de suspensión. Por tanto, la carga permisible (ecuación 1.28) es

$$P_3 = \sigma_b A = \sigma_b dt = (26{,}000 \text{ psi})(1.0 \text{ in})(0.5 \text{ in}) = 13{,}000 \text{ lb}$$

(d) Por último, la carga permisible P_4 con base en el cortante en el perno es igual al esfuerzo cortante permisible por el área de corte (ecuación 1.27). El área de corte es dos veces el área del perno debido a que el perno está en cortante doble; por tanto:

$$P_4 = \tau_{perm} A = \tau_{perm}(2)(\pi d^2/4) = (6500 \text{ psi})(2)(\pi)(1.0 \text{ in})^2/4 = 10{,}200 \text{ lb}$$

Ahora hemos determinado las cargas de tensión permisibles en la barra de suspensión con base en las cuatro condiciones dadas.

Al comparar los cuatro resultados anteriores, observamos que el valor menor de la carga es

$$P_{perm} = 10{,}200 \text{ lb}$$

Esta carga, que se basa en el cortante en el perno, es la carga de tensión permisible en la barra de suspensión.

1.8 DISEÑO POR CARGAS AXIALES Y CORTANTE DIRECTO

En la sección anterior analizamos la determinación de las cargas permisibles para estructuras simples y en secciones anteriores vimos cómo determinar esfuerzos, deformaciones unitarias y deformaciones en barras. La determinación de esas cantidades se conoce como **análisis**. En el contexto de la mecánica de materiales, el análisis consiste en determinar la *respuesta* de una estructura a cargas, cambios de temperatura y otras acciones físicas. Por respuesta de una estructura queremos decir los esfuerzos, las deformaciones unitarias y las deformaciones producidas por las cargas.

Respuesta también se refiere a la capacidad de soporte de carga de una estructura; por ejemplo, la carga permisible sobre una estructura es una forma de respuesta.

Se dice que una estructura es *conocida* (o *dada*) cuando tenemos una descripción física completa de ella, es decir cuando conocemos todas sus *propiedades*. Las propiedades de una estructura incluyen los tipos de elementos y cómo están dispuestos, las dimensiones de todos los elementos, los tipos de soportes y dónde se ubican, los materiales empleados y sus propiedades. Así, cuando se analiza una estructura, *se dan las propiedades y se determinará su respuesta*.

El proceso inverso se denomina **diseño**. Al diseñar una estructura, *debemos determinar las propiedades de la estructura a fin de que soporte las cargas y cumpla sus funciones previstas*. Por ejemplo, un problema de diseño común en ingeniería es determinar el tamaño de un elemento para soportar ciertas cargas dadas. En general, diseñar una estructura es un proceso más largo y más difícil que analizarla; de hecho, analizar una estructura, a menudo más de una vez, es parte característica del proceso de diseño.

En esta sección trataremos el diseño en su forma más elemental calculando los tamaños requeridos de elementos en tensión y compresión simple así como de pasadores y pernos cargados en cortante. En estos casos el proceso de diseño es muy directo. Si se conocen las cargas que se van a transmitir y los esfuerzos permisibles en los materiales, podemos calcular las áreas necesarias de los elementos a partir de la relación general siguiente (compárela con la ecuación 1.25):

$$\text{Área requerida} = \frac{\text{Carga por transmitir}}{\text{Esfuerzo permisible}} \tag{1.29}$$

Esta ecuación se puede aplicar a cualquier estructura en la que los esfuerzos estén distribuidos uniformemente sobre el área. (Su uso en la determinación del tamaño de una barra en tensión y el tamaño de un pasador en cortante se ilustra en el ejemplo 1.8 que sigue).

Además de consideraciones de **resistencia**, como se ejemplifica por la ecuación (1.29), es probable que el diseño de una estructura comprenda la **rigidez** y la **estabilidad**. Rigidez se refiere a la capacidad de la estructura para resistir cambios de forma (por ejemplo, para resistir alargamiento, flexión o torsión) y estabilidad se refiere a la habilidad de la estructura para resistir pandeo ante esfuerzos de compresión. En ocasiones son necesarias

limitaciones en la rigidez para evitar deformaciones excesivas, como deflexiones grandes de una viga que podrían interferir con su desempeño. El pandeo es la consideración principal en el diseño de columnas, que son elementos esbeltos en compresión (capítulo 11).

Otra parte del proceso de diseño es el **perfeccionamiento**, que es la tarea de diseñar la mejor estructura para cumplir con una meta particular, como peso mínimo. Por ejemplo, puede haber muchas estructuras que soportarán una carga dada, pero en algunas circunstancias la mejor estructura será la más ligera. Por supuesto, una meta como peso mínimo generalmente se debe equilibrar con consideraciones más generales, incluyendo los aspectos estético, económico, ambiental, político y técnico del proyecto de diseño particular.

Al analizar o diseñar una estructura, nos referimos a las fuerzas que actúan sobre ella ya sea como **cargas** o **reacciones.** Las cargas son *fuerzas activas* que se aplican a la estructura debido a alguna causa externa, como la gravedad, presión del agua, viento y movimiento del suelo por un terremoto. Las reacciones son *fuerzas pasivas* que se inducen en los soportes de la estructura, cuyas magnitudes y direcciones se determinan por la naturaleza de la propia estructura. Por tanto, las reacciones se deben calcular como parte del análisis, en tanto que las cargas se conocen de antemano.

El ejemplo 1.8, en las siguientes páginas, comienza con un repaso de los **diagramas de cuerpo libre** y de la estática elemental y concluye con el diseño de una barra en tensión y un pasador en cortante directo.

Al trazar diagramas de cuerpo libre es útil hacer la diferencia entre reacciones debidas a cargas y reacciones debidas a otras fuerzas aplicadas. Un esquema común es colocar una línea o línea inclinada, a través de la flecha cuando representa una fuerza reactiva, como se ilustra en la figura 1.34 del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.8

La armadura de dos barras *ABC* que se muestra en la figura 1.33 tiene soportes articulados en los puntos *A* y *C*, que están separados 2.0 m. Los elementos *AB* y *BC* son barras de acero, interconectadas por un pasador en el nodo *B*. La longitud de la barra *BC* es de 3.0 m. Un anuncio que pesa 5.4 kN está suspendido de la barra *BC* en los puntos *D* y *E*, que están ubicados a 0.8 m y 0.4 m, respectivamente, de los extremos de la barra.

Determine el área de la sección transversal necesaria de la barra *AB* y el diámetro necesario del pasador en el soporte *C* si los esfuerzos permisibles en tensión y cortante son 125 MPa y 45 MPa, respectivamente. (*Nota:* los pasadores en los soportes están en cortante doble. Además, no tome en cuenta los pesos de los elementos *AB* y *BC*.)

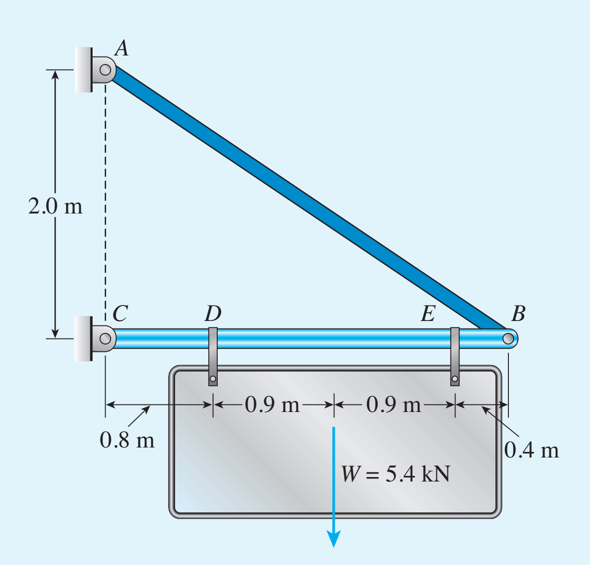


FIGURA 1.33 Ejemplo 1.8. Armadura de dos barras *ABC* que soportan un anuncio con peso *W*.

Solución

Los objetivos de este ejemplo son determinar los tamaños necesarios de la barra *AB* y del pasador en el soporte *C*. Como primer punto, debemos determinar la fuerza de tensión en la barra y la fuerza cortante que atúa sobre el pasador. Estas cantidades se encuentran a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio.

Reacciones: iniciamos con un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa (figura 1.34a). En este diagrama mostramos todas las fuerzas que actúan sobre la armadura, que son, las cargas del peso del anuncio y las fuerzas reactivas ejercidas por los soportes de los pasadores en *A* y *C*. Cada reacción se muestra mediante sus componentes horizontal y vertical, mostrando la reacción resultante mediante una línea discontinua. (Observe el uso de líneas a través de las flechas para distinguir las reacciones de las cargas).

La componente horizontal R_{AH} de la reacción en el soporte *A* se obtiene sumando momentos con respecto al punto *C*, como sigue (los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos):

$$\sum M_C = 0 \quad R_{AH}(2.0 \text{ m}) - (2.7 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) - (2.7 \text{ kN})(2.6 \text{ m}) = 0$$

continúa

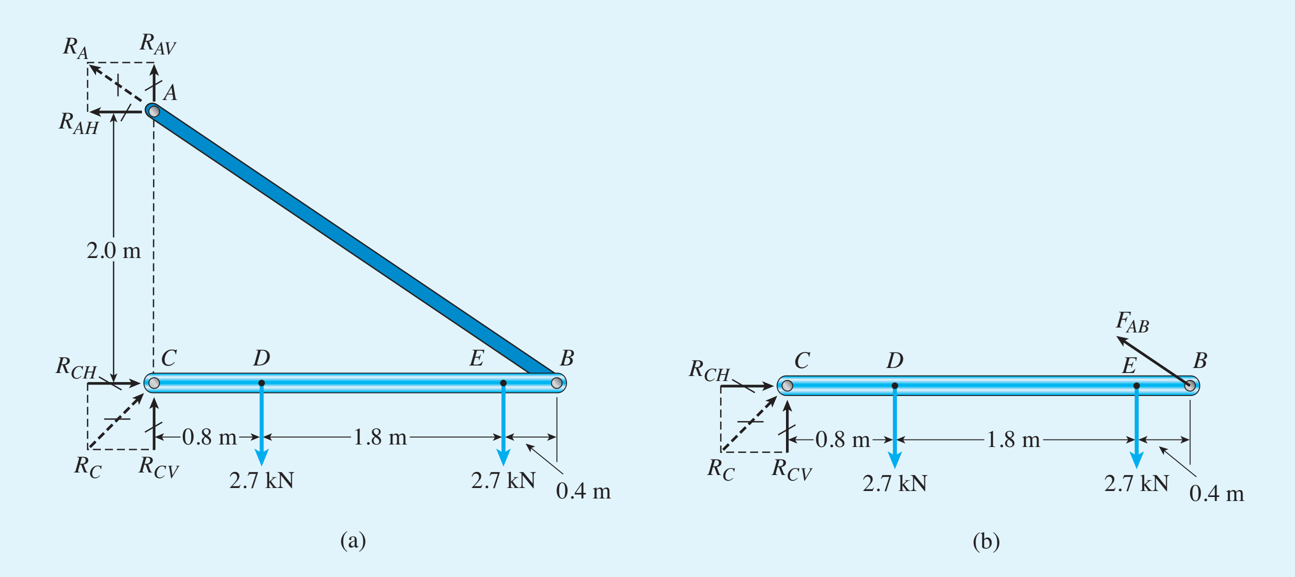


FIGURA 1.34 Diagramas de cuerpo libre para el ejemplo 1.8.

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$R_{AH} = 4.590 \text{ kN}$$

Enseguida sumamos las fuerzas en la dirección horizontal y tenemos

$$\sum F_{\text{horiz}} = 0 \qquad R_{CH} = R_{AH} = 4.590 \text{ kN}$$

Para obtener la componente vertical de la reacción en el soporte C podemos emplear un diagrama de cuerpo libre del elemento BC, como se muestra en la figura 1.34b. La suma de momentos con respecto al nodo B da la componente deseada de la reacción:

$$\sum M_B = 0 \qquad -R_{CV}(3.0 \text{ m}) + (2.7 \text{ kN})(2.2 \text{ m}) + (2.7 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) = 0$$
$$R_{CV} = 2.340 \text{ kN}$$

Ahora regresamos al diagrama de cuerpo libre de la armadura completa (figura 1.34a) y sumamos fuerzas en la dirección vertical para obtener la componente vertical R_{AV} de la reacción en A:

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \qquad R_{AV} + R_{CV} - 2.7 \text{ kN} - 2.7 \text{ kN} = 0$$
$$R_{AV} = 3.060 \text{ kN}$$

Como una verificación parcial de estos resultados, observamos que la razón R_{AV}/R_{AH} de las fuerzas que actúan en el punto A es igual a la razón de las componentes vertical y horizontal de la línea AB que es: 2.0 m/3.0 m o 2/3.

Conociendo las componentes horizontal y vertical de la reacción en A, podemos calcular la reacción misma (figura 1.34a):

$$R_A = \sqrt{(R_{AH})^2 + (R_{AV})^2} = 5.516 \text{ kN}$$

De manera similar, la reacción en el punto C se obtiene a partir de sus componentes R_{CH} y R_{CV}, como sigue:

$$R_C = \sqrt{(R_{CH})^2 + (R_{CV})^2} = 5.152 \text{ kN}$$

Fuerza de tensión en la barra AB. Como no tomamos en cuenta el peso de la barra AB, la fuerza de tensión F_{AB} en la barra es igual a la reacción en A (consulte la figura 1.34):

$$F_{AB} = R_A = 5.516 \text{ kN}$$

Fuerza cortante que actúa sobre el pasador en C. Esta fuerza cortante es igual a la reacción R_C (consulte la figura 1.34); por tanto,

$$V_C = R_C = 5.152 \text{ kN}$$

De esta manera, ahora hemos determinado la fuerza de tensión F_{AB} en la barra AB y la fuerza cortante V_C que actúa sobre el pasador en C.

Área necesaria de la barra. El área de la sección transversal necesaria de la barra AB se calcula dividiendo la fuerza de tensión entre el esfuerzo permisible, ya que el esfuerzo está distribuido uniformemente sobre la sección transversal (consulte la ecuación 1.29):

$$A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{5.516 \text{ kN}}{125 \text{ MPa}} = 44.1 \text{ mm}^2$$

La barra AB se debe diseñar con un área de sección transversal igual o mayor que 44.1 mm^2 a fin de que soporte el peso del anuncio, que es la única carga que consideramos. Si se incluyen otras cargas en los cálculos, el área necesaria será mayor.

Diámetro necesario del pasador. El área de la sección transversal necesaria del pasador en C, el cual está en cortante doble, es

$$A_{\text{pasador}} = \frac{V_C}{2\tau_{\text{perm}}} = \frac{5.152 \text{ kN}}{2(45 \text{ MPa})} = 57.2 \text{ mm}^2$$

de donde podemos calcular el diámetro requerido:

$$d_{\text{pasador}} = \sqrt{4A_{\text{pasador}}/\pi} = 8.54 \text{ mm}$$

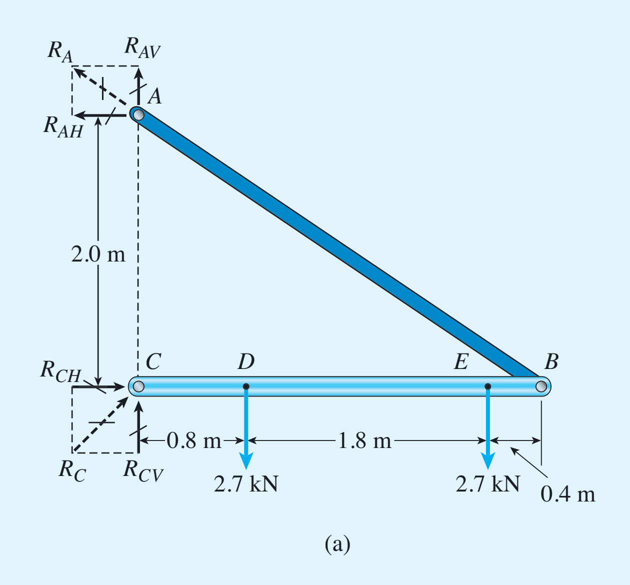
continúa

Se necesita un pasador con al menos este diámetro para soportar el peso del anuncio sin sobrepasar el esfuerzo cortante permisible.

Notas: en este ejemplo, omitimos intencionalmente en los cálculos el peso de la armadura. Sin embargo, una vez que se conozcan los tamaños de los elementos, se pueden calcular sus pesos e incluirlos en los diagramas de cuerpo libre de la figura 1.34.

Cuando se incluyen los pesos de las barras, el diseño del elemento *AB* se complica, debido a que ya no es una barra en tensión simple. En cambio, es una viga sometida tanto a flexión como a tensión. Existe una situación análoga para el elemento *BC*. No sólo debido a su propio peso, sino también al peso del anuncio, el elemento *BC* está sometido tanto a flexión como a compresión. El diseño de esos elementos debe esperar hasta que estudiemos los esfuerzos en vigas (capítulo 5).

En la práctica se tienen que considerar otras cargas además de los pesos de la armadura y del anuncio antes de tomar una decisión final sobre los tamaños de las barras y de los pasadores. Las cargas que podrían ser importantes incluyen cargas por viento, cargas por sismo y los pesos de los objetos que tendrían que soportar de manera temporal la armadura y el anuncio.



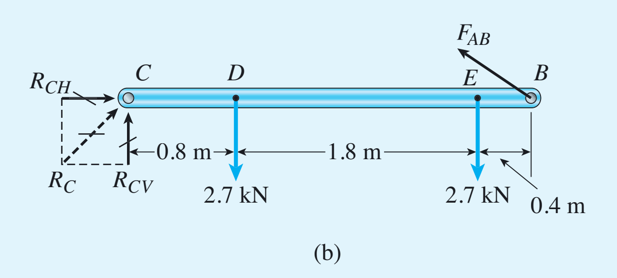


FIGURA 1.34 (Repetida.)

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En el capítulo 1 aprendimos sobre las propiedades mecánicas de los materiales de construcción. Calculamos esfuerzos y deformaciones unitarias normales en barras cargadas por cargas axiales centroidales y también esfuerzos y deformaciones unitarias en cortante (así como esfuerzos de soporte) en conexiones con pasador empleadas para ensamblar estructuras simples, como armaduras. También definimos los niveles permisibles del esfuerzo a partir de factores de seguridad apropiados y utilizamos estos valores para determinar las cargas permisibles que se podrían aplicar a la estructura.

Algunos de los conceptos importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

1. El objetivo principal de la mecánica de materiales es determinar los *esfuerzos,* las *deformaciones unitarias y* los *desplazamientos* en estructuras y sus componentes debidos a las cargas que actúan sobre ellos. Estos componentes incluyen barras con cargas axiales, ejes en torsión, vigas en flexión y columnas en compresión.
2. Las barras prismáticas sometidas a cargas de tensión o compresión que actúan en el centroide de su sección transversal (para evitar la flexión) experimentan *esfuerzos y deformaciones normales* y una extensión o bien una contracción proporcional a sus longitudes. Estos esfuerzos y deformaciones son *uniformes* excepto cerca de los puntos de aplicación de la carga donde se tienen esfuerzos o *concentraciones de esfuerzos* muy localizados.
3. Investigamos el *comportamiento mecánico* de varios materiales y trazamos el diagrama esfuerzo-deformación unitaria resultante, que representa información importante sobre el material. Los *materiales dúctiles* (como el acero dulce) tienen una relación inicial lineal entre el esfuerzo normal y la deformación unitaria normal (hasta el *límite de proporcionalidad*) y se dicen ser *linealmente elásticos* con el esfuerzo y la deformación unitaria relacionados por la *ley de Hooke* ($\sigma = E \cdot \epsilon$); también tienen un punto de fluencia bien definido. Otros materiales dúctiles (como aleaciones de aluminio) comúnmente no tienen un punto de fluencia bien definido, por lo que se puede determinar un esfuerzo de fluencia arbitrario empleando el *método de desplazamiento*.
4. Los materiales que fallan en tensión a valores relativamente bajos de deformación unitaria (como el concreto, piedra, fundición gris, la cerámica vidriada y una variedad de aleaciones metálicas) se clasifican como *frágiles*. Los materiales frágiles fallan sólo con poco alargamiento después del límite de proporcionalidad.
5. Si el material permanece dentro del rango elástico, se puede cargar, descargar y volver a cargar sin cambiar significativamente su comportamiento. Sin embargo, al cargar el material en el rango plástico su estructura interna se altera y cambian sus propiedades. El comportamiento al cargar y descargar los materiales depende de las propiedades de *elasticidad* y *plasticidad* del material, como el *límite elástico* y la posibilidad de (deformación residual) en el material. Las cargas sostenidas durante mucho tiempo pueden conducir a termofluencia y *relajación*.
6. El alargamiento axial de las barras cargadas en tensión va acompañada de una contracción lateral; la relación entre la deformación unitaria lateral y la deformación unitaria normal se conoce como *relación de Poisson*. Ésta permanece constante en todo el rango linealmente elástico, siempre que el material sea homogéneo e isotrópico. La mayoría de los ejemplos y problemas en el libro se resuelven con la suposición que el material es linealmente elástico, homogéneo e isotrópico.
7. Los *esfuerzos normales* actúan perpendiculares a la superficie del material y los *esfuerzos cortantes* actúan tangenciales a la superficie. Investigamos conexiones con perno entre placas en las que los pernos se sometieron a cortante simple o bien a cortante doble, así como a esfuerzos *de soporte promedio*. Los esfuerzos de soporte actúan sobre la proyección rectangular de la superficie curva de contacto real entre un perno y una placa.

continúa

8. Analizamos un elemento de material sometido a esfuerzos cortantes y deformaciones unitarias en cortante para estudiar un estado de esfuerzo referido como . Vimos que la deformación unitaria en cortante (γ) es una medida de la distorsión o cambio de forma del elemento en cortante puro. Estudiamos la ley de Hooke en cortante en la que el esfuerzo cortante (τ) está relacionado con la deformación unitaria en cortante mediante el módulo de elasticidad en corte (G), $\tau = G \cdot \gamma$. Observamos que E y G están relacionados y por lo tanto no son propiedades elásticas independientes del material.
9. La *resistencia* es la capacidad de una estructura o componente para soportar o transmitir cargas. Los *factores de seguridad* relacionan la resistencia real con la resistencia requerida de los elementos estructurales y toman en cuenta una variedad de incertidumbres, como variaciones en las propiedades de los materiales, magnitudes o distribuciones inciertas de las cargas, probabilidad de sobrecarga accidental, etcétera. Debido a estas incertidumbres, los factores de seguridad deben determinarse empleando métodos probabilísticos.
10. Los esfuerzos de fluencia o de nivel último se pueden dividir entre factores de seguridad para producir valores permisibles para emplearlos en el diseño. Para un elemento conectado con un perno en *tensión* axial, la carga permisible depende del esfuerzo permisible multiplicado por el área adecuada (por ejemplo, área neta de la sección transversal para barras sometidas a cargas de tensión centroidales, área de la sección transversal de un pasador para pasadores en cortante y área proyectada para pernos en soporte). Si la barra está en *compresión* no es necesario emplear el área neta de la sección transversal, pero el pandeo puede ser una consideración importante.
11. Por último, consideramos el *diseño*, que es el proceso iterativo mediante el cual se determina el tamaño apropiado de los elementos estructurales para cumplir con una variedad de *requisitos tanto de resistencia como de rigidez* para una estructura particular sometida a una variedad de cargas distintas. Sin embargo, la incorporación de factores de seguridad en el diseño no es asunto simple, debido a que los conceptos tanto de resistencia como de falla pueden tener significados distintos.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 1

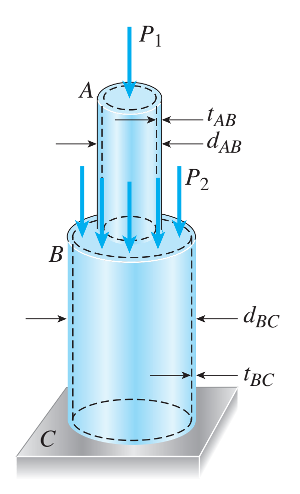
Esfuerzo normal y deformación normal unitaria

1.2.1 Un poste circular hueco *ABC* (consulte la figura) soporta una carga $P_1 = 1700$ lb que actúa en su parte superior. Una segunda carga P_2 está distribuida uniformemente alrededor de la placa de cubierta del poste en *B*. El diámetro y el espesor de las partes superior e inferior del poste son $d_{AB} = 1.25$ in, $t_{AB} = 0.5$ in, $d_{BC} = 2.25$ in y $t_{BC} = 0.375$ in, respectivamente.

(a) Calcule el esfuerzo normal σ_{AB} en la parte superior del poste.

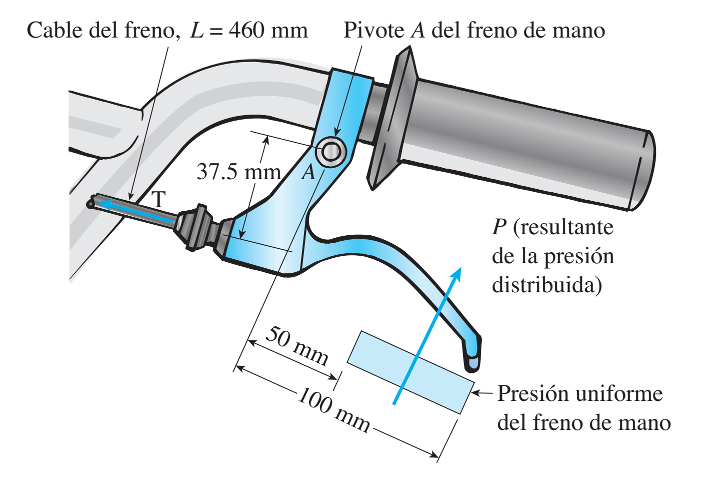
(b) Si se desea que la parte inferior del poste tenga el mismo esfuerzo de compresión que la parte superior, ¿cuál será la magnitud de la carga P_2?

(c) Si P_1 permanece en 1700 lb y P_2 ahora se fija en 2260 lb, ¿qué espesor nuevo de *BC* resultará en el mismo esfuerzo de compresión en las dos partes?



PROB. 1.2.1

1.2.2 Un ciclista aplica una fuerza *P* de 70 N al freno de mano frontal de una bicicleta (*P* es la resultante de una presión distribuida uniformemente). Conforme el freno de mano gira en *A*, se desarrolla una tensión *T* en el cable con longitud de 460 mm ($A_e = 1.075$ mm^2) que se estira en $\delta = 0.214$ mm. Determine el esfuerzo normal σ y la deformación unitaria ϵ en el cable del freno.



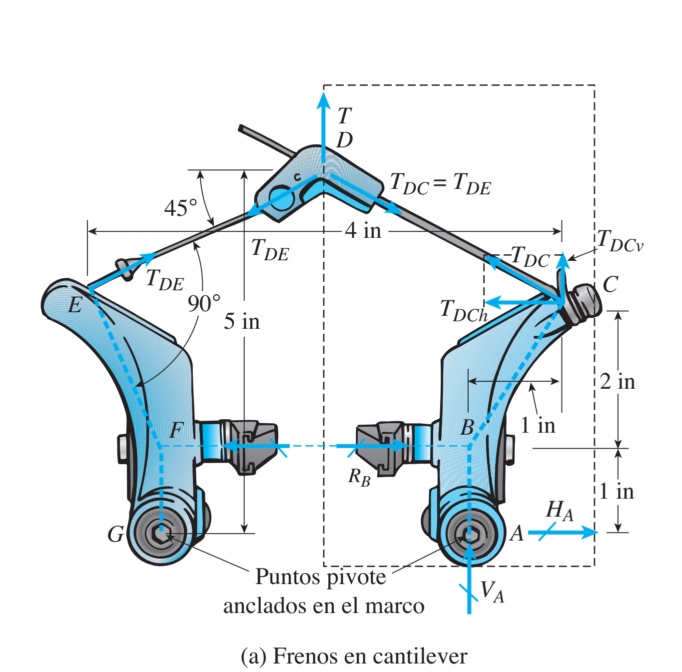
PROB. 1.2.2

1.2.3 Un ciclista quiere comparar el efectividad de los frenos de cantilever [consulte la figura (a)] con los frenos en “V” [parte (b) de la figura].

(a) Calcule la fuerza de frenado R_B en los rines del neumático para cada uno de los sistemas de frenado de las bicicletas. Suponga que todas las fuerzas actúan en el plano de la figura y que la tensión del cable $T = 45$ lb. También calcule cuál es el esfuerzo normal de compresión promedio σ_c en la almohadilla del freno ($A = 0.625$ in^2).

(b) Para cada sistema de frenado, ¿cuál es el esfuerzo en el cable del freno (suponga un área de la sección transversal efectiva de 0.00167 in^2)?

(*Sugerencia:* debido a la simetría, sólo necesita emplear la mitad de cada figura en su análisis).



(a) Frenos en cantilever

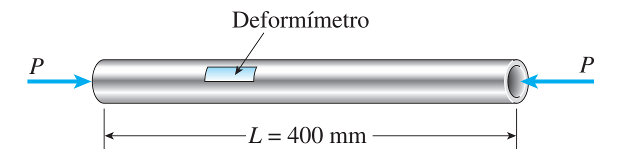
Frenos en “V”

PROB. 1.2.3

1.2.4 Un tubo circular de aluminio con longitud $L = 400$ mm está cargado en compresión por fuerzas P (consulte la figura). Los diámetros interior y exterior son 60 mm y 50 mm, respectivamente. Se coloca un deformímetro en el exterior de la barra para medir las deformaciones unitarias normales en la dirección longitudinal.

(a) Si la deformación unitaria es $\epsilon = 550 \times 10^{-6}$, ¿cuál es el acortamiento δ de la barra?

(b) Si el esfuerzo de compresión en la barra se propone sea de 40 MPa, ¿cuál debe ser la carga P?

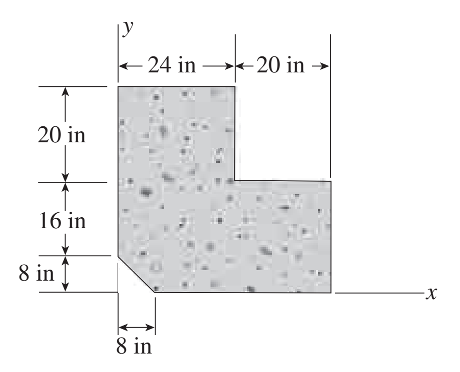


PROB. 1.2.4

1.2.5 En la siguiente figura se muestra la sección transversal de una columna de esquina de concreto que está cargada uniformemente en compresión.

(a) Determine el esfuerzo de compresión promedio σ_c en el concreto si la carga es igual a 3200 k.

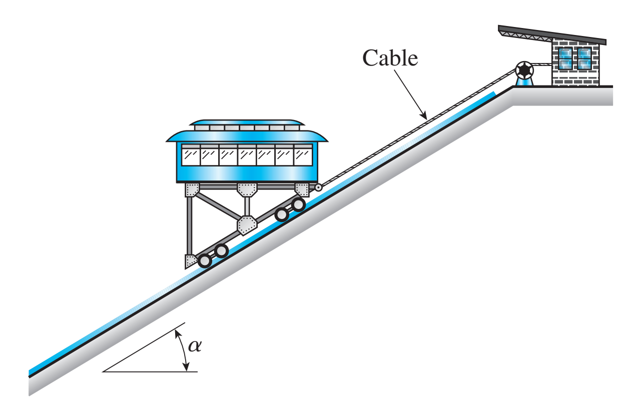
(b) Determine las coordenadas x_c y y_c del punto donde la carga resultante debe actuar a fin de producir un esfuerzo normal uniforme en la columna.



PROB. 1.2.5

1.2.6 Un carro que pesa 130 kN, cuando está completamente cargado, se jala lentamente hacia arriba por una pista inclinada mediante un cable de acero (consulte la figura). El cable tiene un área de sección transversal efectiva de 490 mm^2 y el ángulo α de la inclinación es 30°.

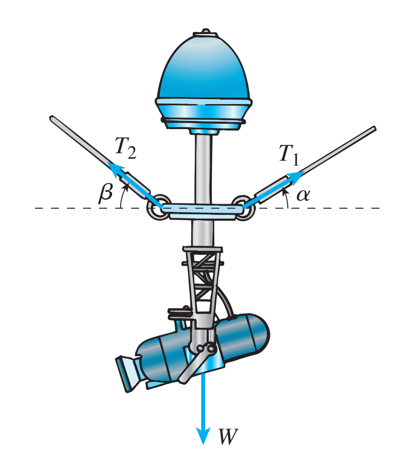
Calcule el esfuerzo de tensión σ_t en el cable.



PROB. 1.2.6

1.2.7 Dos alambres de acero soportan una cámara móvil suspendida que pesa W = 25 lb (consulte la figura), empleada para hacer acercamientos de las acciones en el campo en eventos deportivos. En un instante dado, el alambre 1 forma un ángulo α = 20° con la horizontal y el alambre 2 forma un ángulo β = 48°. Los dos alambres tienen un diámetro de 30 milésimas. (Los diámetros del alambre, con frecuencia, se expresan en milésimas de pulgada; una milésima es igual a 0.001 in).

Determine los esfuerzos de tensión σ_1 y σ_2 en los dos alambres.

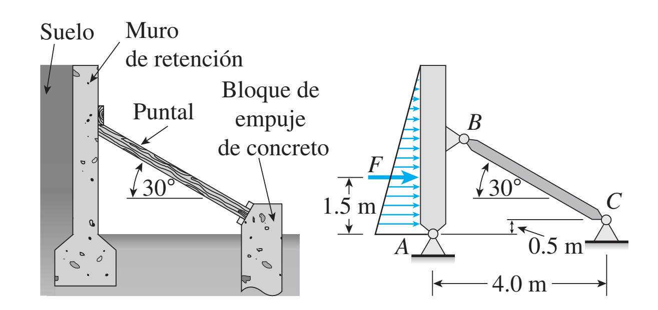


PROB. 1.2.7

1.2.8 Un muro de retención de gran longitud está apuntalado con puntales de madera dispuestos en un ángulo de 30° y soportados por bloques de empuje de concreto, como se muestra en la primera parte de la figura. Los puntales están espaciados uniformemente a 3 m.

Para fines de análisis, la pared y los puntales se idealizan como se muestra en la segunda parte de la figura. Observe que la base del muro y los dos extremos de los puntales se supone que están articulados. La presión del suelo contra el muro se supone distribuida triangularmente y la fuerza resultante que actúa sobre una longitud de 3 m del muro es F = 190 kN.

Si cada puntal tiene una sección transversal cuadrada de 150 mm × 150 mm, ¿cuál es el esfuerzo de compresión σ_c en los puntales?

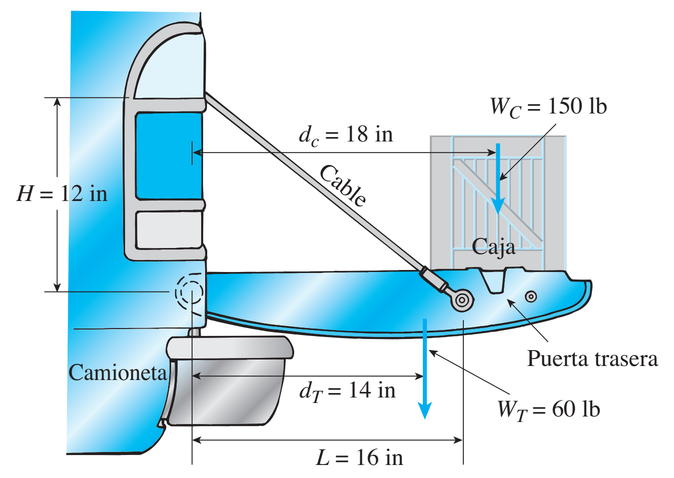


PROB. 1.2.8

1.2.9 Una puerta trasera de una camioneta soporta una caja (W_C = 150 lb), como se muestra en la figura siguiente. La puerta pesa W_T = 60 lb y está soportada por dos cables (sólo se muestra uno en la figura). Cada cable tiene un área transversal efectiva A_e = 0.017 in^2).

(a) Encuentre la fuerza de tensión T y el esfuerzo normal σ en cada cable.

(b) Si cada cable se estira δ = 0.01 in debido al peso tanto de la caja como de la puerta, ¿cuál es la deformación unitaria promedio en el cable?



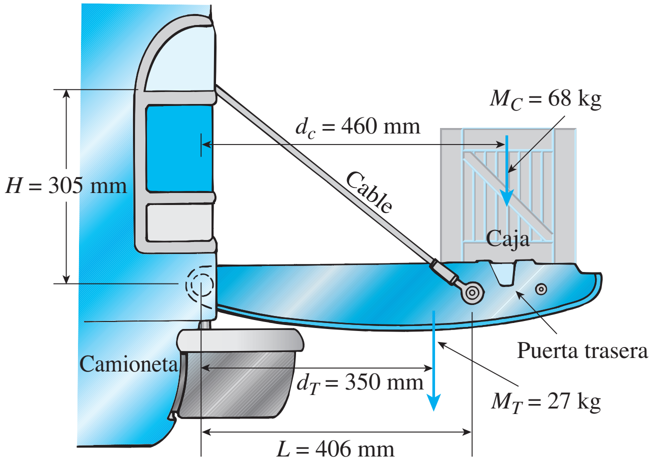
PROBS. 1.2.9 y 1.2.10



1.2.10 Resuelva el problema anterior si la masa de la puerta trasera es M_T = 27 kg y la de la caja es M_C = 68 kg. Utilice las dimensiones H = 305 mm, L = 406 mm, d_C = 460 mm y d_T = 350 mm. El área transversal del cable es A_e = 11.0 mm^2.

(a) Encuentre la fuerza de tensión T y el esfuerzo normal σ en cada cable.

(b) Si cada cable se estira δ = 0.25 mm debido al peso tanto de la caja como de la puerta, ¿cuál es la deformación unitaria promedio en el cable?

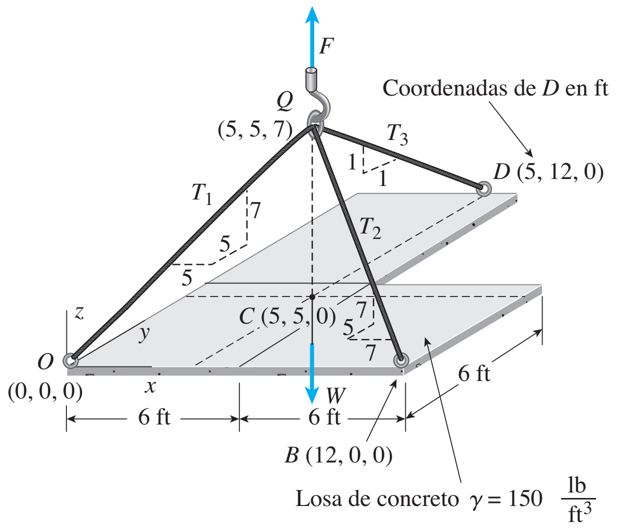


PROB. 1.2.10

***1.2.11** Una losa de concreto en forma de "L" de 12 ft × 12 ft (pero con un corte de 6 ft × 6 ft) y espesor t = 9.0 in, se levanta mediante tres cables sujetos en los puntos O, B y D, como se muestra en la figura. Los cables se juntan en el punto Q, que está 7 ft arriba de la superficie de la losa y directamente arriba del centro de masa en el punto C. Cada cable tiene un área transversal efectiva A_e = 0.12 in^2.

(a) Determine la fuerza de tensión T_i (i = 1, 2, 3) en cada cable debido al peso W de la losa de concreto (no tome en cuenta el peso de los cables).

(b) Determine el esfuerzo promedio σ_i en cada cable. (Consulte la tabla H-1 del apéndice H para obtener el peso específico del concreto reforzado).

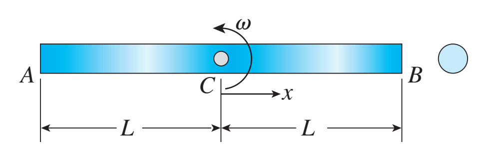


PROB. 1.2.11

***1.2.12** Una barra redonda *ACB* de longitud $2L$ (consulte la figura) gira con respecto a un eje que pasa por el punto medio *C*, con una velocidad angular constante σ (radianes por segundo). El material de la barra tiene un peso específico γ.

(a) Deduzca una fórmula para el esfuerzo de tensión σ_x en la barra como una función de la distancia *x* desde el punto medio *C*.

(b) ¿Cuál es el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{máx}$?

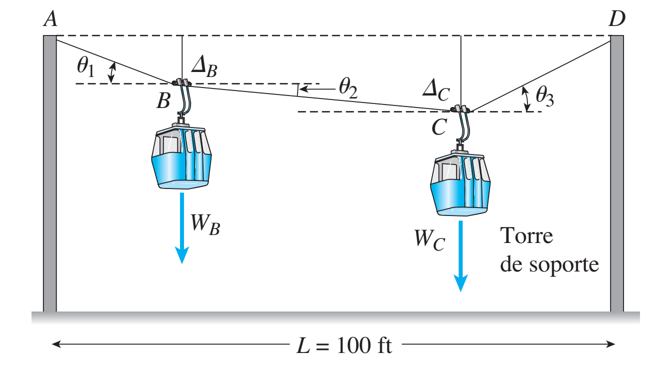


PROB. 1.2.12

1.2.13 Dos góndolas en un teleférico están aseguradas en la posición que se muestra en la figura mientras se hacen reparaciones en otro lugar. La distancia entre las torres de soporte es $L = 100$ ft. La longitud de cada segmento de cable sobre las góndolas que pesan $W_B = 450$ lb y $W_C = 650$ lb son $D_{AB} = 12$ ft, $D_{BC} = 70$ ft y $D_{CD} = 20$ ft. El pandeo del cable en *B* es $\Delta_B = 3.9$ ft y en $C(\Delta_C)$ es 7.1 ft. El área de la sección transversal efectiva del cable es $A_e = 0.12$ in^2.

(a) Encuentre la fuerza de tensión en cada segmento de cable; no tome en cuenta la masa del cable.

(b) Encuentre el esfuerzo promedio (σ) en cada segmento de cable.

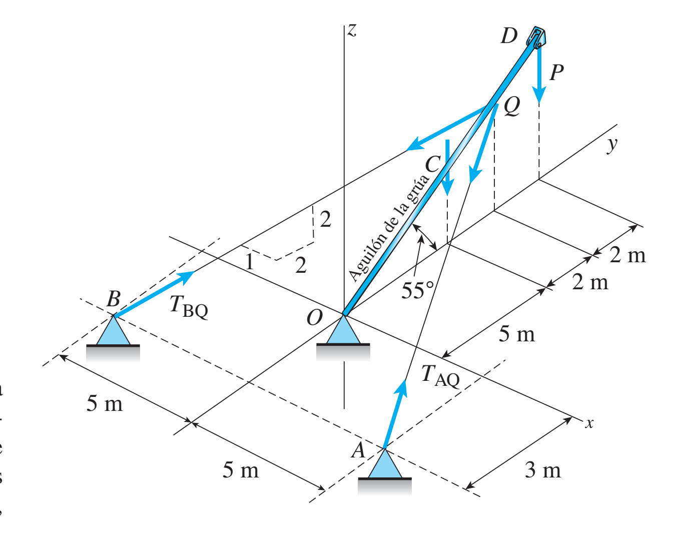


PROB. 1.2.13

1.2.14 Un aguilón de una grúa tiene una masa de 450 kg con su centro de masa en *C* estabilizado por dos cables *AQ* y *BQ* ($A_e = 304$ mm^2 para cada cable) como se muestra en la figura. Una carga $P = 20$ kN está soportada en el punto *D*. El aguilón de la grúa yace en el plano *y-z*.

(a) Determine las fuerzas de tensión en cada cable: T_{AQ} y T_{BQ} (kN); no tome en cuenta la masa de los cables, pero incluya la masa del aguilón además de la carga *P*.

(b) Determine el esfuerzo promedio (σ) en cada cable.



PROB. 1.2.14

Propiedades mecánicas y diagramas esfuerzo-deformación unitarias

1.3.1 Imagine que un alambre largo de acero cuelga verticalmente desde un globo a gran altura.

(a) ¿Cuál es la longitud máxima (ft) que puede tener el alambre sin fluencia si el acero fluye a 40 ksi?

(b) Si el mismo alambre cuelga de un barco en alta mar, ¿cuál es la máxima longitud? (Obtenga los pesos específico del acero y del agua de mar de la tabla H.1 del apéndice H).

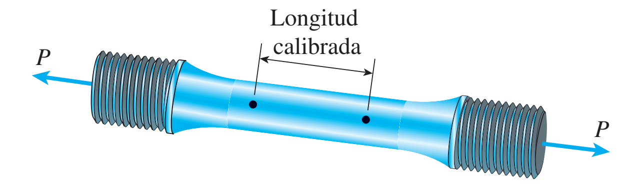
1.3.2 Imagine que un alambre largo de tungsteno cuelga verticalmente de un globo a gran altitud.

(a) ¿Cuál es la máxima longitud (metros) que puede tener sin que se rompa el alambre, si la resistencia última (o resistencia de ruptura) es 1500 MPa?

(b) Si el mismo alambre cuelga de un barco en alta mar, ¿cuál es la mayor longitud? (Obtenga los pesos específicos del tungsteno y del agua de mar de la tabla H.1 del apéndice H.)

1.3.3 Se prueban tres materiales diferentes, designados *A*, *B* y *C*, se ensayan en tensión empleando muestras de ensayo que tienen diámetros de 0.505 in y longitudes calibradas de 2.0 in (consulte la figura). En la falla, se ve que las distancias entre las marcas de calibración son 2.13, 2.48 y 2.78 in, respectivamente. También, se observa que en la falla las secciones transversales de los diámetros tienen 0.484, 0.398 y 0.253 in, respectivamente.

Determine la elongación porcentual y el porcentaje de reducción en el área de cada muestra y luego, utilice su propio juicio e indique si cada material es frágil o dúctil.



PROB. 1.3.3

1.3.4 La *razón entre resistencia y peso* de un material estructural se define como su capacidad de soporte de carga dividida entre su peso. Para materiales en tensión, podemos emplear un esfuerzo de tensión característico (como se obtiene de una curva esfuerzo-deformación unitaria) como una medida de resistencia. Por ejemplo, se podría emplear el esfuerzo de fluencia o bien el esfuerzo último, dependiendo de la aplicación particular. Así, la razón entre resistencia y peso $R_{S/W}$ para un material en tensión se define como

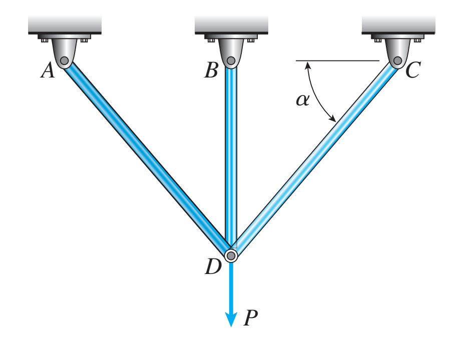
$$R_{S/W} = \frac{\sigma}{\gamma}$$

donde σ es el esfuerzo característico y γ es el peso específico. Observe que la relación tiene unidades de longitud.

Empleando el esfuerzo último σ_U como el parámetro de la resistencia, calcule la razón entre resistencia y peso (en unidades de metros) para cada uno de los materiales siguientes: aleación de aluminio 6061-T6, abeto Douglas (en flexión), nailon, acero estructural ASTM-A572 y aleación de titanio. (Obtenga las propiedades de los materiales de las tablas H.1 y H.3 del apéndice H. Cuando en una tabla se da un rango de valores, utilice el valor promedio).

1.3.5 Una armadura simétrica que consiste en tres barras articuladas, está cargada por una fuerza *P* (consulte la figura). El ángulo entre las barras inclinadas y la horizontal es $\alpha = 48°$. La deformación unitaria axial en medio de la barra se mide y resulta que es 0.0713.

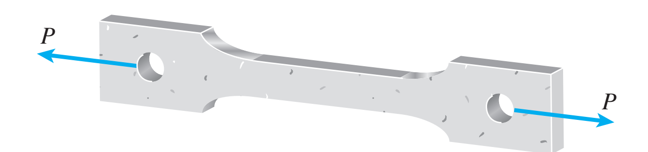
Determine el esfuerzo de tensión en las barras exteriores si están construidas de una aleación de aluminio que tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria como se muestra en la figura 1.13. (Exprese el esfuerzo en unidades inglesas).



PROB. 1.3.5

1.3.6 Una muestra de un plástico metacrilato se ensaya en tensión a temperatura ambiente (consulte la figura), produciendo los datos de esfuerzo-deformación unitaria que se listan en la tabla siguiente.

Trace la curva esfuerzo-deformación unitaria y determine el límite de proporcionalidad, el módulo de elasticidad (es decir, la pendiente de la parte inicial de la curva esfuerzo-deformación unitaria) y el esfuerzo de fluencia a un desplazamiento de 0.2 por ciento. ¿Es dúctil o frágil el material?



PROB. 1.3.6

DATOS ESFUERZO-DEFORMACIÓN UNITARIA PARA EL PROBLEMA 1.3.6

Esfuerzo (MPa)	Deformación unitaria
8.0	0.0032
17.5	0.0073
25.6	0.0111
31.1	0.0129
39.8	0.0163
44.0	0.0184
48.2	0.0209
53.9	0.0260
58.1	0.0331
62.0	0.0429
62.1	Fractura

***1.3.7** Los datos de la tabla siguiente se obtuvieron de un ensayo en tensión con acero de alta resistencia. La muestra de ensayo tenía un diámetro de 0.505 in y una longitud calibrada de 2.00 in. (Consulte la figura para el problema 1.3.3). En la fractura, el alargamiento entre las marcas de calibración fue 0.12 in y el diámetro mínimo fue 0.42 in.

Trace la curva esfuerzo-deformación unitaria convencional para el acero y determine el límite proporcional, el módulo de elasticidad (es decir, la pendiente de la parte inicial de la curva esfuerzo-deformación unitaria), el esfuerzo de fluencia a un desplazamiento de 0.1 por ciento y la reducción porcentual del área.

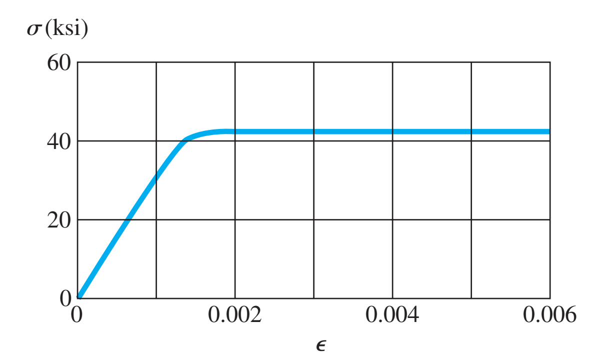
DATOS DE ENSAYO EN TENSIÓN PARA EL PROBLEMA 1.3.7

Carga (lb)	Alargamiento (in)
1,000	0.0002
2,000	0.0006
6,000	0.0019
10,000	0.0033
12,000	0.0039
12,900	0.0043
13,400	0.0047
13,600	0.0054
13,800	0.0063
14,000	0.0090
14,400	0.0102
15,200	0.0130
16,800	0.0230
18,400	0.0336
20,000	0.0507
22,400	0.1108
22,600	Fractura

Elasticidad y plasticidad

1.4.1 Una barra de acero estructural que tiene el diagrama esfuerzo-deformación unitaria que se muestra en la figura tiene una longitud de 48 in. El esfuerzo de fluencia del acero es 42 ksi y la pendiente de la parte inicial lineal de la curva esfuerzo-deformación unitaria (módulo de elasticidad) es 30×10^3 ksi. La barra se carga axialmente hasta que se alarga 0.20 in y luego se quita la carga.

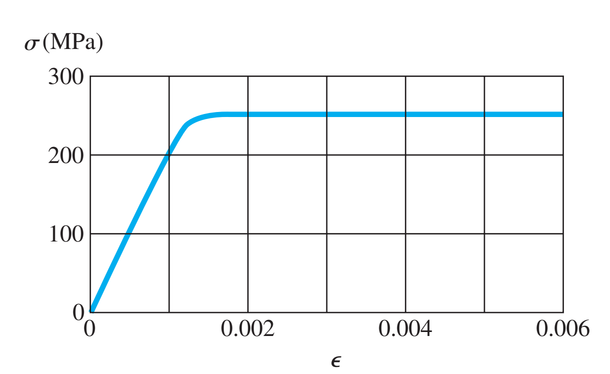
¿Cuál es la diferencia entre la longitud final de la barra y su longitud original? (*Sugerencia:* utilice los conceptos ilustrados en la figura 1.18b).



PROB. 1.4.1

1.4.2 Una barra con una longitud de 2.0 in está hecha de un acero estructural que tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria como se muestra en la figura. El esfuerzo de fluencia del acero es 250 MPa y la pendiente de la parte inicial lineal de la curva esfuerzo-deformación unitaria (módulo de elasticidad) es 200 GPa. La barra se carga axialmente hasta que se alarga 6.5 mm y luego se quita la carga.

¿Cuál es la diferencia entre la longitud final de la barra y su longitud original? (*Sugerencia:* utilice los conceptos ilustrados en la figura 1.18b).



PROB. 1.4.2

1.4.3 Una barra de aluminio tiene una longitud $L = 5$ ft y un diámetro $d = 1.25$ in. La curva esfuerzo-deformación unitaria para el aluminio se muestra en la figura 1.13 de la sección 1.3. La parte inicial en línea recta de la curva tiene una pendiente (módulo de elasticidad) de 10×10^6 psi. La barra está cargada por fuerzas de tensión $P = 39$ k y luego se descarga.

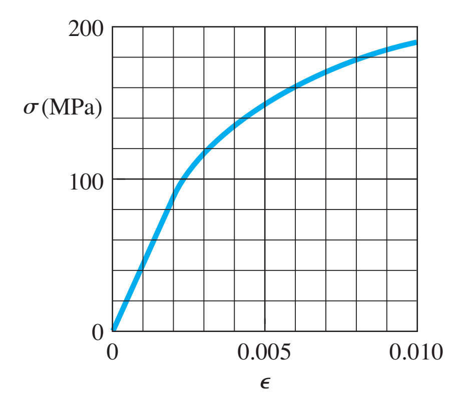
(a) ¿Cuál es la deformación permanente de la barra?

(b) Si la barra se vuelve a cargar, ¿cuál es el límite de proporcionalidad? (*Sugerencia:* utilice los conceptos ilustrados en las figuras 1.18b y 1.19.)

1.4.4 Una barra circular de una aleación de magnesio tiene una longitud de 750 mm. El diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el material se muestra en la figura. La barra se carga en tensión hasta obtener un alargamiento de 6.0 mm y luego se quita la carga.

(a) ¿Cuál es la deformación permanente de la barra?

(b) Si la barra se vuelve a cargar, ¿cuál es el límite de proporcionalidad? (*Sugerencia:* utilice los conceptos ilustrados en las figuras 1.18b y 1.19.)



PROBS 1.4.3 y 1.4.4

***1.4.5** Un alambre con longitud $L = 4$ ft y diámetro $d = 0.125$ in se estira mediante fuerzas de tensión $P = 600$ lb. El alambre está hecho de una aleación de cobre que tiene una relación esfuerzo-deformación unitaria que se puede describir matemáticamente mediante la ecuación siguiente:

$$\sigma = \frac{18{,}000\epsilon}{1 + 300\epsilon} \qquad 0 \leq \epsilon \leq 0.03 \qquad (\sigma = \text{ksi})$$

en donde ϵ es adimensional y σ tiene unidades de kips por pulgada cuadrada (ksi).

(a) Elabore un diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el material.

(b) Determine la elongación del alambre debida a las fuerzas P.

(c) Si se quitan las fuerzas, ¿cuál es la deformación permanente de la barra?

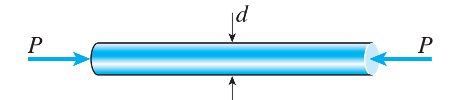
(d) Si se aplican de nuevo las fuerzas, ¿cuál es el límite de proporcionalidad?

Ley de Hooke y relación de Poisson

Al resolver los problemas de la sección 1.5, suponga que el material se comporta de manera linealmente elástica.

1.5.1 Una barra de acero de alta resistencia que se usa en una grúa grande tiene un diámetro $d = 2.00$ in (consulte la figura). El acero tiene un módulo de elasticidad $E = 29 \times 10^6$ psi y una relación de Poisson $\nu = 0.29$. Debido a requisitos de holgura, el diámetro de la barra está limitado a 2.001 in, cuando se comprime por fuerzas axiales.

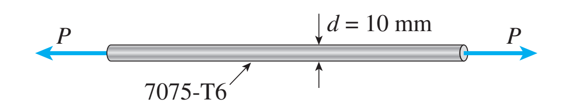
¿Cuál es la carga máxima de compresión $P_{máx}$ permitida?



PROB. 1.5.1

1.5.2 Una barra redonda de 10 mm de diámetro está hecha de una aleación de aluminio 7075-T6 (consulte la figura). Cuando la barra se estira por fuerzas axiales P, su diámetro disminuye 0.016 mm.

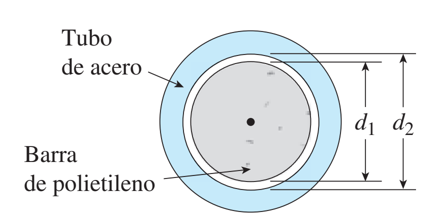
Determine la magnitud de la carga P. (Obtenga las propiedades del material del apéndice H.)



PROB. 1.5.2

1.5.3 Una barra de polietileno tiene un diámetro $d_1 = 4.0$ in, y se coloca dentro de un tubo de acero que tiene un diámetro interior $d_2 = 4.01$ in (consulte la figura). Luego la barra de polietileno se comprime por una fuerza axial P.

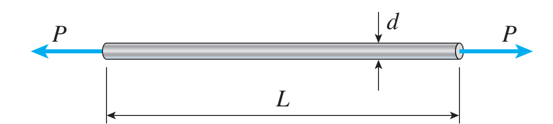
¿Cuál es el valor de la fuerza P que hará que se cierre el espacio entre la barra de polietileno y el tubo de acero? (Para el polietileno suponga $E = 200$ ksi y $\nu = 0.4$.)



PROB. 1.5.3

1.5.4 Una barra prismática con una sección transversal circular se somete a fuerzas de tensión $P = 65$ kN (consulte la figura). La barra tiene una longitud $L = 1.75$ m, un diámetro $d = 32$ mm y está hecha de una aleación de aluminio con un módulo de elasticidad $E = 75$ GPa y una relación de Poisson $\nu = 1/3$.

Determine el incremento en la longitud de la barra y el decremento porcentual en el área de su sección transversal.



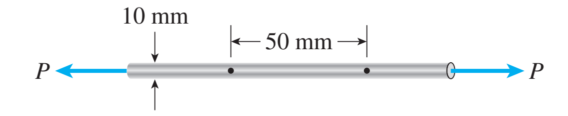
PROBS 1.5.4 y 1.5.5

1.5.5 Una barra de metal monel tiene una longitud $L = 9$ in, un diámetro $d = 0.225$ in, como se muestra en la figura anterior. La barra se somete a una carga axial mediante una fuerza de tensión P. Si la barra se alarga en 0.0195 in, ¿cuál es el decremento en su diámetro d? ¿Cuál es la magnitud de la carga P? utilice los datos de la tabla H.2 del apéndice H.

1.5.6 Se lleva a cabo un ensayo de tensión en una probeta de bronce que tiene un diámetro de 10 mm utilizando una longitud calibrada de 50 mm (consulte la figura). Cuando una carga de tensión P alcanza un valor de 20 kN, la distancia entre las marcas de calibración aumenta 0.122 mm.

(a) ¿Cuál es el módulo de elasticidad E del bronce?

(b) Si el diámetro disminuye 0.00830 mm, ¿cuál es la relación de Poisson?



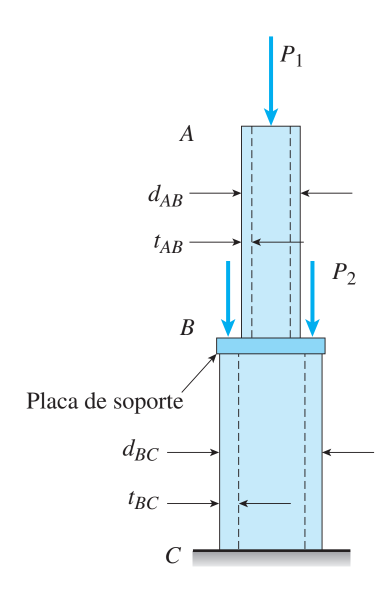
PROB. 1.5.6

1.5.7 Un tubo circular hueco de bronce ABC (consulte la figura) soporta una carga $P_1 = 26.5$ kips que actúa en su parte superior. Una segunda carga $P_2 = 22.0$ kpis está distribuida uniformemente alrededor de la placa de soporte en B. Los diámetros y espesores de las partes superior e inferior del tubo son $d_{AB} = 1.25$ in, $t_{AB} = 0.5$ in, $d_{BC} = 2.25$ in y $t_{BC} = 0.375$ in, respectivamente. El módulo de elasticidad es 14 000 ksi. Cuando se aplican las dos cargas, el espesor del tubo BC aumenta en 200×10^{-6} in.

(a) Determine el aumento en el diámetro interior del segmento BC del tubo.

(b) Determine la relación de Poisson para el bronce.

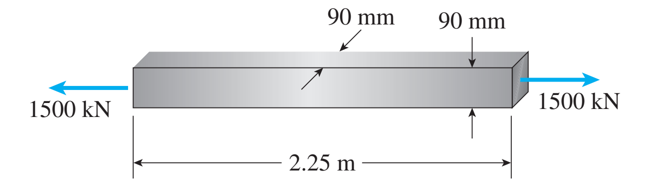
(c) Determine el aumento en el espesor de la pared del segmento AB del tubo y el aumento en el diámetro interior del segmento AB.



PROB. 1.5.7

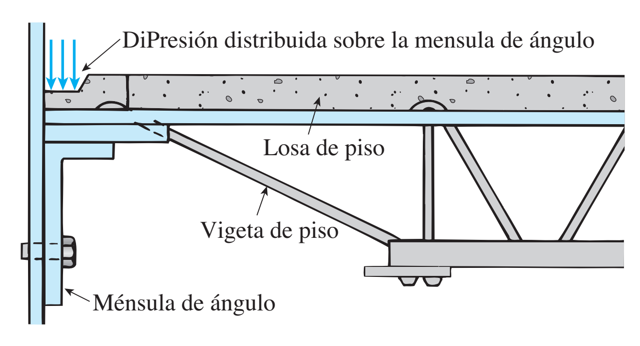
***1.5.8** Una barra de bronce con longitud de 2.25 m y sección transversal cuadrada de 90 mm por lado, se somete a una fuerza axial de tensión de 1500 kN (consulte la figura). Suponga que E = 110 GPa y ν = 0.34.

Determine el aumento del volumen de la barra.





PROB. 1.5.8

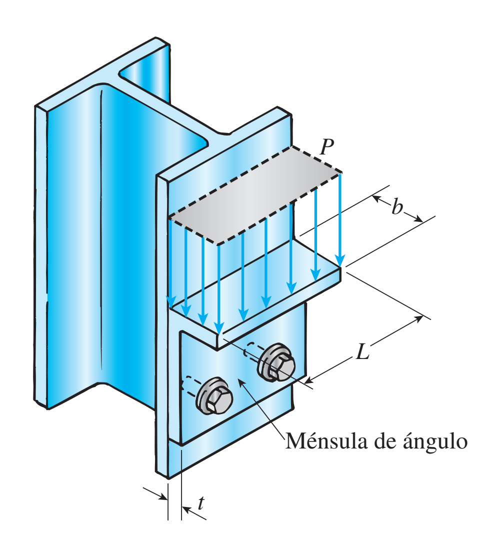


PROB. 1.6.1

Esfuerzo cortante y deformación unitaria cortante

1.6.1 Una ménsula formada con un perfil angular tiene un espesor t = 0.75 in y está unida al patín de una columna mediante dos pernos de 5/8 in de diámetro (consulte la figura). Una carga distribuida uniformemente de una viga de piso actúa sobre la cara superior de la ménsula con una presión p = 275 psi. La cara superior de la ménsula tiene una longitud L = 8 in y un ancho b = 3.0 in.

Determine la presión de soporte promedio σ_b entre la ménsula de ángulo y los pernos, y el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en los pernos. (No tenga en cuenta la fricción entre la ménsula y la columna.)

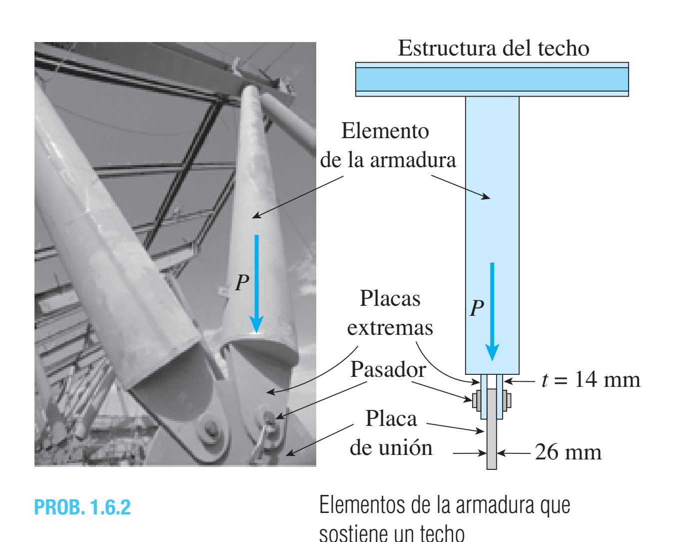


1.6.2 Los elementos de soporte de una armadura que sostiene un techo están conectados a una placa de unión de 26 mm de espesor mediante un pasador con un diámetro de 22 mm, como se muestra en la figura y fotografía siguientes. Cada una de las dos placas extremas en los elementos de la armadura tiene un espesor de 14 mm.

(a) Si la carga P = 80 kN, ¿cuál es el esfuerzo de soporte mayor que actúa sobre el pasador?

(b) Si el esfuerzo cortante último para el pasador es 190 MPa, ¿cuál es la fuerza $P_{últ}$ que se requiere para que el pasador falle en cortante?

(No tenga en cuenta la fricción entre las placas.)



PROB. 1.6.2

Elementos de la armadura que sostiene un techo

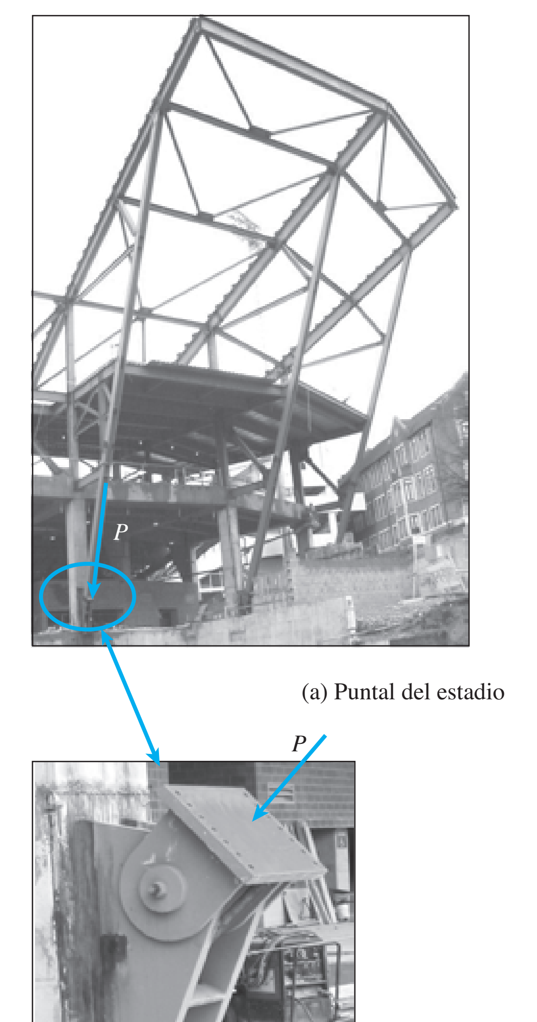
1.6.3 La plataforma superior de un estadio de futbol está soportada por puntales que transfieren cada uno una carga $P = 160$ kips a la base de una columna [consulte la parte (a) de la figura]. Una placa de soporte en la parte inferior del puntal distribuye la carga P a cuatro planchas de ala ($t_f = 1$ in) mediante un perno ($d_p = 2$ in) a dos placas de unión ($t_g = 1.5$ in) [consulte las partes (b) y (c) de la figura].

Determine las cantidades siguientes.

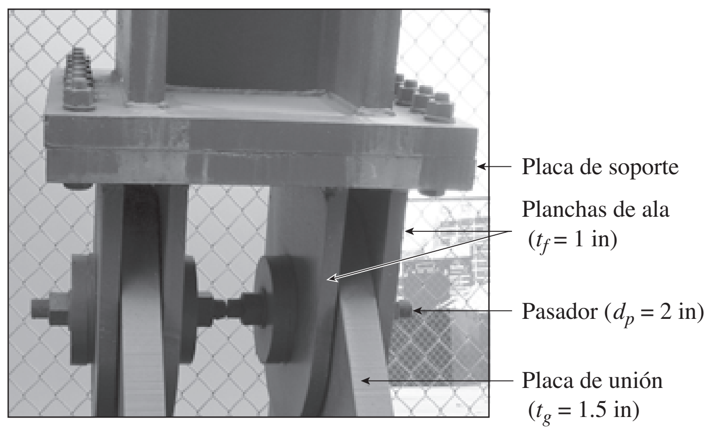
(a) El esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en el pasador

(b) El esfuerzo de soporte promedio entre las planchas de ala y el pasador (σ_{bf}) y entre las placas de unión y el pasador (σ_{bg}).

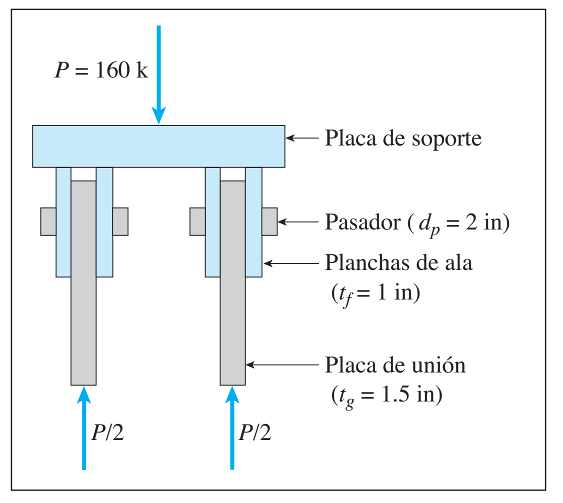
(No tome en cuenta la fricción entre las placas.)



(a) Puntal del estadio



(b) Detalle en la parte inferior del puntal



(c) Sección por la parte inferior del puntal

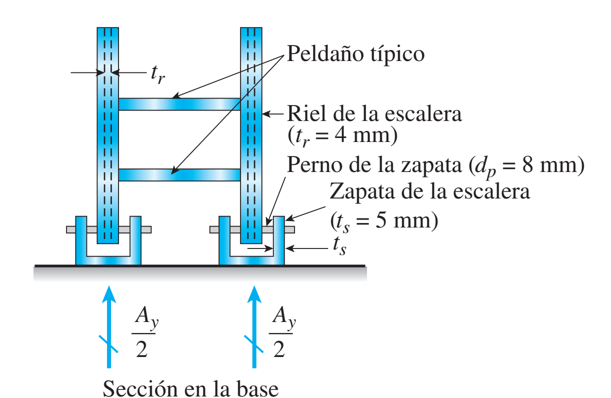
PROB. 1.6.3

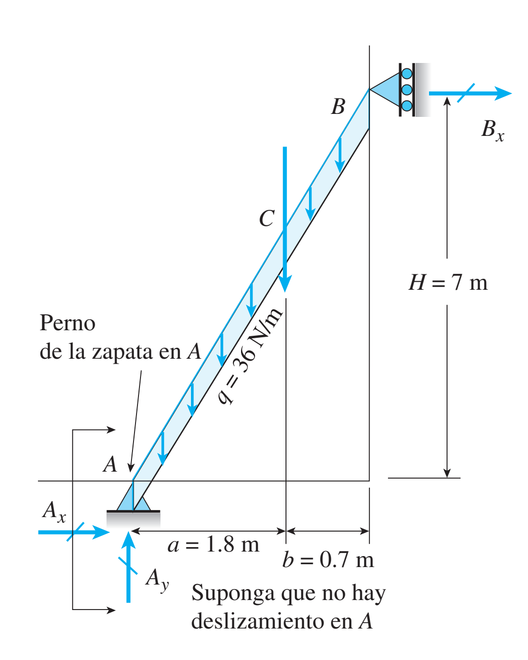
1.6.4 La escalera inclinada *AB* soporta a un pintor de casas (82 kg) en *C* y el peso propio (q = 36 N/m) de la escalera. Cada riel de la escalera (t_r = 4 mm) está soportado por una zapata (t_s = 5 mm) que está sujeta al riel de la escalera mediante un perno con diámetro d_p = 8 mm.

(a) Encuentre las reacciones de soporte en *A* y *B*.

(b) Encuentre la fuerza resultante en el perno de la zapata en *A*.

(c) Encuentre el esfuerzo cortante máximo promedio (τ) y los esfuerzos de soporte (σ_b) en el perno de la zapata en *A*.





PROB. 1.6.4

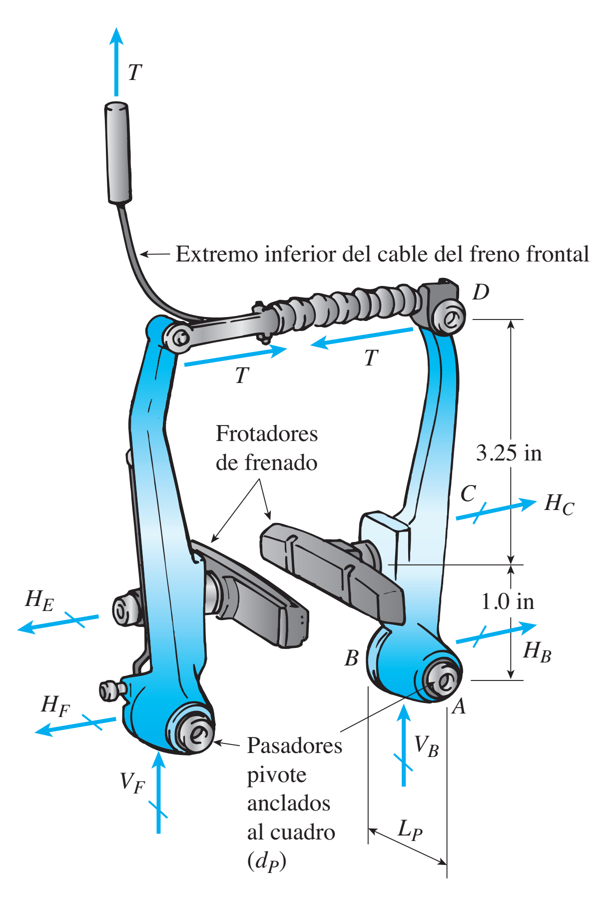
1.6.5 La fuerza en el cable del freno del sistema de frenado en "V" que se muestra en la figura es T = 45 lb. El pasador pivote en *A* tiene un diámetro d_p = 0.25 in y una longitud L_P = 5/8 in.

Utilice las dimensiones que se muestran en la figura. No tenga en cuenta el peso del sistema de frenado.

(a) Determine el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en el pasador pivote donde está anclado al cuadro de la bicicleta en *B*.

(b) Determine el esfuerzo de soporte promedio $\sigma_{b,prom}$ en el pasador pivote sobre el segmento *AB*.

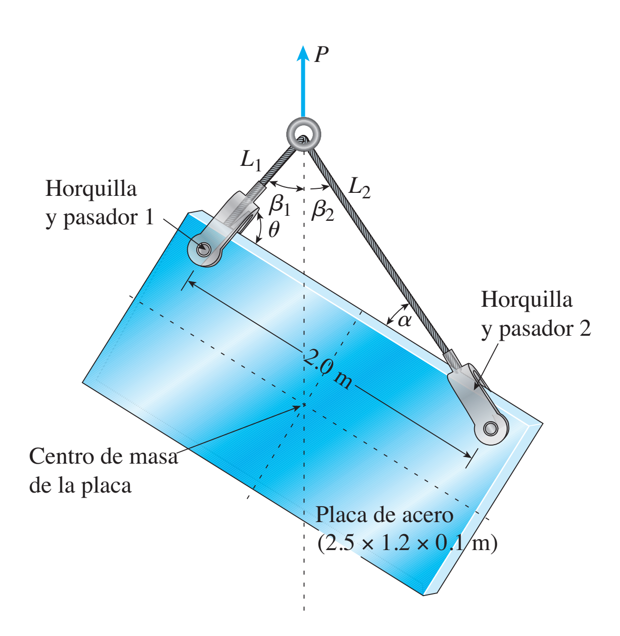




PROB. 1.6.5

1.6.6 Una placa de acero con dimensiones de 2.5 m × 1.2 m × 0.1 m se levanta mediante cables de acero con longitudes L_1 = 3.2 m y L_2 = 3.9 m que están sujetos a la placa mediante horquillas y pasadores (consulte la figura). Los pasadores que pasan por las horquillas tienen un diámetro de 18 mm y están separados 2.0 m. Los ángulos de orientación son θ = 94.4° y α = 54.9°.

Para estas condiciones, determine primero las fuerzas en el cable T_1 y T_2, luego determine el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en los pasadores 1 y 2, y después determine el esfuerzo de soporte promedio σ_b entre la placa de acero y cada pasador. No tome en cuenta la masa de los cables.



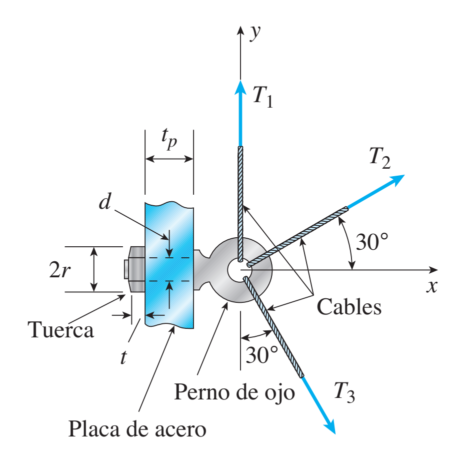
PROB. 1.6.6

1.6.7 Un perno de ojo para fines especiales con diámetro de su vástago d = 0.50 in pasa por un agujero en una placa de acero con espesor t_p = 0.75 in (consulte la figura) y está asegurado por una tuerca con espesor t = 0.25 in. La tuerca hexagonal se apoya directamente contra la placa de acero. El radio del círculo circunscrito para el hexágono es r = 0.40 in (lo cual significa que cada lado del hexágono tiene una longitud de 0.40 in). Las fuerzas de tensión en tres cables sujetos al perno de ojo son T_1 = 800 lb, T_2 = 550 lb y T_3 = 1241 lb.

(a) Determine la fuerza resultante que actúa sobre el perno de ojo.

(b) Determine el esfuerzo de soporte promedio σ_b entre la tuerca hexagonal en el perno de ojo y la placa.

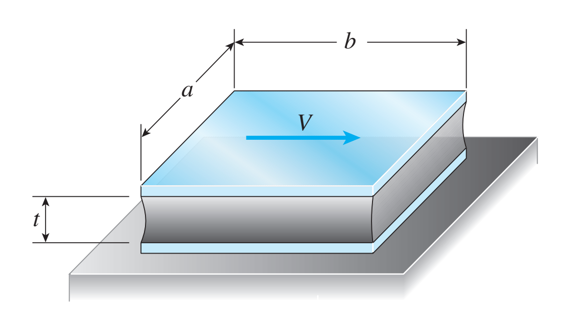
(c) Determine el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en la tuerca y en la placa de acero.



PROB. 1.6.7

1.6.8 Una almohadilla de soporte elastomérico que consiste de dos placas de acero unidas a un elastómero cloropreno (un caucho artificial) se somete a una fuerza cortante V durante una prueba de carga estática (consulte la figura). Las dimensiones de la almohadilla son a = 125 mm y b = 240 mm y el elastómero tiene un espesor t = 50 mm. Cuando la fuerza V es igual a 12 kN, la placa superior se desplaza lateralmente 8.0 mm con respecto a la placa inferior.

¿Cuál es el módulo de elasticidad G en cortante del cloropreno?

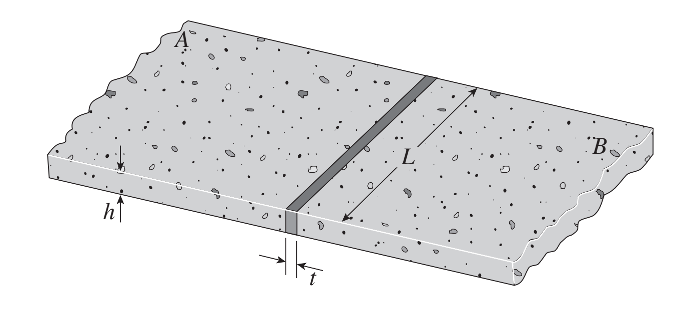


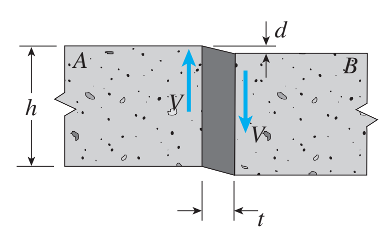
PROB. 1.6.8

1.6.9 Una junta entre dos losas de concreto A y B se rellena con un epóxico flexible que se une con firmeza al concreto (consulte la figura). La altura de la junta es $h = 4.0$ in, su longitud es $L = 40$ in y su espesor es $t = 0.5$ in. Ante la acción de fuerzas cortantes V, las losas se desplazan verticalmente una distancia $d = 0.002$ in una respecto de la otra.

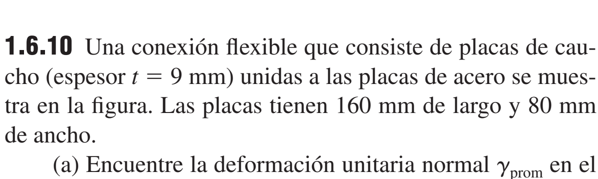
(a) ¿Cuál es la deformación unitaria promedio γ_{prom} en el epóxico?

(b) ¿Cuál es la magnitud de las fuerzas V si el módulo de elasticidad G en cortante para el epóxico es 140 ksi?





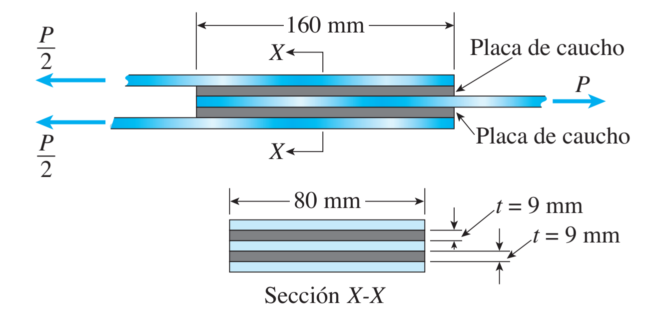
PROB. 1.6.9



1.6.10 Una conexión flexible que consiste de placas de caucho (espesor $t = 9$ mm) unidas a las placas de acero se muestra en la figura. Las placas tienen 160 mm de largo y 80 mm de ancho.

(a) Encuentre la deformación unitaria normal γ_{prom} en el caucho si la fuerza $P = 16$ kN y el módulo en cortante para el caucho es $G = 1250$ kPa.

(b) Encuentre el desplazamiento horizontal relativo δ entre la placa interior y las placas exteriores.

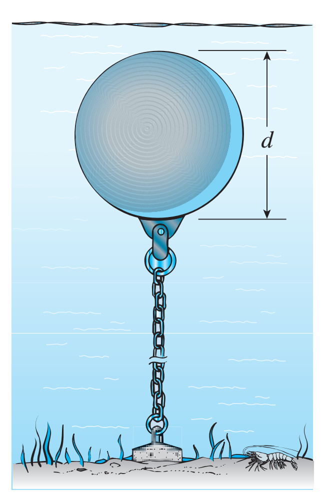


PROB. 1.6.10

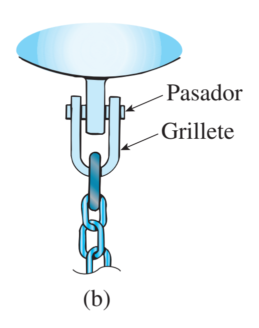
1.6.11 Una boya esférica de fibra de vidrio que se usa en un experimento submarino, está anclada en agua poco profunda mediante una cadena [consulte la parte (a) de la figura]. Como la boya está ubicada justo debajo de la superficie del agua, no se espera que se destruya por la presión del agua. La cadena está sujeta a la boya mediante un grillete y un pasador [consulte la parte (b) de la figura]. El diámetro del pasador es 0.5 in y el espesor del grillete es 0.25 in. La boya tiene un diámetro de 60 in y pesa 1800 lb en la tierra (no se incluye el peso de la cadena).

(a) Determine el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en el pasador.

(b) Determine el esfuerzo de soporte promedio σ_b entre el pasador y el grillete.



(a)



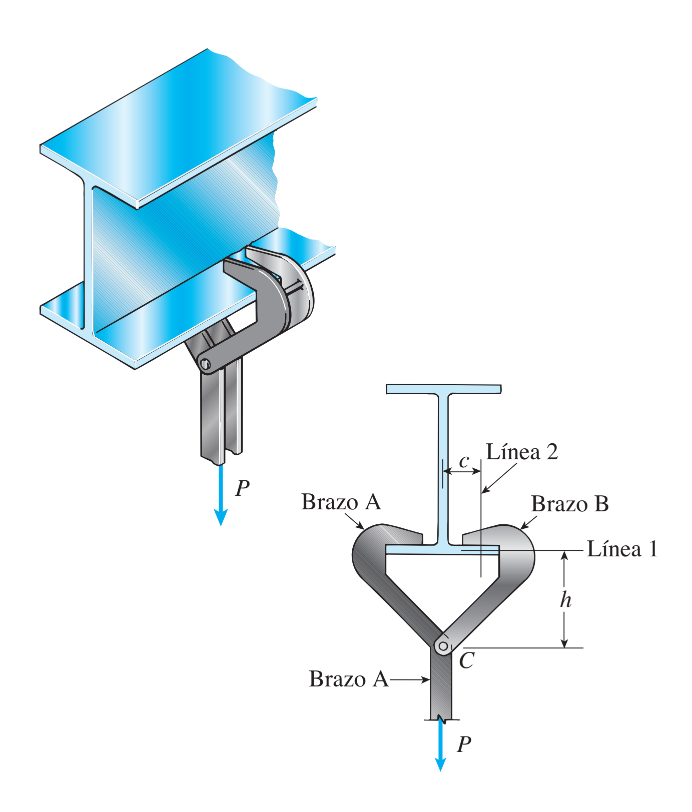
(b)

PROB. 1.6.11

***1.6.12** La mordaza que se muestra en la figura se utiliza para soportar una carga que cuelga del patín inferior de una viga de acero. La mordaza consiste de dos brazos (A y B) unidos por un pasador en C. El pasador tiene un diámetro $d = 12$ mm. Debido a que el brazo B abre el brazo A, el pasador está en cortante doble.

La línea 1 en la figura define la línea de acción de la fuerza resultante horizontal H que actúa entre el patín inferior de la viga y el brazo B. La distancia vertical desde esta línea hasta el pasador es $h = 250$ mm. La línea 2 define la línea de acción de la fuerza vertical resultante V que actúa entre el patín y el brazo B. La distancia horizontal desde esta línea hasta la línea central de la viga es $c = 100$ mm. Las condiciones de la fuerza entre el brazo A y el patín inferior son simétricas con las que se dan para el brazo B.

Determine el esfuerzo cortante promedio en el pasador en C cuando la carga $P = 18$ kN.



PROB. 1.6.12

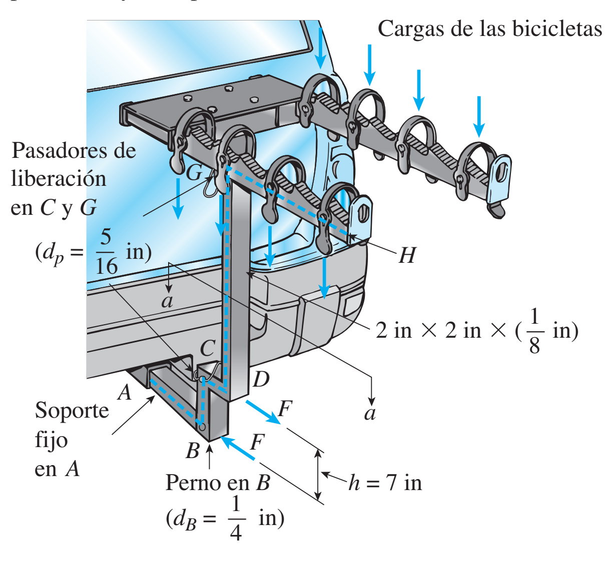
***1.6.13** Un soporte de bicicleta montado en un enganche está diseñado para cargar hasta cuatro bicicletas de 30 lb montadas y sujetas a dos brazos *GH* [consulte las cargas de las bicicletas en la parte (a) de la figura]. El soporte está conectado al vehículo en *A* y se supone que es como una viga en cantilever *ABCDGH* [parte (b) de la figura]. El peso del segmento fijo *AB* es $W_1 = 10$ lb, centrado a 9 in de A [consulte la parte (b) de la figura] y el resto del soporte pesa $W_2 = 40$ lb, centrado a 19 in de *A*. El segmento *ABCDG* es un tubo de acero de 2×2 in de espesor $t = 1/8$ in. El segmento *BCDGH* gira con respecto a un perno en *B* con diámetro $d_B = 0.25$ in para permitir el acceso a la parte posterior del vehículo sin remover el soporte de enganche. Cuando el soporte se usa se asegura en una posición erecta mediante un pasador en *C* (diámetro del pasador $d_p = 5/16$ in). [Consulte la fotografía y la parte (c) de la figura]. El efecto de volcamiento de las bicicletas se resiste por un par de fuerzas $F \cdot h$ en *BC*.

(a) Determine las reacciones de soporte en *A* para el soporte completamente cargado.

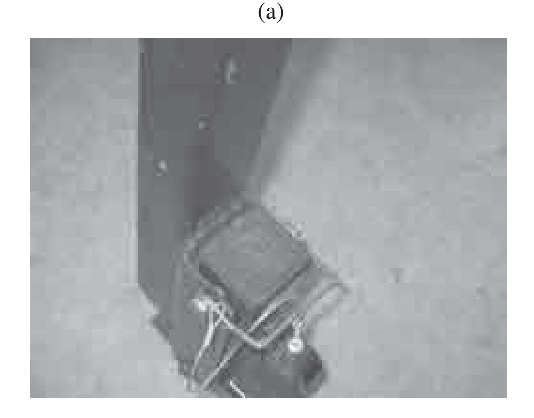
(b) Encuentre las fuerzas en el perno en *B* y en el pasador en *C*.

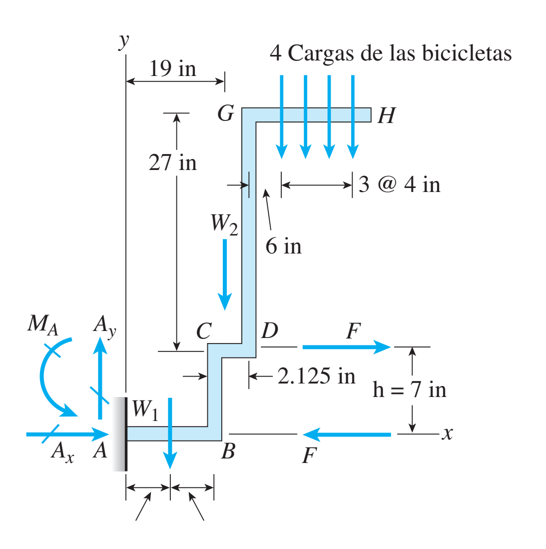
(c) Encuentre los esfuerzos cortantes promedio τ_{prom} en el perno en *B* y en el pasador en *C*.

(d) Encuentre los esfuerzos de soporte promedio σ_b en el perno en *B* y en el pasador en *C*.

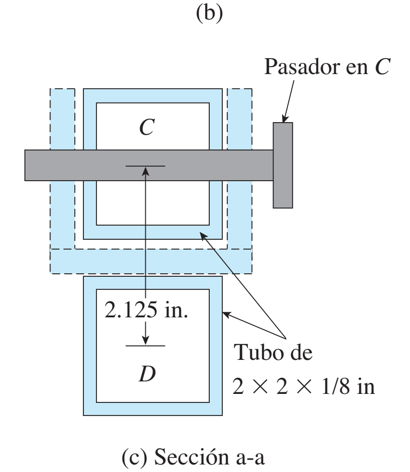


(a)





(b)



(c) Sección a-a

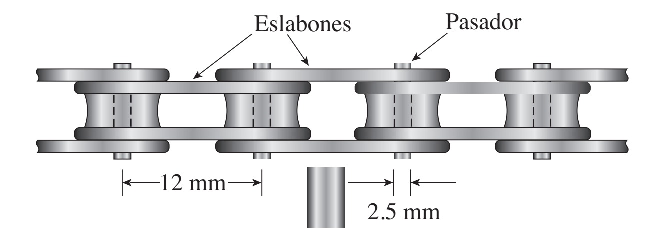
PROB. 1.6.13

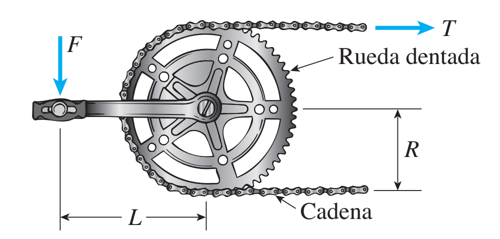
****1.6.14** Una cadena de bicicleta consiste en una serie de eslabones pequeños, cada uno con 12 mm de longitud entre los centros de los pasadores (consulte la figura). Usted quiere examinar una cadena de bicicleta y analiza su construcción. Observe en en particular los pasadores, que se suponen tienen un diámetro de 2.5 mm.

Para resolver este problema, ahora debe realizar dos mediciones en una bicicleta (consulte la figura): (1) la longitud *L* del brazo de rotación desde el eje principal hasta el eje del pedal y (2) el radio *R* de la estrella (la rueda dentada, algunas veces llamada anillo de cadena).

(a) Utilizando sus dimensiones medidas calcule la fuerza de tensión *T* en la cadena debida a una fuerza $F = 800$ N aplicada a uno de los pedales.

(b) Calcule el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en los pasadores.



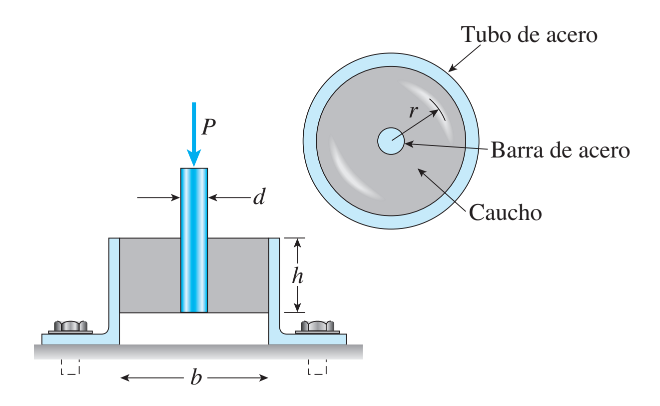


PROB. 1.6.14

****1.6.15** Un montaje antivibratorio construido como se muestra en la figura se utiliza para soportar un instrumento delicado. El soporte consiste en un tubo exterior de acero con diámetro interior b, una barra central de acero con diámetro d que soporta la carga P y un cilindro hueco de caucho (altura h) unido al tubo y a la barra.

(a) Obtenga un fórmula para el esfuerzo cortante τ en el caucho a una distancia radial r desde el centro del montaje antivibratorio.

(b) Obtenga una fórmula para el desplazamiento δ hacia abajo de la barra central debido a la carga P, suponga que G es el módulo de elasticidad en cortante del caucho y que el tubo de acero y la barra son rígidos.



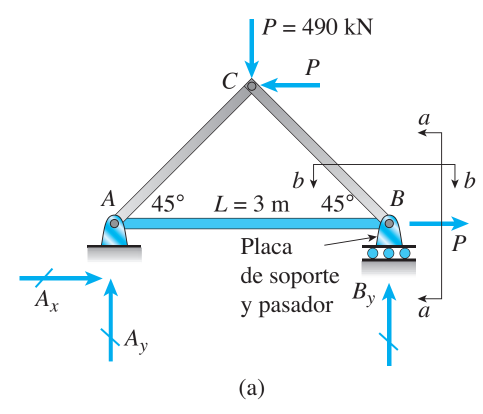
PROB. 1.6.15

1.6.16 La armadura plana de acero en la figura está sometida a tres fuerzas P, cada una de 490 kN. Cada uno de los elementos de la armadura tiene un área de sección transversal de 3900 mm^2 y están conectados mediante pasadores que tienen un diámetro d_p = 18 mm. Cada uno de los elementos AC y BC consiste de una barra con espesor $t_{AC} = t_{BC}$ = 19 mm. El elemento AB está compuesto de dos barras [consulte la parte (b) de la figura] que tienen, cada una, un espesor $t_{AB}/2$ = 10 mm y una longitud L = 3 m. El apoyo de rodillo en B está compuesto de dos placas de soporte que tienen, cada una, un espesor $t_{sp}/2$ = 12 mm.

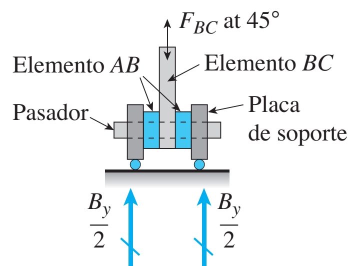
(a) Determine las reacciones de soporte en los nodos A y B, y las fuerzas en los elementos AB, BC y AC.

(b) Calcule el esfuerzo cortante promedio mayor $\tau_{p,\text{máx}}$ en el pasador en el nodo B, ignore la fricción entre los elementos; consulte las partes (b) y (c) de la figura donde se muestran las vistas en corte del nodo.

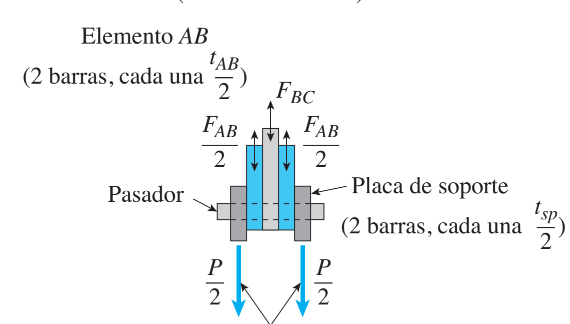
(c) Calcule el esfuerzo de apoyo promedio mayor $\sigma_{b,\text{máx}}$ que actúa contra el pasador en el nodo B.



(a)



(b) Corte *a-a* en el nodo B
(vista en elevación)



(c) Corte *b-b* en el nodo B
(vista en planta)

PROB. 1.6.16

1.6.17 Una boquilla rociadora para una manguera de jardín requiere una fuerza $F = 5$ lb para abrir la cámara de rocío accionada por el resorte AB. El agarre de la boquilla gira con respecto a un pasador que pasa a través de una brida en O. Cada una de las dos bridas tiene un espesor $t = 1/16$ in y el pasador tiene un diámetro $d_p = 1/8$ in [consulte la parte (a) de la figura]. La boquilla de rocío está conectada a la manguera con un aditamento de desconexión rápida en B [consulte la parte (b) de la figura]. Tres bolas de latón (diámetro $d_b = 3/16$ in) mantienen en posición la cabeza rociadora ante la fuerza de presión del agua $f_p = 30$ lb en C [consulte la parte (c) de la figura]. Use las dimensiones dadas en la parte (a) de la figura.

(a) Encuentre la fuerza en el pasador en O debida a la fuerza aplicada F.

(b) Encuentre el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} y el esfuerzo de soporte σ_b en el pasador en O.

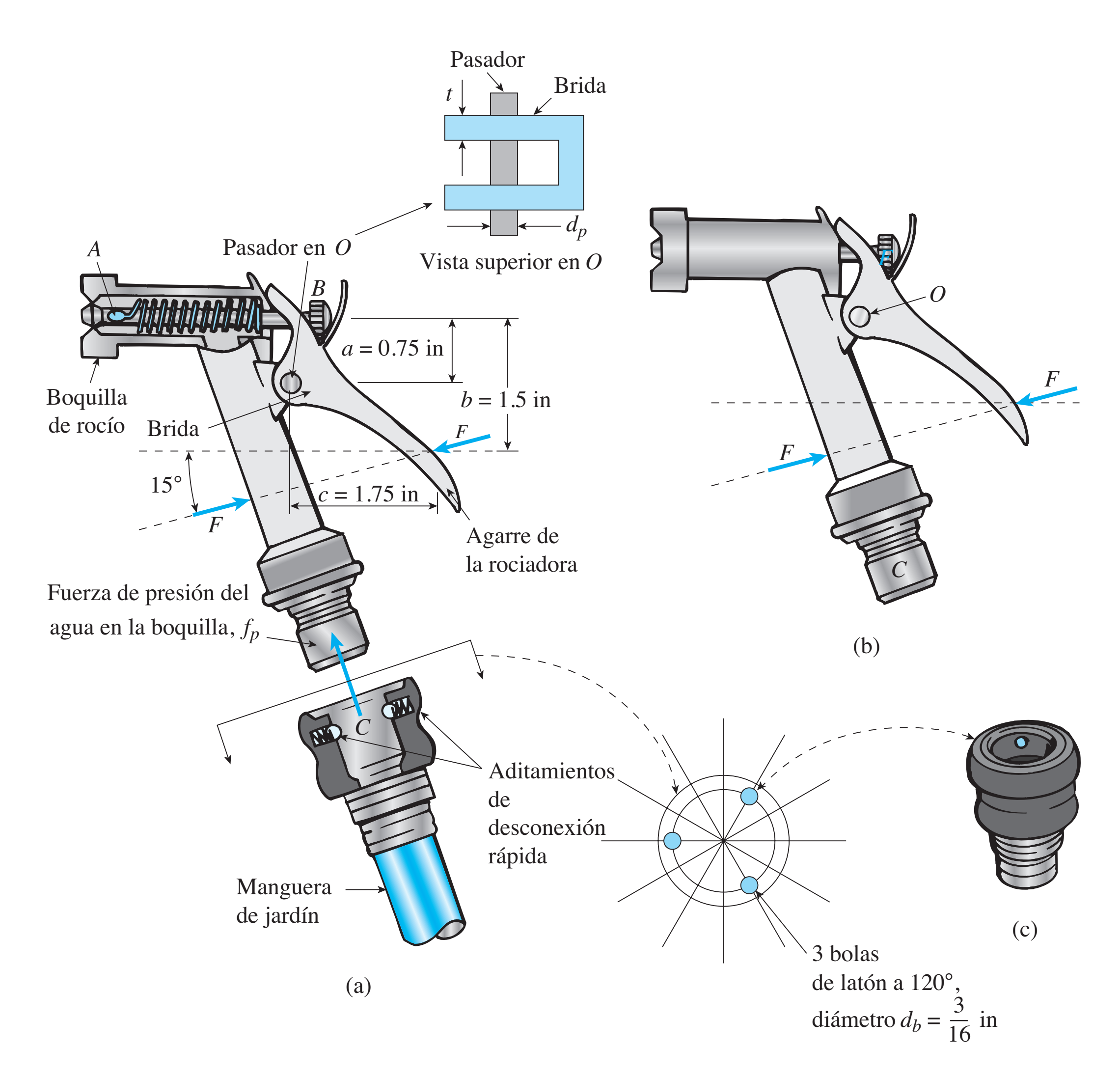
(c) Encuentre el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} en las bolas de retención de latón en C debido a la fuerza de presión del agua f_p.

1.6.18 Un puntal de acero AB con diámetro $d_s = 8$ mm y masa de 20 kg, soporta la cubierta del motor de un vehículo que gira con respecto a las bisagras en C y D (consulte las figuras (a) y (b)). El extremo del puntal está doblado en forma de aro por donde pasa un perno en A con diámetro $d_b = 10$ mm. El puntal AB se encuentra en un plano vertical.

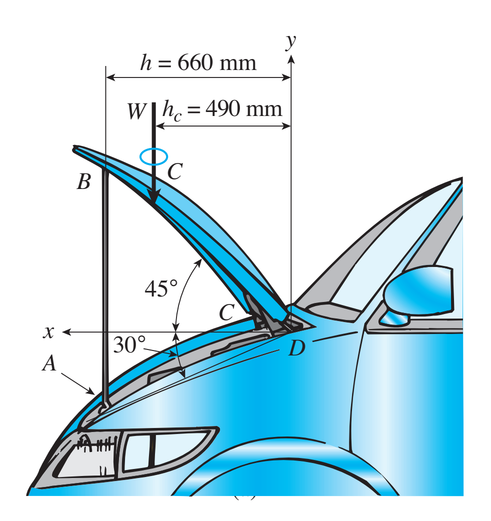
(a) Determine la fuerza del puntal F_s y el esfuerzo normal promedio σ en el puntal.

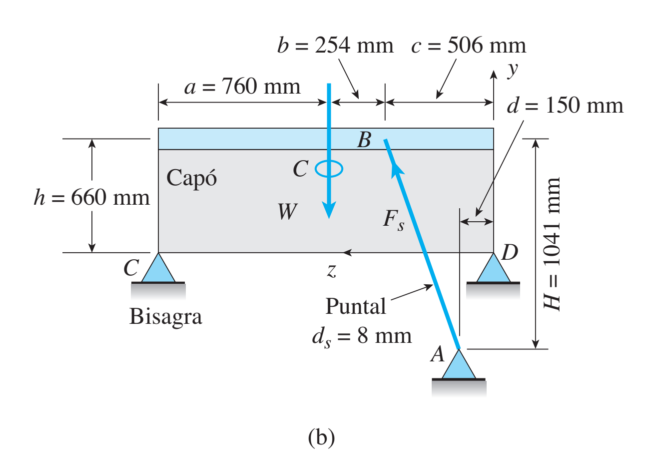
(b) Determine el esfuerzo de soporte promedio τ_{prom} en el perno en A.

(c) Determine el esfuerzo de soporte promedio σ_b en el perno en A.



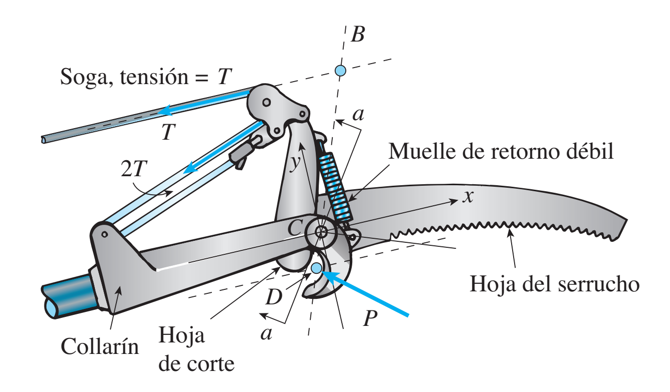
PROB. 1.6-17



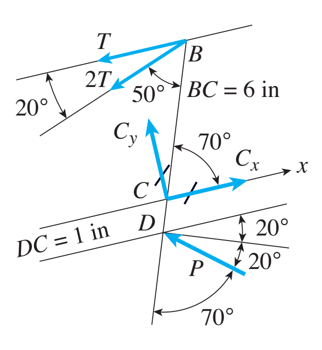


(b)

PROB. 1.6.18



(a) Parte superior del serrucho de pértiga



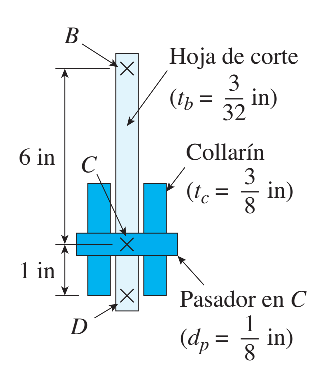
(b) Diagrama de cuerpo libre

1.6.19 La parte superior de un serrucho de pértiga empleado para recortar ramas pequeñas de árboles se muestra en la parte (a) de la figura. La hoja de corte *BCD* [consulte las partes (a) y (b) de la figura] aplica una fuerza *P* en el punto *D*. No tenga en cuenta el efecto del muelle de retorno débil conectado a la hoja de corte debajo de *B*. Use las propiedades y las dimensiones dadas en la figura.

(a) Encuentre la fuerza *P* sobre la hoja de corte en *D* si la fuerza de tensión en la cuerda es $T = 25$ lb (consulte el diagrama de cuerpo libre en la parte (b)).

(b) Encuentre la fuerza en el pasador de soporte en *C*.

(c) Encuentre el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} y el esfuerzo de soporte σ_b en el pasador de soporte en *C* [consulte la sección *a-a* de la hoja de corte en la parte (c) de la figura].



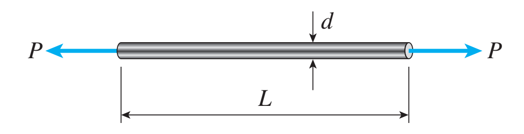
(c) Corte *a–a*

PROB. 1.6.19

Esfuerzos permisibles

1.7.1 Una barra sólida con sección transversal circular está cargada en tensión por fuerzas P (consulte la figura). La barra tiene una longitud $L = 16.0$ in y un diámetro $d = 0.50$ in. El material es una aleación de magnesio que tiene un módulo de elasticidad $E = 6.4 \times 10^6$ psi. El esfuerzo permisible en tensión es $\sigma_{perm} = 17{,}000$ psi y la elongación de la barra no debe rebasar 0.04 in.

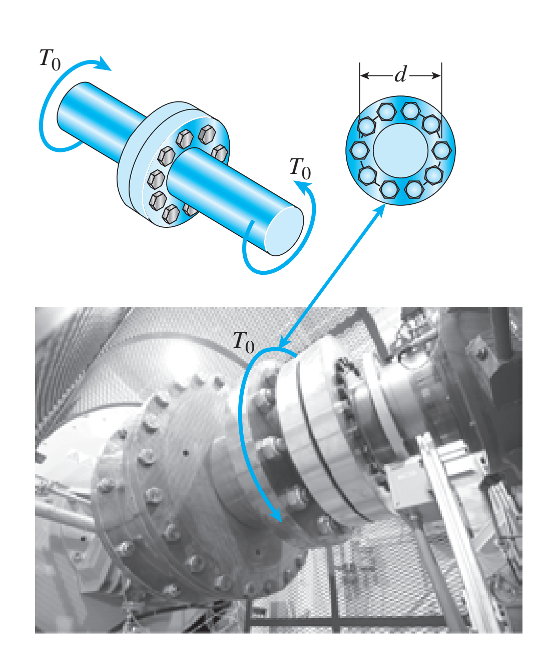
¿Cuál es el valor permisible de las fuerzas P?



PROB. 1.7.1

1.7.2 Un par de torsión T_0 se transmite entre dos ejes que contienen bridas mediante diez pernos de 20 mm (consulte la figura y la fotografía).

Si el esfuerzo cortante permisible en los pernos es 85 MPa, ¿cuál es el par de torsión permisible máximo? (No tome en cuenta la fricción en las bridas.)

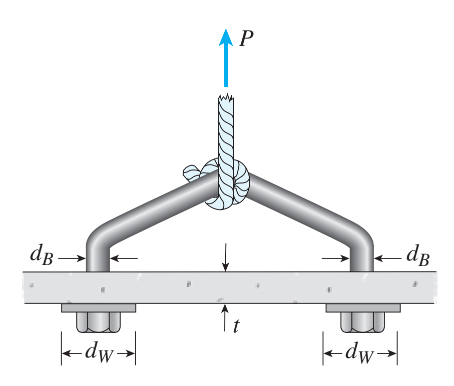


Acoplamiento de un eje de impulsión en un motor de un barco

PROB. 1.7.2

1.7.3 Un amarre en la cubierta de un bote de vela consiste de una barra doblada conectada por pernos en sus dos extremos, como se muestra en la figura. El diámetro d_B de la barra es 1/4 in, el diámetro d_W de las arandelas es 7/8 in y el espesor t de la cubierta de fibra de vidrio es 3/8 in.

Si el esfuerzo cortante permisible en la fibra de vidrio es 300 psi y la presión de soporte permisible entre la arandela y la fibra de vidrio es 550 psi, ¿cuál es la carga permisible P_{perm} en el amarre?



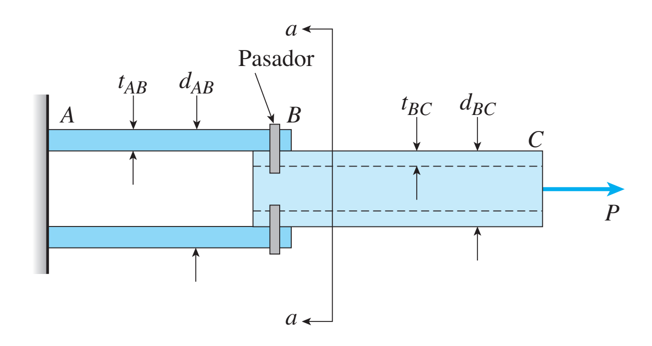
PROB. 1.7.3

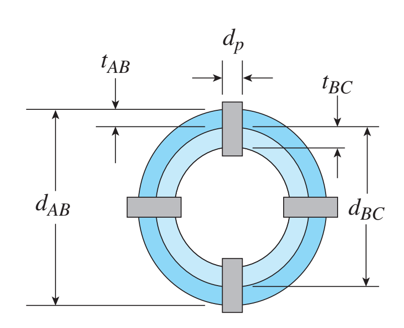
1.7.4 Dos tubos de acero unidos en B mediante cuatro pasadores ($d_p = 11$ mm), como se muestra en la sección transversal *a-a* en la figura. Los diámetros exteriores de los tubos son $d_{AB} = 40$ mm y $d_{BC} = 28$ mm. Los espesores de las paredes son $t_{AB} = 6$ mm y $t_{BC} = 7$ mm. El esfuerzo de esfuerzo de fluencia en tensión para el acero es $\sigma_Y = 200$ MPa y el esfuerzo último en *tensión* es $\sigma_U = 340$ MPa. Los valores correspondientes de esfuerzo de fluencia y último en *cortante* para el pasador son 80 MPa y 140 MPa, respectivamente. Por último, los valores de esfuerzo de fluencia y último en *soporte* entre los pasadores y los tubos son 260 MPa y 450 MPa, respectivamente. Suponga que los factores de seguridad con respecto al esfuerzo de fluencia y al esfuerzo último son 4 y 5, respectivamente.

(a) Calcule la fuerza de tensión permisible P_{perm} considerando la tensión en los tubos.

(b) Vuelva a calcular P_{perm} para cortante en los pasadores.

(c) Por último, vuelva a calcular P_{perm} para soporte entre los pasadores y los tubos. ¿Cuál es el valor de control de P?



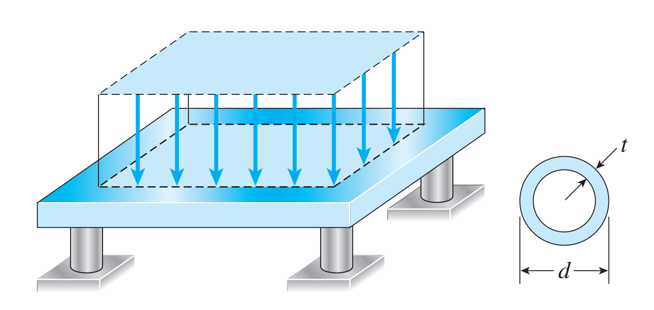


Sección a–a

PROB. 1.7.4

1.7.5 Una plataforma de acero que soporta maquinaria pesada se apoya sobre cuatro tubos cortos, huecos, de fundición gris (consulte la figura). La resistencia última del hierro colado en compresión es 50 ksi. El diámetro exterior de los tubos es $d = 4.5$ in y su espesor de pared es $t = 0.40$ in.

Utilice un factor de seguridad de 3.5 con respecto a la resistencia última, para determinar la carga total P que puede soportar la plataforma.

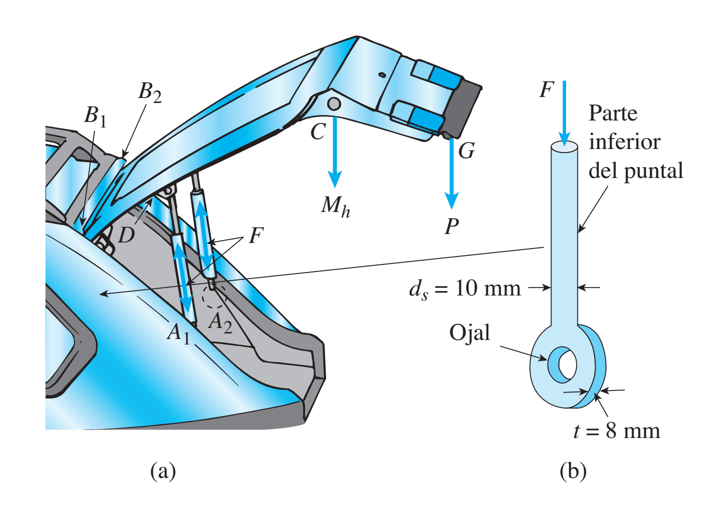


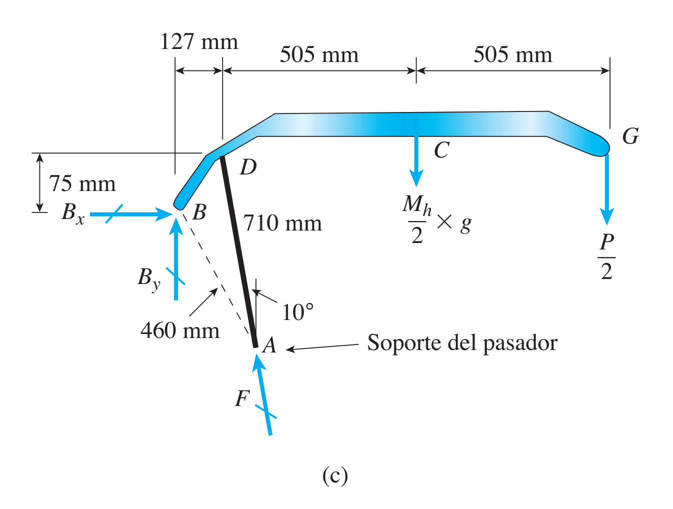
PROB. 1.7.5

1.7.6 La puerta trasera de una camioneta [$BDCF$ en la parte (a) de la figura] está soportada por dos bisagras en B_1 y B_2, y por dos puntales A_1B_1 y A_2B_2 (diámetro $d_s = 10$ mm) como se muestra en la parte (b) de la figura. Los puntales están soportados en A_1 y A_2 por pasadores con diámetro $d_p = 9$ mm y que pasan por un ojal con espesor $t = 8$ mm en el extremo del puntal [consulte la parte (b) de la figura]. Si se aplica una fuerza de cierre $P = 50$ N en G y la masa de la puerta $M_h = 43$ kg está concentrada en C:

(a) ¿Cuál es la fuerza F en cada puntal? [Utilice el diagrama de cuerpo libre de la mitad de la puerta en la parte (c) de la figura].

(b) ¿Cuál es la fuerza máxima permisible en el puntal, F_{perm}, si los esfuerzos permisibles son como sigue: esfuerzo de compresión en el puntal, 70 MPa; esfuerzo cortante en el pasador, 45 MPa y esfuerzo de soporte entre el pasador y el extremo del puntal, 110 MPa.



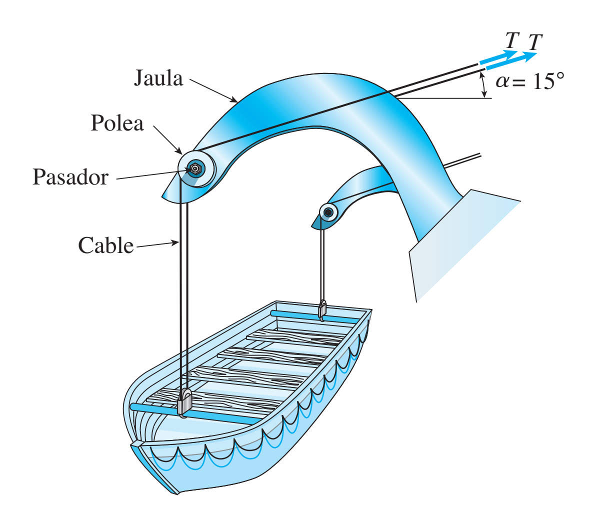


PROB. 1.7.6

1.7.7 Un bote salvavidas cuelga de dos pescantes, como se muestra en la figura. Un pasador con diámetro d = 0.80 in pasa por cada pescante y soporta dos poleas, una a cada lado del pescante.

Los cables sujetos al bote pasan sobre poleas y se enrollan en malacates que suben y bajan el bote. Las partes inferiores de los cables están en posición vertical y las partes superiores forman un ángulo $\alpha = 15°$ con la horizontal. La fuerza de tensión permisible en cada cable es 1800 lb y el esfuerzo cortante permisible en los pasadores es 4000 psi.

Si el bote pesa 1500 lb, ¿cuál es el peso máximo que se debe llevar en el bote?

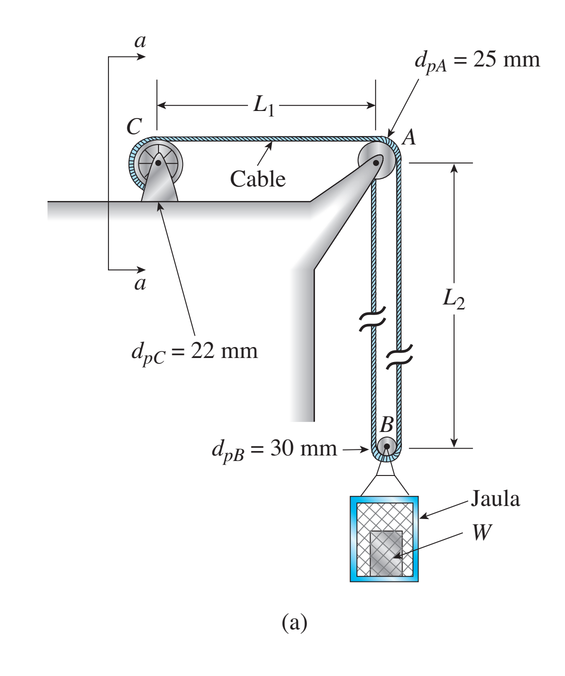


PROB. 1.7.7

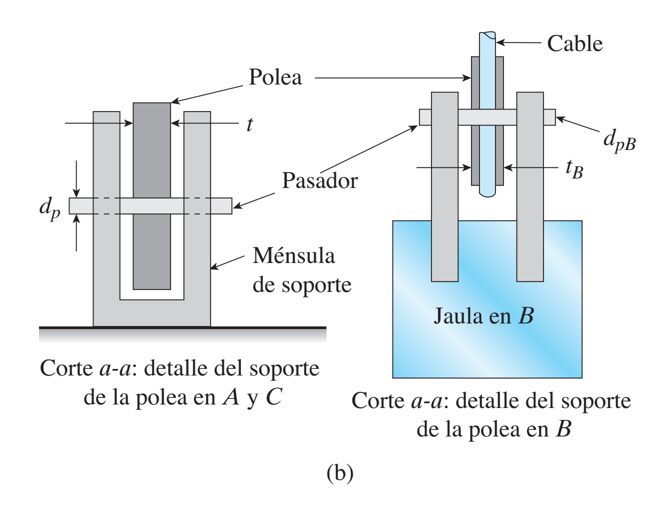
1.7.8 El sistema de cables y poleas que se muestra en la parte (a) de la figura soporta una jaula con una masa de 300 kg en B. Suponga que esto también incluye la masa de los cables. El espesor de cada una de las tres poleas de acero es t = 40 mm. Los diámetros de los pasadores son d_{pA} = 25 mm, d_{pB} = 30 mm y d_{pC} = 22 mm [consulte las partes (a) y (b) de la figura].

(a) Deduzca expresiones para las fuerzas resultantes que actúan sobre las poleas en A, B y C en términos de la tensión T en el cable.

(b) ¿Cuál es el peso W máximo que se puede agregar a la jaula en B con base en los esfuerzos permisibles siguientes? El esfuerzo cortante en los pasadores es 50 MPa; el esfuerzo de soporte entre el pasador y la polea es 110 MPa.



(a)

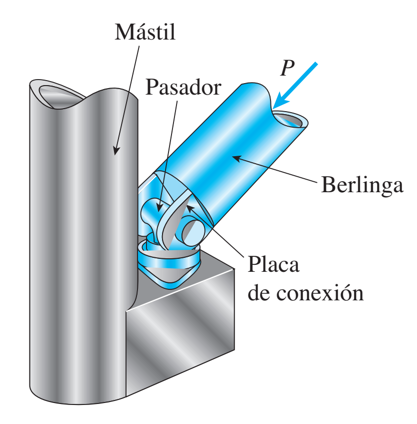


(b)

PROB. 1.7.8

1.7.9 La berlinga de un barco está conectada a la base de un mástil mediante una conexión con pasador (consulte la figura). La berlinga es un tubo de acero con un diámetro exterior $d_2 = 3.5$ in y un diámetro interior $d_1 = 2.8$ in. El pasador de acero tiene un diámetro $d = 1$ in y las dos placas que conectan a la berlinga al pasador tienen un espesor $t = 0.5$ in. Los esfuerzos permisibles son los siguientes: esfuerzo de compresión en la berlinga, 10 ksi; esfuerzo cortante en el pasador, 6.5 ksi y esfuerzo de soporte entre el pasador y las placas de conexión, 16 ksi.

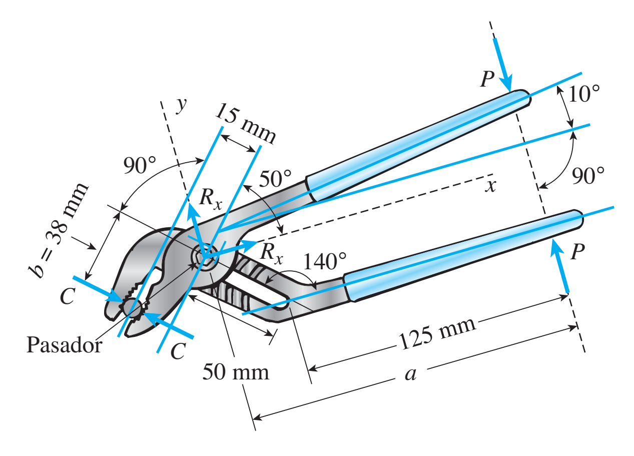
Determine la fuerza de compresión permisible P_{perm} en la berlinga.



PROB. 1.7.9

1.7.10 ¿Cuál es el valor máximo posible de la fuerza de sujeción C en las quijadas de las pinzas que se muestran en la figura si el esfuerzo cortante último en el pasador con diámetro de 5 mm es 340 MPa?

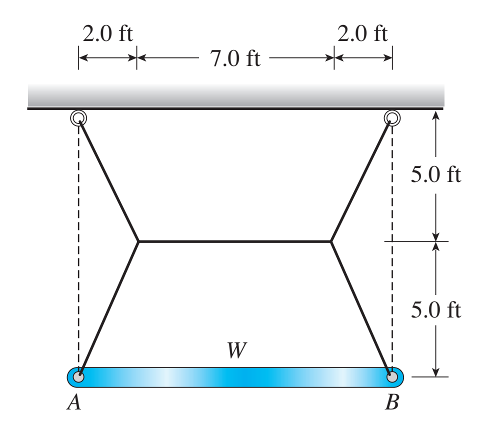
¿Cuál es el valor máximo permisible de la carga aplicada P si se debe mantener un factor de seguridad de 3.0 con respecto a la falla del pasador?



PROB. 1.7.10

1.7.11 Una barra metálica AB con peso W está suspendida por un sistema de alambres de acero dispuestos como se muestra en la figura. El diámetro de los alambres es 5/64 in y el esfuerzo de fluencia del acero es 65 ksi.

Determine el peso máximo permisible $W_{máx}$ para tener un factor de seguridad de 1.9 con respecto a la fluencia.



PROB. 1.7.11

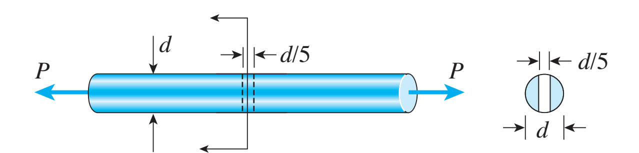
1.7.12 Una armadura plana se somete a cargas $2P$ y P en los nodos B y C, respectivamente, como se muestra en la parte (a) de la figura. Las barras de la armadura están hechas de dos ángulos ∟102 × 76 × 6.4 [consulte la tabla E-5(b): área de la sección transversal de los dos ángulos, $A = 2180$ mm^2 y la parte (b) de la figura] que tienen un esfuerzo último en tensión igual a 390 MPa. Los ángulos están conectados a una placa de unión de 12 mm de espesor en C [consulte la parte (c) de la figura] con remaches de 16 mm diámetro; suponga que cada remache transfiere una parte igual de la fuerza del elemento a la placa de unión. Los esfuerzos últimos en cortante y de soporte para el acero de los remaches es 190 MPa y 550 MPa, respectivamente.

Determine la carga permisible P_{perm} si se desea tener un factor de seguridad de 2.5 con respecto a la carga última que se pueda soportar. (Considere tensión en las barras, cortante en los remaches y soporte entre los remaches y las barras, y también soporte entre los remaches y la placa de unión. No tome en cuenta la fricción entre las placas y el peso de la propia armadura.)

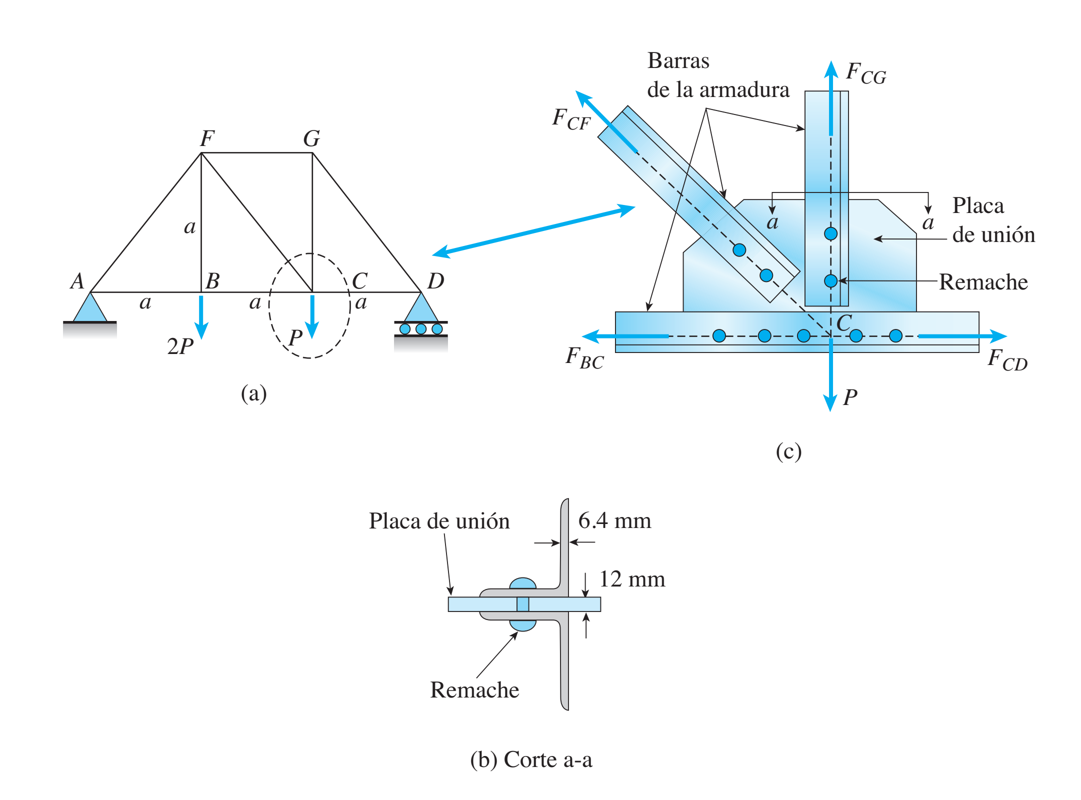
1.7.13 Una barra sólida con sección transversal circular (diámetro d) tiene un agujero con un diámetro $d/5$ que pasa lateralmente por el centro de la barra (consulte la figura). El esfuerzo de tensión promedio permisible sobre la sección transversal neta de la barra es σ_{perm}.

(a) Obtenga una fórmula para la carga permisible P_{perm} si la barra está hecha de latón, tiene un diámetro $d = 1.75$ in y $\sigma_{perm} = 12$ ksi.

(*Sugerencia*: utilice las fórmulas del caso 15 del apéndice D.)



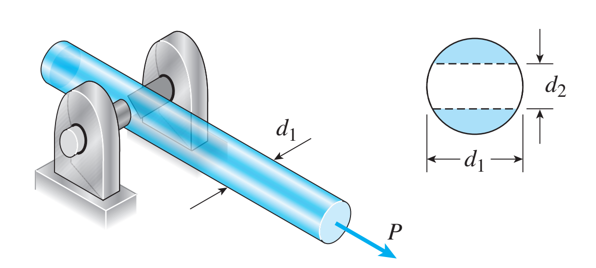
PROB. 1.7.13



PROB. 1.7.12

1.7.14 Una barra sólida de acero con diámetro $d_1 = 60$ mm tiene un agujero longitudinal con diámetro $d_2 = 32$ mm (consulte la figura). Un pasador de acero con diámetro d_2 pasa por el agujero y está sujeto a dos soportes.

Determine la carga de tensión máxima permisible P_{perm} en la barra si el esfuerzo de fluencia para cortante en el pasador es $\tau_Y = 120$ MPa, el esfuerzo de fluencia para tensión en la barra es $\sigma_Y = 250$ MPa y se requiere un factor de seguridad de 2.0 con respecto a la fluencia. (*Sugerencia:* utilice las fórmulas para el caso 15 del apéndice D.)

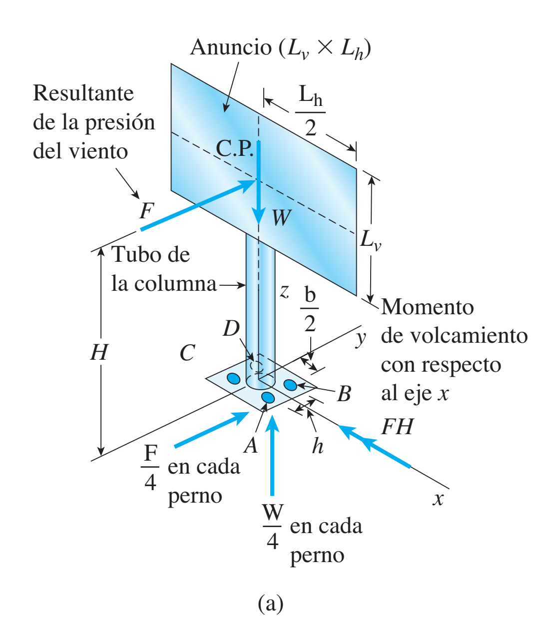


PROB. 1.7.14

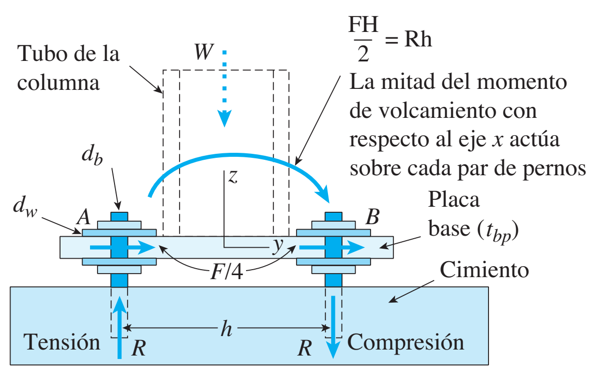
1.7.15 Un anuncio con peso W está soportado en su base por cuatro pernos anclados en un cimiento de concreto. La presión del viento p actúa normal a la superficie del anuncio; la resultante de la presión uniforme del viento es la fuerza F en el centro de presión. La fuerza del viento se supone que desarrolla fuerzas cortantes iguales $F/4$ en la dirección y en cada perno [consulte las partes (a) y (c) de la figura]. El efecto de volcamiento de la fuerza del viento también ocasiona una fuerza de elevación R en los pernos A y C y una fuerza hacia abajo ($-R$) en los pernos B y D [consulte la parte (b) de la figura]. Los efectos resultantes del viento y los esfuerzos últimos derivados para cada condición de esfuerzo, son: esfuerzo normal en cada perno ($\sigma_u = 60$ ksi), cortante a través de la placa base ($\tau_u = 17$ ksi); cortante horizontal y de soporte en cada perno ($\tau_{hu} = 25$ ksi y $\sigma_{bu} = 75$ ksi) y soporte en la parte inferior de la arandela en B (o D) ($\sigma_{bw} = 50$ ksi).

Determine la presión máxima del viento $p_{\text{máx}}$ (lb/ft^2) que puede soportar el sistema de soporte con perno para el anuncio si se desea un factor de seguridad de 2.5 con respecto a la carga última del viento que se puede soportar.

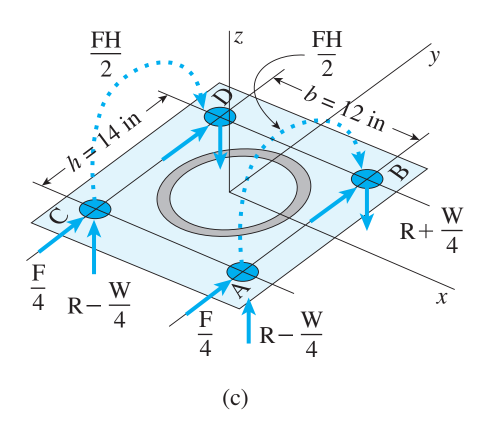
Utilice los datos numéricos siguientes: perno d_b = ¾ in; arandela $d_w = 1.5$ in; placa base $t_{bp} = 1$ in; dimensiones de la placa base $h = 14$ in y $b = 12$ in; $W = 500$ lb; $H = 17$ ft; dimensiones del anuncio ($L_v = 10$ ft $\times$ $L_h = 12$ ft; diámetro del tubo de la columna $d = 6$ in y espesor del tubo de la columna $t = 3/8$ in.



(a)



(b)



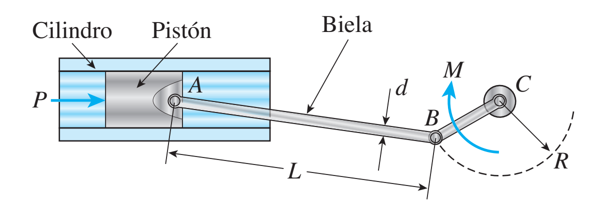
(c)

PROB. 1.7.15

1.7.16 El émbolo en un motor está conectado a una biela AB, que a su vez está conectada a un cigüeñal BC (consulte la figura). El pistón se desliza sin fricción en un cilindro y se somete a una fuerza P (supuesta constante) mientras se mueve a la derecha en la figura. La biela, que tiene un diámetro d y una longitud L, está conectada en los extremos por pernos. El cigüeñal gira con respecto al eje C con el pasador en B moviéndose en un círculo con radio R. El eje en C, que está soportado por cojinetes, ejerce un momento resistente M contra el cigüeñal.

(a) Obtenga una fórmula para la fuerza máxima permisible P_{perm} con base en un esfuerzo de compresión permisible σ_c en la biela.

(b) Calcule la fuerza P_{perm} permisible con los datos siguientes: $\sigma_c = 160$ MPa, $d = 9.00$ mm y $R = 0.28L$.



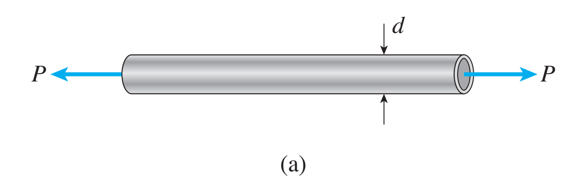
PROB. 1.7.16

Diseño para cargas axiales y cortante directo

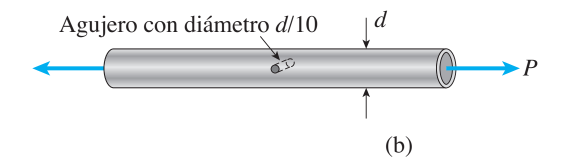
1.8.1 Se requiere que un tubo de aluminio transmita una fuerza axial de tensión $P = 33$ k [consulte la parte (a) de la figura]. El espesor de la pared del tubo será de 0.25 in.

(a) ¿Cuál es el diámetro exterior mínimo requerido $d_{\text{mín}}$ si el esfuerzo de tensión permisible es 12,000 psi?

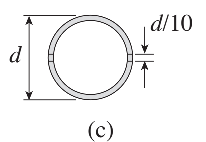
(b) Repita el inciso (a) si el tubo tiene un agujero con un diámetro $d/10$ a la mitad de su longitud [consulte las partes (b) y (c) de la figura].



(a)



(b)



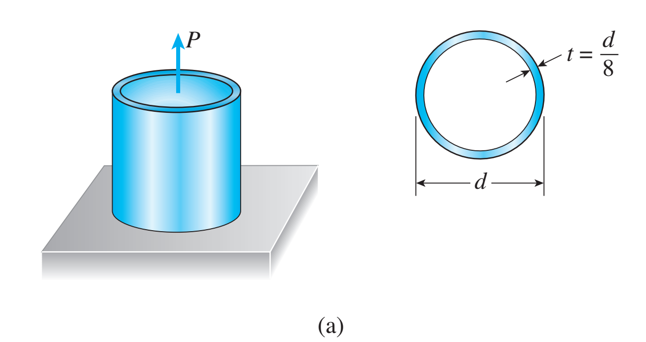
(c)

PROB. 1.8.1

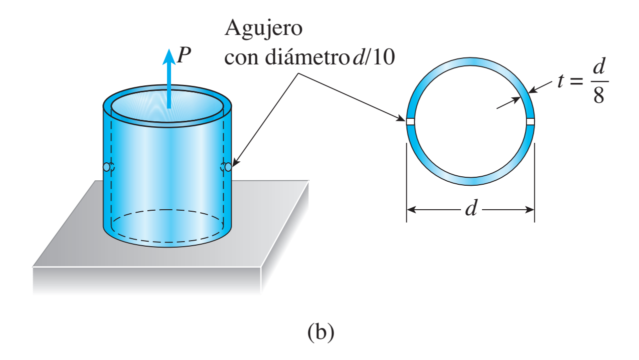
1.8.2 Un tubo de aleación de cobre que tiene un esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 290$ MPa soportará una carga axial de tensión $P = 1500$ kN [consulte la parte (a) de la figura]. Se utilizará un factor de seguridad de 1.8 contra la fluencia.

(a) Si el espesor t del tubo debe ser de un octavo de su diámetro exterior, ¿cuál es el diámetro $d_{\text{mín}}$ exterior mínimo requerido?

(b) Repita el inciso (a) si el tubo tiene un agujero con un diámetro de $d/10$ por toda su longitud, como se muestra en la figura [inciso (b)].



(a)



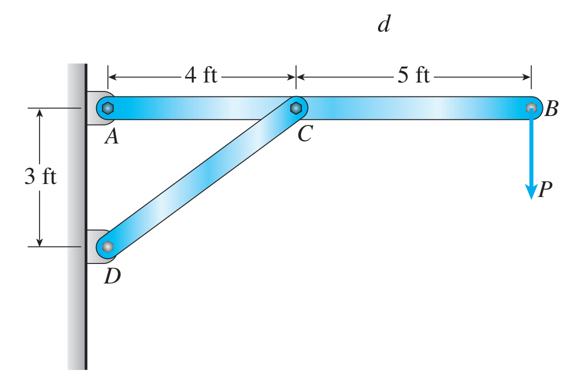
(b)

PROB. 1.8.2

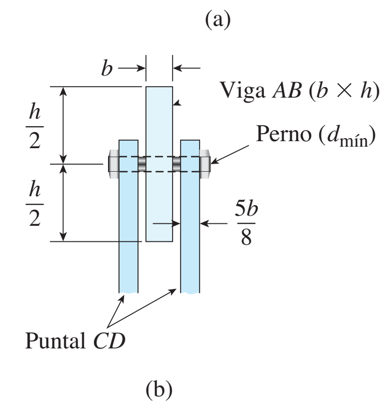
1.8.3 Una viga horizontal AB con dimensiones de su sección transversal [$b = 0.75$ in] $\times$ ($h = 8.0$ in) está soportada por un puntal inclinado CD y soporta una carga $P = 2700$ lb en B [consulte la parte (a) de la figura]. El puntal, que consiste de dos barras cada una con un espesor $5b/8$, está conectado a la viga por un perno que pasa por las tres barras que se unen en C [consulte la parte (b) de la figura].

(a) Si el esfuerzo cortante permisible en el perno es 13,000 psi, ¿cuál es el diámetro mínimo necesario $d_{mín}$ del perno en C?

(b) Si el esfuerzo de soporte permisible en el perno es 19,000 psi, ¿cuál es el diámetro mínimo necesario $d_{mín}$ del perno en C?



(a)

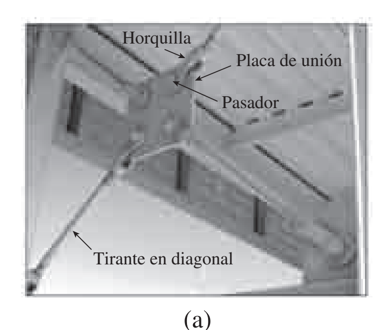


(b)

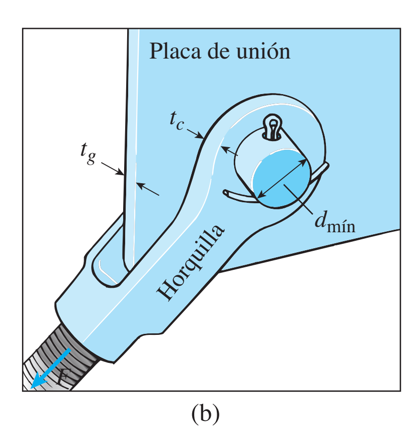
PROB. 1.8.3

1.8.4 En la parte (a) de la figura se muestra el arriostramiento lateral para un corredor peatonal. El espesor de la placa de la horquilla es $t_c = 16$ mm y el espesor de la placa de unión es $t_g = 20$ mm [consulte la parte (b) de la figura]. La fuerza máxima en el arriostramiento diagonal se espera que sea $F =$ 190 kN.

Si el esfuerzo cortante permisible en el pasador es de 90 MPa y el esfuerzo de soporte permisible entre el pasador y las placas de la horquilla y de unión es 150 MPa, ¿cuál es el diámetro mínimo necesario $d_{mín}$ del pasador?



(a)

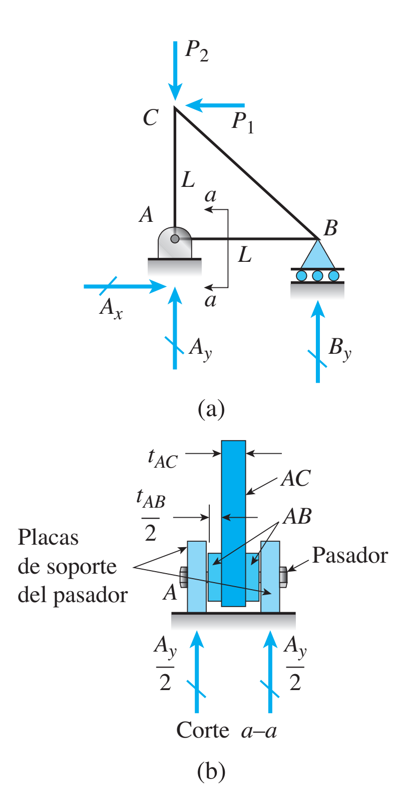


(b)

PROB. 1.8.4

1.8.5 Las fuerzas $P_1 = 1500$ lb y $P_2 = 2500$ lb se aplican en el nodo C de la armadura plana ABC que se muestra en la parte (a) de la figura. El elemento AC tiene un espesor $t_{AC} = 5/16$ in y el elemento AB está compuesto de dos barras, cada una con espesor $t_{AB}/2 = 3/16$ in [consulte la parte (b) de la figura]. No tome en cuenta el efecto de las dos placas que forman el soporte del pasador en A.

Si el esfuerzo cortante permisible en el pasador es 12,000 psi y el esfuerzo de soporte permisible en el pasador es 20,000 psi, ¿cuál es el diámetro mínimo necesario $d_{mín}$ del pasador?



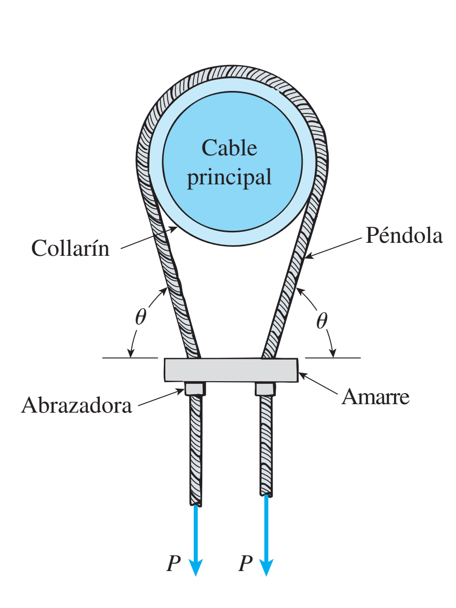
PROB. 1.8.5

1.8.6 Una péndola en un puente suspendido consiste en un cable que pasa sobre el cable principal (consulte la figura) y soporta la calzada del puente, que se encuentra muy abajo. La péndola se mantiene en su posición mediante un amarre metálico el cual se evita que se deslice hacia abajo por abrazaderas alrededor del cable suspendido.

Sea P la carga en cada parte del cable suspendido y θ el ángulo del cable suspendido justo arriba del amarre. Por último, sea σ_{perm} el esfuerzo de tensión permisible en el amarre metálico.

(a) Obtenga una fórmula para el área de la sección transversal mínima necesaria del amarre.

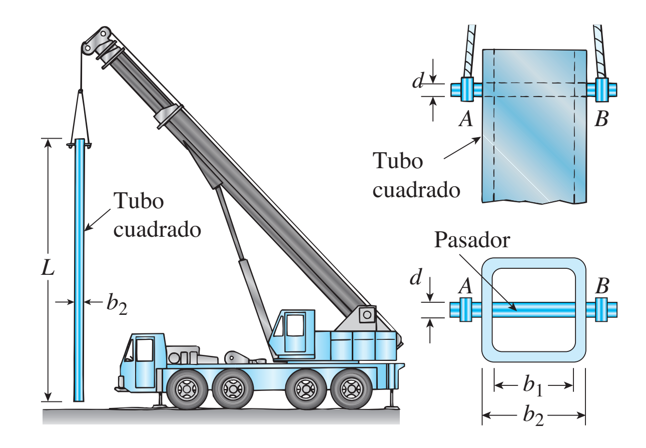
(b) Calcule el área mínima si $P = 130$ kN, $\theta = 75°$ y $\sigma_{perm} = 80$ MPa.



PROB. 1.8.6

1.8.7 Un tubo cuadrado de acero con longitud $L = 20$ ft y ancho $b_2 = 10.0$ in se eleva por una grúa (consulte la figura). El tubo cuelga de un pasador con diámetro d que está sostenido por los cables en los puntos A y B. La sección transversal es un cuadrado hueco con dimensión interna $b_1 = 8.5$ in y dimensión externa $b_2 = 10.0$ in. El esfuerzo cortante permisible en el pasador es 8700 psi y el esfuerzo de soporte permisible entre el pasador y el tubo es 13,000 psi.

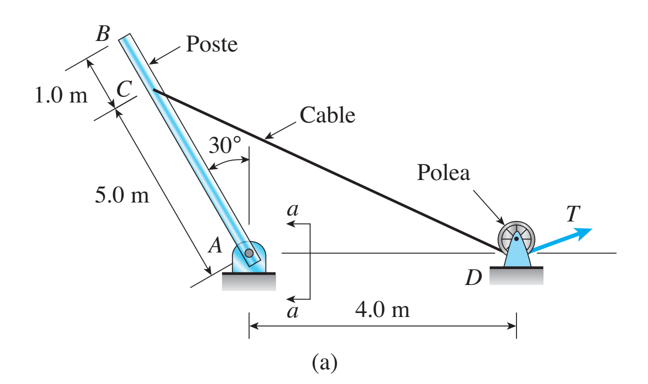
Determine el diámetro mínimo del pasador a fin de soportar el peso del tubo. (*Nota:* no tenga en cuenta las esquinas redondeadas del tubo cuando calcule su peso).

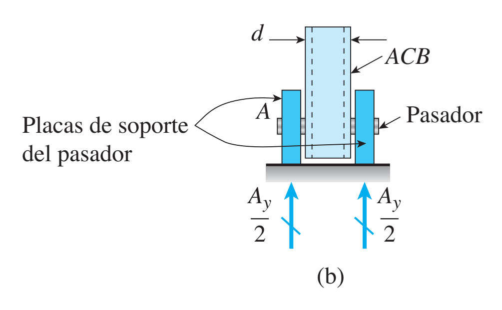


PROB. 1.8.7

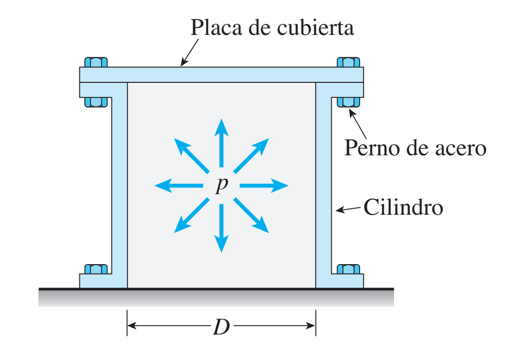
1.8.8 Un sistema de cable y polea en D se utiliza para poner en posición vertical un poste (ACB) de 230 kg, como se muestra en la parte (a) de la figura. El cable tiene una fuerza de tensión T y está conectado en C. La longitud L del poste es 6.0 m, su diámetro exterior es $d = 140$ mm y el espesor de su pared es $t = 12$ mm. El poste gira con respecto a un pasador en A como se muestra en la parte (b) de la figura. El esfuerzo cortante permisible en el pasador es 60 MPa y el esfuerzo de soporte permisible es 90 MPa.

Encuentre el diámetro mínimo del pasador en A para soportar el peso del poste en la posición que se muestra en la parte (a) de la figura.





PROB. 1.8.8



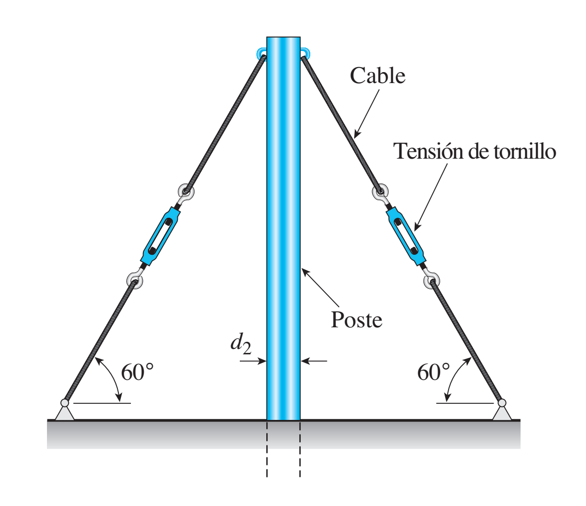
PROB. 1.8.9

1.8.9 Un cilindro circular presurizado tiene una placa de cubierta sujetada con pernos de acero (consulte la figura). La presión p del gas en el cilindro es 290 psi, el diámetro interior D del cilindro es 10.0 in y el diámetro d_B del perno es 0.50 in.

Si el esfuerzo de tensión permisible en los pernos es 10,000 psi, encuentre el número n de pernos necesarios para sujetar la cubierta.

1.8.10 Un poste tubular con diámetro exterior d_2 está sujeto mediante dos cables dispuestos con tensores de tornillo (consulte la figura). Los cables se estiran girando los tensores de tornillo, produciendo así tensión en los cables y compresión en el poste. Los dos cables se tensan con una fuerza de 110 kN. El ángulo entre los cables y el suelo es 60° y el esfuerzo de compresión permisible en el poste es σ_c = 35 MPa.

Si el espesor de la pared del poste es 15 mm, ¿cuál es el valor mínimo permisible del diámetro exterior d_2?



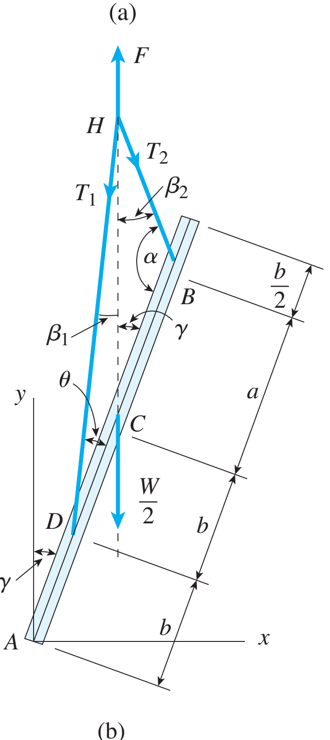
PROB. 1.8.10

1.8.11 Una panel de concreto precolado grande para un depósito se eleva hasta la posición vertical empleando dos juegos de cables en dos líneas de izado, como se muestra en la parte (a) de la figura. El cable 1 tiene una longitud $L_1 = 22$ ft y las distancias a lo largo del panel [consulte la parte (b) de la figura] son $a = L_1/2$ y $b = L_1/4$. Los cables están sujetos en los puntos de izado *B* y *D* y el panel se gira con respecto a su base en *A*. Sin embargo, como el peor de los casos, suponga que el panel se iza momentáneamente arriba del suelo y, por tanto, su peso total debe ser soportado por los cables. Suponiendo que las fuerzas de izado del cable *F* en cada línea de izado son casi iguales, utilice el modelo simplificado de una mitad del panel de la parte (b) de la figura para realizar su análisis para la posición de izado que se muestra. El peso total del panel es $W =$ 85 kips. La orientación del panel se define por los ángulos siguientes: $\gamma = 20°$ y $\theta = 10°$.

Determine el área de la sección transversal necesaria A_C del cable si su esfuerzo a la ruptura es 91 ksi y se desea un factor de seguridad de 4.0 con respecto a la falla.



(a)



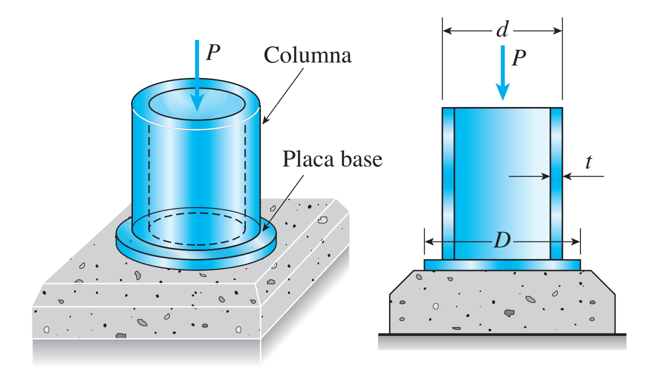
(b)

PROB. 1.8.11

1.8.12 Una columna de acero de sección circular hueca se soporta sobre una placa de base circular y un pedestal de concreto (consulte la figura). La columna tiene un diámetro exterior $d = 250$ mm y soporta una carga $P = 750$ kN.

(a) Si el esfuerzo permisible en la columna es 55 MPa, ¿cuál es el espesor mínimo necesario *t*? Con base en su resultado, seleccione un espesor para la columna. (Elija un espesor que sea un entero par, tal como 10, 12, 14,..., en unidades de milímetros).

(b) Si el esfuerzo de soporte permisible sobre el pedestal de concreto es 11.5 MPa, ¿cuál es el diámetro mínimo necesario *D* de la placa de base si se diseña para la carga permisible P_{perm} que la columna con el espesor seleccionado puede soportar?



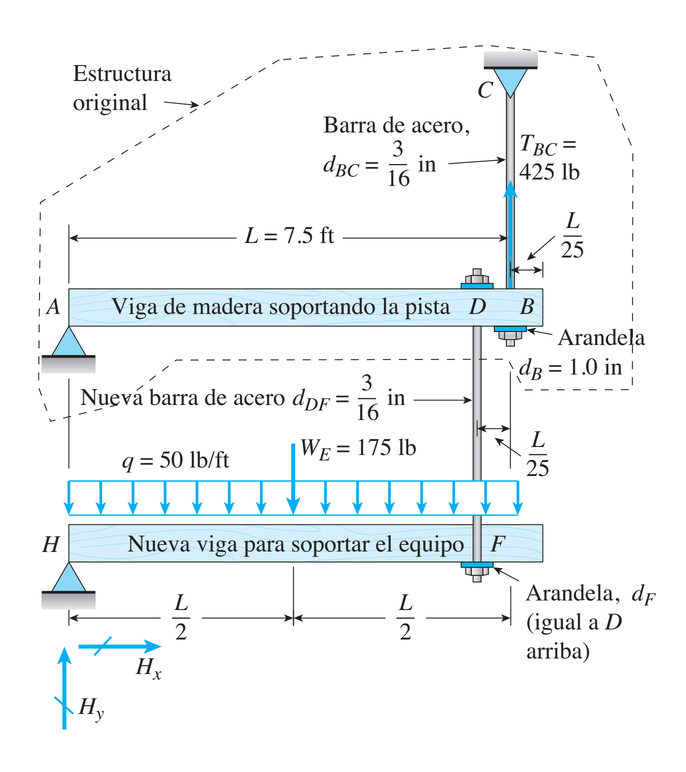
PROB. 1.8.12

1.8.13 Una pista elevada para trotar está soportada en intervalos mediante una viga de madera *AB* ($L = 7.5$ ft) que está articulada en *A* y soportada por una barra de acero *BC* y una arandela de acero en *B*. Tanto la barra ($d_{BC} = 3/16$ in) como la arandela ($d_B = 1.0$ in) se diseñaron utilizando una fuerza de tensión en la barra de $T_{BC} = 425$ lb. La barra se dimensionó empleando un factor de seguridad de 3 contra el alcance del esfuerzo último $\sigma_u = 60$ ksi. Se utilizó un esfuerzo de soporte permisible $\sigma_{ba} = 565$ psi para dimensionar el tamaño de la arandela en *B*.

Ahora, se suspenderá una plataforma pequeña *HF* debajo de una sección de la pista elevada para soportar equipo mecánico y eléctrico. La carga del equipo consiste en una carga uniforme $q = 50$ lb/ft y una carga concentrada $W_E = 175$ lb a la mitad del claro de la viga *HF*. El plan es hacer un agujero por la viga *AB* en *D* e instalar la misma barra (d_{BC}) y arandela (d_B) tanto en *D* como en *F* para soportar la viga *HF*.

(a) Use σ_u y σ_{ba} para verificar el diseño propuesto para la barra *DF* y la arandela d_F; ¿son aceptables los tamaños de la barra y de la arandela?

(b) También vuelva a verificar el esfuerzo normal de tensión en la barra *BC* y el esfuerzo de soporte en *B*; si cualquiera es inadecuado ante la carga adicional de la plataforma *HF*, rediséñelos para que cumplan el criterio original de diseño.

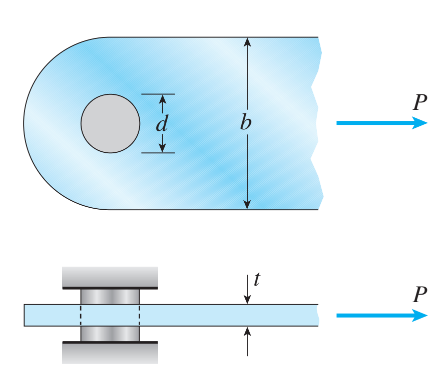


PROB. 1.8.13

***1.8.14** Una barra plana con ancho b = 60 mm y espesor t = 10 mm está cargada en tensión por una fuerza P (consulte la figura). La barra está sujeta a un soporte por un pasador con diámetro d que pasa por un agujero con el mismo tamaño de la barra. El esfuerzo de tensión permisible sobre la sección transversal neta de la barra es σ_T = 140 MPa, el esfuerzo cortante permisible en el pasador es τ_S = 80 MPa y el esfuerzo de soporte permisible entre el pasador y la barra es σ_B = 200 MPa.

(a) Determine el diámetro del pasador d_m para el cual la carga P será máxima.

(b) Determine el valor correspondiente $P_{máx}$ de la carga.

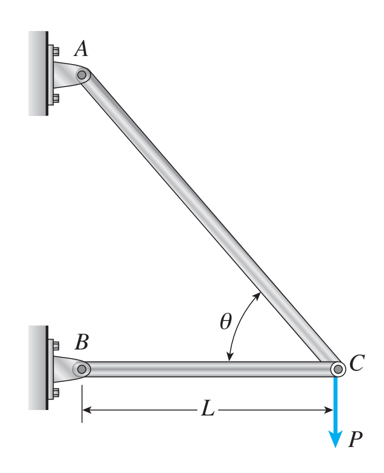


PROB. 1.8.14

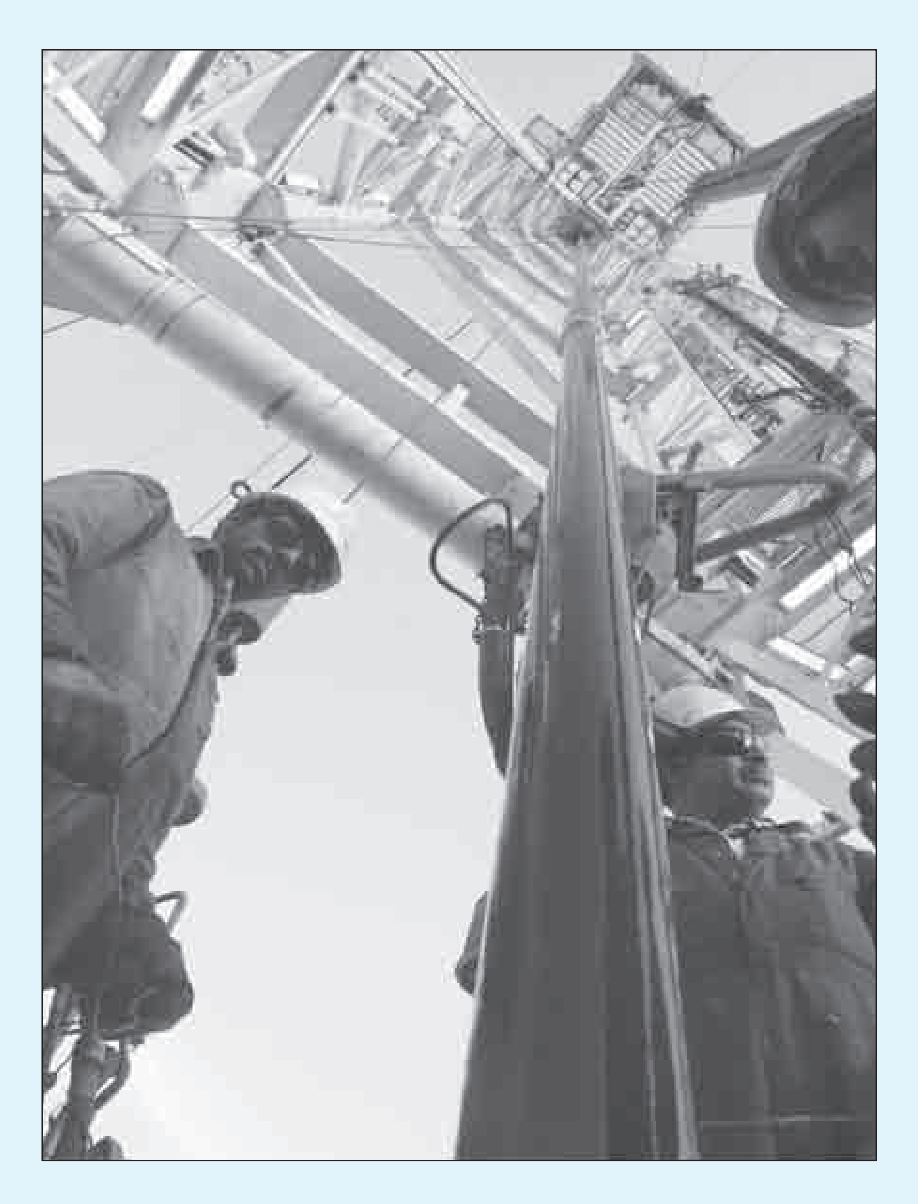
****1.8.15** Dos barras *AB* y *BC* hechas del mismo material soportan una carga vertical *P* (consulte la figura). La longitud *L* de la barra horizontal es fija, pero el ángulo θ puede variar moviendo el soporte *A* verticalmente y cambiando la longitud de la barra *AC* para que corresponda a la nueva posición del soporte *A*. Los esfuerzos permisibles en las barras son los mismos en tensión y compresión.

Podemos observar que cuando se reduce el ángulo θ, la barra *AC* se acorta pero las áreas de las secciones transversales de las dos barras aumentan (debido a que las fuerzas axiales son mayores). Se tienen efectos opuestos si se aumenta el ángulo θ. Por tanto, observamos que el peso de la estructura (que es proporcional al volumen) depende del ángulo θ.

Determine el ángulo θ de manera que la estructura tenga un peso mínimo sin exceder los esfuerzos permisibles en las barras. (*Nota:* los pesos de las barras son muy pequeños comparados con la fuerza *P* y se pueden ignorar).



PROB. 1.8.15



Un equipo de perforación petrolera se compone de elementos cargados axialmente que se deben diseñar para una variedad de condiciones de carga, incluidos el peso, el impacto y los efectos de la temperatura.

2

Elementos cargados axialmente

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se describirán otros aspectos de elementos cargados axialmente, comenzamos con la determinación de los cambios de longitud causados por cargas (secciones 2.2 y 2.3). El cálculo de los cambios de longitud es una parte esencial en el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas, un tema que se introduce en la sección 2.4. Si el elemento está estáticamente indeterminado, debemos aumentar las ecuaciones del equilibrio estático con ecuaciones compatibles (que se basan en relaciones fuerza-desplazamiento) para resolver cualquier incógnita de interés, como reacciones de apoyo o fuerzas internas axiales en elementos. Los cambios de longitud también se deben calcular cuando sea necesario controlar los desplazamientos de una estructura, ya sea por razones estéticas o bien funcionales. En la sección 2.5 analizaremos los efectos de la temperatura sobre la longitud de una barra y presentaremos los conceptos de esfuerzo térmico y deformación unitaria térmica. En esta sección también se incluye un análisis de los efectos de desajustes y deformaciones previas. En la sección 2.6 se presentará una visión generalizada de los esfuerzos en barras cargadas axialmente, donde analizamos los esfuerzos sobre *secciones inclinadas* (a diferencia de las *secciones transversales*) de barras. Si bien sólo los esfuerzos normales actúan sobre secciones transversales de barras cargadas axialmente, los esfuerzos normales y cortantes actúan sobre secciones inclinadas. Los esfuerzos sobre secciones inclinadas de elementos cargados axialmente se investigan como un primer paso hacia una consideración más completa del esfuerzo plano en capítulos posteriores. Luego introducimos varios temas adicionales de importancia en mecánica de materiales, que son: energía de deformación (sección 2.7), carga de impacto (sección 2.8), fatiga (sección 2.9), concentraciones de esfuerzo (sección 2.10) y comportamiento no lineal (secciones 2.11 y 2.12). Aunque estos temas se analizan en el contexto de elementos con cargas axiales, su descripción proporciona la base para aplicar los mismos conceptos a otros elementos estructurales, como barras en torsión y vigas en flexión.

El capítulo 2 está organizado como sigue:

*Temas especiales y/o avanzados

2.1 INTRODUCCIÓN

Los componentes estructurales sometidos sólo a tensión o compresión se conocen como **elementos cargados axialmente**. Las barras sólidas con ejes longitudinales rectos son el tipo más común, aunque los cables y resortes helicoidales también soportan cargas axiales. Ejemplos de barras cargadas axialmente son los elementos de armaduras, bielas de motores, rayos de ruedas de bicicleta, columnas de edificios y puntales en soportes de motores en aeronaves. El comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de esos elementos se analizó en el capítulo 1, donde también obtuvimos ecuaciones para los esfuerzos que actúan sobre secciones transversales ($\sigma = P/A$) y las deformaciones unitarias en direcciones longitudinales ($\epsilon = \delta/L$).

2.2 CAMBIOS DE LONGITUD DE ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE

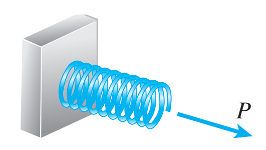
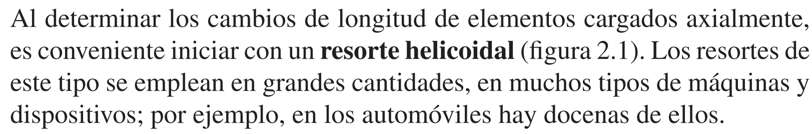


FIGURA 2.1 Resorte sometido a una carga axial P.



Al determinar los cambios de longitud de elementos cargados axialmente, es conveniente iniciar con un **resorte helicoidal** (figura 2.1). Los resortes de este tipo se emplean en grandes cantidades, en muchos tipos de máquinas y dispositivos; por ejemplo, en los automóviles hay docenas de ellos.

Cuando una carga se aplica a lo largo del eje de un resorte, como se muestra en la figura 2.1, el resorte se alarga o se acorta dependiendo de la dirección de la carga. Si la carga actúa alejándose del resorte, éste se estira y decimos que está cargado en *tensión*. Si la carga actúa hacia el resorte, éste se acorta y decimos que está en *compresión*. Sin embargo, no se debe inferir a partir de esta terminología que las espiras individuales de un resorte están sometidas a esfuerzos directos de tensión o compresión; más bien, las espiras actúan principalmente en cortante o torsión directa (o torcimiento). No obstante, el estiramiento o acortamiento global de un resorte es análogo al comportamiento de una barra en tensión o compresión, por lo que se usa la misma terminología.

Resortes

El alargamiento de un resorte se representa en la figura 2.2, donde en la parte superior de la figura se muestra un resorte en su **longitud natural** L (también denominada *longitud sin esfuerzo, longitud relajada* o *longitud libre*) y en la parte inferior de la figura se muestran los efectos al aplicar una carga de tensión. Debido a la acción de la fuerza P, el resorte se alarga una cantidad δ y su longitud final resulta $L + \delta$. Si el material del resorte es **linealmente elástico,** la carga y el alargamiento serán proporcionales:

$$P = k\delta \qquad \delta = fP \tag{2.1a,b}$$

donde k y f son constantes de proporcionalidad.

La constante k se denomina **rigidez** del resorte y se define como la fuerza necesaria para producir un alargamiento unitario, es decir, $k = P/\delta$. De manera similar, la constante f se conoce como **flexibilidad** y se define como el alargamiento producido por una carga de valor unitario, es decir, $f = \delta/P$. Aunque para este análisis empleamos un resorte en tensión, es

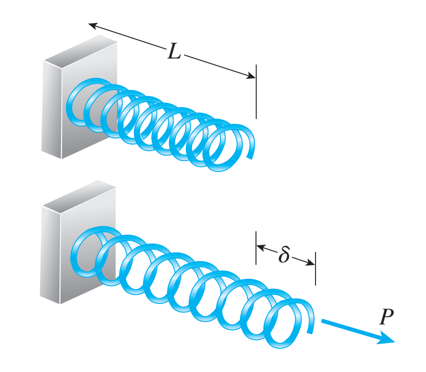


FIGURA 2.2 Alargamiento de un resorte cargado axialmente.

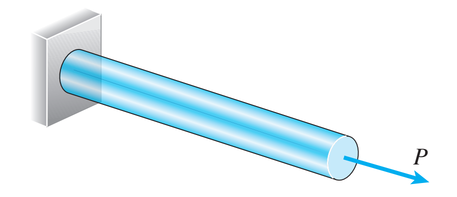


FIGURA 2.3 Barra prismática con sección transversal circular.

obvio que las ecuaciones (2.1a) y (2.1b) también se aplican a resortes en compresión.

De la explicación anterior es evidente que la rigidez y la flexibilidad de un resorte son recíprocas entre sí:

$$k = \frac{1}{f} \qquad f = \frac{1}{k} \tag{2.2a,b}$$

La flexibilidad de un resorte se puede determinar fácilmente midiendo el alargamiento producido por una carga conocida y luego la rigidez se puede calcular con la ecuación (2.2a). Otros términos para la rigidez y la flexibilidad de un resorte son la **constante del resorte** y la **docilidad,** respectivamente.

Las propiedades de un resorte definidas por las ecuaciones (2.1) y (2.2) se pueden utilizar en el análisis y diseño de varios dispositivos mecánicos que contengan resortes, como se ilustra en el ejemplo 2.1.

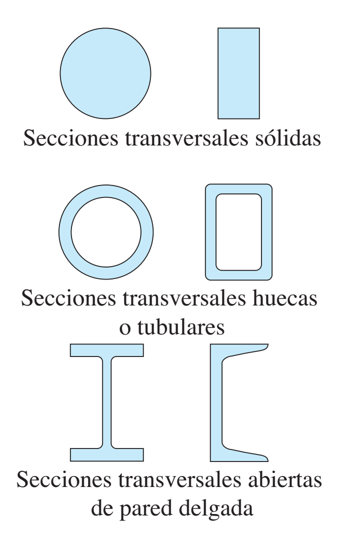


FIGURA 2.4 Secciones transversales comunes de elementos estructurales.

Barras prismáticas

Las barras cargadas axialmente se alargan bajo cargas de tensión y se acortan con cargas de compresión, como lo hacen los resortes. Para analizar este comportamiento consideremos la barra prismática que se muestra en la figura 2.3. Una **barra prismática** es un elemento estructural que tiene un eje longitudinal recto y una sección transversal constante en toda su longitud. Aunque con frecuencia empleamos barras circulares en nuestros ejemplos, debemos tener en cuenta que los elementos estructurales pueden tener una variedad de formas en sus secciones transversales, como las mostradas en la figura 2.4.

El **alargamiento** δ de una barra prismática sometida a una carga de tensión P se muestra en la figura 2.5. Si la carga actúa en el centroide de la sección transversal extrema, el esfuerzo normal uniforme en secciones transversales alejadas de los extremos está dado por la fórmula $\sigma = P/A$, donde A es el área de la sección transversal. Además, si la barra está hecha de un material homogéneo, la deformación unitaria axial es $\epsilon = \delta/L$, donde δ es el alargamiento y L es la longitud de la barra.

También supongamos que el material es **linealmente elástico,** lo cual significa que obedece la ley de Hooke, entonces los esfuerzos y las deformaciones unitarias están relacionadas por la ecuación $\sigma = E\epsilon$, donde E es el módulo de elasticidad. Al combinar estas relaciones básicas, obtenemos la siguiente ecuación para el alargamiento de la barra:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \tag{2.3}$$

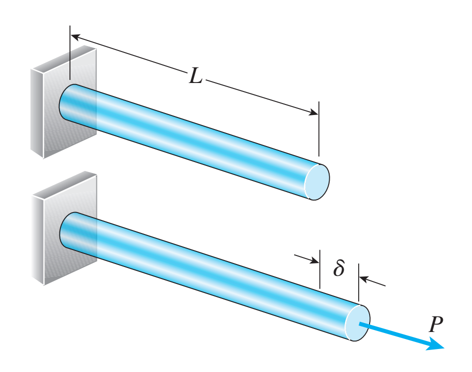


FIGURA 2.5 Alargamiento de una barra prismática en tensión.

Esta ecuación indica que el alargamiento es directamente proporcional a la carga P y a la longitud L e inversamente proporcional al módulo de elasticidad E y al área de la sección transversal A. El producto EA se conoce como **rigidez axial** de la barra.

Aunque la ecuación (2.3) fue deducida para un elemento en tensión, también se aplica a uno en compresión, caso en el cual δ representa el acortamiento de la barra. En general sabemos por inspección si un elemento se

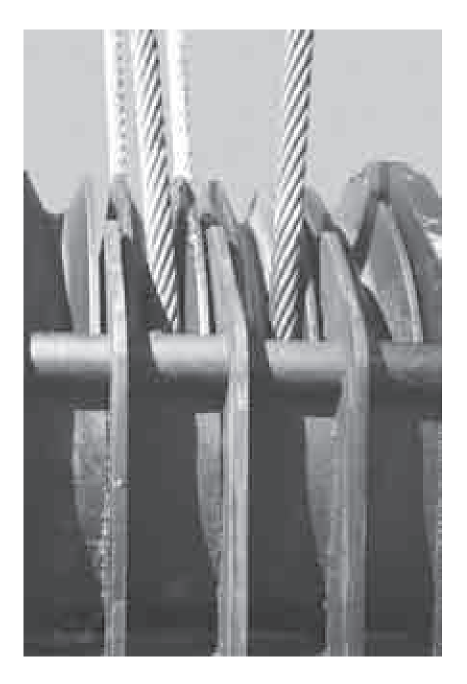
alarga o se acorta; sin embargo, hay ocasiones cuando es necesaria una **convención de signos** (por ejemplo, cuando se analiza una barra estáticamente indeterminada). En ese caso es usual que el alargamiento se tome positivo y el acortamiento como negativo.

El cambio de longitud de una barra por lo general es muy pequeño en comparación con su longitud, en especial cuando el material es un metal estructural, como el acero o el aluminio. Como ejemplo considere un puntal de aluminio de 75 in de longitud sometido a un esfuerzo de compresión moderado de 7000 psi. Si el módulo de elasticidad es 10,500 ksi, el acortamiento del puntal (de la ecuación 2.3 con P/A reemplazada por σ) es $\delta = 0.050$ in. En consecuencia, la razón entre el cambio de longitud y la longitud original es $0.05/75$, o $1/1500$, y la longitud final es 0.999 multiplicado por la longitud original. En condiciones similares a la anterior, podemos utilizar la longitud original de una barra (en lugar de la longitud final) en los cálculos.

La rigidez y la flexibilidad de una barra prismática se definen de la misma manera que se hizo para un resorte. La rigidez es la fuerza necesaria para producir un alargamiento unitario, o P/δ, y la flexibilidad es su alargamiento debido a una carga unitaria, o δ/P. Por tanto, de la ecuación (2.3) observamos que la **rigidez** y la **flexibilidad** de una barra prismática son, respectivamente,

$$k = \frac{EA}{L} \qquad f = \frac{L}{EA} \tag{2.4a,b}$$

Las rigideces y flexibilidades de elementos estructurales, incluyendo las dadas por las ecuaciones (2.4a) y (2.4b), tienen una función especial en el análisis de estructuras grandes mediante métodos computacionales.



Cables de acero sobre una polea

Cables

Los cables se utilizan para transmitir fuerzas grandes de tensión, por ejemplo, al levantar y jalar objetos pesados, subir elevadores, atirantar torres y soportar puentes colgantes. A diferencia de los resortes y las barras prismáticas, los cables no pueden resistir la compresión. Además, tienen poca resistencia a la flexión y, por tanto, pueden ser curvos y rectos. No obstante, un cable se considera como un elemento cargado axialmente debido a que se somete sólo a fuerzas de tensión. Como las fuerzas de tensión en un cable están dirigidas a lo largo de su eje, pueden variar tanto en dirección como en magnitud, dependiendo de la configuración del cable.

Los cables se construyen a partir de un número grande de alambres arrollados de alguna forma particular. Aunque se dispone de muchas configuraciones dependiendo de cómo se utilice el cable, un tipo común, como se muestra en la figura 2.6, se forma por seis *torones* enrrollados helicoidalmente alrededor de un torón central. Cada torón a su vez está construido por muchos alambres, también enrrollados helicoidalmente. Por esta razón, a los cables a menudo se les refiere como **cuerdas de alambre.**

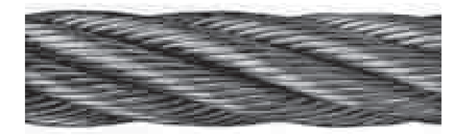


FIGURA 2.6 Configuración típica de torones y alambres en un cable de acero.

El área de la sección transversal de un cable es igual al área de la sección transversal total de los alambres individuales, denominada **área efectiva** o **área metálica**. Ésta es menor que el área de un círculo que tiene el mismo diámetro que el cable debido a los espacios entre los alambres indi-

viduales. Por ejemplo, el área de la sección transversal real (área efectiva) de un cable particular de 1.0 in de diámetro sólo es 0.471 in^2, en tanto que el área de un círculo de 1.0 in de diámetro es 0.785 in^2.

Con la misma carga de tensión, el alargamiento de un cable es mayor que el de una barra sólida del mismo material e igual área de la seccción transversal metálica, debido a que los alambres en un cable "se aprietan" de la misma manera que las fibras en una cuerda. Por tanto, el módulo de elasticidad (denominado **módulo efectivo**) de un cable es menor que el módulo del material del que está hecho. El módulo efectivo de cables de acero es aproximadamente 20,000 ksi (140 GPa), mientras que el acero tiene un módulo de aproximadamente 30,000 ksi (210 GPa).

Al determinar el **alargamiento** de un cable a partir de la ecuación (2.3) se debe emplear el módulo efectivo para E y el área efectiva para A.

En la práctica las dimensiones de la sección transversal y otras propiedades de los cables se obtienen de los fabricantes. Sin embargo, para resolver problemas en este libro (y definitivamente *no* para aplicaciones en ingeniería) en la tabla 2.1 se dan las propiedades de un tipo particular de cable. Observe que en la última columna se da la *carga última*, que es la carga que ocasionaría que el cable se rompa. La *carga permisible* se obtiene a partir de la carga última aplicando un factor de seguridad que puede variar de 3 a 10, dependiendo de cómo se utilice el cable. Los alambres individuales en un cable por lo general se hacen con acero de alta resistencia y el esfuerzo de tensión calculado en la carga de rompimiento puede ser tan alto como 200,000 psi (1400 MPa).

Los siguientes ejemplos ilustran técnicas para analizar dispositivos simples que contienen resortes y barras. Las soluciones requieren utilizar diagramas de cuerpo libre, ecuaciones de equilibrio y ecuaciones para cambios de longitud. Los problemas al final del capítulo proporcionan muchos ejemplos adicionales.

TABLA 2.1 PROPIEDADES DE CABLES DE ACERO*

Diámetro nominal		Peso aproximado		Área efectiva		Carga última	
in	(mm)	lb/ft	(N/m)	in^2	(mm^2)	lb	(kN)
0.50	(12)	0.42	(6.1)	0.119	(76.7)	23,100	(102)
0.75	(20)	0.95	(13.9)	0.268	(173)	51,900	(231)
1.00	(25)	1.67	(24.4)	0.471	(304)	91,300	(406)
1.25	(32)	2.64	(38.5)	0.745	(481)	144,000	(641)
1.50	(38)	3.83	(55.9)	1.08	(697)	209,000	(930)
1.75	(44)	5.24	(76.4)	1.47	(948)	285,000	(1260)
2.00	(50)	6.84	(99.8)	1.92	(1230)	372,000	(1650)

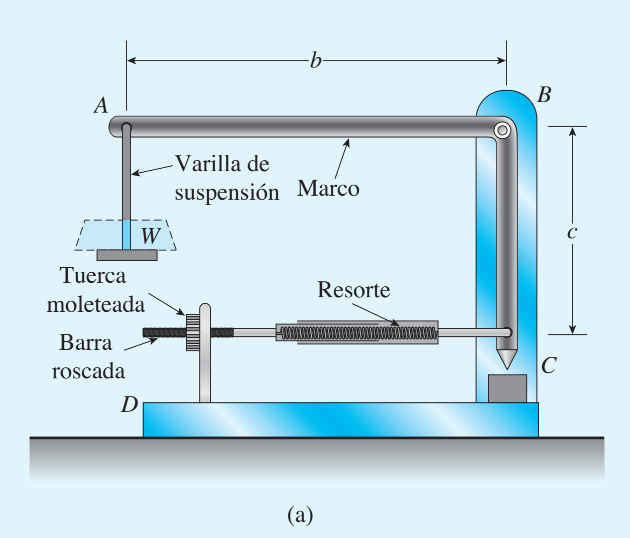
* Para emplearse únicamente con el fin de resolver problemas en este libro.

Ejemplo 2.1

Un marco rígido *ABC* en forma de "L" consiste de un brazo horizontal *AB* (longitud $b = 10.5$ in) y un brazo vertical *BC* (longitud $c = 6.4$ in) tiene una articulación en el punto *B*, como se muestra en la figura 2.7a. La articulación está unida al marco exterior *BCD*, que está montado sobre una mesa de laboratorio. La posición del índice en *C* se controla mediante un resorte (rigidez $k = 4.2$ lb/in) que está conectado a una barra roscada. La posición de la barra roscada se ajusta girando la tuerca moleteada.

El *paso* de las rosca (es decir, la distancia de un hilo al siguiente es $p = 1/16$ in, lo cual significa que una revolución completa de la tuerca moverá la barra en esa misma cantidad. Al inicio, cuando no hay un peso sobre la varilla de suspensión, la tuerca se gira hasta que el índice en el extremo del brazo *BC* esté directamente sobre la marca de referencia en el marco exterior.

Si se coloca un peso $W = 2$ lb sobre la varilla de suspensión en *A*, ¿cuántas revoluciones de la tuerca se requieren para regresar el índice a la marca? (Las defor-



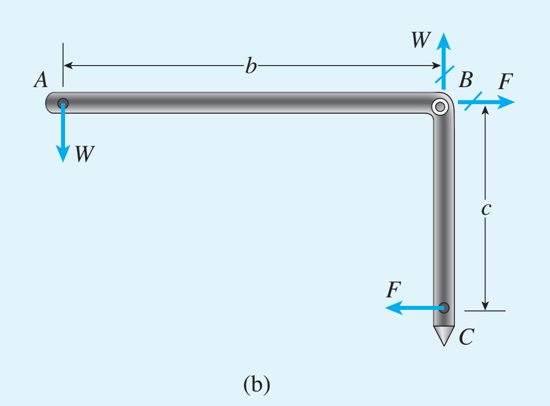


FIGURA 2.7 Ejemplo 2.1. (a) Marco rígido *ABC* en forma de "L" sujeto al marco exterior *BCD* por una articulación en *B* y (b) diagrama de cuerpo libre del marco *ABC*.

continúa

maciones de las partes metálicas del dispositivo se pueden ignorar debido a que son despreciables con respecto al cambio de longitud del resorte.)

Solución

Al inspeccionar el dispositivo (figura 2.7a) se observa que el peso *W* que actúa hacia abajo ocasionará que el índice se mueva a la derecha. Cuando el índice se mueve a la derecha, el resorte se estira en una cantidad adicional que podemos determinar a partir de la fuerza en el resorte.

Para determinar la fuerza en el resorte elaboramos un diagrama de cuerpo libre del marco *ABC* (figura 2.7b). En este diagrama, *W* representa la fuerza aplicada por la varilla de suspensión y *F* la fuerza aplicada por el resorte. Las reacciones en la articulación se indican con rayas pequeñas a través de las flechas (consulte el análisis de reacciones en la sección 1.8).

Tomando momentos con respecto al punto *B* da

$$F = \frac{Wb}{c} \tag{a}$$

El alargamiento correspondiente del resorte (de la ecuación 2.1a) es

$$\delta = \frac{F}{k} = \frac{Wb}{ck} \tag{b}$$

Para regresar el indicador a la marca debemos girar la tuerca las vueltas necesarias para mover la barra roscada hacia la izquierda, una cantidad igual al alargamiento del resorte. Como cada vuelta completa de la tuerca mueve la barra una distancia igual al paso *p*, el movimiento total de la barra es igual a *np*, donde *n* es el número de vueltas. Por tanto,

$$np = \delta = \frac{Wb}{ck} \tag{c}$$

de donde obtenemos la fórmula siguiente para el número de revoluciones de la tuerca:

$$n = \frac{Wb}{ckp} \qquad \text{(d))}$$

Resultados numéricos. Como paso final en la solución, sustituimos los datos numéricos dados en la ecuación (d), como sigue:

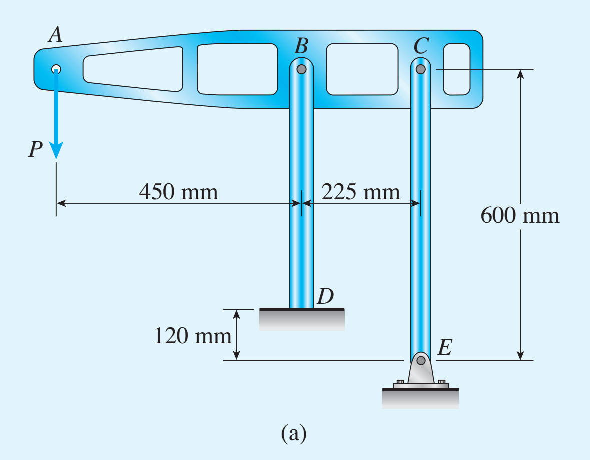
$$n = \frac{Wb}{ckp} = \frac{(2\text{ lb})(10.5\text{ in})}{(6.4\text{ in})(4.2\text{ lb/in})(1/16\text{ in})} = 12.5\text{ revoluciones}$$

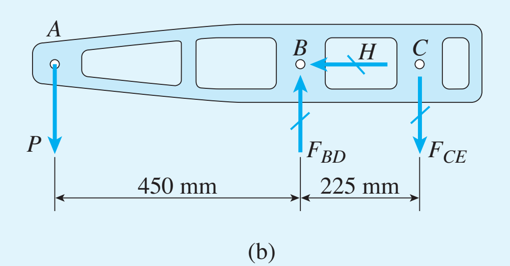
Este resultado indica que si giramos la tuerca 12.5 revoluciones, la barra roscada avanzara hacia la izquierda una cantidad igual al alargamiento del resorte causado por la carga de 2 lb, así el indicador regresa a la marca de referencia.

Ejemplo 2.2

El dispositivo que se muestra en la figura 2.8a consiste en una viga horizontal *ABC* soportada por dos barras verticales *BD* y *CE*. La barra *CE* está articulada en sus dos extremos pero la barra *BD* está empotrada en su cimentación en su extremo inferior. La distancia de *A* a *B* es 450 mm y de *B* a *C* es 225 mm. Las barras *BD* y *CE* tienen longitudes de 480 mm y 600 mm, respectivamente, y las áreas de sus secciones transversales son 1020 mm^2 y 520 mm^2, respectivamente. Las barras están hechas de acero que tiene un módulo de elasticidad $E = 205$ GPa.

Suponga que la viga *ABC* es rígida, calcule la carga máxima permisible $P_{máx}$ si el desplazamiento del punto *A* se limita a 1.0 mm.





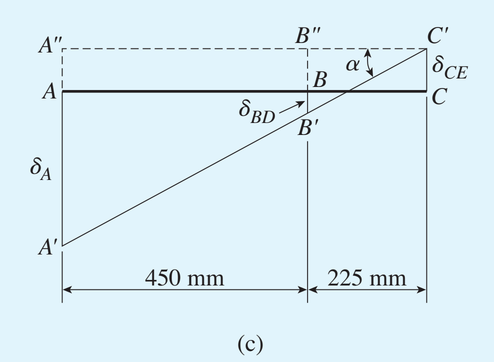


FIGURA 2.8 Ejemplo 2.2. Viga horizontal *ABC* soportada por dos barras verticales.

continúa

Solución

Para calcular el desplazamiento del punto A, necesitamos conocer los desplazamientos de los puntos B y C. Por tanto, debemos encontrar los cambios en las longitudes de las barras BD y CE empleando la ecuación general $\delta = PL/EA$ (ecuación 2.3).

Iniciamos determinando las fuerzas en las barras a partir de un diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 2.8b). Como la barra CE está articulada en sus dos extremos, es un elemento con "dos fuerzas" y sólo transmite una fuerza vertical F_{CE} a la viga. Sin embargo, la barra BD puede transmitir tanto una fuerza vertical F_{BD} como una fuerza horizontal H. De acuerdo con el equilibrio de la viga ABC en la dirección horizontal, observamos que no existe la fuerza horizontal.

Dos ecuaciones adicionales de equilibrio nos permiten expresar las fuerzas F_{BD} y F_{CE} en términos de la carga P. Entonces, tomando momentos con respecto al punto B y luego sumando fuerzas en la dirección vertical, determinamos

$$F_{CE} = 2P \qquad F_{BD} = 3P \tag{a}$$

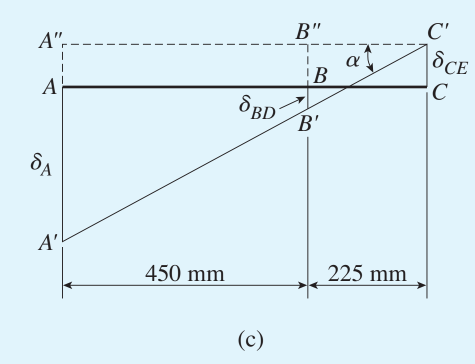


FIGURA 2.8c (Repetida.)

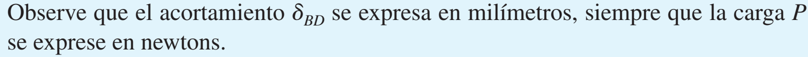
Observe que la fuerza F_{CE} actúa hacia abajo sobre la barra ABC y que la fuerza FBD actúa hacia arriba. Por tanto, el elemento CE está en tensión y el elemento BD en compresión.

El acortamiento del elemento BD es

$$\delta_{BD} = \frac{F_{BD}L_{BD}}{EA_{BD}}$$

$$= \frac{(3P)(480 \text{ mm})}{(205 \text{ GPa})(1020 \text{ mm}^2)} = 6.887P \times 10^{-6} \text{ mm} \quad (P = \text{newtons}) \tag{b}$$

Observe que el acortamiento δ_{BD} se expresa en milímetros, siempre que la carga P se exprese en newtons.



De manera similar, el alargamiento del elemento CE es

$$\delta_{CE} = \frac{F_{CE}L_{CE}}{E\,A_{CE}}$$

$$= \frac{(2P)(600 \text{ mm})}{(205 \text{ GPa})(520 \text{ mm}^2)} = 11.26P \times 10^{-6} \text{ mm} \quad (P = \text{newtons}) \tag{c}$$

Una vez más, el desplazamiento se expresa en milímetros siempre que la carga P se exprese en newtons. Conociendo los cambios en las longitudes de las dos barras, ahora podemos expresar el desplazamiento del punto A.

Diagrama de desplazamiento. El trazo del diagrama de desplazamiento que muestra las posiciones relativas de los puntos A, B y C se observa en la figura 2.8c. La línea ABC representa la alineación original de los tres puntos. Después de la aplicación de la carga P, el elemento BD se acorta en una cantidad δ_{BD} y el punto B se mueve a B'. Asimismo, el elemento CE se alarga en una cantidad δ_{CE} y el punto C se mueve a C'. Como se supone que la viga ABC es rígida, los puntos A', B' y C' se encuentran en una línea recta.

Por claridad, en el diagrama los desplazamientos están muy exagerados. En realidad, la línea ABC gira un ángulo muy pequeño hasta su nueva posición $A'B'C'$ (consulte la nota 2 al final de este ejemplo).

Utilizando triángulos semejantes, ahora podemos encontrar las relaciones entre los desplazamientos en los puntos A, B y C. De los triángulos $A'A''C'$ y $B'B''C'$ obtenemos

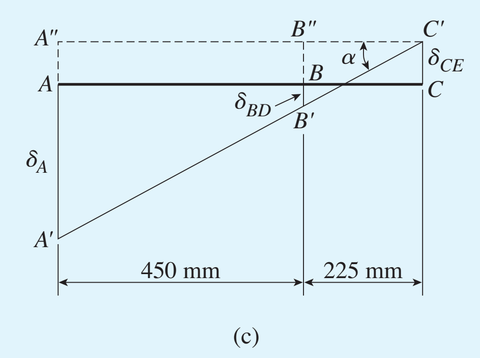
$$\frac{A'A''}{A''C'} = \frac{B'B''}{B''C'} \quad \text{o} \quad \frac{\delta_A + \delta_{CE}}{450 + 225} = \frac{\delta_{BD} + \delta_{CE}}{225} \tag{d}$$

en donde todos los términos están expresados en milímetros.

Sustituyendo los valores de δ_{BD} y δ_{CE} de las ecuaciones (b) y (c), se obtiene

$$\frac{\delta_A + 11.26P \times 10^{-6}}{450 + 225} = \frac{6.887P \times 10^{-6} + 11.26P \times 10^{-6}}{225}$$

Por último, sustituimos δ_A por su valor limite de 1.0 mm y despejamos la carga P de la ecuación. El resultado es



(c)

FIGURA 2.8c (Repetida.)

$$P = P_{\text{máx}} = 23{,}200 \text{ N (o 23.2 kN)}$$

Cuando la carga alcanza este valor, el desplazamiento hacia abajo en el punto A es 1.0 mm.

Nota 1: como la estructura se comporta de una manera linealmente elástica, los desplazamientos son proporcionales a la magnitud de la carga. Por ejemplo, si la carga es la mitad de $P_{\text{máx}}$, o sea, si P = 11.6 kN, el desplazamiento hacia abajo del punto A es 0.5 mm.

Nota 2: para verificar nuestra premisa de que la recta ABC gira un ángulo muy pequeño, podemos calcular el ángulo de rotación α a partir del diagrama de desplazamiento (figura 2.8c), como se muestra:

$$\tan \alpha = \frac{A'A''}{A''C'} = \frac{\delta_A + \delta_{CE}}{675 \text{ mm}} \tag{e}$$

El desplazamiento δ_A del punto A es 1.0 mm y el alargamiento δ_{CE} de la barra CE se determina con la ecuación (c) sustituyendo P = 23 200 N; el resultado es δ_{CE} = 0.261 mm. Por tanto, de la ecuación (e) obtenemos

$$\tan \alpha = \frac{1.0 \text{ mm} + 0.261 \text{ mm}}{675 \text{ mm}} = \frac{1.261 \text{ mm}}{675 \text{ mm}} = 0.001868$$

de donde $\alpha = 0.11°$. Este ángulo es tan pequeño que si intentáramos trazar el diagrama a escala, no seríamos capaces de distinguir entre la línea original ABC y la línea girada $A'B'C'$.

Entonces, al trabajar con diagramas de desplazamiento es usual considerar que los desplazamientos son cantidades muy pequeñas y por ello debemos simplificar la geometría. En este ejemplo se supuso que los puntos A, B y C sólo se movieron verticalmente, en tanto que si los desplazamientos fueran grandes, tendríamos que

2.3 CAMBIOS DE LONGITUD EN CONDICIONES NO UNIFORMES

considerar que se mueven a lo largo de trayectorias curvas.

Cuando una barra prismática de material linealmente elástico se carga sólo en sus extremos, podemos obtener su cambio de longitud a partir de la ecuación $\delta = PL/EA$, como se describió en la sección anterior. En esta sección veremos cómo esta misma ecuación se puede utilizar en situaciones más generales.

Barras con cargas axiales intermedias

Suponga, por ejemplo, que una barra prismática se carga con una o más cargas axiales que actúan en puntos intermedios a lo largo de su eje (figura 2.9a). Podemos determinar el cambio de longitud de esta barra sumando algebraicamente los alargamientos y acortamientos de los segmentos individuales. El procedimiento es el siguiente.

1. Identifique los segmentos de la barra (segmentos *AB*, *BC* y *CD*) como los segmentos 1, 2 y 3, respectivamente.

2. Determine las fuerzas axiales internas N_1, N_2 y N_3 en los segmentos 1, 2 y 3, respectivamente, a partir de los diagramas de cuerpo libre de las figuras 2.9b, c y d. Observe que las fuerzas axiales internas se denotan con la letra N para distinguirlas de las cargas externas P. Sumando fuerzas en la dirección vertical obtenemos las siguientes expresiones para las fuerzas axiales:

$$N_1 = -P_B + P_C + P_D \qquad N_2 = P_C + P_D \qquad N_3 = P_D$$

Al escribir estas ecuaciones empleamos la convención de signos de la sección anterior (las fuerzas axiales internas son positivas cuando son de tensión y negativas cuando son de compresión).

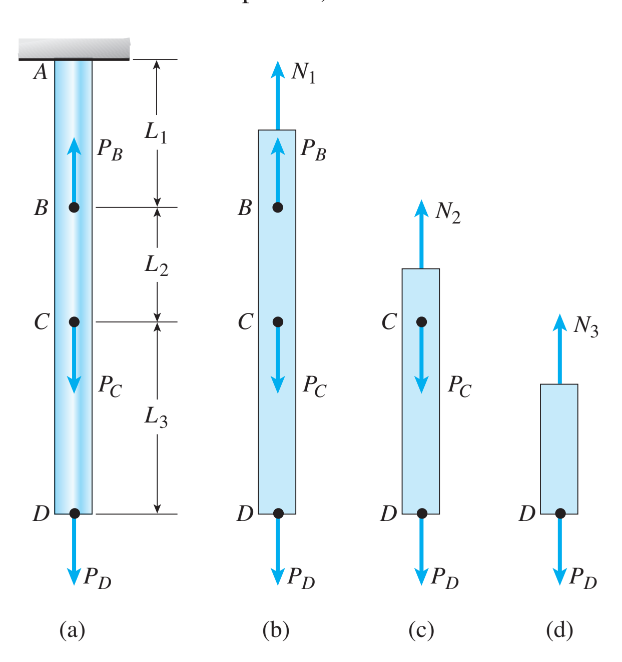


FIGURA 2.9 (a) Barra con cargas externas que actúan en puntos intermedios; (b), (c) y (d) diagramas de cuerpo libre que muestran las fuerzas axiales internas N_1, N_2 y N_3.

3. Determine los cambios en las longitudes de los segmentos con la ecuación (2.3):

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \qquad \delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} \qquad \delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA}$$

en donde L_1, L_2 y L_3 son las longitudes de los segmentos y EA es la rigidez axial de la barra.

4. Sume δ_1, δ_2 y δ_3 para obtener δ, que es el cambio en longitud de toda la barra:

$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

Como ya se explicó, los cambios en las longitudes se deben sumar algebraicamente, considerando positivos los alargamientos y negativos los acortamientos.

Barras que consisten en segmentos prismáticos

Este mismo enfoque general se puede emplear cuando la barra consiste de varios segmentos prismáticos, cada uno con fuerzas axiales distintas, diámetros y materiales diferentes (figura 2.10). El cambio de longitud se puede obtener mediante la ecuación

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \qquad (2.5)$$

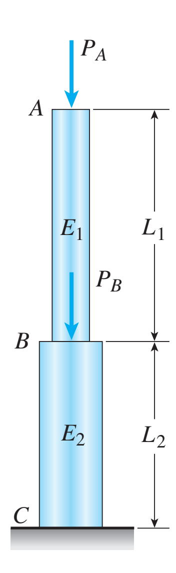


FIGURA 2.10 Barra formada por segmentos prismáticos que tienen fuerzas axiales distintas, dimensiones y materiales diferentes.

en donde el subíndice i es un índice numerador para los distintos segmentos de la barra y n es el número total de segmentos. Observe en especial que N_i no es una carga externa sino que es la fuerza axial interna en el segmento i.

Barras con cargas o dimensiones que varían continuamente

En ocasiones la fuerza axial N y el área de la sección transversal A varían continuamente a lo largo del eje de la barra, como se ilustra mediante la barra ahusada de la figura 2.11a. Ésta no sólo tiene un área de su sección transversal que varía continuamente, sino también una fuerza axial que cambia continuamente. En esta ilustración la carga consiste en dos partes, una fuerza única P_B que actúa en el extremo B de la barra y fuerzas distribuidas $p(x)$ que actúan a lo largo del eje. (Una fuerza distribuida tiene unidades de fuerza por unidad de distancia, como libras por pulgada o newtons por metro). Una carga axial distribuida podría ser resultado de factores como fuerzas centrífugas, fuerzas de fricción o el peso de una barra que cuelga en una posición vertical.

En estas condiciones ya no podemos emplear la ecuación (2.5) para obtener el cambio de longitud, sino que debemos determinar el cambio de longitud de un elemento diferencial de la barra y luego integrarlo sobre su longitud.

Para hacer esto seleccionamos un elemento diferencial a una distancia x desde el extremo izquierdo de la barra (figura 2.11a). La fuerza axial interna $N(x)$ que actúa sobre esta sección transversal (figura 2.11b) se puede determinar a partir del equilibrio utilizando ya sea el segmento AC o bien el CB como un cuerpo libre. En general, esta fuerza es una función de x. Además, si conocemos las dimensiones de la barra, podemos expresar el área de la sección transversal $A(x)$ como una función de x.

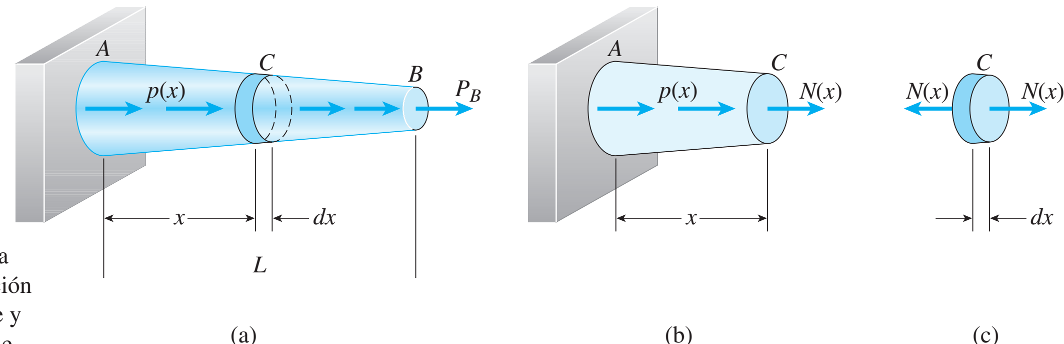


FIGURA 2.11 Barra con área de su sección transversal variable y fuerza axial variable.

El alargamiento $d\delta$ del elemento diferencial (figura 2.11c) se puede obtener a partir de la ecuación $\delta = PL/EA$ sustituyendo $N(x)$ por P, dx por L y $A(x)$ por A, como sigue:

$$d\delta = \frac{N(x)\,dx}{EA(x)} \tag{2.6}$$

El alargamiento de toda la barra se obtiene integrando sobre la longitud:

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{N(x)dx}{EA(x)} \tag{2.7}$$

Si las expresiones para $N(x)$ y $A(x)$ no son muy complicadas, la integral se puede evaluar de manera analítica y se obtiene una fórmula para δ, como se ilustra más adelante en el ejemplo 2.4. Sin embargo, si la integración formal es difícil o imposible, se utilizará un método numérico para su evaluación.

Limitaciones

Las ecuaciones (2.5) y (2.7) sólo se aplican a barras hechas de materiales linealmente elásticos, como se muestra por la presencia del módulo de elasticidad E en las fórmulas. Además, la fórmula $\delta = PL/EA$ se obtuvo suponiendo que la distribución de esfuerzos es uniforme sobre cada sección transversal (debido a que se basa en la fórmula $\sigma = P/A$). Esta suposición es válida para barras prismáticas pero no para barras ahusadas, y por tanto la ecuación (2.7) da resultados satisfactorios para una barra ahusada sólo si el ángulo entre los lados de la barra es pequeño.

Como ilustración, si el ángulo entre los lados de una barra es 20°, el esfuerzo calculado con la expresión $\sigma = P/A$ (en una sección transversal seleccionada arbitrariamente) es 3 por ciento menor que el esfuerzo exacto para la misma sección transversal (calculada mediante métodos más avanzados). Para ángulos menores el error es aún menor. En consecuencia, podemos decir que la ecuación (2.7) es satisfactoria si el ángulo de ahusamiento es pequeño. Si el ahusamiento es grande, se necesitan métodos de análisis más exactos (referencia 2.1).

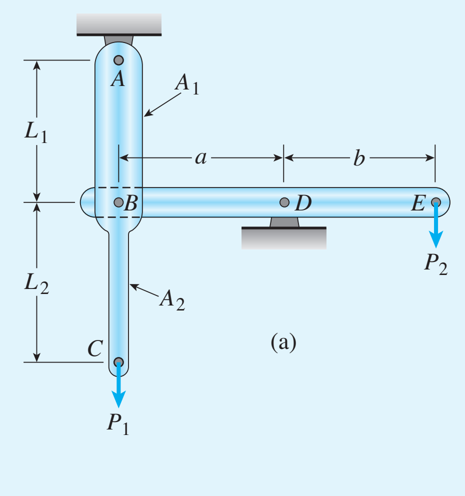
Los ejemplos siguientes ilustran la determinación de los cambios de longitudes de barras no uniformes.

Ejemplo 2.3

Una barra de acero *ABC* vertical está soportada por un pasador en su extremo superior y cargada por una fuerza P_1 en su extremo inferior (figura 2.12a). Una viga horizontal *BDE* está conectada con un perno a la barra vertical en la unión *B* y soportada en el punto *D*. La barra soporta una carga P_2 en el extremo *E*.

La parte superior de la barra vertical (segmento *AB*) tiene una longitud $L_1 = 20.0$ in y un área de sección transversal $A_1 = 0.25$ in^2; la parte inferior (segmento *BC*) tiene una longitud $L_2 = 34.8$ in y área $A_2 = 0.15$ in^2. El módulo de elasticidad *E* del acero es 29.0×10^6 psi. Las partes izquierda y derecha de la viga *BDE* tienen longitudes $a = 28$ in y $b = 25$ in, respectivamente.

Calcule el desplazamiento vertical δ_C en el punto *C* si la carga $P_1 = 2100$ lb y la carga $P_2 = 5600$ lb. (No tome en cuenta los pesos de la barra y la viga.)



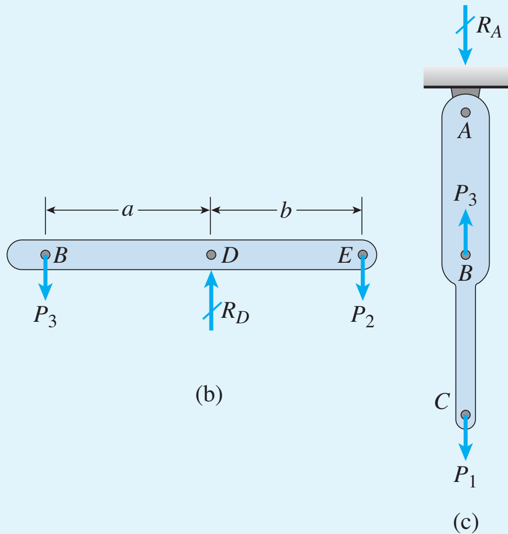


FIGURA 2.12 Ejemplo 2.3. Cambio de longitud de una barra no uniforme (barra *ABC*).

continúa

Solución

Fuerzas axiales en la barra ABC. De la figura 2.12a observamos que el desplazamiento del punto C es igual al cambio de longitud de la barra ABC. Por tanto, debemos determinar las fuerzas axiales en los dos segmentos de esta barra.

La fuerza axial N_2 en el segmento inferior es igual a la carga P_1. La fuerza axial N_1 en el segmento superior se puede determinar si conocemos la reacción vertical en A o bien la fuerza aplicada a la barra por la viga. Esta última fuerza se puede obtener de un diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 2.12b), en donde la fuerza que actúa sobre la viga (de la barra vertical) se denota P_3 y la reacción vertical en el apoyo D se denota R_D. No hay fuerzas horizontales que actúen entre la barra y la viga, como se observa en un diagrama de cuerpo libre de la barra vertical (figura 2.12c). Por tanto, no hay reacción horizontal en el apoyo D de la viga.

Tomando momentos con respecto al punto D para el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 2.12b), se obtiene

$$P_3 = \frac{P_2 b}{a} = \frac{(5600 \text{ lb})(25.0 \text{ in})}{28.0 \text{ in}} = 5000 \text{ lb} \qquad \text{(a)}$$

Esta fuerza actúa hacia abajo sobre la viga (figura 2.12b) y hacia arriba sobre la barra vertical (figura 2.12c).

Ahora podemos determinar la reacción hacia abajo en el apoyo A (figura 2.12c):

$$R_A = P_3 - P_1 = 5000 \text{ lb} - 2100 \text{ lb} = 2900 \text{ lb} \qquad \text{(b)}$$

La parte superior de la barra vertical (segmento AB) está sometida a una fuerza axial de compresión N_1 igual a R_A o 2900 lb. La parte inferior (segmento BC) soporta una fuerza axial de tensión N_2 igual a P_1 o 2100 lb.

Nota: como una alternativa para los cálculos anteriores podemos obtener la reacción R_A de un diagrama de cuerpo libre de toda la estructura (en vez de a partir del diagrama de cuerpo libre de la viga BDE).

Cambios de longitud: considerando positiva la tensión, la ecuación (2.5) da

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = \frac{N_1 L_1}{EA_1} + \frac{N_2 L_2}{EA_2} \qquad \text{(c)}$$

$$= \frac{(-2900 \text{ lb})(20.0 \text{ in})}{(29.0 \times 10^6 \text{ psi})(0.25 \text{ in}^2)} + \frac{(2100 \text{ lb})(34.8 \text{ in})}{(29.0 \times 10^6 \text{ psi})(0.15 \text{ in}^2)}$$

$$= -0.0080 \text{ in} + 0.0168 \text{ in} = 0.0088 \text{ in}$$

en donde δ es el cambio de longitud de la barra ABC. Como δ es positiva, la barra se alarga. El desplazamiento del punto C es igual al cambio de longitud de la barra:

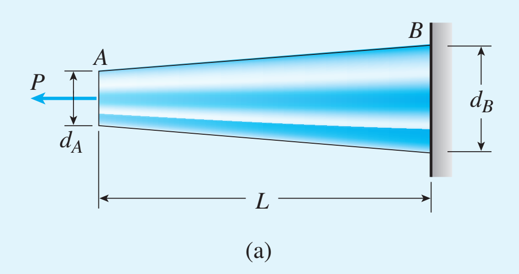
$$\delta_C = 0.0088 \text{ in}$$

Este desplazamiento es hacia abajo.

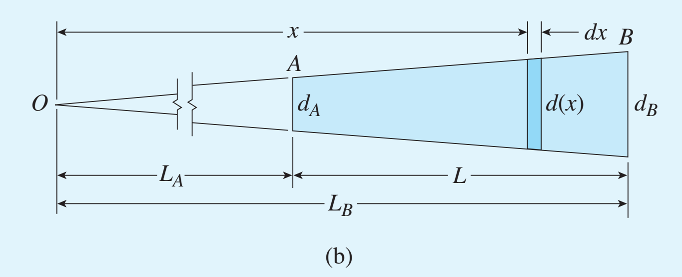
Ejemplo 2.4

Una barra cónica AB con sección transversal circular sólida y longitud L (figura 2.13a) está empotrada en el extremo B y sometida a una carga de tensión P en su extremo libre A. Los diámetros de la barra en los extremos A y B son d_A y d_B, respectivamente.

Determine el alargamiento de la barra debido a la carga P, suponga que el ángulo de conicidad es pequeño.



(a)



(b)

FIGURA 2.13 Ejemplo 2.4. Cambio de longitud de una barra cónica con sección transversal sólida.

Solución

La barra analizada en este ejemplo tiene una fuerza axial constante (igual a la carga P) en toda su longitud. Sin embargo, el área de su sección transversal varía continuamente de un extremo al otro. Por tanto, debemos integrar (consulte la ecuación 2.7) para determinar el cambio de su longitud.

Área de la sección transversal: el primer paso en la solución es obtener una expresión para el área de la sección transversal $A(x)$ en cualquier sección transversal de la barra. Para este fin, debemos establecer un origen para la coordenada x. Una posibilidad es colocar el origen de las coordenadas en el extremo libre A de la barra. Sin embargo, las integraciones que se realizarán se simplificarán ligeramente si ubicamos el origen de las coordenadas ampliando los lados de la barra cónica hasta que se unan en el punto O, como se muestra en la figura 2.13b.

Las distancias L_A y L_B desde el origen O hasta los extremos A y B, respectivamente, están dadas por la razón

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{d_A}{d_B} \tag{a}$$

obtenida de triángulos semejantes en la figura 2.13b. También por triángulos semejantes obtenemos la razón entre diámetro $d(x)$ y la distancia x desde el origen hasta el diámetro d_A en el extremo pequeño de la barra:

$$\frac{d(x)}{d_A} = \frac{x}{L_A} \quad \text{o} \quad d(x) = \frac{d_A x}{L_A} \tag{b}$$

Por tanto, el área de la sección transversal a la distancia x desde el origen es

$$A(x) = \frac{\pi[d(x)]^2}{4} = \frac{\pi d_A^2 x^2}{4L_A^2} \tag{c}$$

continúa

Cambio de longitud. Ahora sustituimos la expresión para $A(x)$ en la ecuación (2.7) y obtenemos el alargamiento δ:

$$\delta = \int \frac{N(x)dx}{EA(x)} = \int_{L_A}^{L_B} \frac{Pdx(4L_A^2)}{E(\pi d_A^2 x^2)} = \frac{4PL_A^2}{\pi E d_A^2} \int_{L_A}^{L_B} \frac{dx}{x^2} \tag{d}$$

Al realizar la integración (consulte la fórmulas de integración en el apéndice C) y sustituir los límites, obtenemos

$$\delta = \frac{4PL_A^2}{\pi E d_A^2}\left[-\frac{1}{x}\right]_{L_A}^{L_B} = \frac{4PL_A^2}{\pi E d_A^2}\left(\frac{1}{L_A} - \frac{1}{L_B}\right) \tag{e}$$

Esta expresión para δ puede simplificarse observando que

$$\frac{1}{L_A} - \frac{1}{L_B} = \frac{L_B - L_A}{L_A L_B} = \frac{L}{L_A L_B} \tag{f}$$

Por tanto, la ecuación para δ se transforma en

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d_A^2}\left(\frac{L_A}{L_B}\right) \tag{g}$$

Por último, sustituimos $L_A/L_B = d_A/d_B$ (consulte la ecuación a) y obtenemos

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d_A d_B} \tag{2.8}$$

Esta fórmula proporciona el alargamiento de la barra ahusada con sección transversal circular. Al sustituir valores numéricos podemos determinar el cambio de longitud para cualquiera barra particular.

Nota 1: un error común es suponer que el alargamiento de una barra cónica se puede determinar calculando el alargamiento de una barra prismática que tenga la misma área de sección transversal que la sección media de la barra cónica. Examinando la ecuación (2.8) se demuestra que esta idea no es válida.

Nota 2: la fórmula anterior para una barra cónica (ecuación 2.8) se puede reducir para el caso especial de una barra prismática sustituyendo $d_A = d_B = d$. El resultado es

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d^2} = \frac{PL}{EA}$$

que sabemos que es correcta.

Una fórmula general como la ecuación (2.8) se debe verificar si es posible para comprobar que se reduce a resultados conocidos para *casos especiales*. Si la reducción no produce un resultado correcto, la fórmula original está errada. Si se obtiene un resultado correcto, la fórmula original aún puede ser incorrecta pero aumenta nuestra confianza en ella. En otras palabras, este tipo de verificación es una condición necesaria pero insuficiente para que la fórmula original sea correcta.

2.4 ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Los resortes, las barras y los cables que se describieron en las secciones anteriores tienen una característica importante en común: sus reacciones y fuerzas internas se pueden determinar únicamente a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio. A las estructuras de este tipo se les clasifica como **estáticamente determinadas.** Debemos destacar que las fuerzas en una estructura estáticamente determinada se pueden determinar sin conocer las propiedades de los materiales. Considere, por ejemplo, la barra *AB* que se muestra en la figura 2.14. Los cálculos para las fuerzas axiales internas en las dos partes de la barra, así como para la reacción *R* en la base, son independientes del material de que está hecha la barra.

La mayor parte de las estructuras son más complejas que la barra de la figura 2.14 y no se pueden determinar sus reacciones y fuerzas internas sólo mediante la estática. Esta situación se ilustra en la figura 2.15, que muestra una barra *AB* empotrada en los *dos* extremos. Ahora hay dos reacciones verticales (R_A y R_B) pero sólo una ecuación de equilibrio útil, la ecuación de la suma de fuerzas en la dirección vertical. Dado que esta ecuación contiene dos incógnitas, no es suficiente para determinar las reacciones. Las estructuras de este tipo se clasifican como **estáticamente indeterminadas** y para su análisis debemos completar las ecuaciones de equilibrio con ecuaciones adicionales que contengan los desplazamientos de la estructura.

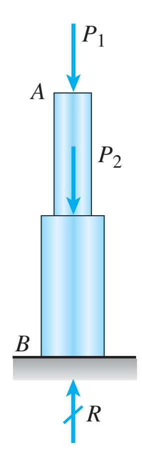


FIGURA 2.14 Barra estáticamente determinada.

Para ver cómo se analiza una estructura estáticamente indeterminada, considere el ejemplo de la figura 2.16a. La barra prismática *AB* está fija sobre apoyos rígidos en sus dos extremos y cargada axialmente mediante una fuerza *P* en un punto intermedio *C*. Como ya se explicó, no se pueden determinar las reacciones R_A y R_B sólo mediante la estática, debido a que sólo disponemos de una **ecuación de equilibrio:**

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \qquad R_A - P + R_B = 0 \tag{a}$$

Se necesita una ecuación adicional para resolver las dos reacciones desconocidas.

La ecuación adicional se basa en la observación de que una barra con sus dos extremos fijos no cambia de longitud. Si separamos la barra de sus apoyos (figura 2.16b) obtenemos una barra que está libre en sus extremos y cargada por las tres fuerzas R_A, R_B y *P*. Éstas ocasionan que la barra cambie de longitud en una cantidad δ_{AB}, que debe ser igual a cero:

$$\delta_{AB} = 0 \tag{b}$$

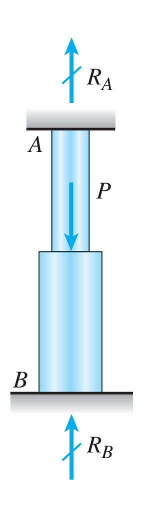


FIGURA 2.15 Barra estáticamente indeterminada.

Esta ecuación, denominada **ecuación de compatibilidad,** expresa el hecho de que el cambio de longitud de la barra debe ser compatible con las condiciones de apoyo.

A fin de resolver las ecuaciones (a) y (b), ahora debemos expresar la ecuación de compatibilidad en términos de las fuerzas desconocidas R_A y R_B. Las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre una barra y sus cambios de longitud se conocen como **relaciones fuerza-desplazamiento**. És-

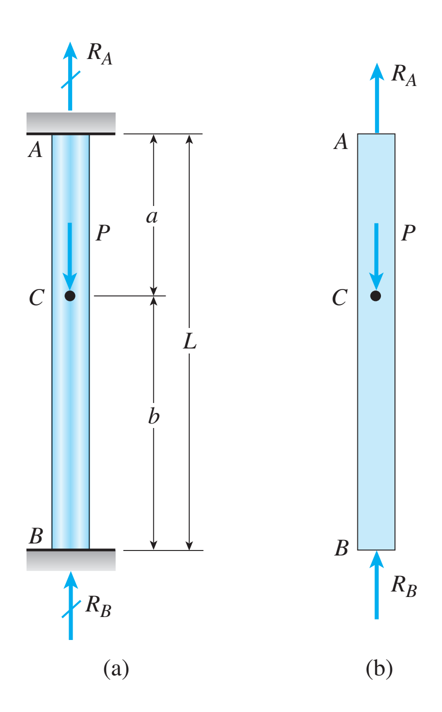


FIGURA 2.16 Análisis de una barra estáticamente indeterminada.

tas tienen varias formas dependiendo de las propiedades del material, si éste es linealmente elástico se puede utilizar la ecuación $\delta = PL/EA$ para obtener las relaciones fuerza-desplazamiento.

Supongamos que la barra de la figura 2.16 tiene un área de la sección transversal A y está hecha de un material con módulo de elasticidad E. Entonces, los cambios en las longitudes de los segmentos superior e inferior de la barra son, respectivamente,

$$\delta_{AC} = \frac{R_A a}{EA} \qquad \delta_{CB} = -\frac{R_B b}{EA} \tag{c,d}$$

donde el signo menos indica un acortamiento de la barra. Las ecuaciones (c) y (d) son las relaciones fuerza-desplazamiento.

Ahora estamos listos para resolver simultáneamente los tres conjuntos de ecuaciones (la ecuación de equilibrio, la ecuación de compatibilidad y las relaciones fuerza-desplazamiento). En este caso, iniciamos combinando las relaciones fuerza-desplazamiento con la ecuación de compatibilidad:

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} + \delta_{CB} = \frac{R_A a}{EA} - \frac{R_B b}{EA} = 0 \tag{e}$$

Observe que esta ecuación contiene las dos reacciones como incógnitas.

El paso siguiente es resolver simultáneamente la ecuación de equilibrio (ecuación a) y la ecuación anterior (ecuación e). Los resultados son

$$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L} \tag{2.9a,b}$$

Conocidas las reacciones, se pueden determinar todas las cantidades de las otras fuerzas y desplazamientos. Suponga, por ejemplo, que queremos encontrar el desplazamiento hacia abajo δ_C del punto C. Este desplazamiento es igual al alargamiento del segmento AC:

$$\delta_C = \delta_{AC} = \frac{R_A a}{EA} = \frac{Pab}{LEA} \tag{2.10}$$

Además, podemos determinar directamente los esfuerzos en los dos segmentos de la barra a partir de las fuerzas axiales internas (por ejemplo, $\sigma_{AC} = R_A/A = Pb/AL$).

Comentarios generales

Del estudio anterior observamos que el análisis de una estructura estáticamente indeterminada comprende plantear y resolver ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad y relaciones fuerza-desplazamiento. Las ecuaciones de equilibrio relacionan las cargas que actúan sobre la estructura con las fuerzas desconocidas (que pueden ser reacciones o fuerzas internas) y las ecuaciones de compatibilidad expresan condiciones sobre los desplazamientos de la estructura. Las relaciones fuerza-desplazamiento son expresiones que utilizan las dimensiones y propiedades de los elementos estructurales para relacionar las fuerzas y los desplazamientos de dichos elementos. En el caso de barras cargadas axialmente que se comportan de

una manera linealmente elástica, las relaciones se basan en la ecuación $\delta = PL/EA$. Por último, los tres conjuntos de ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para determinar las fuerzas y los desplazamientos desconocidos.

En la literatura técnica se utilizan varios términos para las condiciones expresadas por las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y por las relaciones fuerza-desplazamiento. Las ecuaciones de equilibrio también se conocen como ecuaciones *estáticas* o *cinéticas*; las ecuaciones de compatibilidad en ocasiones se denominan ecuaciones *geométricas*, ecuaciones *cinemáticas* o ecuaciones de *deformaciones consistentes*; y a las relaciones fuerza-desplazamiento con frecuencia se les refiere como *relaciones constitutivas* (debido a que tratan de la *constitución* o propiedades físicas de los materiales).

Para las estructuras relativamente simples analizadas en este capítulo, el método de análisis anterior es adecuado. Sin embargo, para estructuras más complicadas se necesitan enfoques más formalizados. Dos métodos de uso común, el *método de la flexibilidad* (también denominado *método de las fuerzas*) y el *método de la rigidez* (también llamado *método del desplazamiento*), se describen con detalle en libros de texto sobre análisis estructural. Si bien estos métodos, en general, se emplean para estructuras grandes y complejas que requieren la solución de cientos y algunas veces de miles, de ecuaciones simultáneas, aún se basan en los conceptos descritos anteriormente, es decir, en ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad y relaciones fuerza-desplazamiento.*

Los dos ejemplos siguientes ilustran la metodología para analizar estructuras estáticamente indeterminadas formadas por elementos axialmente cargados.

---

*Desde un punto de vista histórico, parece que Euler en 1774 fue el primero en analizar un sistema estáticamente indeterminado; él consideró el problema de una mesa rígida con cuatro patas soportada sobre una base elástica (referencias 2.2 y 2.3). El trabajo siguiente fue realizado por el matemático e ingeniero francés L. M. H. Navier, quien en 1825 destacó que las reacciones estáticamente indeterminadas se podrían encontrar tomando en cuenta la elasticidad de la estructura (referencia 2.4). Navier resolvió armaduras y vigas estáticamente indeterminadas.

Ejemplo 2.5

Dentro de un tubo circular hueco de cobre C está encerrado un cilindro circular sólido de acero S (figuras 2.17 a y b). El cilindro y el tubo se comprimen entre las placas rígidas de una máquina de pruebas mediante fuerzas de compresión P. El cilindro de acero tiene un área de su sección transversal A_s y un módulo de elasticidad E_s, el tubo de cobre tiene un área A_c y un módulo E_c, y las dos partes tienen una longitud L.

Determine las cantidades siguientes: (a) las fuerzas de compresión P_s en el cilindro de acero y P_c en el tubo de cobre; (b) los esfuerzos de compresión correspondientes σ_s y σ_c; y el acortamiento δ del conjunto.

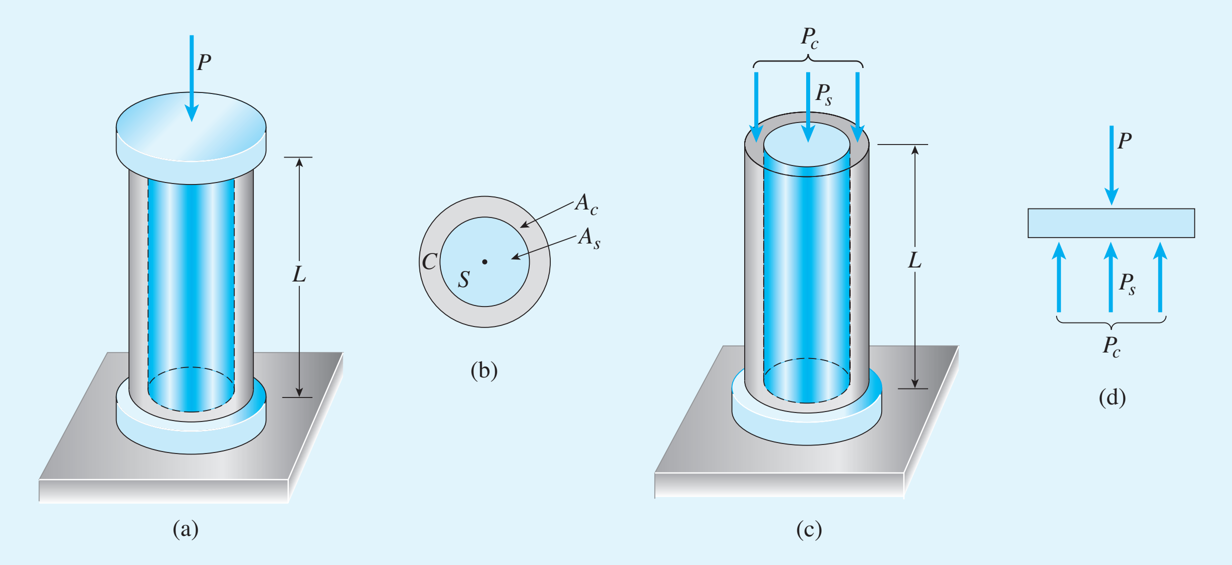


FIGURA 2.17 Ejemplo 2.5. Análisis de una estructura estáticamente indeterminada.

Solución

(a) *Fuerzas de compresión en el cilindro de acero y en el tubo de cobre*. Iniciamos removiendo la placa superior del conjunto a fin de exponer las fuerzas de compresión P_s y P_c que actúan sobre el cilindro de acero y el tubo de cobre, respectivamente (figura 2.17c). La fuerza P_s es la resultante de los esfuerzos distribuidos uniformemente que actúan sobre la sección transversal del cilindro de acero y la fuerza P_c es la resultante de los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal del tubo de cobre.

Ecuaciones de equilibrio. Un diagrama de cuerpo libre de la placa superior se muestra en la figura 2.17d. Esta placa está sometida a la fuerza P y a las fuerzas de compresión desconocidas P_s y P_c; por tanto, la ecuación de equilibrio es

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \qquad P_s + P_c - P = 0 \tag{f}$$

Ésta, que es la única ecuación de equilibrio no trivial disponible, contiene dos incógnitas. Por lo tanto, concluimos que la estructura está estáticamente indeterminada.

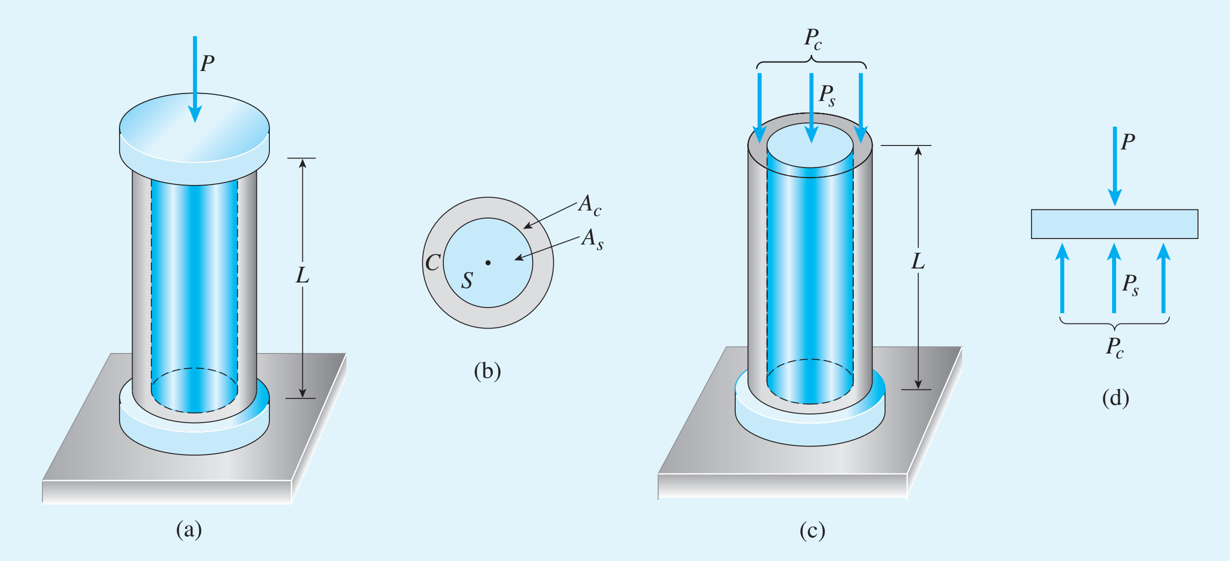


FIGURA 2.17 (Repetida.)

Ecuación de compatibilidad. Como las placas en los extremos son rígidas, el cilindro de acero y el tubo de cobre se deben acortar en la misma cantidad. Si denotamos los acortamientos de las partes de acero y cobre con δ_s y δ_c, respectivamente, obtenemos la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\delta_s = \delta_c \tag{g}$$

Relaciones fuerza-desplazamiento. Los cambios de longitud del cilindro y del tubo se pueden obtener a partir de la ecuación general $\delta = PL/EA$. Por tanto, en este ejemplo las relaciones fuerza-desplazamiento son

$$\delta_s = \frac{P_s L}{E_s A_s} \qquad \delta_c = \frac{P_c L}{E_c A_c} \tag{h,i}$$

Solución de ecuaciones. Ahora resolvemos simultáneamente los tres conjuntos de ecuaciones. Primero, sustituimos las relaciones fuerza-desplazamiento en la ecuación de compatibilidad, con lo que se obtiene

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} \tag{j}$$

Esta ecuación expresa la condición de compatibilidad en términos de las fuerzas desconocidas.

Luego, resolvemos simultáneamente la ecuación de equilibrio (ecuación f) y la ecuación anterior de compatibilidad (ecuación j) y obtenemos las fuerzas axiales en el cilindro de acero y el tubo de cobre:

$$P_s = P\left(\frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c}\right) \qquad P_c = P\left(\frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c}\right) \tag{2.11a,b}$$

continúa

Estas ecuaciones muestran que las fuerzas de compresión en las partes de acero y cobre son directamente proporcionales a sus rigideces axiales respectivas e inversamente proporcionales a la suma de sus rigideces.

(b) *Esfuerzos de compresión en el cilindro de acero y en el tubo de cobre*. Conociendo las fuerzas axiales, ahora podemos obtener los esfuerzos de compresión en los dos materiales:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{PE_s}{E_sA_s + E_cA_c} \qquad \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{PE_c}{E_sA_s + E_cA_c} \qquad (2.12a,b)$$

Observe que la razón σ_s/σ_c de los esfuerzos es igual a la razón E_s/E_c de los módulos de elasticidad, demostrando que en general el material "más rígido" siempre tiene el esfuerzo mayor.

(c) *Acortamiento del conjunto*. El acortamiento δ de todo el conjunto se puede obtener ya sea con la ecuación (h) o bien con la ecuación (i). Por tanto, al sustituir las fuerzas (de las ecuaciones 2.11a y b), obtenemos

$$\delta = \frac{P_sL}{E_sA_s} = \frac{P_cL}{E_cA_c} = \frac{PL}{E_sA_s + E_cA_c} \qquad (2.13)$$

Este resultado muestra que el acortamiento del conjunto es igual a la carga total dividida entre la suma de las rigideces de las dos partes (recuerde de la ecuación 2.4a que la rigidez de una barra cargada axialmente es $k = EA/L$).

Solución alternativa de las ecuaciones. En vez de sustituir las relaciones fuerza-desplazamiento (ecuaciones h e i) en la ecuación de compatibilidad, podríamos reescribir estas relaciones en la forma siguiente:

$$P_s = \frac{E_sA_s}{L}\delta_s \qquad P_c = \frac{E_cA_c}{L}\delta_c \qquad (k,l)$$

y sustituirlas en la ecuación de equilibrio (ecuación f):

$$\frac{E_sA_s}{L}\delta_s + \frac{E_cA_c}{L}\delta_c = P \qquad (m)$$

Esta ecuación expresa la condición de equilibrio en términos de los desplazamientos desconocidos. Luego resolvemos simultáneamente la ecuación de compatibilidad (ecuación g) y la ecuación anterior, obteniendo de esta manera los desplazamientos:

$$\delta_s = \delta_c = \frac{PL}{E_sA_s + E_cA_c} \qquad (n)$$

que concuerdan con la ecuación (2.13). Por último, sustituimos la expresión (n) en las ecuaciones (k) y (l) y obtenemos las fuerzas de compresión P_s y P_c (consulte las ecuaciones 2.11a y b).

Nota: el método alternativo para resolver las ecuaciones es una versión simplificada del método de análisis de la rigidez (o desplazamiento), y el primer método para resolver las ecuaciones es una versión simplificada del método de la flexibilidad (o fuerza). Los nombres de estos dos métodos se originan del hecho que la ecuación (m) tiene desplazamientos como incógnitas y rigideces como coeficientes (consulte la ecuación 2.4a), en tanto que la ecuación (i) tiene fuerzas como incógnitas y flexibilidades como coeficientes (consulte la ecuación 2.4b).

Ejemplo 2.6

Una barra AB rígida horizontal está articulada en el extremo A y soportada por dos alambres (CD y EF) en los puntos D y F (figura 2.18a). Una carga vertical P actúa en el extremo B de la barra. La longitud de la barra es $3b$ y los alambres CD y DF tienen longitudes L_1 y L_2, respectivamente. Además, el alambre CD tiene un diámetro d_1 y módulo de elasticidad E_1; el alambre EF tiene un diámetro d_2 y un módulo E_2.

(a) Obtenga fórmulas para la carga permisible P si los esfuerzos permisibles en los alambres CD y EF, son σ_1 y σ_2, respectivamente. (No tome en cuenta el peso de la barra).

(b) Calcule la carga permisible P para las condiciones siguientes: el alambre CD está hecho de aluminio con módulo $E_1 = 72$ GPa, diámetro $d_1 = 4.0$ mm y longitud $L_1 = 0.40$ m. El alambre EF está hecho de magnesio con módulo $E_2 = 45$ GPa, diámetro $d_2 = 3.0$ mm y longitud $L_2 = 0.30$ m. Los esfuerzos permisibles en los alambres de aluminio y magnesio son $\sigma_1 = 200$ MPa y $\sigma_2 = 175$ MPa, respectivamente.

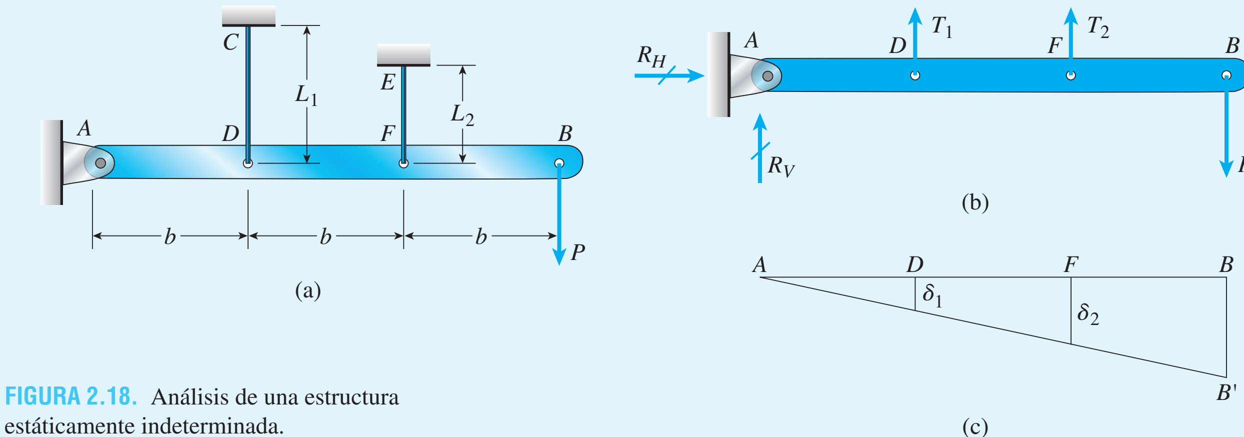


FIGURA 2.18. Análisis de una estructura estáticamente indeterminada.

Solución

Ecuación de equilibrio. Comenzamos el análisis dibujando un diagrama de cuerpo libre de la barra AB (figura 2.18b). En este diagrama T_1 y T_2 son las fuerzas de tensión desconocidas en los alambres y R_H y R_V son las componentes horizontal y vertical de la reacción en el apoyo. De inmediato vemos que la estructura es estáticamente indeterminada debido a que hay cuatro fuerzas desconocidas (T_1, T_2, R_H y R_V) pero sólo tres ecuaciones independientes de equilibrio.

Tomando momentos con respecto al punto A (momentos positivos en sentido contrario al de las manecillas del reloj) se obtiene

$$\sum M_A = 0 \qquad T_1 b + T_2(2b) - P(3b) = 0 \quad \text{o} \quad T_1 + 2T_2 = 3P \qquad \text{(o)}$$

Las otras dos ecuaciones, obtenidas sumando fuerzas en la dirección horizontal y en la vertical, no son útiles para determinar T_1 y T_2.

continúa

Ecuación de compatibilidad. Para obtener una ecuación relacionada con los desplazamientos, observamos que la carga P ocasiona que la barra AB gire con respecto al apoyo articulado A, y debido a esto los alambres se estiran. Los desplazamientos resultantes se muestran en el diagrama de desplazamientos de la figura 2.18c, donde la línea AB representa la posición original de la barra rígida y la línea AB' representa la posición girada. Los desplazamientos δ_1 y δ_2 son los alargamientos de los alambres. Dado que estos desplazamientos son muy pequeños, la barra gira un ángulo muy pequeño (en la figura se muestra muy exagerado) y podemos hacer los cálculos con la suposición de que los puntos D, F y B se mueven verticalmente hacia abajo (en lugar de moverse a lo largo de arcos de círculos).

Como las distancias horizontales AD y DF son iguales, obtenemos la relación geométrica siguiente entre los estiramientos:

$$\delta_2 = 2\delta_1 \qquad \text{(p)}$$

La ecuación (p) es la ecuación de compatibilidad.

Relaciones fuerza-desplazamiento. En virtud de que los alambres se comportan de una manera linealmente elástica, sus alargamientos se pueden expresar en términos de las fuerzas desconocidas T_1 y T_2 mediante las siguientes expresiones:

$$\delta_1 = \frac{T_1 L_1}{E_1 A_1} \qquad \delta_2 = \frac{T_2 L_2}{E_2 A_2}$$

en donde A_1 y A_2 son las áreas de las secciones transversales de los alambres CD y EF, respectivamente; es decir,

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \qquad A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

Por conveniencia, al escribir las ecuaciones, introduzcamos la notación siguiente para las flexibilidades de los alambres (consulte la ecuación 2.4b):

$$f_1 = \frac{L_1}{E_1 A_1} \qquad f_2 = \frac{L_2}{E_2 A_2} \qquad \text{(q,r)}$$

Entonces las relaciones fuerza-desplazamiento se transforman en

$$\delta_1 = f_1 T_1 \qquad \delta_2 = f_2 T_2 \qquad \text{(s,t)}$$

Solución de ecuaciones. Ahora resolvemos simultáneamente los tres conjuntos de ecuaciones (equilibrio, compatibilidad y fuerza-desplazamiento). Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (s) y (t) en la ecuación de compatibilidad (ecuación p) se obtiene

$$f_2 T_2 = 2 f_1 T_1 \qquad \text{(u)}$$

La ecuación de equilibrio (ecuación o) y la ecuación anterior (ecuación u) contienen cada una las fuerzas T_1 y T_2 como cantidades desconocidas. Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneamente se obtienen

$$T_1 = \frac{3 f_2 P}{4 f_1 + f_2} \qquad T_2 = \frac{6 f_1 P}{4 f_1 + f_2} \qquad \text{(v,w)}$$

Conociendo las fuerzas T_1 y T_2 es fácil determinar los alargamientos de los alambres a partir de las relaciones fuerza-desplazamiento.

(a) *Carga permisible P*. Ahora que hemos terminado el análisis estáticamente indeterminado y que conocemos las fuerzas en los alambres podemos determinar el valor permisible de la carga P. El esfuerzo σ_1 en el alambre CD y el esfuerzo σ_2 en el alambre EF se obtienen fácilmente a partir de las fuerzas (ecuaciones v y w):

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{3P}{A_1}\left(\frac{f_2}{4f_1 + f_2}\right) \qquad \sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{6P}{A_2}\left(\frac{f_1}{4f_1 + f_2}\right)$$

De la primera de estas ecuaciones despejamos la fuerza permisible P_1 con base en el esfuerzo permisible σ_1 en el alambre CD:

$$P_1 = \frac{\sigma_1 A_1(4f_1 + f_2)}{3f_2} \qquad (2.14a)$$

De manera similar, de la segunda ecuación obtenemos la fuerza permisible P_2 con base en el esfuerzo permisible σ_2 en el alambre EF:

$$P_2 = \frac{\sigma_2 A_2(4f_1 + f_2)}{6f_1} \qquad (2.14b)$$

La menor de estas dos cargas es la carga máxima permisible P_{perm}.

(b) *Cálculos numéricos de la carga permisible*. Utilizando los datos dados y las ecuaciones anteriores obtenemos los siguientes valores numéricos:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(4.0 \text{ mm})^2}{4} = 12.57 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi(3.0 \text{ mm})^2}{4} = 7.069 \text{ mm}^2$$

$$f_1 = \frac{L_1}{E_1 A_1} = \frac{0.40 \text{ m}}{(72 \text{ GPa})(12.57 \text{ mm}^2)} = 0.4420 \times 10^{-6} \text{ m/N}$$

$$f_2 = \frac{L_2}{E_2 A_2} = \frac{0.30 \text{ m}}{(45 \text{ GPa})(7.069 \text{ mm}^2)} = 0.9431 \times 10^{-6} \text{ m/N}$$

Además, los esfuerzos permisibles son

$$\sigma_1 = 200 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = 175 \text{ MPa}$$

Por tanto, sustituyendo en las ecuaciones (2.14a y b) da

$$P_1 = 2.41 \text{ kN} \quad P_2 = 1.26 \text{ kN}$$

El primer resultado se basa en el esfuerzo permisible σ_1 en el alambre de aluminio y el segundo se basa en el esfuerzo permisible σ_2 en el alambre de magnesio. La carga permisible es el menor de estos dos valores:

$$P_{perm} = 1.26 \text{ kN}$$

En esta carga el esfuerzo en el magnesio es 175 MPa (el esfuerzo permisible) y el esfuerzo en el aluminio es $(1.26/2.41)(200 \text{ MPa}) = 105$ MPa. Como se esperaba, este esfuerzo es menor que el esfuerzo permisible de 200 MPa.

2.5 EFECTOS TÉRMICOS, DESAJUSTES Y DEFORMACIONES PREVIAS

Las cargas externas no son las únicas fuentes de esfuerzos y deformaciones en una estructura. Otras fuentes incluyen los *efectos térmicos* que se originan por los cambios de temperatura, *desajustes* que resultan de imperfecciones en la construcción y *deformaciones previas* que se producen por deformaciones iniciales. Otras causas son asentamientos (o movimientos) de apoyos, cargas inerciales por movimiento acelerado y fenómenos naturales como terremotos.

Los efectos térmicos, los desajustes y las deformaciones previas por lo común se encuentran tanto en sistemas mecánicos como estructurales y se describen en esta sección. Como regla general, son mucho más importantes en el diseño de estructuras estáticamente indeterminadas que en las estáticamente determinadas.

Efectos térmicos

A B

FIGURA 2.19 Bloque de material sometido a un aumento de temperatura.

Los cambios de temperatura producen dilatación o contracción de los materiales estructurales, lo que resulta en **deformaciones térmicas** y **esfuerzos térmicos.** Un ejemplo simple de dilatación térmica se muestra en la figura 2.19, donde el bloque de material no está restringido y, por tanto, tiene libertad para expandirse. Cuando se calienta el bloque, cada elemento del material experimenta deformaciones térmicas en todas las direcciones y, en consecuencia, las dimensiones del bloque aumentan. Si tomamos la esquina *A* como un punto fijo de referencia y dejamos que el lado *AB* mantenga su alineación original, el bloque adoptará la forma que se muestra con las líneas discontinúas.

Para la mayor parte de los materiales estructurales, la deformación unitaria térmica ϵ_T es proporcional al cambio de temperatura ΔT; es decir,

$$\epsilon_T = \alpha(\Delta T) \qquad (2.15)$$

en donde α es una propiedad del material llamada **coeficiente de dilatación térmica**. Como la deformación unitaria es una cantidad adimensional, el coeficiente de dilatación térmica tiene unidades iguales al recíproco del cambio de temperatura. En unidades SI las dimensiones de α se pueden expresar ya sea como 1/K (el recíproco de kelvins) o bien como 1/°C (el recíproco de grados Celsius). El valor de α es igual en ambos casos, porque un *cambio* de temperatura es numéricamente igual tanto en Kelvin como en grados Celsius. En el sistema inglés las dimensiones de α son 1/°F (el recíproco de grados Fahrenheit).* Los valores comunes de α se proporcionan en la tabla H.4 del apéndice H.

Si se necesita una **convención de signos** para las deformaciones unitarias térmicas, es usual suponer que la dilatación es positiva y la contracción negativa.

Para demostrar la importancia relativa de las deformaciones unitarias térmicas, las compararemos con las deformaciones unitarias inducidas por cargas de la manera siguiente. Suponga que tenemos una barra cargada axialmente con deformaciones unitarias longitudinales dadas por la ecuación

*Para ver un análisis de las unidades y la escala de temperatura, consulte la sección A.4 del apéndice A.

$\epsilon = \sigma/E$, donde σ es el esfuerzo y E es el módulo de elasticidad. Luego suponga que tenemos una barra idéntica sometida a un cambio de temperatura ΔT, lo cual significa que la barra tiene deformaciones unitarias térmicas dadas por la ecuación (2.15). Igualando las dos deformaciones se tiene la ecuación

$$\sigma = E\alpha(\Delta T)$$

A partir de esta ecuación podemos calcular el esfuerzo axial σ que produce la misma deformación unitaria que el cambio de temperatura ΔT. Por ejemplo, considere una barra de acero inoxidable con $E = 30 \times 10^6$ psi y $\alpha = 9.6 \times 10^{-6}/°F$. Un cálculo rápido a partir de la ecuación anterior de σ muestra que un cambio de temperatura de 100°F produce la misma deformación unitaria que un esfuerzo de 29,000 psi. Este esfuerzo está en el rango de esfuerzos permisibles comunes para el acero inoxidable. Por tanto, un cambio relativamente modesto de temperatura produce deformaciones unitarias con la misma magnitud que las causadas por cargas ordinarias, lo que demuestra que los efectos de la temperatura pueden ser importantes en el diseño en la ingeniería.

Los materiales estructurales ordinarios se dilatan al calentarse y se contraen al enfriarse y, por tanto, un aumento en la temperatura produce una deformación unitaria térmica positiva. Las deformaciones unitarias en general son reversibles, en el sentido que el elemento regresa a su forma original cuando la temperatura regresa al valor original. Sin embargo, recientemente se han desarrollado algunas aleaciones metálicas especiales que no se comportan de la manera acostumbrada. En cambio, dentro de ciertos valores de temperatura sus dimensiones disminuyen al calentarse y aumentan al enfriarse.

El agua también es un material inusual desde un punto de vista térmico, se dilata al calentarse a temperaturas superiores a 4°C y también se dilata al enfriarse debajo de 4°C. Por tanto, el agua tiene una densidad máxima a 4°C.

Ahora retornemos al bloque de material que se muestra en la figura 2.19. Suponemos que el material es homogéneo e isotrópico y que el incremento de temperatura ΔT es uniforme en todo el bloque. Podemos calcular el aumento de *cualquier* dimensión del bloque multiplicando la dimensión original por la deformación unitaria térmica. Por ejemplo, si una de las dimensiones es L, entonces esa dimensión aumentará en la cantidad

$$\delta_T = \epsilon_T L = \alpha(\Delta T)L \tag{2.16}$$

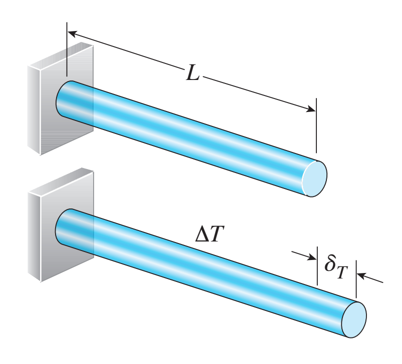


FIGURA 2.20 Incremento de longitud de una barra prismática debido a un aumento uniforme de temperatura (ecuación 2.16).

La ecuación (2.16) es una **relación temperatura-desplazamiento**, análoga a las relaciones fuerza-desplazamiento descritas en la sección anterior y se puede emplear para calcular cambios de longitudes de elementos estructurales sujetos a cambios de temperatura uniformes, como el alargamiento δ_T de la barra prismática que se muestra en la figura 2.20. (Las dimensiones transversales de la barra también varían, pero estos cambios no se muestran en la figura puesto que usualmente no tienen efecto alguno sobre las fuerzas axiales trasmitidas por la barra).

En las descripciones anteriores de deformaciones unitarias térmicas, supusimos que la estructura no tenía restricciones y que era capaz de dilatarse o contraerse libremente. Estas condiciones existen cuando un objeto reposa sobre una superficie sin fricción o cuelga en espacio abierto. En esos casos no se producen esfuerzos por un cambio uniforme de temperatura en

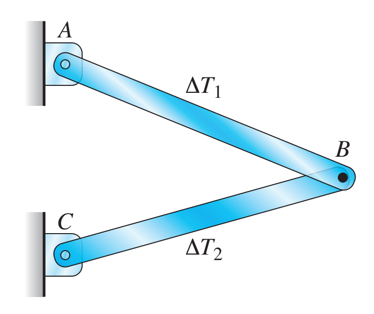


FIGURA 2.21 Armadura estáticamente determinada con un cambio uniforme de temperatura en cada elemento.

todo el objeto, aunque cambios no uniformes de temperatura pueden producir esfuerzos internos. Sin embargo, muchas estructuras tienen soportes que evitan la dilatación y contracción libre, caso en el cual se desarrollarán **esfuerzos térmicos** aun cuando el cambio de temperatura sea uniforme en toda la estructura.

Para ilustrar algunas de estas ideas sobre efectos térmicos, considere la armadura de dos barras *ABC* de la figura 2.21 y suponga que la temperatura de la barra *AB* cambia en ΔT_1 y la temperatura de la barra *BC* cambia en ΔT_2. Como la armadura está estáticamente determinada, las dos barras pueden alargarse o acortarse, resultando en un desplazamiento del nodo *B*. Sin embargo, no hay esfuerzos en ninguna de las barras y no hay reacciones en los apoyos. Esta conclusión es aplicable en general a **estructuras estáticamente determinadas**; es decir, los cambios uniformes de temperatura en los elementos producen deformaciones unitarias térmicas (y los cambios correspondientes de las longitudes) sin producir ningún esfuerzo correspondiente.

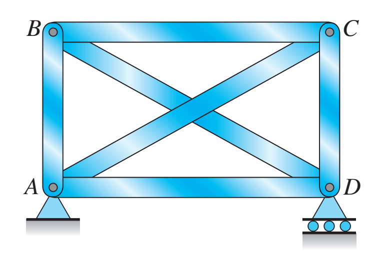


FIGURA 2.22 Armadura estáticamente indeterminada sometida a cambios de temperatura.



Se pueden desarrollar fuerzas en armaduras estáticamente indeterminadas debidas a cambios de temperatura y deformación previa

Una **estructura estáticamente indeterminada** puede o no desarrollar esfuerzos por temperatura, dependiendo del carácter de la estructura y de la naturaleza de los cambios de temperatura. Para ilustrar algunas de las posibilidades, considere la armadura estáticamente indeterminada que se muestra en la figura 2.22. Como los apoyos de esta estructura permiten que el nodo *D* se mueva horizontalmente, no se desarrollan esfuerzos cuando *toda* la armadura se calienta uniformemente. Todos los elementos aumentan su longitud en proporción a sus longitudes originales y la armadura aumenta ligeramente su tamaño.

Sin embargo, si algunas barras se calientan y otras no, se desarrollarán esfuerzos térmicos debido a que la configuración estáticamente indeterminada de las barras evita la dilatación libre. Para visualizar esta condición, imagine que sólo se calienta una barra. Conforme ésta se alarga, encuentra resistencia de las otras barras y, por tanto, se desarrollan esfuerzos en todos los elementos.

El análisis de una estructura estáticamente indeterminada con cambios de temperatura se basa en los conceptos estudiados en la sección anterior, que son las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de compatibilidad y las relaciones de los desplazamientos. La diferencia principal es que ahora utilizamos relaciones temperatura-desplazamiento (ecuación (2.16) además de relaciones fuerza-desplazamiento (como $\delta = PL/EA$) al realizar el análisis. Los dos ejemplos siguientes ilustran los procedimientos con detalle.

Ejemplo 2.7

Una barra prismática AB con longitud L se sujeta entre apoyos inmóviles (figura 2.23a). Si la temperatura de la barra se aumenta uniformemente en una cantidad ΔT, ¿qué esfuerzo térmico σ_T se desarrolla en la barra? (Suponga que la barra está hecha de un material linealmente elástico).

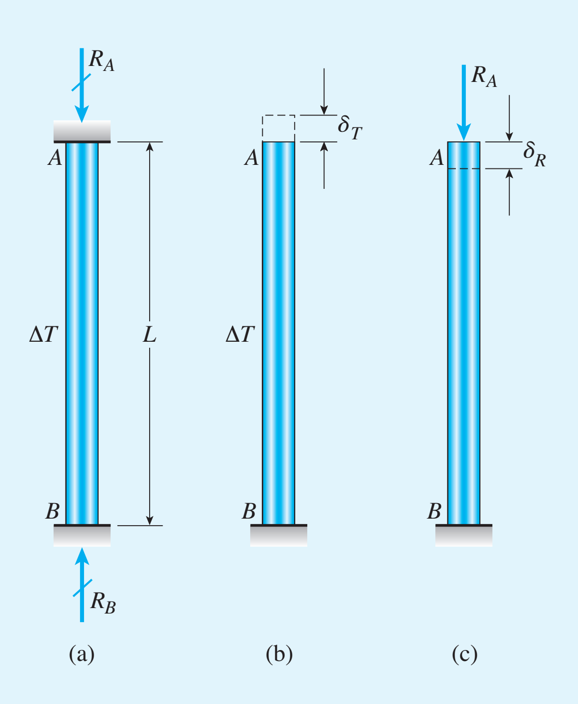


FIGURA 2.23 Ejemplo 2.7. Barra estáticamente indeterminada con aumento uniforme de temperatura ΔT.

Solución

Ya que la temperatura aumenta, la barra tiende a alargarse pero está restringida por los apoyos rígidos en A y B. Por lo tanto, se desarrollan las reacciones R_A y R_B en los apoyos y la barra está sometida a esfuerzos de compresión uniformes.

Ecuación de equilibrio. Las únicas fuerzas que actúan sobre la barra son las reacciones que se muestran en la figura 2.23a. Por tanto, del equilibrio de fuerzas en la dirección vertical se obtiene

$$\sum F_{\text{perm}} = 0 \qquad R_B - R_A = 0 \tag{a}$$

Como esta es la única ecuación de equilibrio no trivial y puesto que contiene dos incógnitas, observamos que la estructura está estáticamente indeterminada y se necesita una ecuación adicional.

Ecuación de compatibilidad. La ecuación de compatibilidad expresa el hecho de que el cambio de longitud de la barra es cero (ya que los apoyos no se mueven):

$$\delta_{AB} = 0 \tag{b}$$

Para determinar este cambio de longitud removemos el apoyo superior de la barra y obtenemos una barra que está fija en la base y es libre para desplazarse en el extremo superior (figuras 2.23b y c). Cuando sólo actúa el cambio de temperatura (figura 2.23b), la barra se alarga en una cantidad δ_T y cuando sólo actúa la reacción R_A, la

continúa

barra se acorta en una cantidad δ_R (figura 2.23c). Por tanto, el cambio neto de longitud es $\delta_{AB} = \delta_T - \delta_R$ y la ecuación de compatibilidad se transforma en

$$\delta_{AB} = \delta_T - \delta_R = 0 \qquad \text{(c)}$$

Relaciones de desplazamiento. El aumento de longitud de la barra debido al cambio de temperatura está dado por la relación temperatura-desplazamiento (ecuación 2.16):

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \qquad \text{(d)}$$

en donde α es el coeficiente de dilatación térmica. La disminución de longitud debida a la fuerza R_A está dada por la relación fuerza-desplazamiento:

$$\delta_R = \frac{R_A L}{EA} \qquad \text{(e)}$$

en donde E es el módulo de elasticidad y A es el área de la sección transversal.

Solución de ecuaciones. Sustituyendo las relaciones de desplazamiento (d) y (e) en la ecuación de compatibilidad (ecuación c) da la siguiente ecuación:

$$\delta_T - \delta_R = \alpha(\Delta T)L - \frac{R_A L}{EA} = 0 \qquad \text{(f)}$$

Ahora resolvemos simultáneamente la ecuación anterior y la ecuación de equilibrio (ecuación a) para determinar las reacciones R_A y R_B:

$$R_A = R_B = EA\alpha(\Delta T) \qquad (2.17)$$

De estos resultados obtenemos el esfuerzo térmico σ_T en la barra:

$$\sigma_T = \frac{R_A}{A} = \frac{R_B}{A} = E\alpha(\Delta T) \qquad (2.18)$$

Este esfuerzo es de compresión cuando la temperatura de la barra aumenta.

Nota 1: en este ejemplo las reacciones son independientes de la longitud de la barra y el esfuerzo es independiente tanto de la longitud como del área de la sección transversal (consulte las ecuaciones 2.17 y 2.18). Entonces, una vez más observamos la utilidad de una solución simbólica, ya que estas características importantes del comportamiento de la barra no se notarían en una solución puramente numérica.

Nota 2: al determinar la dilatación térmica de la barra (ecuación d), supusimos que el material era homogéneo y que el incremento de temperatura era uniforme en todo el volumen de la barra. También, al determinar la disminución de la longitud debida a la fuerza reactiva (ecuación e), supusimos un comportamiento linealmente elástico del material. Estas limitaciones siempre se deben tener en cuenta al escribir ecuaciones como las (d) y (e).

Nota 3: la barra en este ejemplo tiene desplazamientos longitudinales nulos, no sólo en los extremos fijos, sino también en cada sección transversal. Por tanto, no hay deformaciones unitarias axiales en esta barra y tenemos la situación especial de *esfuerzos longitudinales sin deformaciones unitarias longitudinales*. Por supuesto, hay deformaciones unitarias transversales en la barra debidas tanto al cambio de temperatura como a la compresión axial.

Ejemplo 2.8

Un manguito en forma de un tubo circular con longitud L se coloca alrededor de un perno y se ajusta entre arandelas en cada extremo (figura 2.24a). Luego la tuerca se gira hasta que está firme. El manguito y el perno están hechos de materiales distintos y tienen áreas de sus secciones transversales diferentes. (Suponga que el coeficiente de dilatación térmica α_S del manguito es mayor que el coeficiente α_B del perno).

(a) Si la temperatura de todo el conjunto se eleva en una cantidad ΔT, ¿qué esfuerzos σ_S y σ_B se desarrollan en el manguito y el perno, respectivamente?

(b) ¿Cuál es el aumento δ en la longitud L del manguito y el perno?

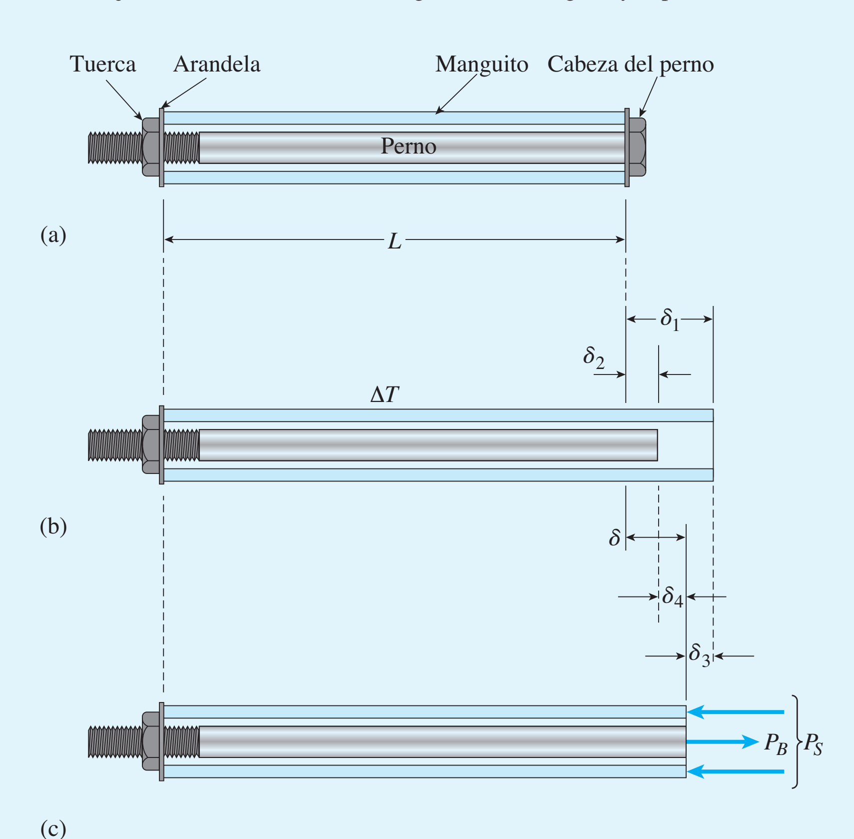


FIGURA 2.24 Ejemplo 2.8. Conjunto de un manguito y un perno con aumento uniforme de temperatura ΔT.

Solución

Dado que el manguito y el perno son de materiales diferentes, se alargarán en cantidades distintas al calentarlos y permitir que se dilaten libremente. Sin embargo, cuando son retenidos por el conjunto, la dilatación libre no puede tener lugar y se desarrollan esfuerzos térmicos en los materiales. Para encontrar dichos esfuerzos, utilizamos los mismos conceptos como en cualquier análisis estáticamente indeterminado: ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad y relaciones de desplazamiento. No obstante, no podemos formular estas ecuaciones sino hasta desarmar la estructura.

Una forma simple de cortar la estructura es remover la cabeza del perno y de esta manera permitir que el manguito y el perno se dilaten libremente por el cambio de temperatura ΔT (figura 2.24b). Los alargamientos resultantes del manguito y el

continúa

perno se denotan δ_1 y δ_2, respectivamente, y las *relaciones temperatura-desplazamiento* correspondientes son

$$\delta_1 = \alpha_S(\Delta T)L \quad \delta_2 = \alpha_B(\Delta T)L \tag{g,h}$$

Como α_S es mayor que α_B, el alargamiento δ_1 es mayor que δ_2, como se muestra en la figura 2.24b.

Las fuerzas axiales en el manguito y el perno deben ser tales que acorten el manguito y alarguen el perno hasta que las longitudes finales de ambos sean iguales. Estas fuerzas se muestran en la figura 2.24c, donde P_S denota la fuerza de compresión en el manguito y P_B la fuerza de tensión en el perno. El acortamiento correspondiente δ_3 del manguito y el alargamiento δ_4 del perno son

$$\delta_3 = \frac{P_S L}{E_S A_S} \qquad \delta_4 = \frac{P_B L}{E_B A_B} \tag{i,j}$$

en donde $E_S A_S$ y $E_B A_B$ son las rigideces axiales respectivas. Las ecuaciones (i) y (j) son las *relaciones carga-desplazamiento*.

Ahora podemos escribir una *ecuación de compatibilidad* que exprese el hecho de que el alargamiento final δ es el mismo para el manguito y el perno. El alargamiento del manguito es $\delta_1 - \delta_3$ y el del perno es $\delta_2 + \delta_4$; por lo tanto,

$$\delta = \delta_1 - \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 \tag{k}$$

Al sustituir las relaciones temperatura-desplazamiento y carga-desplazamiento (ecuaciones g a i) en esta ecuación, se tiene

$$\delta = \alpha_S(\Delta T)L - \frac{P_S L}{E_S A_S} = \alpha_B(\Delta T)L + \frac{P_B L}{E_B A_B} \tag{l}$$

de donde obtenemos

$$\frac{P_S L}{E_S A_S} + \frac{P_B L}{E_B A_B} = \alpha_S(\Delta T)L - \alpha_B(\Delta T)L \tag{m}$$

que es un forma modificada de la ecuación de compatibilidad. Observe que contiene las fuerzas P_S y P_B como incógnitas.

Una *ecuación de equilibrio* se obtiene a partir de la ecuación 2.24c, que es un diagrama de cuerpo libre de la parte restante del conjunto después de remover la cabeza del perno. Sumando fuerzas en la dirección horizontal se obtiene

$$P_S = P_B \tag{n}$$

que expresa el hecho obvio de que la fuerza de compresión en el manguito es igual a la fuerza de tensión en el perno.

Ahora resolvemos simultáneamente las ecuaciones (m) y (n) para obtener las fuerzas axiales en el manguito y el perno.

$$P_S = P_B = \frac{(\alpha_S - \alpha_B)(\Delta T)E_S A_S E_B A_B}{E_S A_S + E_B A_B} \tag{2.19}$$

Al deducir esta ecuación supusimos que aumentó la temperatura y que el coeficiente α_S era mayor que el coeficiente α_B. Con estas condiciones, P_S es la fuerza de compresión en el manguito y P_B es la fuerza de tensión en el perno.

Los resultados serán muy diferentes si la temperatura aumenta pero el coeficiente α_S es menor que el coeficiente α_B. Con estas condiciones, se tendrá una holgura entre la cabeza del perno y el manguito y no habrá esfuerzos en ninguna parte del conjunto.

(a) *Esfuerzos en el manguito y el perno*. Las expresiones para los esfuerzos σ_S y σ_B en el manguito y el perno, respectivamente, se obtienen dividiendo las fuerzas correspondientes entre las áreas respectivas:

$$\sigma_S = \frac{P_S}{A_S} = \frac{(\alpha_S - \alpha_B)(\Delta T)E_S E_B A_B}{E_S A_S + E_B A_B} \qquad (2.201a)$$

$$\sigma_B = \frac{P_B}{A_B} = \frac{(\alpha_S - \alpha_B)(\Delta T)E_S A_S E_B}{E_S A_S + E_B A_B} \qquad (2.201b)$$

En las condiciones supuestas, el esfuerzo σ_S en el manguito es de compresión y el esfuerzo σ_B en el perno es de tensión. Es interesante observar que estos esfuerzos son independientes de la longitud del conjunto y que sus magnitudes son inversamente proporcionales a sus áreas respectivas (es decir, $\sigma_S/\sigma_B = A_B/A_S$).

(b) *Aumento de longitud del manguito y el perno*. El alargamiento δ del conjunto se puede determinar sustituyendo P_S o bien P_B de la ecuación (2.19) en la ecuación (l) y se obtiene

$$\delta = \frac{(\alpha_S E_S A_S + \alpha_B E_B A_B)(\Delta T)L}{E_S A_S + E_B A_B} \qquad (2.21)$$

Si disponemos de las fórmulas anteriores, es fácil calcular las fuerzas, los esfuerzos y los desplazamientos del conjunto para cualquier conjunto dado de datos numéricos.

Nota: como verificación parcial de los resultados, podemos ver si las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) se reducen a valores conocidos en casos simplificados. Por ejemplo, suponga que el perno es rígido y, por tanto, no se ve afectado por cambios de temperatura. Podemos representar esta situación igualando $\alpha_B = 0$ y haciendo E_B infinitamente grande, creando así un conjunto en el que el manguito se sostiene entre soportes rígidos. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21), obtenemos

$$P_S = E_S A_S \alpha_S(\Delta T) \qquad \sigma_S = E_S \alpha_S(\Delta T) \qquad \delta = 0$$

Estos resultados concuerdan con los del ejemplo 2.7 para una barra sostenida entre soportes rígidos (compare con las ecuaciones 2.17 y 2.18 y con la ecuación b).

Como segundo caso especial, suponga que el manguito y el perno están hechos del mismo material. Entonces las dos partes se dilatarán libremente y se alargarán la misma cantidad cuando la temperatura cambie. No se desarrollarán fuerzas o esfuerzos. Para ver si las ecuaciones derivadas predicen este comportamiento, sustituimos $\alpha_S = \alpha_B = \alpha$ en las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) y obtenemos

$$P_S = P_B = 0 \qquad \sigma_S = \sigma_B = 0 \qquad \delta = \alpha(\Delta T)L$$

que son los resultados esperados.

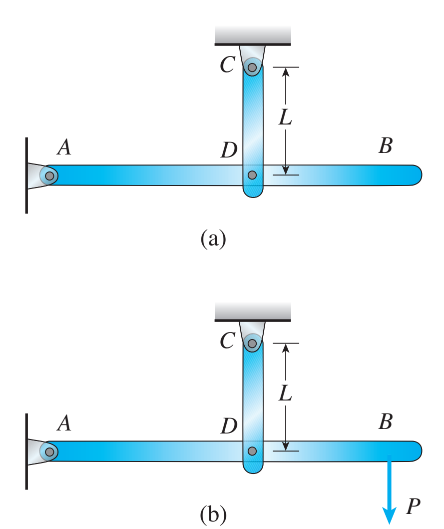


FIGURA 2.25 Estructura estáticamente determinada con un pequeño desajuste.

Desajustes y deformaciones previas

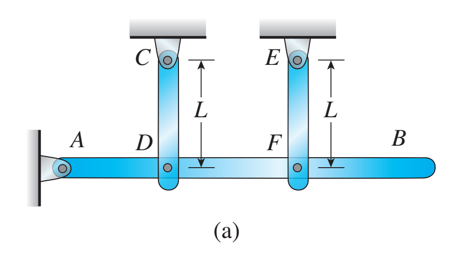
Suponga que un elemento de una estructura se fabrica con su longitud ligeramente diferente de la que está especificada. Entonces el elemento no se ajustará en la estructura de la manera propuesta y la geometría de la estructura será diferente de la planeada. A estos casos se les conoce como **desajustes**. En ocasiones los desajustes se crean intencionalmente a fin de introducir deformaciones en la estructura en el momento en que se construye. Como estas deformaciones existen antes de que se apliquen las cargas a la estructura, se llaman **deformaciones previas**. Con las deformaciones previas se presentan esfuerzos previos y se dice que la estructura está **preesforzada.** Ejemplos comunes de preesforzado son los rayos en las ruedas de bicicleta (que se arruinarían si no estuvieran preesforzados), las caras pretensadas de las raquetas de tenis, las partes de máquinas de ajuste por contracción y las vigas de concreto preesforzado.

Si una estructura es **estáticamente determinada**, los desajustes pequeños en uno o más de los elementos no producirán deformaciones unitarias ni esfuerzos, aunque habrá desviaciones de la configuración teórica de la estructura. Para ilustrar esta afirmación, considere una estructura simple con una viga horizontal *AB* soportada por una barra vertical *CD* (figura 2.25a). Si la barra *CD* tiene exactamente la longitud correcta *L*, la viga será horizontal al tiempo que se construye la estructura. Sin embargo, si la barra es ligeramente más larga que lo propuesto, la viga formará un ángulo pequeño con la horizontal. No obstante, no habrá deformaciones unitarias o esfuerzos en la barra o en la viga atribuibles a la longitud incorrecta de la barra. Además, si una carga *P* actúa en el extremo de la viga (figura 2.25b), los esfuerzos en la estructura debidos a esa carga no se afectarán por la longitud incorrecta de la barra *CD*.

En general, si una estructura es estáticamente determinada, la presencia de desajustes pequeños producirá ligeros cambios en la geometría pero no deformaciones unitarias o esfuerzos. Por tanto, los efectos de un desajuste son similares a los del cambio de temperatura.

La situación es muy diferente si la estructura es **estáticamente indeterminada**, ya que entonces la estructura no tiene libertad para adaptarse a los desajustes (al igual que no tiene libertad de acoplarse a ciertas cambios de temperatura). Para demostrar esto, considere una viga soportada por dos barras verticales (figura 2.26a). Si las dos barras tienen exactamente la longitud correcta *L*, la estructura se puede ensamblar sin deformaciones o esfuerzos y la viga será horizontal.

Sin embargo, suponga que la barra *CD* es ligeramente más larga que la longitud prescrita. Entonces, a fin de ensamblar la estructura, la barra *CD* se debe comprimir mediante fuerzas externas (o alargar la barra *EF* mediante fuerzas externas), las barras se deben ajustar en su lugar y luego se deben liberar las fuerzas externas. Como resultado, la viga se deformará y girará, la barra *CD* estará en compresión y la barra *EF* estará en tensión. En otras palabras, existirá una deformación previa en todos los elementos y la estructura estará preesforzada, aunque no actúen cargas externas. Si ahora se agrega una carga *P* (figura 2.26b), se producirán deformaciones unitarias y esfuerzos adicionales.



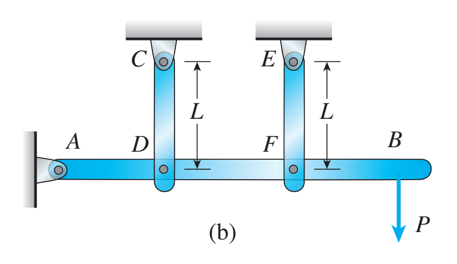


FIGURA 2.26 Estructura estáticamente indeterminada con un pequeño desajuste.

El análisis de una estructura estáticamente indeterminada con desajustes y deformaciones previas procede de la misma manera general como se describió con anterioridad para cargas y cambios de temperatura. Los ingre-

dientes básicos del análisis son las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de compatibilidad, las relaciones fuerza-desplazamiento y (si es apropiado) las relaciones temperatura-desplazamiento. La metodología se ilustra en el ejemplo 2.9.

Pernos y tensores de tornillo

Al preesforzar una estructura se requiere que una o más de sus partes se alarguen o compriman a partir de sus longitudes teóricas. Una forma simple para producir un cambio de longitud es apretar un perno o un tensor de tornillo. En el caso de un **perno** (figura 2.27) cada vuelta de la tuerca ocasionará que ésta se mueva alrededor del perno una distancia igual al espaciamiento p de las roscas (denominado *paso* de las roscas). Por tanto la distancia δ recorrida por la tuerca es

$$\delta = np \tag{2.22}$$

en donde n es el número de revoluciones de la tuerca (no necesariamente un entero). Dependiendo de cómo esté conformada la estructura, al girar la tuerca o se alarga o bien se comprime un elemento.

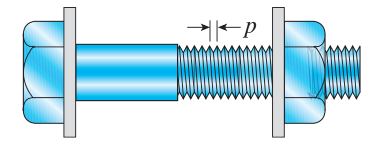


FIGURA 2.27 El *paso* de las roscas es la distancia de una rosca a la siguiente.

En el caso de un **tensor de tornillo de doble acción** (figura 2.28), hay dos tornillos extremos. Como en un extremo se utiliza una rosca derecha y en el otro una izquierda, el dispositivo o se alarga o bien se acorta cuando se gira el tensor. Cada vuelta completa del tensor causa que éste recorra una distancia p a lo largo del tornillo, donde de nuevo p es el paso de las roscas. Por tanto, si el tensor de tornillo se aprieta una vuelta, las roscas se acercan una distancia $2p$ y el efecto es acortar el dispositivo en $2p$. Para n vueltas, tenemos

$$\delta = 2np \tag{2.23}$$

Los tensores de tornillo a menudo se insertan en cables y luego se aprietan, de esta manera se crea una tensión inicial en los cables, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

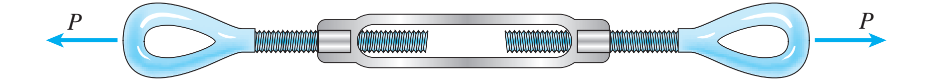


FIGURA 2.28 Tensor de tornillo de doble acción. (Cada vuelta completa del tensor acorta o alarga el cable en $2p$, donde p es el paso del tornillo.)

Ejemplo 2.9

El conjunto mecánico que se muestra en la figura 2.29a consiste en un tubo de cobre, una placa extrema rígida y dos cables con tensores de tornillo. La holgura de los cables se elimina girando los tensores hasta que el conjunto está firme pero sin esfuerzos iniciales. (Un apretón adicional de los tensores producirá una condición preesforzada en la que los cables están en tensión y el tubo en compresión).

(a) Determine las fuerzas en el tubo y los cables (figura 2.29a) cuando los tensores se aprietan *n* vueltas.

(b) Determine el acortamiento del tubo.

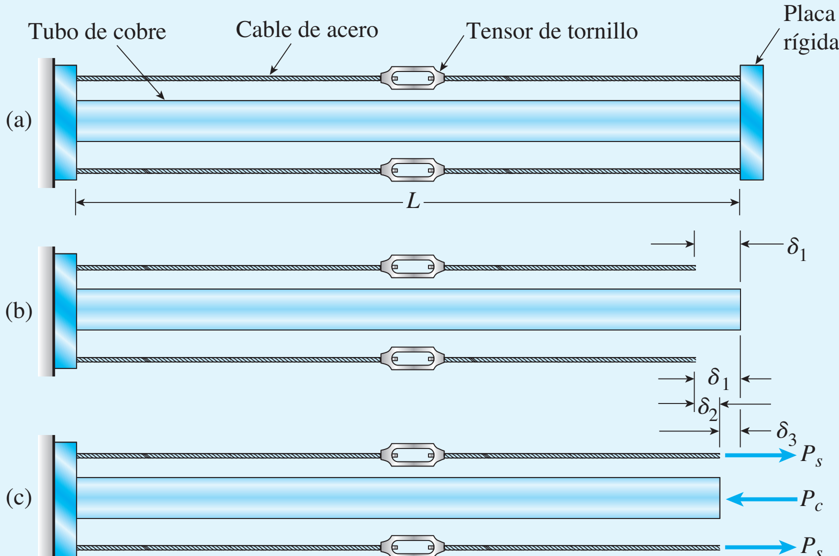


FIGURA 2.29 Ejemplo 2.9. Conjunto estáticamente indeterminado con un tubo de cobre en compresión y dos cables en tensión.

Solución

Iniciamos el análisis quitando la placa en el extremo derecho del conjunto de manera que el tubo y los cables estén en libertad para cambiar de longitud (figura 2.29b). Girando los tensores *n* vueltas acortará los cables en una distancia

$$\delta_1 = 2np \quad \text{(o)}$$

como se muestra en la figura 2.29b.

Las fuerzas de tensión en los cables y la fuerza de compresión en el tubo deben ser tales que alarguen los cables y acorten el tubo hasta que sus longitudes finales sean las mismas. Estas fuerzas se muestran en la figura 2.29c, donde P_s representa la fuerza de tensión en uno de los cables de acero y P_c denota la fuerza de compresión en el tubo de cobre. El alargamiento de un cable debido a la fuerza P_s es

$$\delta_2 = \frac{P_s L}{E_s A_s} \quad \text{(p)}$$

en donde E_sA_s es la rigidez axial y L es la longitud de un cable. Además, la fuerza de compresión P_c en el tubo de cobre ocasiona que éste se acorte en

$$\delta_3 = \frac{P_c L}{E_c A_c} \tag{q}$$

en donde E_cA_c es la rigidez axial del tubo. Las ecuaciones (p) y (q) son las *relaciones carga-desplazamiento*.

El acortamiento final de uno de los cables es igual al acortamiento δ_1 ocasionado al girar el tensor menos el alargamiento δ_2 debido a la fuerza P_s. Este acortamiento final del cable debe ser igual al acortamiento δ_3 del tubo:

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_3 \tag{r}$$

que es la *ecuación de compatibilidad*.

Sustituyendo la relación del tensor (ecuación o) y las relaciones carga-desplazamiento (ecuaciones p y q) en la ecuación anterior se obtiene

$$2np - \frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} \tag{s}$$

o bien

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} + \frac{P_c L}{E_c A_c} = 2np \tag{t}$$

que es una forma modificada de la ecuación de compatibilidad. Observe que contiene P_s y P_c como incógnitas.

De la figura 2.29c, que es un diagrama de cuerpo libre del conjunto con la placa extrema removida, obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio:

$$2P_s = P_c \tag{u}$$

(a) *Fuerzas en los cables y el tubo*. Ahora resolvemos simultáneamente las ecuaciones (t) y (u), y obtenemos las fuerzas axiales en los cables de acero y el tubo de cobre, respectivamente:

$$P_s = \frac{2npE_c A_c E_s A_s}{L(E_c A_c + 2E_s A_s)} \qquad P_c = \frac{4npE_c A_c E_s A_s}{L(E_c A_c + 2E_s A_s)} \tag{2.24a,b}$$

Recuerde que las fuerzas P_s son de tensión y la fuerza P_c es de compresión. Si se quiere, ahora se pueden obtener los esfuerzos σ_s y σ_c en el acero y el cobre dividiendo las fuerzas P_s y P_c entre las áreas de las secciones transversales A_s y A_c, respectivamente.

(b) *Acortamiento del tubo*. La disminución de la longitud del tubo es la cantidad δ_3 (consulte la figura 2.29 y la ecuación q):

$$\delta_3 = \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{4npE_s A_s}{E_c A_c + 2E_s A_s} \tag{2.25}$$

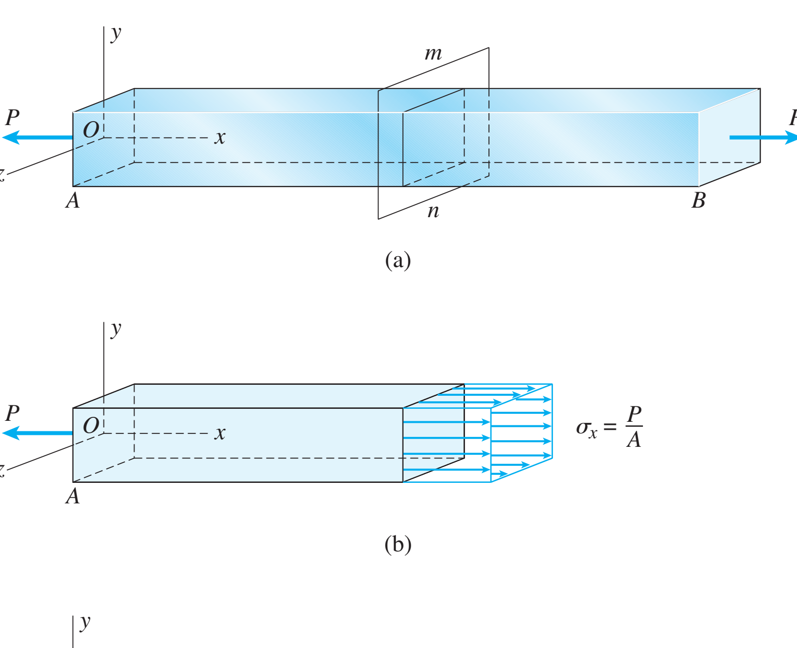
Al disponer de las fórmulas anteriores es fácil calcular las fuerzas, los esfuerzos y los desplazamientos del conjunto para cualquier grupo dado de datos numéricos.

2.6 ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS

En nuestro análisis anterior de tensión y compresión en elementos cargados axialmente, los únicos esfuerzos que consideramos fueron los normales que actúan sobre las secciones transversales. Éstos se representan en la figura 2.30, donde consideramos una barra *AB* sometida a cargas axiales *P*.

Cuando la barra se corta en una sección transversal intermedia por un plano *mn* (perpendicular al eje *x*), obtenemos el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.30b. Los esfuerzos normales que actúan sobre la sección cortada se deben calcular con la fórmula $\sigma_x = P/A$ siempre que la distribución del esfuerzo sea uniforme sobre el área de la sección transversal *A*. Como ya se explicó en el capítulo 1, esta condición existe si la barra es prismática, el material es homogéneo y la fuerza axial *P* actúa en el centroide del área de la sección transversal, y la sección transversal está alejada de de cualquier concentración localizada de esfuerzos. Por supuesto, no hay esfuerzos cortantes actuando sobre la sección cortada, debido a que ésta es perpendicular al eje longitudinal de la barra.

Por conveniencia se suelen mostrar los esfuerzos en una vista bidimensional de la barra (figura 2.30c) en vez de la vista tridimensional más compleja (figura 2.30b). Sin embargo, al trabajar con figuras bidimensionales no debemos olvidar que la barra tiene un espesor perpendicular al plano de



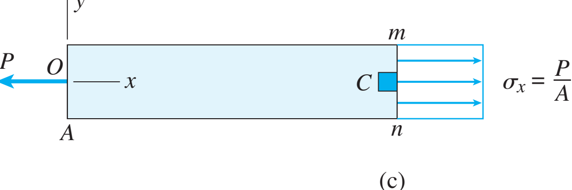


FIGURA 2.20 Barra prismática en tensión mostrando los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal *mn*: (a) barra con fuerzas axiales *P*, (b) vista tridimensional mostrando los esfuerzos normales y (c) vista bidimensional.

la figura. Esta tercera dimensión debe considerarse en las deducciones y en los cálculos.

Elementos de esfuerzo

La forma más útil de representar los esfuerzos en la barra de la figura 2.30 es aislar un elemento pequeño de material, como el que se identifica con *C* en la figura 2.30c y luego mostrar los esfuerzos que actúan sobre todas sus caras. Un elemento de este tipo se denomina **elemento de esfuerzo.** El elemento de esfuerzo en el punto *C* es un bloque rectangular pequeño (no importa si es un cubo o un paralelepípedo rectangular) con su cara derecha coincidiendo con la sección *mn.*

Las dimensiones de un elemento de esfuerzo se suponen infinitesimalmente pequeñas, pero por claridad lo dibujamos a una escala grande, como en la figura 2.31a. En este caso, los bordes del elemento son paralelos a los ejes x, y y z, y las únicos esfuerzos son los normales σ_x que actúan sobre las caras x (recuerde que las caras x tienen sus normales paralelas al eje x). Como es más conveniente, con frecuencia dibujaremos una vista bidimensional del elemento (figura 2.31b) en lugar de una vista tridimensional.

Esfuerzos sobre secciones inclinadas

El elemento de esfuerzo de la figura 2.31 sólo muestra una vista limitada de los esfuerzos en una barra cargada axialmente. Para obtener una representación más completa, necesitamos investigar los esfuerzos que actúan sobre **secciones inclinadas,** como la sección cortada por el plano inclinado *pq* en la figura 2.32a. Puesto que los esfuerzos son los mismos en toda la barra, los que actúan sobre la sección inclinada deben estar distribuidos uniformemente, como se representa en los diagramas de cuerpo libre de la figura 2.32b (vista tridimensional) y en la figura 2.32c (vista bidimensional). A partir del equilibrio del cuerpo libre sabemos que la resultante de los esfuerzos debe ser una fuerza horizontal *P*. (La resultante se traza con una línea discontinua en las figuras 2.32b y 2.32c.)

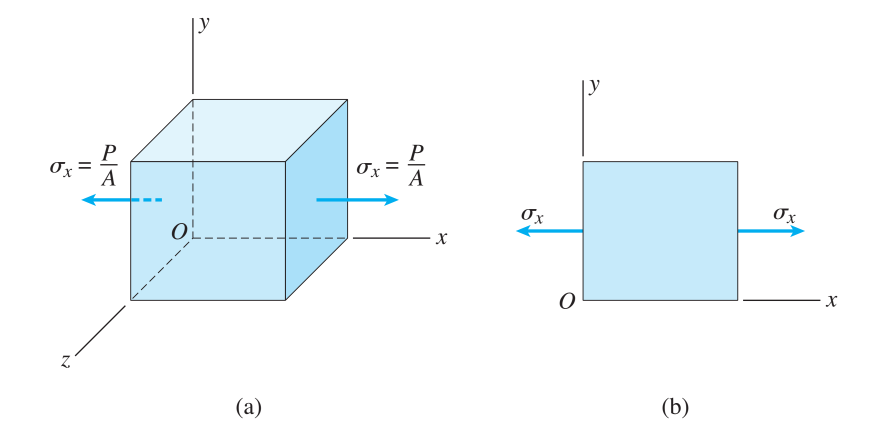
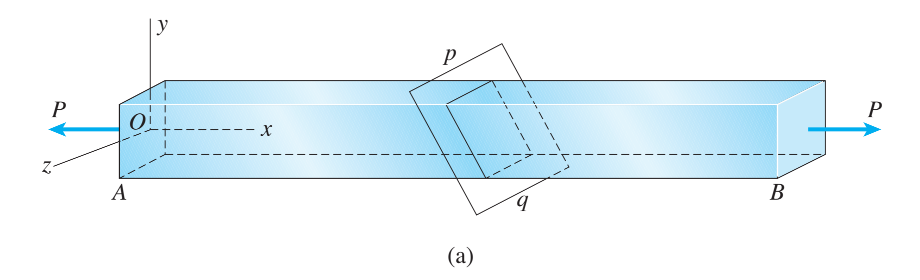
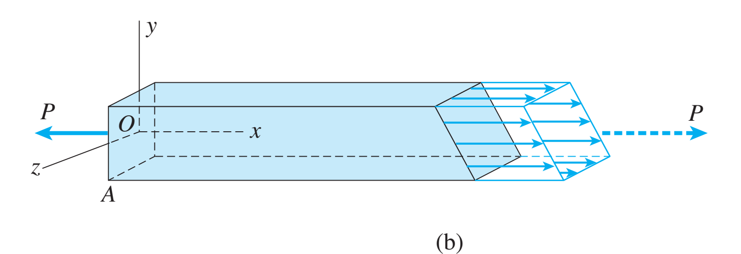


FIGURA 2.31 Elemento de esfuerzo en el punto *C* de la barra cargada axialmente mostrada en la figura 2.30c: (a) vista tridimensional del elemento y (b) vista bidimensional del elemento.





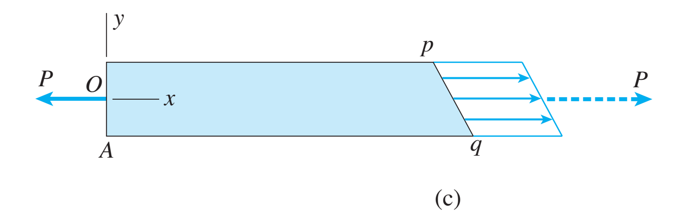


FIGURA 2.32 Barra prismática en tensión mostrando los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada *pq*: (a) barra con fuerzas axiales *P*, (b) vista tridimensional de la barra cortada mostrando los esfuerzos y (c) vista bidimensional.

Como punto preliminar, necesitamos un esquema para especificar la **orientación** de la sección inclinada *pq*. Un método estándar es especificar el ángulo θ entre el eje *x* y la normal *n* a la sección (consulte la figura 2.33a). De esta manera, el ángulo θ para la sección inclinada mostrada en la figura es aproximadamente 30°. En contraste, la sección transversal *mn* (figura 2.30a) tiene un ángulo θ igual a cero (debido a que la normal a la sección es el eje *x*). Como ejemplos adicionales, considere, el elemento de esfuerzo de la figura 2.31. El ángulo θ para la cara derecha es 0, para la cara superior es 90° (una sección longitudinal de la barra), para la cara izquierda es 180° y para la cara inferior es 270° (o −90°).

Ahora regresemos a la tarea de determinar los esfuerzos que actúan sobre la sección *pq* (figura 2.33b). Como ya se mencionó, la resultante de estos esfuerzos es una fuerza *P* en la dirección *x*. Esta resultante se puede separar en dos componentes, una fuerza normal *N* que es perpendicular al plano inclinado *pq* y una fuerza cortante *V* que es tangencial a ella. Estas componentes de la fuerza son

$$N = P\cos\theta \qquad V = P\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.26a,b}$$

Asociados con las fuerzas *N* y *V* se tienen esfuerzos normales y cortantes que están distribuidos uniformemente sobre la sección inclinada (figuras

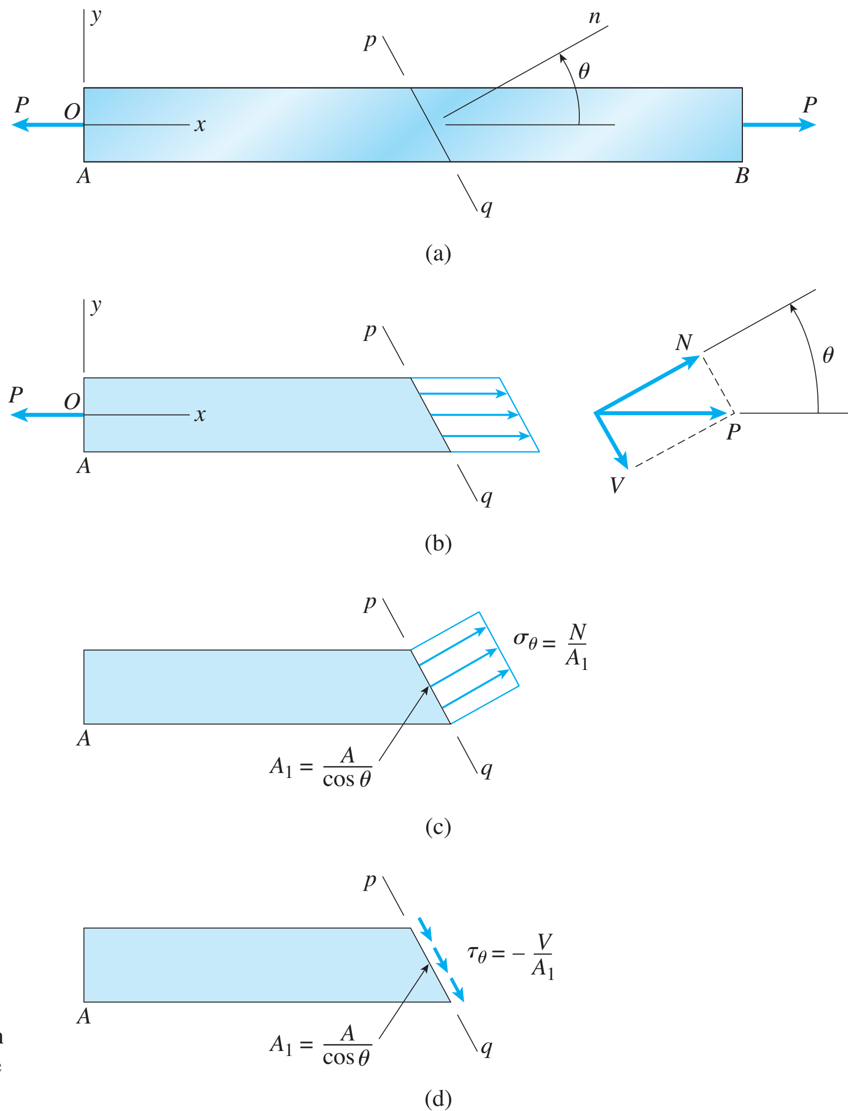


FIGURA 2.33 Barra prismática en tensión mostrando los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada *pq*.

2.33 c y d). El esfuerzo normal es igual al fuerza normal *N* dividida entre el área de la sección y el esfuerzo cortante es igual a la fuerza cortante *V* dividida entre el área de la sección. Por tanto, los esfuerzos son

$$\sigma = \frac{N}{A_1} \qquad \tau = \frac{V}{A_1} \tag{2.27a,b}$$

en donde A_1 es el área de la sección inclinada:

$$A_1 = \frac{A}{\cos\ \theta} \tag{2.28}$$

Como es usual, A representa el área de la sección transversal de la barra. Los esfuerzos σ y τ actúan en las direcciones que se muestran en la figura 2.33c y d, es decir, en las mismas direcciones que la fuerza normal N y que la fuerza cortante V, respectivamente.

En este punto necesitamos establecer una **notación y convención de signos** estandarizadas para los esfuerzos que actúan sobre las secciones inclinadas. Utilizaremos un subíndice θ para indicar que el esfuerzo actúa sobre una sección inclinada un ángulo θ (figura 2.34), de igual forma empleamos un subíndice x para indicar que los esfuerzos actúan sobre una sección perpendicular al eje x (consulte la figura 2.30). Los esfuerzos normales σ_θ son positivos en tensión y los esfuerzos cortantes τ_θ son positivos cuando tienden a producir una rotación del material en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2.34.

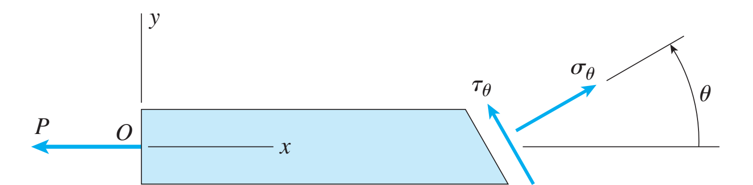


FIGURA 2.34 Convención de signos para esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada. (Los esfuerzos normales son positivos en tensión y los esfuerzos cortantes son positivos cuando tienden a producir rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj).

Para una barra en tensión, la fuerza normal N produce esfuerzos normales positivos σ_θ (consulte la figura 2.33c) y la fuerza cortante produce esfuerzos cortantes negativos τ_θ (consulte la figura 2.33d). Estos esfuerzos están dados por las siguientes ecuaciones (consulte las ecuaciones 2.26, 2.27 y 2.28):

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A}\cos^2\theta \qquad \tau_\theta = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Introduciendo la notación $\sigma_x = P/A$, en donde σ_x es el esfuerzo normal sobre una sección trasversal y también empleando las relaciones trigonométricas

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\theta)$$

obtenemos las expresiones siguientes para los **esfuerzos normal y cortante:**

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad (2.29a)$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\frac{\sigma_x}{2}(\operatorname{sen} 2\theta) \qquad (2.29b)$$

Estas ecuaciones dan los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada orientada en un ángulo θ con respecto al eje x (figura 2.34).

Es importante reconocer que las ecuaciones (2.29a) y (2.29b) sólo fueron deducidas a partir de la estática y, por tanto, son independientes del material. Entonces, estas ecuaciones son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte lineal o no linealmente, elástica o inelásticamente.

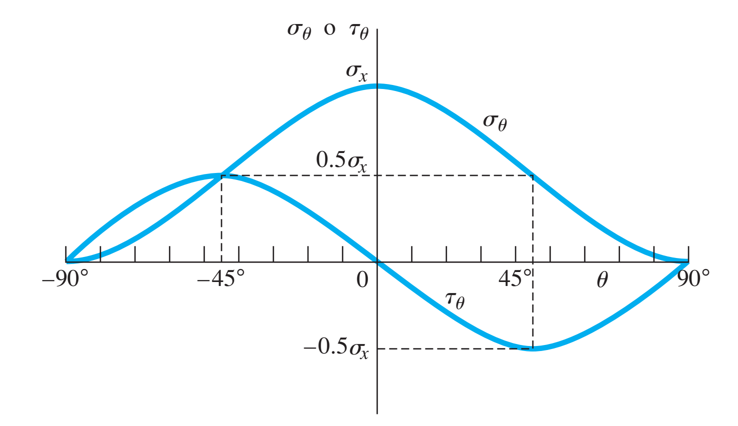


FIGURA 2.35 Gráfica del esfuerzo normal σ_θ y del esfuerzo cortante τ_θ en función del ángulo θ de la sección inclinada (consulte la figura 2.34 y las ecuaciones 2.29a y b).

Esfuerzos normales y cortantes máximos

La forma en que varían los esfuerzos conforme la sección inclinada se corta en varios ángulos se muestra en la figura 2.35. El eje horizontal da el ángulo θ conforme varía de −90° a +90°, el eje vertical indica los esfuerzos σ_θ y τ_θ. Observe que un ángulo positivo θ se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x (figura 2.34) y uno negativo se mide en sentido de las manecillas del reloj.

Como se muestra en la gráfica, el esfuerzo normal σ_θ es igual a σ_x cuando $\theta = 0$. Entonces, a medida que θ aumenta o disminuye, el esfuerzo normal disminuye hasta que en $\theta = \pm 90°$ se hace cero, debido a que no hay esfuerzos normales sobre las secciones cortadas paralelas al eje longitudinal. El **esfuerzo normal máximo** se presenta en $\theta = 0$ y es

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_x \tag{2.30}$$

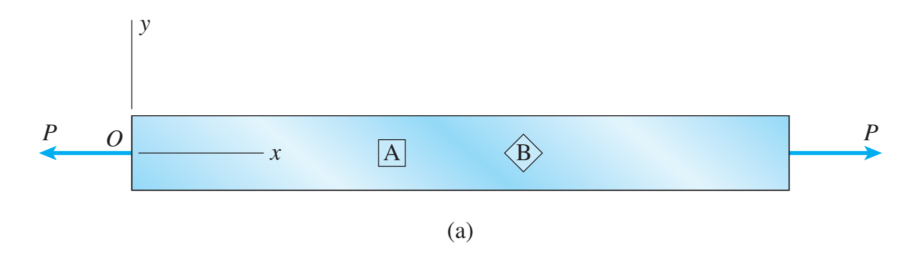
Además, observamos que cuando $\theta = \pm 45°$, el esfuerzo normal es la mitad del valor máximo.

El esfuerzo cortante τ_θ es cero sobre las secciones transversales de la barra ($\theta = 0$) así como sobre las secciones longitudinales ($\theta = \pm 90°$). Entre estos extremos, el esfuerzo varía como se muestra en la gráfica, alcanzando el valor positivo máximo cuando $\theta = -45°$ y el valor negativo máximo cuando $\theta = +45°$. Estos **esfuerzos cortantes máximos** tienen la misma magnitud:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_x}{2} \tag{2.31}$$

pero tienden a girar al elemento en direcciones opuestas.

Los esfuerzos máximos en una **barra en tensión** se muestran en la figura 2.36. Hemos seleccionado dos elementos de esfuerzo, el elemento A está orientado en $\theta = 0°$ y el elemento B está orientado en $\theta = 45°$. El elemento A tiene los esfuerzos normales máximos (ecuación 2.30) y el elemento B tiene los esfuerzos cortantes máximos (ecuación 2.31). En el caso del elemento A (figura 2.36b), los únicos esfuerzos son los normales máximos (no existen esfuerzos cortantes sobre ninguna de las caras).



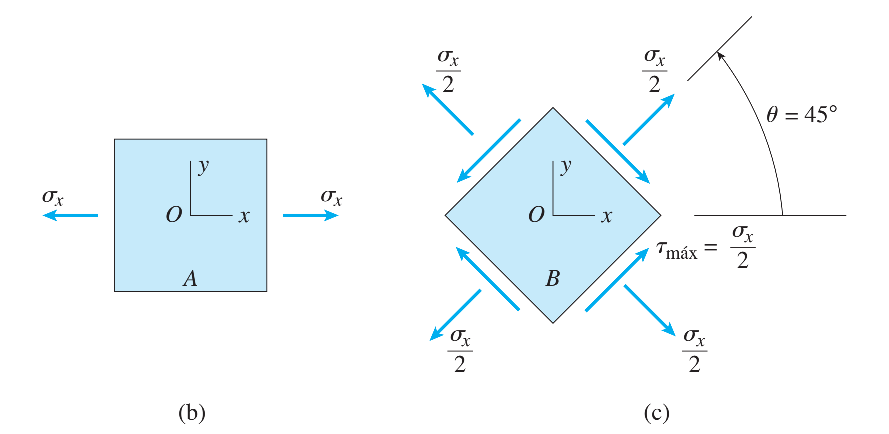


FIGURA 2.36 Esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre elementos de esfuerzo orientados en $\theta = 0°$ y $\theta = 45°$ para una barra en tensión.

En el caso del elemento *B* (figura 2.36c), actúan esfuerzos normales y cortantes sobre todas las caras (excepto, por supuesto, en las caras anterior y posterior del elemento). Considere, por ejemplo, la cara a 45° (la superior derecha). Sobre ella, los esfuerzos normales y cortantes (de las ecuaciones 2.29a y b) son $\sigma_x/2$ y $-\sigma_x/2$, respectivamente. De aquí, el esfuerzo normal está en tensión (positivo) y el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj (negativo) contra el elemento. Los esfuerzos sobre las caras restantes se obtienen de una manera similar sustituyendo $\theta = 135°$, $-45°$ y $-135°$ en las ecuaciones (2.29a y b).

Entonces, en este caso especial de un elemento orientado en $\theta = 45°$, los esfuerzos normales sobre las cuatro caras son los mismos (iguales a $\sigma_x/2$) y los cuatro esfuerzos cortantes tienen la misma magnitud (igual a $\sigma_x/2$). Asimismo, observe que los esfuerzos cortantes que actúan sobre planos perpendiculares son iguales en magnitud y tienen direcciones ya sea hacia arriba o bien alejadas de la línea de intersección de los planos, como se analizó con detalle en la sección 1.6.

Si una barra se carga en compresión en lugar de en tensión, el esfuerzo σ_x será de compresión y tendrá un valor negativo. En consecuencia, todos los esfuerzos que actúan sobre elementos de esfuerzo tendrán direcciones opuestas a las de una barra en tensión. Por supuesto, las ecuaciones (2.29a y b) aún se pueden usar para los cálculos simplemente sustituyendo σ_x como una cantidad negativa.

No obstante que el esfuerzo cortante máximo en una barra cargada axialmente sólo es la mitad del esfuerzo normal máximo, el esfuerzo cortante puede ocasionar la falla si el material es mucho más débil en cortante

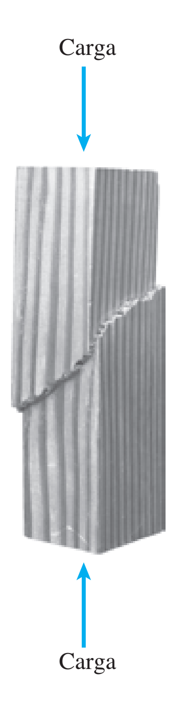


FIGURA 2.37 Falla por cortante a lo largo de un plano a 45° de un bloque de madera sometido a compresión.

que en tensión. Un ejemplo de una falla por cortante se representa en la figura 2.37, donde se muestra un bloque de madera que se sometió a compresión y falló por cortante a lo largo de un plano a 45°.

Un comportamiento similar se tiene en el acero dulce sometido a tensión. Durante un ensayo a tensión de una barra plana de acero al bajo carbono con superficies pulidas, aparecen *bandas de deslizamiento* visibles en los lados de la barra a aproximadamente 45° respecto de su eje (figura 2.38). Estas bandas indican que el material está fallando en cortante a lo largo de planos sobre los cuales el esfuerzo cortante es máximo. Las bandas fueron observadas por primera vez por G. Piobert en 1842 y W. Lüders en 1860 (consulte las referencias 2.5 y 2.6) y en la actualidad se llaman *bandas de Lüders* o *bandas de Piobert*. Comienzan a aparecer cuando el esfuerzo de fluencia se alcanza en la barra (punto *B* en la figura 1.10 de la sección 1.3).

Esfuerzo uniaxial

El estado de esfuerzo que se describe en toda esta sección se llama **esfuerzo uniaxial**, por la obvia razón de que la barra se somete a tensión o compresión simple sólo en una dirección. Las orientaciones más importantes de los elementos de esfuerzo para esfuerzo uniaxial son $\theta = 0$ y $\theta = 45°$ (figuras 2.36b y c); la primera tiene un esfuerzo normal máximo y la segunda tiene un esfuerzo cortante máximo. Si las secciones se cortan a través de la barra en otros ángulos, los esfuerzos que actúan sobre las cargas de los elementos de esfuerzo correspondientes se pueden determinar a partir de las ecuaciones (2.29a y b), como se ilustra en los ejemplos 2.10 y 2.11 siguientes.

El esfuerzo uniaxial es un caso especial de un estado de esfuerzo más general conocido como *esfuerzo plano*, que se describe con detalle en el capítulo 7.



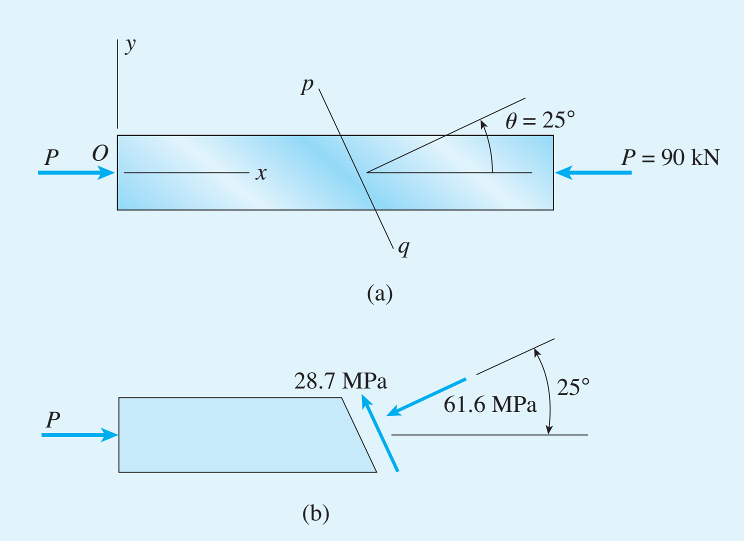
FIGURA 2.38 Bandas de deslizamiento (o bandas de Lüders) en una probeta de acero pulido sometida a tensión.

Ejemplo 2.10

Una barra prismática con área de su sección transversal A = 1200 mm² se comprime mediante una carga axial P = 90 kN (figura 2.39a).

(a) Determine los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada pq cortada a través de la barra en un ángulo $\theta = 25°$.

(b) Determine el estado de esfuerzo completo para $\theta = 25°$ y muestre los esfuerzos sobre un elemento de esfuerzo con la orientación adecuada.



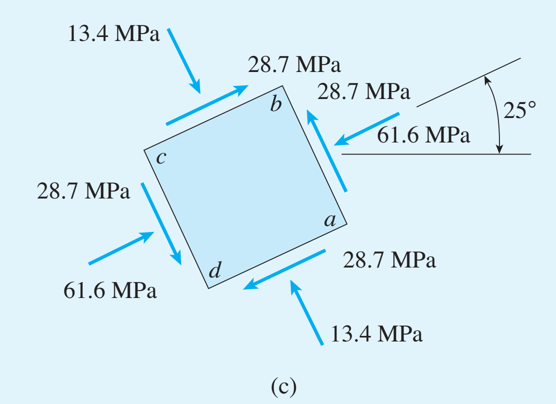


FIGURA 2.39 Ejemplo 2.10. Esfuerzos sobre una sección inclinada.

Solución

(a) *Esfuerzos sobre la sección inclinada*. Para determinar los esfuerzos que actúan sobre una sección con $\theta = 25°$, primero calculamos el esfuerzo normal σ_x que actúa sobre una sección transversal:

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} = -\frac{90\,\text{kN}}{1200\,\text{mm}^2} = -75\ \text{MPa}$$

donde el signo menos indica que el esfuerzo es de compresión. Enseguida, calculamos los esfuerzos normal y cortante con las ecuaciones (2.29a y b) con $\theta = 25°$, como sigue:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = (-75 \text{ MPa})(\cos 25°)^2 = -61.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \operatorname{sen} \theta \cos \theta = (75 \text{ MPa})(\operatorname{sen} 25°)(\cos 25°) = 28.7 \text{ MPa}$$

En la figura 2.39b se muestran estos esfuerzos que actúan sobre la sección inclinada. Observe que el esfuerzo normal σ_θ es negativo (de compresión) y el esfuerzo cortante τ_θ es positivo (sentido contrario al de las manecillas del reloj).

(b) *Estado de esfuerzo completo*. Para determinar el estado de esfuerzo completo necesitamos calcular los esfuerzos que actúan sobre todas las caras de un elemento de esfuerzo orientado a 25° (figura 2.39c). La cara *ab*, para la cual $\theta = 25°$, tiene la misma orientación que el plano inclinado que se muestra en la figura 2.39b. Por tanto, los esfuerzos son los mismos que los dados con anterioridad.

Los esfuerzos sobre la cara opuesta *cd* son los mismos que sobre la cara *ab*, lo que se puede verificar sustituyendo $\theta = 25° + 180° = 205°$ en las ecuaciones (2.29a y b).

Para la cara *ad* sustituimos $\theta = 25° - 90° = -65°$ en las ecuaciones (2.29a y b) y obtenemos

$$\sigma_\theta = -13.4 \text{ MPa} \qquad \tau_\theta = -28.7 \text{ MPa}$$

Estos mismos esfuerzos se aplican a la cara opuesta *bc*, como se puede verificar sustituyendo $\theta = 25° + 90° = 115°$ en las ecuaciones (2.29a y b). Observe que el esfuerzo normal es de compresión y que el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj.

El estado de esfuerzo completo se muestra por el elemento de esfuerzo de la figura 2.39c. Un bosquejo de este tipo es una forma excelente para mostrar las direcciones de los esfuerzos y las orientaciones de los planos sobre los que actúan.

Ejemplo 2.11

Una barra en compresión con sección transversal cuadrada de ancho b debe soportar una carga $P = 8000$ lb (figura 2.40a). La barra está hecha con dos piezas de material que están conectadas mediante una junta pegada (conocida como *junta biselada*) a lo largo del plano pq, que está a un ángulo $\alpha = 40°$ con respecto a la vertical. El material es un plástico estructural con esfuerzos permisibles en compresión y cortante de 1100 y 600 psi, respectivamente. Además, los esfuerzos permisibles en la junta pegada son 750 psi en compresión y 500 psi en cortante.

Determine el ancho mínimo b de la barra.

Solución

Por conveniencia giremos la barra hasta una posición horizontal (figura 2.40b) que iguale a las figuras empleadas al deducir las ecuaciones para los esfuerzos sobre una sección inclinada (consulte las figuras 2.33 y 2.34). Con la barra en esta posición observamos que la normal n respecto al plano de la junta pegada (plano pq) forma un ángulo $\beta\beta = 90° - \alpha$, o 50°, con el eje de la barra. Como el ángulo θ se define como positivo cuando es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (figura 2.34), concluimos que $\theta = -50°$ para la junta pegada.

El área de la sección transversal de la barra se relaciona con la carga P y el esfuerzo σ_x que actúa sobre las secciones transversales mediante la ecuación

$$A = \frac{P}{\sigma_x} \qquad \text{(a)}$$

Por tanto, para encontrar el área necesaria, debemos determinar el valor de σ_x que corresponde a cada uno de los cuatro esfuerzos permisibles. Luego, el valor menor de σ_x determinará el área necesaria. Los valores de σ_x se obtienen reacomodando las ecuaciones (2.29a y b) como sigue:

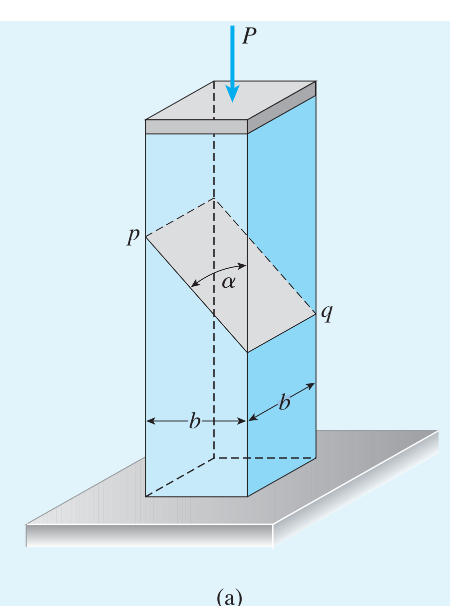
$$\sigma_x = \frac{\sigma_\theta}{\cos^2\theta} \qquad \sigma_x = -\frac{\tau_\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \qquad \text{(2.32a,b)}$$

Ahora aplicamos estas ecuaciones a la junta pegada y al plástico.

(a) *Valores de σ_x con base en los esfuerzos permisibles en la junta* pegada. Para compresión en la junta pegada tenemos $\sigma_\theta = -750$ psi y $\theta = -50°$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.32a), obtenemos

$$\sigma_x = \frac{-750\text{ psi}}{(\cos -50°)^2} = -1815\text{ psi} \qquad \text{(b)}$$

Para el cortante en la junta pegada tenemos un esfuerzo permisible de 500 psi. Sin embargo, no es inmediatamente evidente si τ_θ es $+500$ psi o -500 psi. Un enfo-



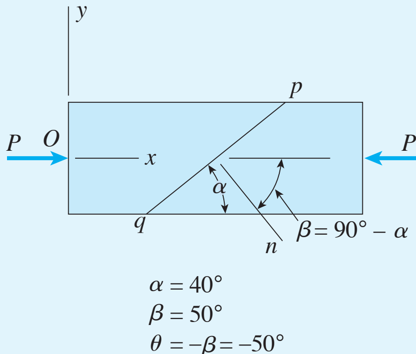


FIGURA 2-40 Ejemplo 2.11. Esfuerzos sobre una sección inclinada.

que es sustituir los dos valores +500 psi y −500 psi en la ecuación (2.32b) y después seleccionar el valor de σ_x que sea negativo. El otro valor de σ_x será positivo (tensión) y no se aplica a esta barra. Otro enfoque es inspeccionar la propia barra (figura 2.40b) y observar a partir de las direcciones de las cargas que el esfuerzo cortante actúa en el sentido de las manecillas del reloj contra el plano *pq*, lo que significa que el esfuerzo cortante es negativo. Por lo tanto, sustituimos $\tau_\theta = -500$ psi y $\theta = -50°$ en la ecuación (2.32b) y obtenemos

$$\sigma_x = -\frac{-500 \text{ psi}}{(\text{sen } -50°)(\cos\ -50°)} = -1015 \text{ psi} \qquad \text{(c)}$$

(b) *Valores de σ_x con base en los esfuerzos permisibles en el* plástico. El esfuerzo de compresión máximo en el plástico se tiene sobre una sección transversal. Por tanto, como el esfuerzo permisible en compresión es 1100 psi, de inmediato sabemos que

$$\sigma_x = -1100 \text{ psi} \qquad \text{(d)}$$

El esfuerzo cortante máximo ocurre sobre un plano a 45° y numéricamente es igual a $\sigma_x/2$ (consulte la ecuación 2.31). Puesto que el esfuerzo permisible en cortante es 600 psi, obtenemos

$$\sigma_x = -1200 \text{ psi} \qquad \text{(e)}$$

El mismo resultado se puede obtener con la ecuación (2.32b) sustituyendo $\tau_\theta = 600$ psi y $\theta = 45°$.

(c) *Ancho mínimo de la barra*. Al comparar los cuatro valores de σ_x (ecuaciones b, c, d y e), observamos que el menor es $\sigma_x = -1015$ psi. Por tanto, este valor gobierna el diseño. Sustituyendo en la ecuación (a) y empleando sólo valores numéricos obtenemos el área necesaria:

$$A = \frac{8000 \text{ lb}}{1015 \text{ psi}} = 7.88 \text{ in}^2$$

Como la barra tiene una sección transversal cuadrada ($A = b^2$), el ancho mínimo es

$$b_{\text{mín}} = \sqrt{A} = \sqrt{7.88 \text{ in}^2} = 2.81 \text{ in}$$

Cualquier ancho mayor que $b_{\text{mín}}$ garantizará que no se rebasen los esfuerzos permisibles.

2.7 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

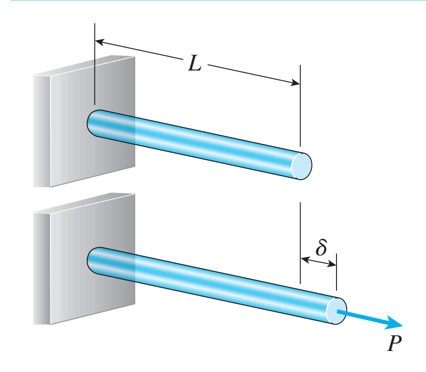


FIGURA 2.41 Barra prismática sometida a una carga aplicada estáticamente.

La energía de deformación es un concepto fundamental en la mecánica aplicada, y sus principios se usan ampliamente para determinar la respuesta de máquinas y estructuras sometidas a cargas estáticas y dinámicas. En esta sección introducimos el tema de energía de deformación en su forma más simple considerando sólo elementos cargados axialmente sometidos a cargas estáticas. En capítulos posteriores se analizan elementos estructurales más complicados—barras en torsión en la sección 3.9 y vigas en flexión en la sección 9.8—. Además, el uso de la energía de deformación en conexión con cargas dinámicas se describe en las secciones 2.8 y 9.10.

Para ilustrar las ideas básicas, consideremos de nuevo una barra prismática con longitud L sometida una fuerza de tensión P (figura 2.41). Supongamos que la carga se aplica lentamente, de manera que aumenta gradualmente de cero a su valor máximo P. Una carga de este tipo se denomina **carga estática** debido a que no hay efectos dinámicos o inerciales debidos a algún movimiento. La barra se alarga gradualmente conforme se aplica la carga y al final alcanza su alargamiento máximo δ al mismo tiempo que la carga alcanza su valor total P. Después de esto, la carga y el alargamiento permanecen sin cambio.

Durante el proceso de carga, la carga P se mueve lentamente la distancia δ y realiza una cierta cantidad de **trabajo.** Para evaluar éste, recordamos de la mecánica elemental que una fuerza constante realiza un trabajo igual al producto de la fuerza por la distancia a través de la cual se mueve. Sin embargo, en nuestro caso la fuerza varía en magnitud de cero a su valor máximo P. Para encontrar el trabajo realizado por la carga en estas condiciones, necesitamos conocer la manera en que varía la fuerza. Esta información la proporciona un **diagrama carga-desplazamiento** como el de la figura 2.42. En este diagrama el eje vertical representa la carga axial y el eje horizontal representa el alargamiento correspondiente de la barra. La forma de la curva depende de las propiedades del material.

Si denotamos con P_1 cualquier valor de la carga entre cero y el valor máximo P y el alargamiento correspondiente de la barra con δ_1. Entonces un incremento dP_1 en la carga producirá un aumento $d\delta_1$ en el alargamiento. El trabajo realizado por la carga durante este alargamiento incremental es el producto de la carga por la distancia a través de la cual se mueve la carga, es decir, el trabajo es igual a $P_1 d\delta_1$. Este trabajo se representa en la figura por el área de la franja sombreada debajo de la curva carga-desplazamiento. El trabajo total realizado por la carga conforme aumenta de cero al valor máximo P es la suma de todas las franjas elementales:

$$W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \qquad (2.33)$$

En términos geométricos, *el trabajo realizado por la carga es igual al área debajo de la curva carga-desplazamiento.*

Cuando la carga alarga la barra se producen deformaciones unitarias. La presencia de estas deformaciones unitarias aumenta el nivel de energía de

FIGURA 2.42 Diagrama carga-desplazamiento.

la propia barra. Por tanto, se define una cantidad nueva, llamada **energía de deformación,** que es la energía absorbida por la barra durante el proceso de carga. A partir del principio de conservación de la energía sabemos que esta energía de deformación es igual al trabajo realizado por la carga siempre que no se agregue o se reste energía en forma de calor. Por tanto,

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \tag{2.34}$$

en donde U es el símbolo para la energía de deformación. En ocasiones a la energía de deformación se le refiere como **trabajo interno** para distinguirlo del trabajo externo realizado por la carga.

El trabajo y la energía se expresan en las mismas **unidades.** En unidades SI, la unidad de trabajo y energía es el joule (J), que es igual a un newton metro (1 J = N·m). En el sistema inglés, el trabajo y la energía se expresan en pie-libras (ft-lb), pie-kips (ft-k), pulgada-libras (in-lb) y pulgada-kips (in-k).*

Energía de deformación elástica e inelástica

Si la fuerza P (figura 2.41) se remueve lentamente de la barra, ésta se acortará. Si no rebasa el límite elástico del material, la barra regresará a su longitud original. Si rebasa el límite elástico, quedará una *deformación permanente* (consulte la sección 1.4). Por tanto, toda la energía de deformación o parte de ella se recuperará en forma de trabajo. Este comportamiento se muestra en el diagrama carga-desplazamiento de la figura 2.43. Durante la carga, el trabajo realizado por aquélla es igual al área debajo de la curva (área *OABCDO*). Cuando se remueve la carga, el diagrama carga-desplazamiento sigue la línea *BD* si el punto *B* está más allá del límite elástico y se producirá un alargamiento permanente *OD*. Por tanto, la energía de deformación recuperada durante la descarga, denominada **energía de deformación elástica**, está representada por el triángulo sombreado *BCD*. El área *OABDO* representa energía que se pierde en el proceso de deformación permanente de la barra. Esta energía se conoce como **energía de deformación inelástica.**

La mayor parte de las estructuras se diseñan con la expectativa que el material permanecerá dentro del intervalo elástico en condiciones ordinarias de servicio. Supongamos que la carga a la cual el esfuerzo en el material llega el límite elástico se representa por el punto A en la curva carga-desplazamiento (figura 2.43). Siempre que la carga este abajo de este valor, toda la energía de deformación se recuperará durante la descarga y no queda un alargamiento permanente. Por tanto, la barra actúa como un resorte elástico, almacenando y liberando energía conforme la carga se aplica y se remueve.

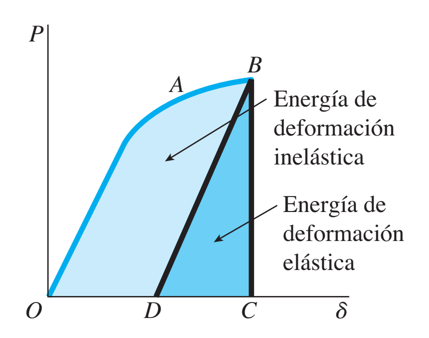


FIGURA 2.43 Energía de deformación elástica e inelástica.

*Los factores de conversión para trabajo y energía se dan en la tabla A-5 del apéndice A.

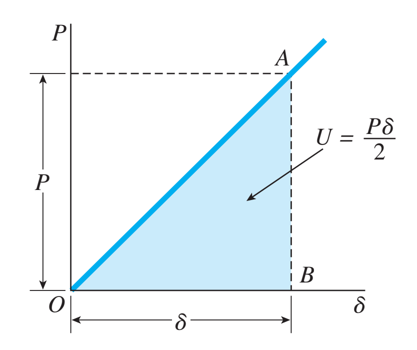


FIGURA 2.44 Diagrama carga-desplazamiento para una barra de material linealmente elástico.

Comportamiento linealmente elástico

Ahora supongamos que el material de la barra sigue la ley de Hooke, de modo que la curva carga-desplazamiento es una línea recta (figura 2.44). Entonces la energía de deformación U almacenada en la barra (igual al trabajo W realizado por la carga) es

$$U = W = \frac{P\delta}{2} \tag{2.35}$$

que es el área del triángulo sombreado OAB en la figura.*

La relación entre la carga P y el alargamiento δ para una barra de material linealmente elástico está dada por la ecuación

$$\delta = \frac{PL}{EA} \tag{2.36}$$

Al combinar esta ecuación con la ecuación (2.35) nos permite expresar la energía de deformación de una **barra linealmente elástica** en cualquiera de las siguientes formas:

$$U = \frac{P^2L}{2EA} \qquad U = \frac{EA\delta^2}{2L} \tag{2.37a,b}$$

La primera ecuación expresa la energía de deformación como una función de la carga y la segunda la expresa como una función del alargamiento.

A partir de la primera ecuación observamos que al aumentar la longitud de una barra se incrementa la cantidad de energía de deformación aunque la carga no cambie (debido a que más material se deforma por la carga). Por otra parte, al aumentar el módulo de elasticidad o bien el área de la sección transversal disminuye la energía de deformación debido a que las deformaciones en la barra se reducen. Estas ideas se ilustran en los ejemplos 2.12 y 2.15.

Las ecuaciones de energía de deformación análogas a las ecuaciones (2.37a) y (2.37b) se pueden escribir para un **resorte linealmente elástico** reemplazando la rigidez EA/L de la barra prismática con la rigidez k del resorte. Por tanto,

$$U = \frac{P^2}{2k} \qquad U = \frac{k\delta^2}{2} \tag{2.38a,b}$$

Pueden obtenerse otras formas de estas ecuaciones reemplazando k con $1/f$, donde f es la flexibilidad.

*El principio que afirma que el trabajo de las cargas externas es igual a la energía de deformación (para el caso de comportamiento linealmente elástico) fue enunciado primero por el ingeniero francés B. P. E. Clapeyron (1799-1864) y se conoce como *teorema de Clapeyron* (referencia 2.7).

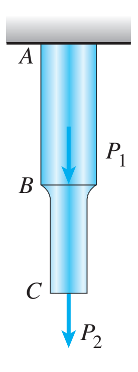


FIGURA 2.45 Barra formada de segmentos prismáticos que tienen diferentes áreas de sus secciones transversales y distintas fuerzas axiales.

Barras no uniformes

La energía de deformación total U de una barra formada de varios segmentos es igual a la suma de las energías de deformación de los segmentos individuales. Por ejemplo, la energía de deformación de la barra representada en la figura 2.45 es igual a la energía de deformación del segmento AB más la energía de deformación del segmento BC. Este concepto se expresa en términos generales mediante la siguiente ecuación:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i \tag{2.39}$$

en donde U_i es la energía de deformación del segmento i de la barra y n es el número de segmentos. (Esta relación es válida ya sea que el material se comporte de una manera lineal o no lineal).

Ahora suponga que el material de la barra es linealmente elástico y que la fuerza axial interna es constante dentro de cada segmento. Entonces podemos emplear la ecuación (2.37a) para obtener las energías de deformación de los segmentos y la ecuación (2.39) se transforma en

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} \tag{2.40}$$

donde N_i es la fuerza axial que actúa en el segmento i y L_i, E_i y A_i son propiedades del segmento i. (El uso de esta ecuación se ilustra en los ejemplos 2.12 y 2.15 al final de esta sección).

Podemos obtener la energía de deformación de una barra prismática con una fuerza axial que varía continuamente (figura 2.46) aplicando la ecuación (2.37a) a un elemento diferencial (que se muestra sombreado en la figura) y luego integrando a lo largo de la longitud de la barra:

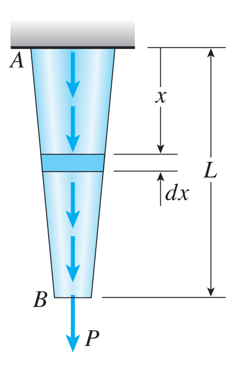


FIGURA 2.46 Barra no prismática con fuerza axial variable.

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2 dx}{2EA(x)} \tag{2.41}$$

En esta ecuación, $N(x)$ y $A(x)$ son la fuerza axial y el área de la sección transversal a una distancia x desde el extremo de la barra. (El ejemplo 2.13 ilustra el uso de esta ecuación).

Comentarios

Las expresiones anteriores para la energía de deformación (ecuaciones 2.37 a 2.41) muestran que la energía de deformación *no* es una función lineal de las cargas, ni siquiera cuando el material es linealmente elástico. Por tanto, es importante tomar en cuenta que *no podemos obtener la energía de deformación de una estructura que soporta más de una carga combinando las energías de deformación obtenidas a partir de las cargas individuales que actúan por separado*.

En el caso de la barra no prismática que se muestra en la figura 2.45, la energía de deformación total *no* es la suma de la energía de deformación debida a la carga P_1 que actúa sola y la energía de deformación debida a la carga P_2 actuando sola. Entonces, debemos evaluar la energía de deformación con todas las cargas que actúan simultáneamente, como se demuestra más adelante en el ejemplo 2.13.

Aunque sólo hemos considerado elementos en tensión en los análisis anteriores de energía de deformación, todos los conceptos y las ecuaciones se aplican igualmente bien a elementos en **compresión**. Dado que el trabajo realizado por una carga axial es positivo sin importar si la carga ocasiona tensión o compresión, se deduce que la energía de deformación siempre es una cantidad positiva. Este hecho es también evidente en las expresiones para la energía de deformación de barras linealmente elásticas (como las ecuaciones 2.37a y 2.37b). Estas expresiones siempre son positivas debido a que los términos de la carga y el alargamiento están elevados al cuadrado.

La energía de deformación es una forma de **energía potencial** (o "energía de posición") porque depende de las ubicaciones relativas de las partículas o elementos que componen el miembro. Cuando una barra o un resorte se comprimen, sus partículas se agrupan más juntas; cuando se estira, las distancias entre las partículas aumentan. En los dos casos la energía de deformación del elemento se incrementa en comparación con su energía de deformación en la posición sin carga.

Desplazamientos ocasionados por una carga individual

El desplazamiento de una estructura linealmente elástica que sólo soporta una carga se puede determinar a partir de su energía de deformación. Para ilustrar el método, considere una armadura de dos barras (figura 2.47) sometida a una fuerza vertical P. Nuestro objetivo es determinar el desplazamiento vertical δ en el nodo B donde se aplica la carga.

Cuando la carga P se aplica lentamente a la armadura, realiza trabajo conforme se mueve por el desplazamiento vertical δ. Sin embargo, no realiza trabajo a medida que se mueve lateralmente, es decir, a los lados. Por lo tanto, como el diagrama carga-desplazamiento es lineal (consulte la figura

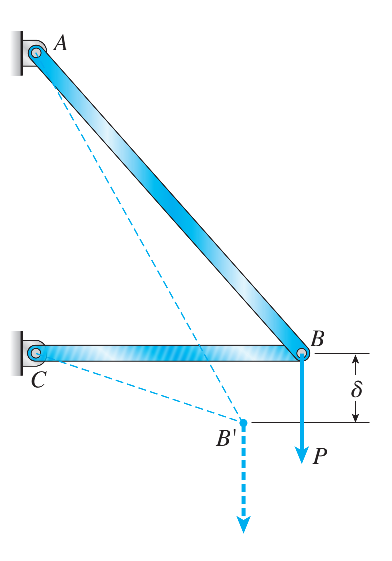


FIGURA 2.47 Estructura soportando una carga individual P.

2.44 y la ecuación 2.35), la energía de deformación U almacenada en la estructura, igual al trabajo realizado por la carga, es

$$U = W = \frac{P\delta}{2}$$

de donde obtenemos

$$\delta = \frac{2U}{P} \tag{2.42}$$

Esta ecuación muestra que en ciertas condiciones especiales, como se destaca en el párrafo siguiente, el desplazamiento de una estructura se puede determinar directamente a partir de la energía de deformación.

Las condiciones que se deben cumplir a fin de usar la ecuación (2.42) son las siguientes: (1) la estructura se debe comportar de una manera linealmente elástica y (2) sólo puede actuar una carga sobre la estructura. Además, el único desplazamiento que se puede determinar es el correspondiente a la propia carga (es decir, el desplazamiento debe ocurrir en la dirección de la carga y debe estar en el punto donde se aplica la carga). Por tanto, este método para determinar desplazamientos está extremadamente limitado en su aplicación y no es un buen indicador de la gran importancia de los principios de la energía de deformación en la mecánica estructural. Sin embargo, el método sí proporciona una introducción al uso de la energía de deformación. (El método se ilustra más adelante en el ejemplo 2.14).

Densidad de energía de deformación

En muchas situaciones es conveniente emplear una cantidad denominada **densidad de energía de deformación**, que se define como la energía de deformación por unidad de volumen de material. Las expresiones para la densidad de energía de deformación en el caso de materiales linealmente elásticos se pueden obtener con las fórmulas para la energía de deformación de una barra prismática (ecuaciones 2.37a y b). Como la energía de deformación de la barra está uniformemente distribuida en todo su volumen, podemos determinar la densidad de energía de deformación dividiendo la energía de deformación total U entre el volumen AL de la barra. Por tanto, la densidad de energía de deformación, denotada con el símbolo u, puede expresarse en cualquiera de estas formas:

$$u = \frac{P^2}{2EA^2} \qquad u = \frac{E\delta^2}{2L^2} \tag{2.43a,b}$$

Si reemplazamos P/A con el esfuerzo σ y δ/L con la deformación unitaria ϵ, obtenemos

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \qquad u = \frac{E\epsilon^2}{2} \tag{2.44a,b}$$

Estas ecuaciones proporcionan la densidad de energía de deformación en un material linealmente elástico en términos del esfuerzo normal σ o de la deformación unitaria normal ϵ.

Las expresiones en las ecuaciones (2.44a y b) tienen una interpretación geométrica simple. Son iguales al área $\sigma\epsilon/2$ del triángulo debajo del diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un material que sigue la ley de Hooke ($\sigma = E\epsilon$). En una situación más general donde el material no sigue la ley de Hooke, la densidad de energía de deformación aún es igual al área debajo de la curva esfuerzo-deformación unitaria, pero se debe evaluar el área para cada material particular.

La densidad de energía de deformación tiene **unidades** de energía dividida entre el volumen. Las unidades en el SI son joules por metro cúbico (J/m^3) y en el sistema inglés son pie-libras por pie cúbico, pulgada-libras por pulgada cúbica y otras unidades similares. Como todas estas unidades se reducen a unidades de esfuerzo (recuerde que 1 J = 1 N·m), también podemos utilizar unidades como pascales (Pa) y libras por pulgada cuadrada (psi) para la densidad de energía de deformación.

La densidad de energía de deformación del material cuando se esfuerza hasta el límite de proporcionalidad se denomina **módulo de resilencia** u_r, y se determina sustituyendo el límite de proporcionalidad σ_{pl} en la ecuación (2.44a):

$$u_r = \frac{\sigma_{pl}^2}{2E} \tag{2.45}$$

Por ejemplo, un acero dulce que tiene $\sigma_{pl} = 36{,}000$ psi y $E = 30 \times 10^6$ psi tiene un módulo de resilencia $u_r = 21.6$ psi (o 149 kPa). Observe que el módulo de resilencia es igual al área debajo de la curva esfuerzo-deformación unitaria hasta el límite de proporcionalidad. La *resilencia* representa la habilidad de un material para absorber y liberar energía dentro del intervalo elástico.

Otra cantidad, denominada *tenacidad*, se refiere a la habilidad de un material para absorber energía sin fracturarse. El módulo correspondiente, denominado **módulo de tenacidad** u_t, es la densidad de energía de deformación cuando el material se esfuerza hasta el punto de falla y es igual al área debajo de toda la curva esfuerzo-deformación unitaria. Entre mayor sea el módulo de tenacidad de un material, mayor será su capacidad para absorber energía sin fallar. Por tanto, un módulo de tenacidad elevado es importante cuando el material se somete a cargas de impacto (consulte la sección 2.8).

Las expresiones anteriores para la densidad de energía de deformación (ecuaciones 2.43 a 2.45) se dedujeron para *esfuerzo uniaxial*, es decir, para materiales sometidos sólo a tensión o compresión. Las fórmulas para la densidad de energía de deformación en otros estados de esfuerzo se presentan en los capítulos 3 y 7.

Ejemplo 2.12

Tres barras redondas con la misma longitud L pero con formas diferentes se muestran en la figura 2.48. La primera barra tiene un diámetro d en toda su longitud, la segunda tiene un diámetro d en un quinto de su longitud y la tercera tiene un diámetro d en un quinceavo de su longitud. En el resto de la longitud, la segunda y la tercera barra tienen un diámetro $2d$. Las tres barras se someten a la misma carga axial P.

Compare las cantidades de energía de deformación almacenadas en las barras suponiendo un comportamiento linealmente elástico. (No tome en cuenta los efectos de las concentraciones de esfuerzo y los pesos de las barras).

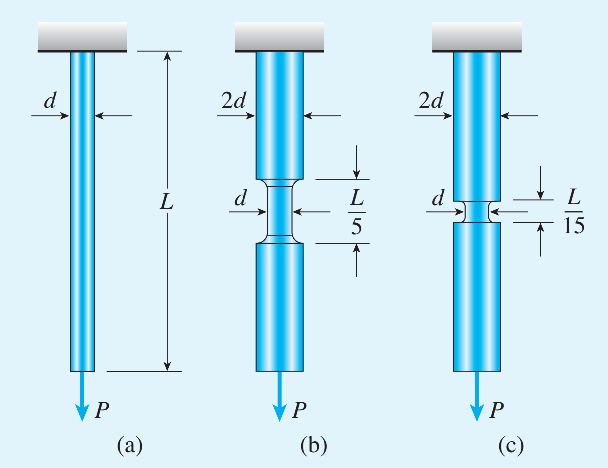


FIGURA 2.48 Ejemplo 2.12. Cálculo de la energía de deformación.

Solución

(a) *Energía de deformación U_1 de la primera barra*. La energía de deformación de la primera barra se determina directamente de la ecuación (2.37a):

$$U_1 = \frac{P^2 L}{2EA} \quad \text{(a)}$$

en donde $A = \pi d^2/4$.

continúa

(b) *Energía de deformación U_2 de la segunda barra*. La energía de deformación se determina sumando las energías de deformación en los tres segmentos de la barra (consulte la ecuación 2.40). Por tanto,

$$U_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{P^2(L/5)}{2EA} + \frac{P^2(4L/5)}{2E(4A)} = \frac{P^2 L}{5EA} = \frac{2U_1}{5} \qquad \text{(b)}$$

que es sólo 40% de la energía de deformación de la primera barra. Por tanto, aumentando el área de la sección transversal en parte de la longitud reduce en gran medida la cantidad de energía de deformación que se puede almacenar en la barra.

(c) *Energía de deformación U_3 de la tercera barra.* De nuevo empleando la ecuación (2.40), obtenemos

$$U_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{P^2(L/15)}{2EA} + \frac{P^2(14L/15)}{2E(4A)} = \frac{3P^2 L}{20EA} = \frac{3U_1}{10} \qquad \text{(c)}$$

La energía de deformación ahora ha disminuido a 30% de la energía de deformación de la primera barra.

Nota: al comparar estos resultados observamos que la energía de deformación disminuye conforme aumenta la parte de la barra con el área mayor. Si se aplica la misma cantidad de trabajo a las tres barras, el esfuerzo mayor será en la tercera, debido a que ésta tiene la menor capacidad de absorción de energía. Si la región que tiene el diámetro d se hace aún menor, la capacidad de absorción de energía disminuirá todavía más.

Por tanto, concluimos que sólo se requiere una cantidad pequeña de trabajo para llevar el esfuerzo de tensión a un valor mayor en una barra con una ranura, y entre más estrecha sea esta última, más severa será su condición. Cuando las cargas son dinámicas y la habilidad para absorber energía es importante, la presencia de ranuras es muy perjudicial.

En el caso de cargas estáticas, los esfuerzos máximos son más importantes que la habilidad para absorber energía. En este ejemplo las tres barras tienen el mismo esfuerzo máximo P/A (siempre que se amortigüen las concentraciones de esfuerzo) y, por tanto, las tres barras tienen la misma capacidad de soporte de carga cuando ésta se aplica estáticamente.

Ejemplo 2.13

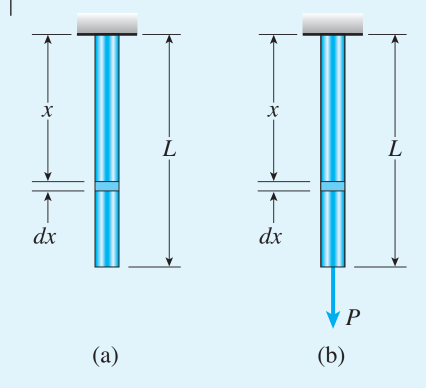


FIGURA 2.49 Ejemplo 2.13. (a) Barra colgada por su propio peso y (b) barra que cuelga por su propio peso y también soporta una carga P.

Determine la energía de deformación de una barra prismática que cuelga de su extremo superior (figura 2.49). Considere las cargas siguientes: (a) el peso de la barra y (b) el peso de la barra más una carga P en el extremo inferior. (Suponga un comportamiento linealmente elástico.)

Solución

(a) *Energía de deformación debida al peso de la barra (figura 2.49a)*. La barra está sometida a una fuerza axial variante, la fuerza interna es cero en su extremo inferior y máxima en su extremo superior. Para determinar la fuerza axial, consideramos un elemento con longitud dx (que se muestra sombreado en la figura) a una distancia x desde el extremo superior. La fuerza axial interna $N(x)$ que actúa sobre este elemento es igual al peso de la barra debajo del elemento:

$$N(x) = \gamma A(L - x) \tag{d}$$

en donde γ es el peso específico del material y A es el área de la sección transversal de la barra. Sustituyendo en la ecuación (2.41) e integrando se obtiene la energía de deformación total:

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2\,dx}{2EA(x)} = \int_0^L \frac{[\gamma A(L - x)]^2\,dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E} \tag{2.46}$$

(b) *Energía de deformación debida al peso de la barra más la carga P (figura 2.49b)*. En este caso la fuerza axial $N(x)$ que actúa sobre el elemento es

$$N(x) = \gamma A(L - x) + P \tag{e}$$

(compare con la ecuación d). Ahora de la ecuación (2.41) obtenemos

$$U = \int_0^L \frac{[\gamma A(L - x) + P]^2\,dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E} + \frac{\gamma P L^2}{2E} + \frac{P^2 L}{2EA} \tag{2.47}$$

Nota: el primer término en esta expresión es igual que la energía de deformación de una barra que cuelga bajo su propio peso (ecuación 2.46) y el último término es igual que la energía de deformación de una barra sometida a una fuerza axial P (ecuación 2.37a). Sin embargo, el término medio contiene tanto a γ como a P, mostrando que depende del peso de la barra y de la magnitud de la carga aplicada.

Por tanto, este ejemplo ilustra que la energía de deformación de una barra sometida a dos cargas *no* es igual a la suma de las energías de deformación producidas por las cargas individuales que actúan por separado.

Ejemplo 2.14

Determine el desplazamiento vertical δ_B del nodo B de la armadura que se muestra en la figura 2.50. Observe que la única carga que actúa sobre la armadura es la carga vertical P en el nodo B. Suponga que los dos elementos de la armadura tienen la misma rigidez axial EA.

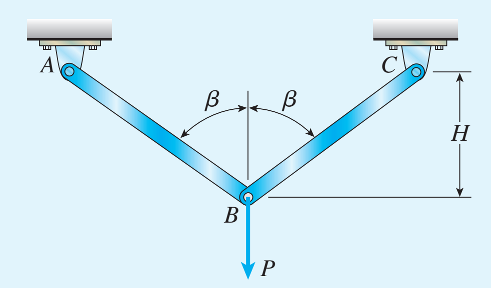


FIGURA 2.50 Ejemplo 2.14. Desplazamiento de una armadura que soporta una sola carga P.

Solución

Como sólo hay una carga que actúa sobre la armadura, podemos determinar el desplazamiento correspondiente a esa carga igualando el trabajo de la carga con la energía de deformación de los elementos. Sin embargo, para encontrar la energía de deformación debemos conocer las fuerzas en los elementos (consulte la figura 2.37a).

A partir del equilibrio de las fuerzas que actúan en el nodo B observamos que la fuerza axial F en cualquier barra es

$$F = \frac{P}{2\cos\beta} \tag{f}$$

en donde β es el ángulo que se muestra en la figura.

Además, de la geometría de la armadura vemos que la longitud de cada barra es

$$L_1 = \frac{H}{\cos\beta} \tag{g}$$

en donde H es la altura de la armadura.

Ahora podemos obtener la energía de deformación de las dos barras con la ecuación (2.37a):

$$U = (2)\frac{F^2L_1}{2EA} = \frac{P^2H}{4EA\cos^3\beta} \tag{h}$$

También, el trabajo de la carga P (de la ecuación 2.35) es

$$W = \frac{P\delta_B}{2} \tag{i}$$

donde δ_B es el desplazamiento hacia abajo del nodo B. Igualando U y W, y despejando δ_B, obtenemos

$$\delta_B = \frac{PH}{2EA\cos^3\beta} \tag{2.48}$$

Observe que encontramos este desplazamiento empleando sólo el equilibrio y la energía de deformación, no necesitamos trazar un diagrama de desplazamiento en el nodo B.

Ejemplo 2.15

El cilindro de un compresor de aire está sujeto por pernos que pasan por las bridas del cilindro (figura 2.51a). En la parte (b) de la figura se muestra un detalle de uno de los pernos. El diámetro d del vástago es 0.500 in y el diámetro de la raíz d_r de la sección roscada es 0.406 in. El agarre g de los pernos es 1.50 in y las roscas se extienden una distancia $t = 0.25$ in en el agarre. Debido la acción de ciclos repetidos de presión alta y baja en la cámara, los pernos podrían romperse.

Para reducir la posibilidad de que fallen los pernos, los diseñadores sugieren dos modificaciones posibles: (1) rebajar los vástagos de los pernos de modo que su diámetro sea igual que el diámetro de la rosca d_r, como se muestra en la figura 2.52a. (2) Reemplazar cada par de pernos por un solo perno largo como se ve en la figura 2.52b. Los pernos largos son similares a los pernos originales (figura 2.51b) excepto que el agarre se aumenta hasta la distancia $L = 13.5$ in.

Compare la capacidad de absorción de energía de las tres configuraciones de los pernos: (a) pernos originales, (b) pernos con diámetro del vástago reducido y (c) pernos largos. (Suponga un comportamiento linealmente elástico y no tenga en cuenta los efectos de las concentraciones de esfuerzos).

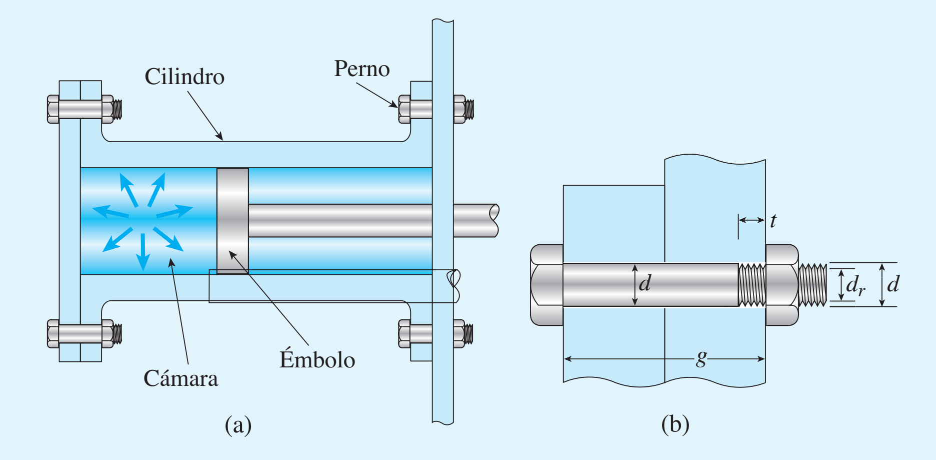


FIGURA 2.51 Ejemplo 2.15. (a) Cilindro con émbolo y pernos de sujeción y (b) detalle de un perno.

Solución

(a) *Pernos originales*. Los pernos originales se pueden idealizar como barras que consisten de dos segmentos (figura 2.51b). El segmento izquierdo tiene una longitud $g - t$ y un diámetro d, y el segmento derecho tiene una longitud t y un diámetro d_r. La energía de deformación de un perno sometido a una carga de tensión P se puede obtener sumando las energías de deformación de los dos segmentos (ecuación 2.40):

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{P^2(g - t)}{2EA_s} + \frac{P^2 t}{2EA_r} \tag{j}$$

en donde A_s es el área de la sección transversal del vástago y A_r es el área de la sección transversal en la raíz de las roscas; por tanto,

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} \qquad A_r = \frac{\pi d_r^2}{4} \tag{k}$$

continúa

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (j), obtenemos la siguiente fórmula para la energía de deformación de uno de los pernos:

$$U_1 = \frac{2P^2(g - t)}{\pi E d^2} + \frac{2P^2 t}{\pi E d_r^2} \qquad \text{(l)}$$

(b) *Pernos con diámetro reducido del vástago*. Estos pernos se pueden idealizar como barras prismáticas con longitud g y diámetro d_r (figura 2.52a). Por tanto, la energía de deformación de un perno (consulte la ecuación 2.37a) es

$$U_2 = \frac{P^2 g}{2EA_r} = \frac{2P^2 g}{\pi E d_r^2} \qquad \text{(m)}$$

La razón de las energías de deformación para los casos (1) y (2) es

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{gd^2}{(g - t)d_r^2 + td^2} \qquad \text{(n)}$$

o, al sustituir valores numéricos,

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{(1.50 \text{ in})(0.500 \text{ in})^2}{(1.50 \text{ in} - 0.25 \text{ in})(0.406 \text{ in})^2 + (0.25 \text{ in})(0.500 \text{ in})^2} = 1.40$$

Por tanto, al utilizar pernos con diámetros reducidos de los vástagos resulta en un aumento de 40% en la cantidad de energía de deformación que pueden absorber los pernos. Si este esquema se implementa reducirá el número de fallas causadas por las cargas de impacto.

(c) *Pernos largos*. Los cálculos para los pernos largos (figura 2.52b) son los mismos que para los pernos originales excepto que el agarre g cambia al agarre L. Por tanto, la energía de deformación de un perno largo (compare con la ecuación l) es

$$U_3 = \frac{2P^2(L - t)}{\pi E d^2} + \frac{2P^2 t}{\pi E d_r^2} \qquad \text{(o)}$$

Como un perno largo sustituye dos de los pernos originales, debemos comparar las energías de deformación tomando la razón entre U_3 y $2U_1$, como se muestra:

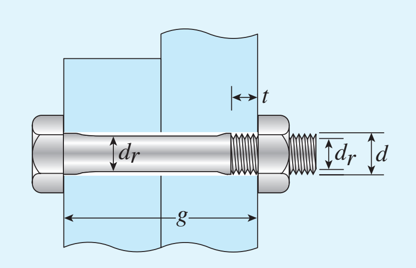
$$\frac{U_3}{2U_1} = \frac{(L - t)d_r^2 + td^2}{2(g - t)d_r^2 + 2td^2} \qquad \text{(p)}$$

Sustituyendo valores numéricos se tiene

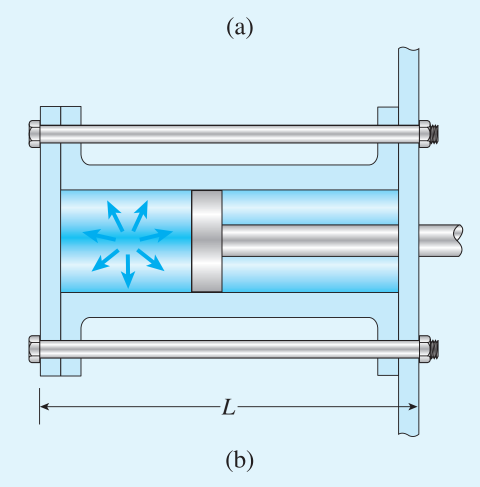
$$\frac{U_3}{2U_1} = \frac{(13.5 \text{ in} - 0.25 \text{ in})(0.406 \text{ in})^2 + (0.25 \text{ in})(0.500 \text{ in})^2}{2(1.50 \text{ in} - 0.25 \text{ in})(0.406 \text{ in})^2 + 2(0.25 \text{ in})(0.500 \text{ in})^2} = 4.18$$

Entonces, utilizar pernos largos aumenta la capacidad de absorción de energía en 318 por ciento y logra la mayor seguridad desde el punto de vista de la energía de deformación.

Nota: al diseñar pernos también se debe considerar los esfuerzos máximos de tensión, los esfuerzos máximos de soporte, las concentraciones de esfuerzos y muchos otros factores.



(a)



(b)

FIGURA 2.52 Ejemplo 2.15. Modificaciones propuestas para los pernos: (a) pernos con diámetros reducidos del vástago y (b) pernos con longitud aumentada.

★2.8 CARGA DE IMPACTO

Las cargas se pueden clasificar como estáticas o dinámicas, dependiendo de si permanecen constantes o varían con el tiempo. Una **carga estática** se aplica lentamente para que no cause efectos vibratorios o dinámicos en la estructura. La carga aumenta gradualmente de cero a su valor máximo y después permanece constante.

Una **carga dinámica** puede adoptar muchas formas, algunas cargas se aplican y se remueven repentinamente (*cargas de impacto*), otras persisten durante periodos largos y varían continuamente de intensidad (*cargas fluctuantes*). Las cargas de impacto se producen cuando dos objetos colisionan o cuando un objeto en caída golpea una estructura. Las cargas fluctuantes se producen por maquinaria rotatoria, tránsito, rachas de viento, olas de agua, sismos y procesos de manufactura.

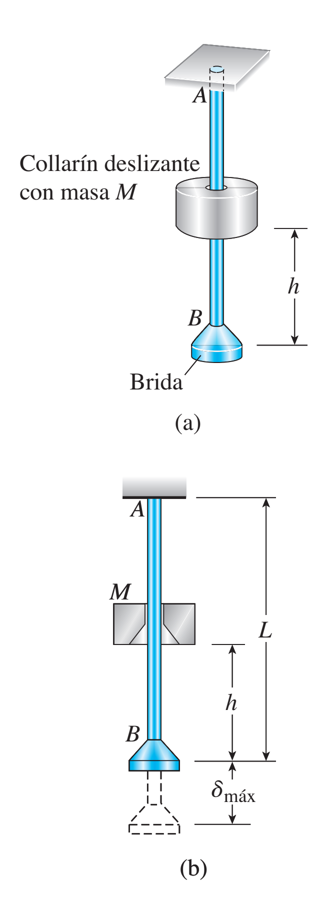


FIGURA 2.53 Carga de impacto sobre una barra prismática *AB* debida a un objeto en caída con masa *M*.

Como un ejemplo de cómo responden las estructuras a las cargas dinámicas, analizaremos el impacto de un objeto que cae hacia el extremo inferior de una barra prismática (figura 2.53). Un collarín con masa *M*, inicialmente en reposo, cae desde una altura *h* hacia un brida en el extremo de la barra *AB*. Cuando el collarín golpea la brida, la barra comienza a alargarse, creando esfuerzos axiales dentro de la barra. En un intervalo de tiempo muy breve, del orden de algunos milisegundos, la brida se moverá hacia abajo y alcanzará su posición de desplazamiento máximo. Después, la barra se acorta, luego se alarga, se acorta de nuevo conforme la barra vibra longitudinalmente y el extremo de la barra se mueve hacia arriba y abajo. Las vibraciones son análogas a las que suceden cuando un resorte se estira y luego se libera, o cuando una persona salta con una cuerda elástica sujetada a su tobillo. Las vibraciones de la barra se extinguen pronto debido a varios efectos de amortiguamiento y luego la barra llega al reposo con la masa *M* soportada por la brida.

Es obvio que la respuesta de la barra al collarín descendente es muy complicada y un análisis completo y exacto requiere el uso de técnicas matemáticas avanzadas. Sin embargo, podemos hacer un análisis aproximado empleando el concepto de energía de deformación (sección 2.7) y formulando varias suposiciones simplificadas

Iniciemos considerando la energía del sistema justo antes de que se libere el collarín (figura 2.53a). La energía potencial del collarín con respecto a la elevación de la brida es Mgh, donde g es la aceleración de la gravedad.* Esta energía potencial se convierte en energía cinética conforme cae el collarín. En el instante que el collarín golpea la brida, su energía potencial con respecto a la elevación de la brida es cero y su energía cinética es $Mv^2/2$, donde $v = \sqrt{2gh}$ es su velocidad.**

*En unidades SI, la aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, en unidades inglesas, $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$. Para valores más precisos de g, o para un análisis de masa y peso, consulte el apéndice A.

**En trabajos de ingeniería es usual que la velocidad se tome como una cantidad vectorial. Sin embargo, como la energía cinética es un escalar, emplearemos la palabra “velocidad” para denominar la *magnitud* de la velocidad o su *rapidez*.

Durante el impacto resultante, la energía cinética del collarín se convierte en otras formas de energía. Parte de la energía cinética se transforma en la energía de deformación de la barra estirada. Algo de la energía se disipa produciendo calor y causando deformaciones plásticas localizadas del collarín y de la brida. Una pequeña parte permanece como la energía cinética del collarín, que o se mueve hacia abajo aún más (mientras está en contacto con la brida) o bien rebota hacia arriba.

Para hacer un análisis simplificado de esta situación tan compleja, idealizaremos el comportamiento haciendo las siguientes suposiciones. (1) Supondremos que el collarín y la brida están construidos de tal manera que el collarín "se pega" a la brida y se mueve hacia abajo con ella (es decir, el collarín no rebota). Este comportamiento es más probable que se dé cuando la masa del collarín es grande comparada con la masa de la barra. (2) No tendremos en cuenta todas las pérdidas de energía y supondremos que la energía cinética de la masa en caída se transforma completamente en energía de deformación de la barra. Esta suposición predice esfuerzos mayores en la barra que los que se anticiparían si se tomaran en cuenta pérdidas de energía. (3) No tomaremos en cuenta cualquier cambio en la energía potencial de la barra (debido al movimiento vertical de sus elementos) ni tomaremos en cuenta la existencia de energía de deformación en la barra debida a su propio peso. Estos dos efectos son extremadamente pequeños. (4) Supondremos que los esfuerzos en la barra permanecen dentro del intervalo linealmente elástico. (5) Supondremos que la distribución de esfuerzos en toda la barra es la misma que cuando está cargada estáticamente por una fuerza en su extremo inferior, es decir, supondremos que los esfuerzos son uniformes en todo el volumen de la barra. (En realidad las ondas del esfuerzo longitudinal viajarán por la barra y debido a esto causaría variaciones en la distribución del esfuerzo).

Con base en las suposiciones anteriores, podremos calcular el alargamiento máximo de la barra y los esfuerzos de tensión máximos producidos por la carga de impacto. (Recuerde que no tomamos en cuenta el peso de la barra y sólo hemos determinado los esfuerzos debidos al collarín que cae).

Alargamiento máximo de la barra

El alargamiento máximo de la barra $\delta_{\text{máx}}$ (figura 2.53b) se puede obtener a partir del principio de *conservación de la* energía igualando la energía potencial perdida por la masa en caída con la energía de deformación máxima adquirida por la barra. La energía potencial pérdida es $W(h + \delta_{\text{máx}})$, donde $W = Mg$ es el peso del collarín y $h + \delta_{\text{máx}}$ es la distancia que se desplaza. La energía de deformación de la barra es $EA\,\delta_{\text{máx}}^2/2L$, donde EA es la rigidez axial y L es la longitud de la barra (consulte la figura 2.37b). Con estos datos obtenemos la siguiente ecuación:

$$W(h + \delta_{\text{máx}}) = \frac{EA\delta_{\text{máx}}^2}{2L} \tag{2.49}$$

Esta ecuación es cuadrática en $\delta_{\text{máx}}$ y se puede despejar la raíz positiva; el resultado es

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{WL}{EA} + \left[\left(\frac{WL}{EA}\right)^2 + 2h\left(\frac{WL}{EA}\right)\right]^{1/2} \tag{2.50}$$

Observe que el alargamiento máximo de la barra aumenta si el peso del collarín o bien la altura de la caída aumentan. El alargamiento disminuye si la rigidez EA/L aumenta.

La ecuación anterior se puede escribir en una forma más simple introduciendo la notación

$$\delta_{\text{est}} = \frac{WL}{EA} = \frac{MgL}{EA} \tag{2.51}$$

en donde δ_{est} es el alargamiento de la barra debida al peso del collarín en condiciones de carga estática. Entonces, la ecuación (2-50) se transforma en

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_{\text{est}} + (\delta_{\text{est}}^2 + 2h\delta_{\text{est}})^{1/2} \tag{2.52}$$

o bien

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_{\text{est}}\left[1 + \left(1 + \frac{2h}{\delta_{\text{est}}}\right)^{1/2}\right] \tag{2.53}$$

En esta ecuación observamos que el alargamiento de la barra ante la carga de impacto es mucho mayor que si aplicara la misma carga de manera estática. Suponga, por ejemplo, que el peso h es 40 multiplicado por el desplazamiento estático δ_{est}; entonces el alargamiento máximo sería 10 multiplicado por el alargamiento estático.

Cuando la altura h es grande comparada con el alargamiento estático, podemos ignorar los “unos” en el lado derecho de la ecuación (2.53) y obtenemos

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{2h\delta_{\text{est}}} = \sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} \tag{2.54}$$

en donde $M = W/g$ y $v = \sqrt{2gh}$ es la velocidad de la masa en caída cuando golpea la brida. Esta ecuación también se puede obtener directamente de la ecuación (2.49) omitiendo $\delta_{\text{máx}}$ en el lado izquierdo de la ecuación y luego despejando $\delta_{\text{máx}}$. Debido a los términos que se omitieron, los valores de $\delta_{\text{máx}}$ calculados con la ecuación (2.54) siempre son menores que los que se obtienen con la ecuación (2.53).

Esfuerzo máximo en la barra

El esfuerzo máximo se puede calcular fácilmente a partir del alargamiento máximo debido a que suponemos que la distribución de esfuerzos es uniforme en toda la longitud de la barra. De la ecuación general $\delta = PL/EA = \sigma L/E$, sabemos que

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E\delta_{\text{máx}}}{L} \tag{2.55}$$

Sustituyendo de la ecuación (2.50), obtenemos la siguiente ecuación para el esfuerzo de tensión máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{W}{A} + \left[\left(\frac{W}{A}\right)^2 + \frac{2WhE}{AL}\right]^{1/2} \tag{2.56}$$

Introduciendo la notación

$$\sigma_{\text{est}} = \frac{W}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{E\delta_{\text{est}}}{L} \tag{2.57}$$

en donde σ_{est} es el esfuerzo cuando la carga actúa estáticamente, podemos escribir la ecuación (2.56) en la siguiente forma:

$$\sigma_{máx} = \sigma_{est} + \left(\sigma_{est}^2 + \frac{2hE}{L}\sigma_{est}\right)^{1/2} \tag{2.58}$$

o bien

$$\sigma_{máx} = \sigma_{est}\left[1 + \left(1 + \frac{2hE}{L\sigma_{est}}\right)^{1/2}\right] \tag{2.59}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (2.53) y de nuevo muestra que una carga de impacto produce efectos mucho mayores que cuando la misma carga se aplica estáticamente.

Considerando otra vez el caso en el que la altura h es grande en comparación con el alargamiento de la barra (compare con la ecuación 2.54), obtenemos

$$\sigma_{máx} = \sqrt{\frac{2hE\sigma_{est}}{L}} = \sqrt{\frac{Mv^2E}{AL}} \tag{2.60}$$

De este resultado observamos que un aumento en la energía cinética $Mv^2/2$ de la masa que cae aumenta el esfuerzo, en tanto que un aumento en el volumen AL de la barra reducirá el esfuerzo. Esta situación es muy diferente a la de tensión estática de la barra, donde el esfuerzo es independiente de la longitud L y del módulo de elasticidad E.

Las ecuaciones anteriores para el alargamiento máximo y el esfuerzo máximo se aplican sólo en el instante en que la brida de la barra está en su posición más baja. Después que se alcanza el alargamiento máximo en la barra, ésta vibrará axialmente hasta llegar al reposo en el alargamiento estático. De allí en adelante el alargamiento y el esfuerzo tienen valores dados por las ecuaciones (2.51) y (2.57).

Si bien las ecuaciones anteriores se dedujeron para el caso de una barra prismática, se pueden usar para cualquier estructura linealmente elástica sometida a una carga en caída, siempre que conozcamos la rigidez apropiada de la estructura. En particular, las ecuaciones se pueden utilizar para un resorte sustituyendo la rigidez k del resorte (consulte la sección 2.2) por la rigidez EA/L de la barra prismática.

Factor de impacto

La razón entre la respuesta dinámica de una estructura y la respuesta estática (para la misma carga) se conoce como **factor de impacto.** Por ejemplo,

el factor de impacto de la barra de la figura 2.53 es la razón entre alargamiento máximo y el alargamiento estático.

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{\delta_{\text{est}}} \tag{2.61}$$

Este factor representa la cantidad en la cual se amplifica el alargamiento estático debida a los efectos dinámicos del impacto.

Se pueden escribir ecuaciones análogas a la (2.61) para otros factores de impacto, como el factor de impacto para el esfuerzo en la barra (la razón $\sigma_{\text{máx}}$ entre σ_{est}). Cuando el collarín cae desde una altura considerable, el factor de impacto puede ser muy grande, de 100 o mayor.

Carga aplicada repentinamente

Un caso especial de impacto ocurre cuando la carga se aplica repentinamente sin velocidad inicial. Para explicar este tipo de carga considere otra vez la barra prismática que se muestra en la figura 2.53 y suponga que el collarín deslizante se baja despacio hasta que apenas toca la brida. Luego el collarín se libera repentinamente. Aunque en este caso no existe energía cinética al inicio de la extensión de la barra, el comportamiento es muy diferente del de la carga estática de la barra. En condiciones de carga estática, la carga se libera de forma gradual y siempre existe equilibrio entre la carga aplicada y la fuerza resistente de la barra.

Sin embargo, considere qué sucede cuando el collarín se libera repentinamente desde su punto de contacto con la brida. Inicialmente el alargamiento de la barra y el esfuerzo en la barra son cero, pero el collarín se mueve hacia abajo ante la acción de su propio peso. Durante este movimiento la barra se alarga y su fuerza resistente aumenta gradualmente. El movimiento continúa hasta que en algún instante la fuerza resistente es apenas igual a W, el peso del collarín. En este instante particular el alargamiento de la barra es δ_{est}. Sin embargo, ahora el collarín tiene cierta energía cinética que adquiere durante el desplazamiento hacia abajo δ_{est}. Por tanto, el collarín continúa moviéndose hacia abajo hasta que su velocidad se hace cero por la fuerza resistente en la barra. El alargamiento máximo para esta condición se obtiene con la ecuación (2.53) igualando h a cero; de donde obtenemos

$$\delta_{\text{máx}} = 2\delta_{\text{est}} \tag{2.62}$$

A partir de esta ecuación observamos que una carga aplicada repentinamente produce un alargamiento que es el doble del causado por la misma carga aplicada estáticamente. Por tanto, el factor de impacto es 2.

Después que se ha alcanzado el alargamiento máximo $2\delta_{est}$, el extremo de la barra se moverá hacia arriba y comienza una serie de vibraciones hacia arriba y hacia abajo que finalmente llegan al reposo en el alargamiento estático producido por el peso del collarín.*

Limitaciones

Los análisis anteriores se basaron en la suposición de que no ocurren pérdidas de energía durante el impacto. En la realidad siempre se tienen pérdidas de energía y la mayor parte de ellas se disipan en forma de calor y de deformación localizada de los materiales. Debido a estas pérdidas la energía cinética de un sistema inmediatamente después de un impacto es menor que antes del impacto. En consecuencia, se convierte menos energía en energía de deformación de la barra que la que se supuso con anterioridad. Como resultado, el desplazamiento real del extremo de la barra de la figura 2.53 es menor que el anticipado mediante nuestro análisis simplificado.

También supusimos que los esfuerzos en la barra permanecen dentro del límite de proporcionalidad. Si el esfuerzo máximo excede este límite, el análisis se hace más complicado debido a que el alargamiento de la barra ya no es proporcional a la fuerza axial. Otros factores que se deben considerar son los efectos de las ondas de esfuerzo, amortiguamiento e imperfecciones en las superficies de contacto. Por tanto, debemos recordar que todas las fórmulas en esta sección se basan en condiciones muy idealizadas y proporcionan sólo una aproximación burda de las condiciones verdaderas (por lo general al sobrestimar el alargamiento).

Los materiales que presentan ductilidad considerable más allá del límite de proporcionalidad ofrecen una resistencia mucho mayor a las cargas de impacto que los materiales frágiles. También se debe considerar que las barras con ranuras, agujeros y otras formas de concentraciones de esfuerzos (consulte las secciones 2.9 y 2.10) son muy débiles contra el impacto; una sacudida ligera puede producir la fractura, incluso cuando el material es dúctil ante cargas estáticas.

---

*La ecuación (2.62) fue obtenida por primera vez por el matemático y científico francés J. V. Poncelet (1788-1867); consulte la referencia 2.8.

Ejemplo 2.16

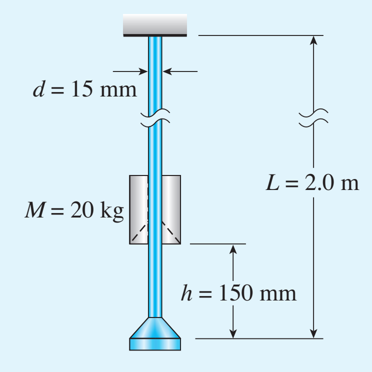


FIGURA 2.54 Ejemplo 2.16. Carga de impacto sobre una barra vertical.

Una barra prismática redonda de acero (E = 210 GPa), longitud L = 2.0 m y diámetro d = 15 mm cuelga verticalmente de un soporte en su extremo superior (figura 2.54). Un collarín deslizante con masa M = 20 kg cae desde una altura h = 150 mm sobre una brida en el extremo inferior de la barra sin rebotar.

(a) Calcule el alargamiento máximo de la barra debida al impacto y determine el factor de impacto correspondiente.

(b) Calcule el esfuerzo de tensión máximo en la barra y determine el factor de impacto correspondiente.

Solución

Como la configuración de la barra y el collarín en este ejemplo es igual a la configuración que se muestra en la figura 2.53, podemos emplear las ecuaciones derivadas con anterioridad (ecuaciones 2.49 a 2.60).

(a) *Alargamiento máximo*. El alargamiento de la barra producido por el collarín en caída se puede determinar con la ecuación (2.53). El primer paso es determinar el alargamiento estático de la barra debido al peso del collarín. Como el peso del collarín es Mg, el cálculo del alargamiento es como sigue:

$$\delta_{est} = \frac{MgL}{EA} = \frac{(20.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})}{(210 \text{ GPa})(\pi/4)(15 \text{ mm})^2} = 0.0106 \text{ mm}$$

De este resultado observamos que

$$\frac{h}{\delta_{est}} = \frac{150 \text{ mm}}{0.0106 \text{ mm}} = 14{,}150$$

Ahora se pueden sustituir los valores numéricos en la ecuación (2.53) para obtener el alargamiento máximo:

$$\begin{aligned}\delta_{máx} &= \delta_{est}\left[1 + \left(1 + \frac{2h}{\delta}\right)^{1/2}\right]\\ &= (0.0106 \text{ mm})[1 + \sqrt{1 + 2(14{,}150)}]\\ &= 1.79 \text{ mm}\end{aligned}$$

continúa

Como la altura de caída es muy grande comparada con el alargamiento estático, obtenemos casi el mismo resultado calculando el alargamiento máximo con la ecuación (2.54):

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{2h\delta_{\text{est}}} = [2(150\ \text{mm})(0.0106\ \text{mm})]^{1/2} = 1.78\ \text{mm}$$

El factor de impacto es igual a la razón entre alargamiento máximo y el alargamiento estático:

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{\delta_{\text{est}}} = \frac{1.79\ \text{mm}}{0.0106\ \text{mm}} = 169$$

Este resultado demuestra que los efectos de una carga dinámicamente aplicada pueden ser muy grandes comparados con los efectos de la misma carga cuando actúa estáticamente.

(b) *Esfuerzo de tensión máximo*. El esfuerzo máximo producido por el collarín en caída se obtiene de la ecuación (2.55) como sigue:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E\delta_{\text{máx}}}{L} = \frac{(210\ \text{GPa})(1.79\ \text{mm})}{2.0\ \text{m}} = 188\ \text{MPa}$$

Este esfuerzo se puede comparar con el esfuerzo estático (consulte la ecuación 2.57), que es

$$\sigma_{\text{est}} = \frac{W}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{(20\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{(\pi/4)(15\ \text{mm})^2} = 1.11\ \text{MPa}$$

La razón entre $\sigma_{\text{máx}}$ y σ_{est} es $188/1.11 = 169$, es igual al factor de impacto para los alargamientos. Este resultado era de esperarse, debido a que los esfuerzos son directamente proporcionales a los alargamientos correspondientes (consulte las ecuaciones 2.55 y 2.57).

Ejemplo 2.17

Una barra horizontal *AB* con longitud *L* recibe un impacto en su extremo libre por un bloque pesado con masa *M* que se mueve horizontalmente con velocidad *v* (consulte figura 2.55).

(a) Determine el acortamiento máximo $\delta_{\text{máx}}$ de la barra debido al impacto y determine el factor de impacto correspondiente.

(b) Determine el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ de la barra y el factor de impacto correspondiente. (Sea *EA* la rigidez axial de la barra).

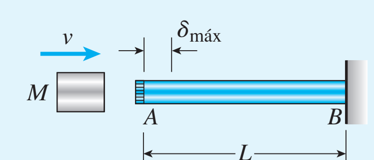


FIGURA 2.55 Ejemplo 2.17. Carga de impacto sobre una barra horizontal

Solución

La carga sobre la barra en este ejemplo es muy diferente de las cargas sobre las barras representadas en las figuras 2.53 y 2.54. Por tanto, debemos hacer un análisis con base en la conservación de la energía.

(a) *Acortamiento máximo de la barra*. Para este análisis adoptamos las mismas suposiciones anteriores. Así, no tomaremos en cuenta todas las pérdidas de energía y supondremos que la energía cinética del bloque en movimiento se transforma por completo en energía de deformación de la barra.

La energía cinética del bloque en el instante del impacto es $Mv^2/2$. La energía de deformación de la barra cuando el bloque llega al reposo en el instante de acortamiento máximo es $EA\,\delta^2_{\text{máx}}/2L$, según lo establece la ecuación (2.37b). Por tanto, podemos escribir la siguiente ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{EA\delta^2_{\text{máx}}}{2L} \tag{2.63}$$

Despejando $\delta_{\text{máx}}$, obtenemos

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} \tag{2.64}$$

Esta ecuación es agual a la ecuación (2.54), lo que podríamos haber anticipado.

Para determinar el factor de impacto necesitamos conocer el desplazamiento estático del extremo de la barra. En este caso el desplazamiento estático es el acortamiento de la barra debido al peso del bloque aplicado como una carga de compresión sobre ella (consulte la ecuación 2.51):

$$\delta_{\text{est}} = \frac{WL}{EA} = \frac{MgL}{EA}$$

Por tanto, el factor de impacto es

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\delta_{\text{máx}}}{\delta_{\text{est}}} = \sqrt{\frac{EAv^2}{Mg^2L}} \tag{2.65}$$

El valor determinado con esta ecuación debe ser mucho mayor que 1.

(b) *Esfuerzo de compresión máximo en la barra*. El esfuerzo máximo en la barra se determina a partir del acortamiento máximo mediante la ecuación (2.55):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{E\delta_{\text{máx}}}{L} = \frac{E}{L}\sqrt{\frac{Mv^2L}{EA}} = \sqrt{\frac{Mv^2E}{AL}} \tag{2.66}$$

Esta ecuación es agual a la ecuación (2.60).

El esfuerzo estático σ_{est} en la barra es igual a W/A o Mg/A que (en combinación con la ecuación 2.66) conduce al mismo factor de impacto que antes (ecuación 2.65).

*2.9 CARGA REPETIDA Y FATIGA

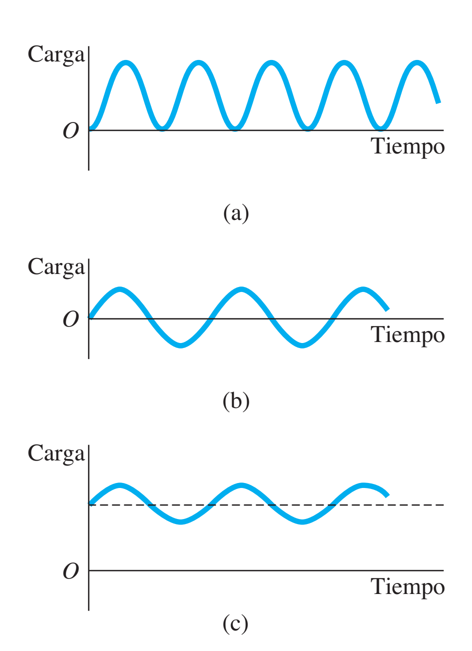


FIGURA 2.56 Tipos de cargas repetidas: (a) carga que actúa sólo en una dirección, (b) carga alternante o invertida y (c) carga fluctuante que varía con respecto a un valor promedio.

El comportamiento de una estructura no sólo depende de la naturaleza del material con que esté hecha, sino también del carácter de las cargas. En algunas situaciones las cargas son estáticas —se aplican en forma gradual, actúan durante largos periodos y cambian lentamente—. Otras cargas son de carácter dinámico, como ejemplos están las cargas de impacto que actúan repentinamente (sección 2.8) y las cargas repetidas recurrentes en grandes números de ciclos.

Algunos patrones comunes de las **cargas repetidas** se presentan en la figura 2.56. La primera gráfica (a) muestra una carga que se aplica, se remueve y se aplica de nuevo, siempre actúa en la misma dirección. La segunda gráfica (b) muestra una carga alternante que invierte su dirección durante cada ciclo de carga y la tercera gráfica (c) ilustra una carga fluctuante que varía con respecto a un valor promedio. Las cargas repetidas se asocian generalmente con maquinaría, motores, turbinas, generadores, ejes, impulsores, partes de aeronaves, partes de automóviles y similares. Algunas de estas estructuras se someten a millones (e incluso a miles de millones) de ciclos de carga durante su vida útil.

Es probable que una estructura sometida a cargas dinámicas falle a un esfuerzo menor que cuando las mismas cargas se aplican de manera estática, en especial cuando se repiten durante un número grande de ciclos. En esos casos es usual que la falla sea por **fatiga** o por **fractura progresiva**. Un ejemplo conocido de una falla por fatiga se tiene al someter a esfuerzo un sujetapapeles metálico hasta el punto de rompimiento al flexionarlo repetidamente hacia delante y hacia atrás. Si el sujetapapeles se dobla sólo una vez, no se rompe. Pero si la carga se invierte al flexionarlo en la dirección opuesta, y si todo el ciclo de carga se repite varias veces, el sujetapapeles finalmente se romperá. La *fatiga* se define como el deterioro de un material por acción de ciclos repetidos de esfuerzo y deformación, lo que resulta en un agrietamiento progresivo que finalmente produce la fractura.

En una falla por fatiga típica, se forma una grieta microscópica en un punto de esfuerzo elevado (por lo general en una *concentración de esfuerzos*, que se describirá en la siguiente sección) y se alarga gradualmente conforme se aplican las cargas repetidamente. Cuando la grieta se vuelve tan grande que el material restante no puede resistir las cargas, ocurre una fractura repentina del material (figura 2.57). Dependiendo de la naturaleza del material, puede tomar desde algunos ciclos de carga hasta cientos de millones de ellos para producir una falla por fatiga.

Como ya se destacó, la magnitud de la carga que ocasiona una falla por fatiga es menor que la carga que se puede soportar en forma estática. Para determinar la carga de falla se deben realizar ensayos del material. En el caso de carga repetida, el material se prueba a varios niveles de esfuerzo y se registra el número de ciclos antes de la falla. Por ejemplo, una probeta de material se coloca en una máquina de ensayos a la tensión y se carga repetidamente hasta un cierto esfuerzo, por ejemplo σ_1. Los ciclos de carga se continúan hasta que ocurra la falla y se registra el número n de ciclos de carga. Luego el ensayo se repite para un esfuerzo diferente, por ejemplo σ_2. Si σ_2 es mayor que σ_1, el número de ciclos antes de la falla será menor. Si σ_2 es menor que σ_1, el número será mayor. Al final, se acumulan datos suficientes para trazar una **curva de resistencia a la fatiga** o **diagrama *S-N*,** en



FIGURA 2.57 Falla por fatiga de una barra cargada repetidamente en tensión; la grieta se propagó en forma gradual sobre la sección transversal hasta que la fractura ocurrió repentinamente. (Cortesía de MTS Systems Corporation)

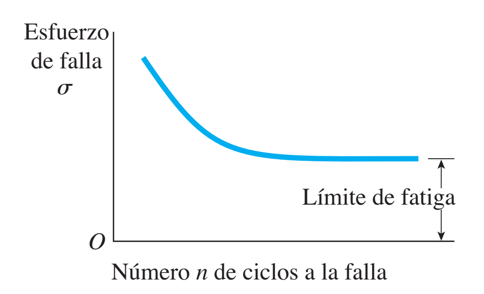


FIGURA 2.58 Curva de resistencia a la fatiga, o diagrama *S-N*, mostrando el límite de fatiga.

el que se traza el esfuerzo de falla (*S*) contra el número (*N*) de ciclos antes de la falla (figura 2.58). Es usual que el eje vertical sea una escala lineal y el eje horizontal una escala logarítmica.

La curva de resistencia a la fatiga de la figura 2.58 muestra que entre menor sea el esfuerzo, mayor será el número de ciclos para producir la falla. Para algunos materiales la curva tiene una asíntota horizontal conocida como **límite de fatiga** o **límite de resistencia a la fatiga.** Cuando existe, este límite es el esfuerzo debajo del cual no ocurrirá una falla por fatiga sin importar cuántas veces se repita la carga. La forma precisa de una curva de resistencia a la fatiga depende de muchos factores, incluidas las propiedades del material, la geometría de la probeta de ensayo, la velocidad del ensayo, el patrón de carga y la condición de la superficie de la probeta. En publicaciones técnicas se reportan para su consulta los resultados de muchos ensayos a la fatiga hechos en una gran variedad de materiales y componentes estructurales.

Los diagramas *S-N* típicos para el acero y el aluminio se muestran en la figura 2.59. La ordenada es el esfuerzo de falla, expresado como porcentaje del esfuerzo último para el material y la abscisa es el número de ciclos en que ocurre la falla. Observe que el número de ciclos está trazado en una escala logarítmica. La curva para el acero se vuelve horizontal en aproxima-

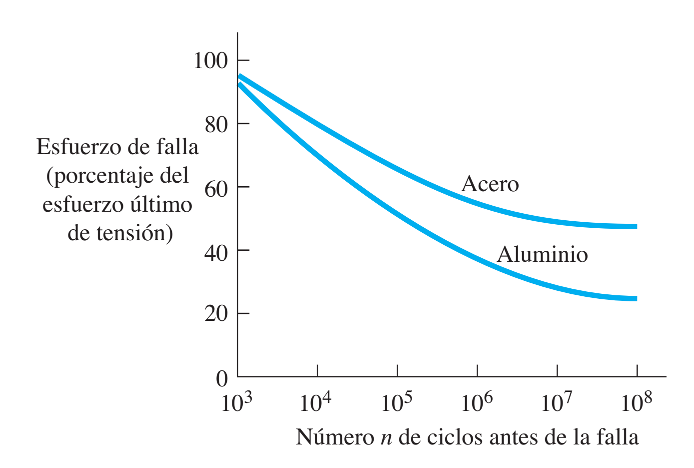


FIGURA 2.59 Curvas de resistencia comunes para acero y aluminio en carga alternante (invertida).

damente 10^7 ciclos y el límite de fatiga es casi 50% del esfuerzo de tensión último para carga estática ordinaria. El límite de fatiga para el aluminio no está tan definido como el del acero, pero un valor común del límite de fatiga es el esfuerzo a 5×10^8 ciclos o aproximadamente 25% del esfuerzo último.

Ya que en general las fallas por fatiga inician con una grieta microscópica en un punto de esfuerzo muy localizado (es decir, en una concentración de esfuerzos), la condición de la superficie del material es extremadamente importante. Las probetas muy pulidas tienen límites de resistencia a la fatiga mayores. Las superficies rugosas, en especial las que se encuentran en concentraciones de esfuerzos alrededor de agujeros o ranuras, disminuyen en gran medida el límite de resistencia a la fatiga. La corrosión, que causa diminutas irregularidades en la superficie, tiene un efecto similar. Para el acero, la corrosión ordinaria puede reducir el límite de fatiga en más de 50 por ciento.

*2.10 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Cuando se determinan los esfuerzos en barras cargadas axialmente, es usual emplear la fórmula básica $\sigma = P/A$, en la cual P es la fuerza axial en la barra y A es el área de su sección transversal. Esta fórmula se basa en la suposición de que la distribución del esfuerzo es uniforme en toda la sección. En realidad, las barras con frecuencia tienen agujeros, ranuras, muescas, filetes, roscas u otros cambios abruptos en su geometría que producen perturbaciones en el patrón uniforme de esfuerzos. Estas discontinuidades en la geometría causan esfuerzos elevados en regiones muy pequeñas de la barra y se conocen como **concentraciones de esfuerzos.** Las discontinuidades se llaman **elevadores de esfuerzos.**

Las concentraciones de esfuerzos también aparecen en cargas puntuales. Por ejemplo, una carga puede actuar sobre un área muy pequeña y producir esfuerzos elevados en la región alrededor de su punto de aplicación. Un ejemplo es una carga aplicada a través de una conexión con pasador, caso en el cual la carga se aplica sobre el área de soporte del pasador.

Los esfuerzos que existen en concentraciones de esfuerzos se pueden determinar mediante métodos experimentales o bien por métodos avanzados de análisis, incluyendo el método del elemento finito. Los resultados de la investigación para muchos casos de interés práctico están disponibles en publicaciones técnicas (por ejemplo, en la referencia 2.9). Algunos datos de concentración de esfuerzos comunes se dan más adelante en esta sección y también en los capítulos 3 y 5.

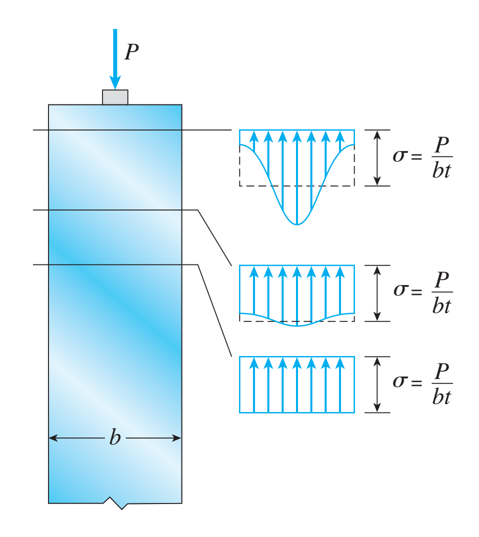


FIGURA 2.60 Distribuciones de esfuerzos cerca del extremo de una barra con sección transversal rectangular (ancho b, espesor t) sometida a una carga concentrada P que actúa sobre un área pequeña.

Principio de Saint-Venant

Para ilustrar la naturaleza de las concentraciones de esfuerzos, considere los esfuerzos en una barra con sección transversal rectangular (ancho b, espesor t) sometida a una carga concentrada P en el extremo (figura 2.60). El esfuerzo pico directamente debajo de la carga puede ser varias veces el valor del esfuerzo promedio P/bt, dependiendo del área sobre la cual se aplica. Sin embargo, el esfuerzo máximo disminuye rápidamente conforme nos alejamos del punto de la aplicación de la carga, como se muestra mediante

los diagramas de esfuerzos en la figura. A una distancia desde el extremo de la barra igual al ancho b de la misma, la distribución de esfuerzos es casi uniforme y el esfuerzo máximo es sólo un pequeño porcentaje mayor que el esfuerzo promedio. Esta observación es cierta para la mayor parte de las concentraciones de esfuerzos, como agujeros y ranuras.

Por lo anterior, podemos establecer un enunciado general de que la ecuación $\sigma = P/A$ define los esfuerzos axiales sobre una sección transversal de la barra sólo cuando la sección está alejada al menos una distancia b de cualquier carga concentrada o discontinuidad en su forma, donde b es la dimensión lateral más grande de la barra (como el ancho o el diámetro).

El enunciado anterior sobre los esfuerzos en una barra prismática es parte de una observación general conocida como **principio de Saint-Venant**. Con raras excepciones, este principio se aplica a cuerpos linealmente elásticos de todo tipo. Para comprender el principio de Saint-Venant imagine que tenemos un cuerpo con un sistema de cargas que actúan sobre una parte pequeña de su superficie. Por ejemplo, suponga que tenemos una barra prismática con ancho b sometida a un sistema de varias cargas concentradas que actúan en el extremo (figura 2.61a). Por simplicidad, suponga que las cargas son simétricas y que sólo tienen una resultante vertical.

A continuación, considere un sistema de carga diferente pero estáticamente equivalente que actúa sobre la misma región pequeña de la barra. ("Estáticamente equivalente" significa que los dos sistemas de carga tienen la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante). Por ejemplo, la carga distribuida uniformemente que se muestra en la figura 2.61b es estáticamente equivalente al sistema de cargas concentradas que se muestra en la figura 2.61a. El principio de Saint-Venant establece que los esfuerzos en el cuerpo causados por cualquiera de los sistemas de carga son los mismos, siempre que nos alejemos de la región cargada una distancia al menos igual a la dimensión mayor de la región cargada (distancia b en nuestro ejemplo).

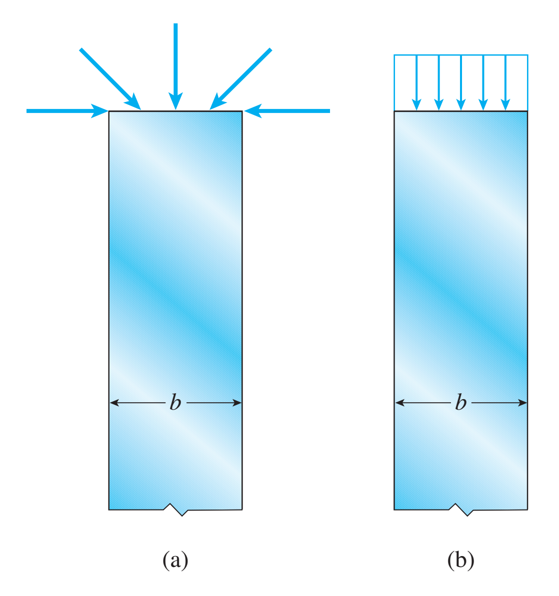


FIGURA 2.61 Ilustración del principio de Saint-Venant: (a) sistema de cargas concentradas que actúan sobre una región pequeña de una barra y (b) sistema estáticamente equivalente.

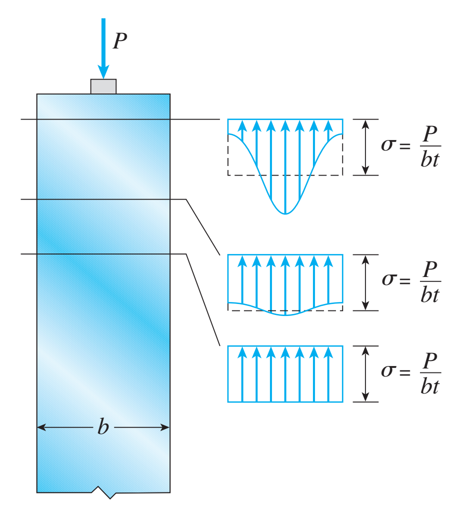


FIGURA 2.60 (Repetida.)

Por tanto, las distribuciones del esfuerzo que se muestran en la figura 2.60 son una ilustración del principio de Saint-Venant. Por supuesto, este "principio" no es una ley rigurosa de la mecánica sino que es una observación de sentido común basada en la experiencia teórica y práctica.

El principio de Saint-Venant tiene una gran importancia práctica en el diseño y análisis de barras, vigas, ejes y otras estructuras que se encuentran en la mecánica de materiales. Ya que los efectos de las concentraciones del esfuerzo son localizados, podemos emplear todas las fórmulas estándares de los esfuerzos (como $\sigma = P/A$) en secciones transversales a una distancia suficientemente alejada de la fuente de la concentración. Cerca de ese lugar los esfuerzos dependen de los detalles de la carga y de la forma del elemento. Además, las fórmulas aplicables a elementos completos, como las fórmulas para alargamientos, desplazamientos y energía de deformación, dan resultados satisfactorios aun cuando se presenten concentraciones de esfuerzos. La explicación yace en el hecho que las concentraciones de esfuerzos están localizadas y tienen poco efecto sobre el comportamiento general de un elemento.*

Factores de concentración de esfuerzos

Ahora consideremos algunos casos particulares de concentraciones de esfuerzos causadas por discontinuidades en la forma de la barra. Comenzamos con una barra con sección transversal rectangular que tiene un agujero circular y que está sometida a una fuerza de tensión P (figura 2.62a). La barra es relativamente esbelta y su ancho b es mucho mayor que su espesor t. El agujero tiene un diámetro d.

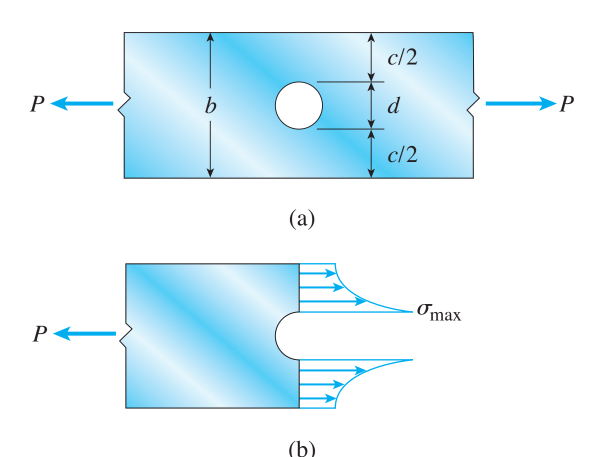


FIGURA 2.62 Distribución del esfuerzo en una barra plana con un agujero circular.

*El principio de Saint-Venant se denomina así en honor del famoso matemático y experto en elasticidad francés Barré de Saint-Venant (1789-1886) (referencia 2.10). El principio se aplica por lo general a barras y vigas sólidas, pero no a secciones abiertas con pared delgada. Para ver un análisis de las limitaciones del principio de Saint-Venant, consulte la referencia 2.11.

El esfuerzo normal que actúa sobre la sección transversal a través del centro del agujero tiene la distribución que se muestra en la figura 2.62b. El esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ ocurre en los bordes del agujero y puede ser bastante mayor que el *esfuerzo nominal* $\sigma = P/ct$ en la misma sección transversal. (Observe que ct es el área neta en la sección transversal que pasa por el agujero). La intensidad de una concentración de esfuerzos usualmente se expresa por la razón entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo nominal, y se llama **factor de concentración de esfuerzos *K*:**

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{nom}}} \tag{2.67}$$

Para una barra en tensión, el esfuerzo nominal es el esfuerzo promedio basado en el área neta de la sección transversal. En otros casos se puede emplear una variedad de esfuerzos. Ahora bien, siempre que se utilice un factor de concentración de esfuerzos es importante observar cuidadosamente cómo se define el esfuerzo nominal.

En la figura 2.63 se ve una gráfica del factor de concentración de esfuerzos K para una barra con un agujero. Si el agujero es pequeño, el factor K es igual a 3, lo que significa que el esfuerzo máximo es tres veces el esfuerzo nominal. Conforme el agujero es más grande en proporción al ancho de la barra, K se hace menor y el efecto de la concentración no es tan severo.

De acuerdo con el principio de Saint-Venant sabemos que, a distancias iguales al ancho b de la barra *alejadas* del agujero en cualquier dirección axial, la distribución del esfuerzo es prácticamente uniforme e igual a P dividida entre el área transversal total ($\sigma = P/bt$).

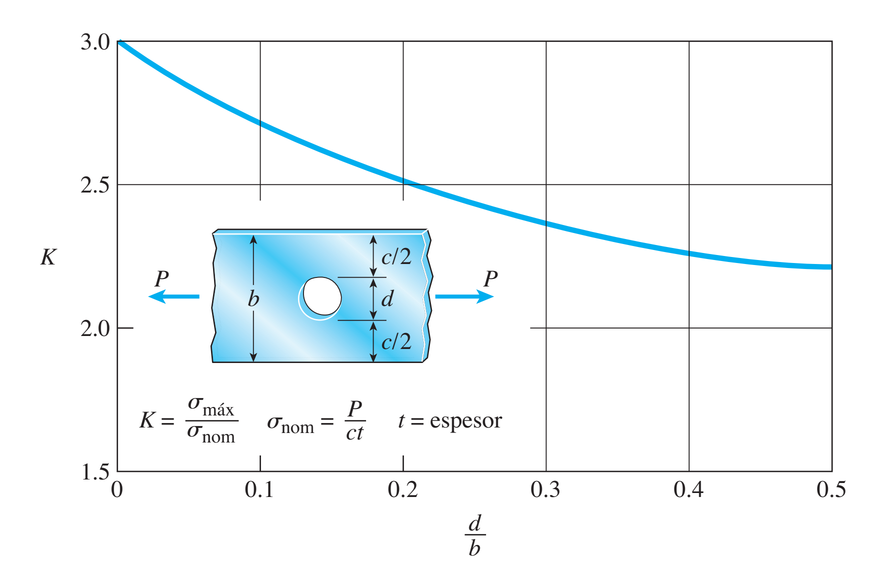


FIGURA 2.63 Factor de concentración de esfuerzos K para barras planas con agujeros circulares.

Los factores de concentración de esfuerzos para otros dos casos de interés práctico se dan en las figuras 2.64 y 2.65. Estas gráficas son para barras planas y barras circulares, respectivamente, que disminuyen su tamaño debido a un escalón formando un *reborde*. Para reducir los efectos de la concentración de esfuerzo se utilizan *filetes* para redondear las esquinas entrantes.* Sin los filetes, los factores de concentración de efectos serían extremadamente grandes, como se indica en el lado izquierdo de cada gráfica donde K tiende al infinito conforme el radio del filete R tiende a cero. En los dos casos el esfuerzo máximo ocurre en la parte menor de la barra en la región del filete.**

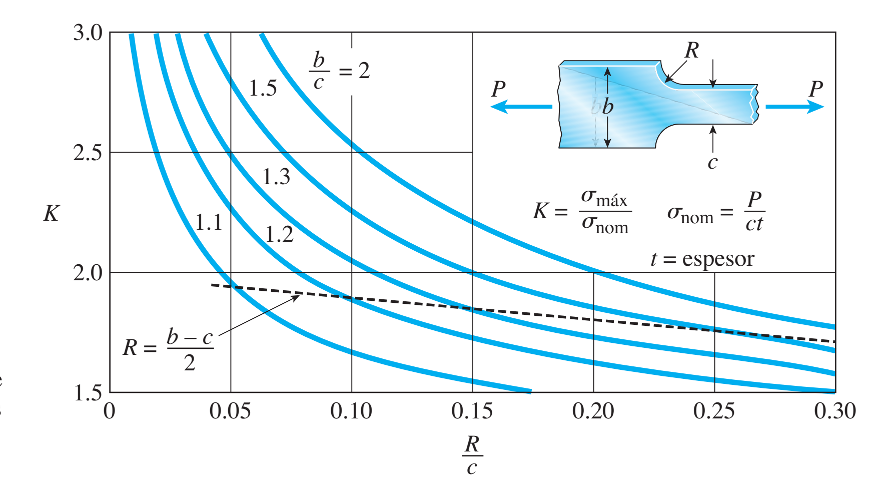


FIGURA 2.64 Factor de concentración de esfuerzos K para barras planas con filetes en los rebordes. La línea discontinua es para un filete de un cuarto de círculo.

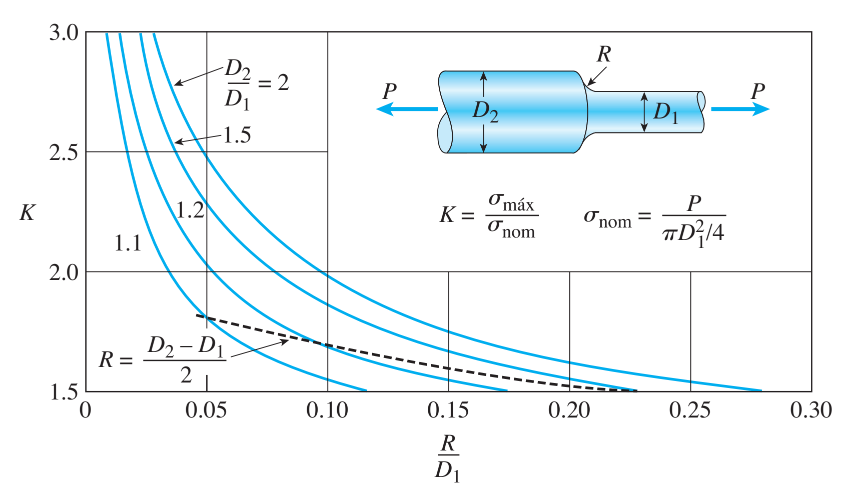


FIGURA 2.65 Factor de concentración de esfuerzos K para barras redondas con filetes en los rebordes. La línea discontinua es para un filete de un cuarto de círculo.

---

*Un *filete* es una superficie curva y cóncava formada donde dos superficies se unen. Su propósito es redondear lo que de otra manera sería una arista aguda entrante.

**Los factores de concentración de esfuerzos dados en las gráficas son teóricos, para barras de material linealmente elástico. Las gráficas están trazadas a partir de fórmulas dadas en la referencia 2.9.

Diseño por concentraciones de esfuerzos

Debido a la posibilidad de fallas por fatiga, las concentraciones de esfuerzos son especialmente importantes cuando el elemento se somete a carga repetida. Como se explicó en la sección anterior, las grietas comienzan en el punto de máximo esfuerzo y luego se difunden de manera gradual por todo el material conforme se repite la carga. En un diseño práctico, el límite de fatiga (figura 2.58) se considera como el esfuerzo último para el material cuando el número de ciclos es extremadamente grande. El esfuerzo permisible se obtiene aplicando un factor de seguridad con respecto a este esfuerzo último. Luego el esfuerzo pico en la concentración de esfuerzo se compara con el esfuerzo permisible.

En muchas situaciones es demasiado estricto el uso del valor total teórico del factor de concentración de esfuerzos. Los ensayos de fatiga por lo general producen la falla a niveles mayores del esfuerzo nominal que los obtenidos dividiendo el límite de fatiga entre K. En otras palabras, un elemento estructural sometido a carga repetida no es tan sensitivo a una concentración de esfuerzos como indica el valor de K y, por tanto, con frecuencia se emplea un factor reducido de concentración de esfuerzos.

Otros tipos de cargas dinámicas, como las cargas de impacto, también requieren que se tomen en cuenta los efectos de concentración de esfuerzos. A menos que se disponga de mejor información, se debe utilizar el factor de concentración de esfuerzos completo. Los elementos sometidos a temperaturas bajas también son muy susceptibles a fallas en las concentraciones de esfuerzos y por lo tanto se debe tener cuidado especial en esos casos.

La importancia de las concentraciones de esfuerzos cuando un elemento se somete a carga estática depende del tipo de material. En los materiales dúctiles, como el acero estructural, a menudo se puede ignorar una concentración de esfuerzo. La razón es que el material en el punto de esfuerzo máximo (por ejemplo alrededor de un agujero) tiene fluencia y ocurrirá flujo plástico, reduciendo de esta manera la intensidad de la concentración de esfuerzo y haciendo casi uniforme la distribución de esfuerzo. Por otro lado, en materiales frágiles (como el vidrio), una concentración de esfuerzo permanecerá hasta el punto de fractura. Por tanto, podemos hacer una observación general que con cargas estáticas y un material dúctil no es probable que el efecto de concentración de esfuerzo sea importante, pero con cargas estáticas y un material frágil se debe considerar el factor total de concentración de esfuerzos.

La intensidad de las concentraciones de esfuerzos se puede reducir si las partes tienen una proporción adecuada. Los filetes de buen tamaño reducen las concentraciones de esfuerzos en las aristas reentrantes. Las superficies lisas en puntos de esfuerzo elevado, como en el interior de un agujero, inhiben la formación de grietas. Un refuerzo alrededor de agujeros también puede ser benéfico. Hay muchas otras técnicas para uniformar las distribuciones de los esfuerzos en un elemento estructural y debido a esto se puede reducir el factor de concentración de esfuerzos. Esas técnicas, que se estudian en cursos de diseño en ingeniería, son de gran importancia en el diseño de aviones, barcos y máquinas. Muchas fallas estructurales innecesarias han ocurrido debido a que los diseñadores erraron en reconocer los efectos de las concentraciones de esfuerzos y de la fatiga.

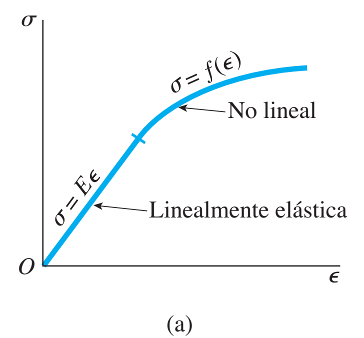
*2.11 COMPORTAMIENTO NO LINEAL

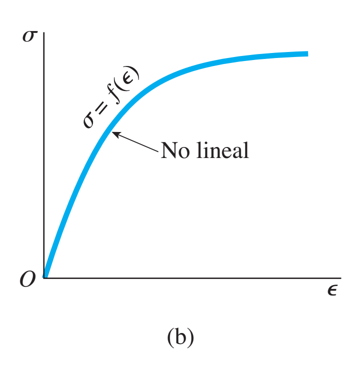
Hasta este punto nuestros análisis han tratado principalmente con elementos y estructuras compuestas de materiales que siguen la ley de Hooke. Ahora consideraremos el comportamiento de elementos cargados axialmente cuando el esfuerzo excede el límite de proporcionalidad. En esos casos los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos dependen de la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria en la región más allá del límite de proporcionalidad (consulte la sección 1.3 donde se presentan algunos diagramas esfuerzo-deformación unitaria).

Curvas esfuerzo-deformación unitaria no lineales

Para fines de análisis y diseño, con frecuencia representamos la curva esfuerzo-deformación unitaria real de un material mediante una **curva idealizada esfuerzo-deformación unitaria** que se puede expresar como una función matemática. Algunos ejemplos se muestran en la figura 2-66. El primer diagrama (figura 2.66a) consiste en dos partes, una región inicial linealmente elástica seguida de una región no lineal definida por una expresión matemática apropiada. El comportamiento de algunas aleaciones de aluminio algunas veces se puede representar con mucha precisión mediante una curva de este tipo, al menos en la región antes de que las deformaciones se hagan excesivamente grandes (compare la figura 2.66a con la figura 1.13).

En el segundo ejemplo (figura 2.66b), se utiliza una sola expresión matemática para toda la curva esfuerzo-deformación unitaria. La expresión mejor conocida de este tipo es la ley esfuerzo-deformación unitaria de Ramberg-Osgood, que se describe más adelante con más detalle (consulte las ecuaciones 2.70 y 2.71).





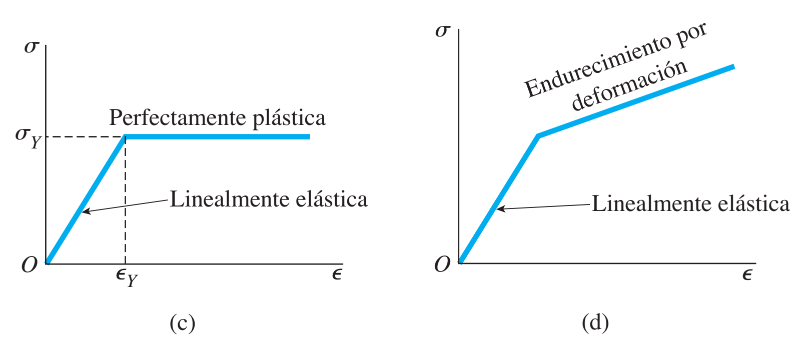
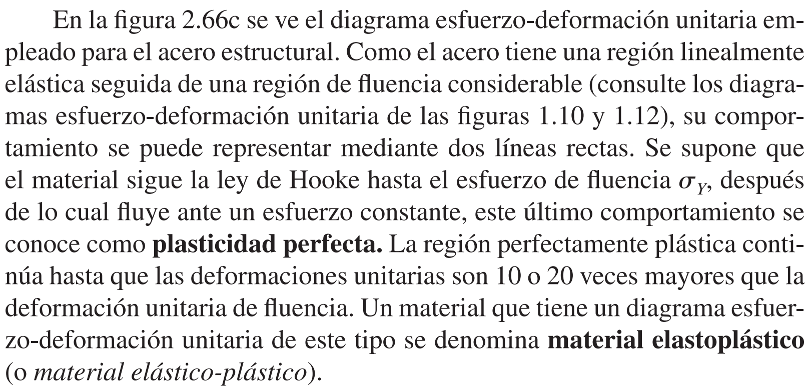


FIGURA 2.66 Tipos de comportamiento idealizado del material: (a) curva esfuerzo-deformación unitaria elástica no lineal, (b) curva esfuerzo-deformación unitaria general no lineal, (c) curva esfuerzo-deformación unitaria elastoplástica y (d) curva esfuerzo-deformación unitaria bilineal.



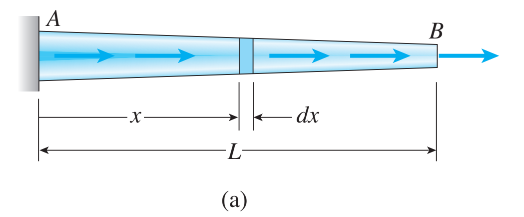
En la figura 2.66c se ve el diagrama esfuerzo-deformación unitaria empleado para el acero estructural. Como el acero tiene una región linealmente elástica seguida de una región de fluencia considerable (consulte los diagramas esfuerzo-deformación unitaria de las figuras 1.10 y 1.12), su comportamiento se puede representar mediante dos líneas rectas. Se supone que el material sigue la ley de Hooke hasta el esfuerzo de fluencia σ_Y, después de lo cual fluye ante un esfuerzo constante, este último comportamiento se conoce como **plasticidad perfecta.** La región perfectamente plástica continúa hasta que las deformaciones unitarias son 10 o 20 veces mayores que la deformación unitaria de fluencia. Un material que tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria de este tipo se denomina **material elastoplástico** (o *material elástico-plástico*).

A la larga, cuando la deformación unitaria se hace extremadamente grande, la curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero se eleva arriba del esfuerzo de fluencia debido al endurecimiento por deformación, como se explica en la sección 1.3. Sin embargo, en el instante que inicia el endurecimiento por deformación, los desplazamientos son tan grandes que la estructura habrá perdido su utilidad. En consecuencia, es práctica común analizar las estructuras de acero con base en el diagrama elastoplástico que se muestra en la figura 2.66c, tanto para análisis de tensión como de compresión. Un análisis basado en estas suposiciones se denomina **análisis elastoplástico,** o simplemente, **análisis plástico** y se describe en la siguiente sección.

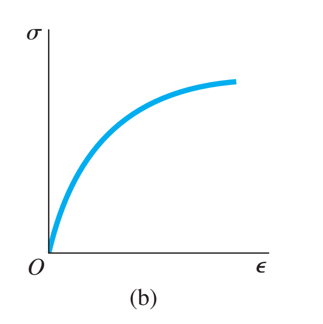
En la figura 2.66d se muestra un diagrama esfuerzo-deformación unitaria formado por dos líneas con pendientes diferentes, se llama **diagrama bilineal esfuerzo-deformación unitaria**. Observe que en las dos partes del diagrama la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria es lineal, pero sólo en la primera parte el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria (ley de Hooke). Este diagrama idealizado se puede emplear para representar materiales con endurecimiento por deformación o se puede utilizar como una aproximación a diagramas con las formas no lineales generales que se muestran en las figuras 2.66a y b.

Cambios en la longitud de barras

El alargamiento o acortamiento de una barra puede determinarse si se conoce la curva esfuerzo-deformación unitaria del material. Para ilustrar el procedimiento general, consideraremos la barra ahusada *AB* que se muestra en la figura 2.67a. Tanto el área de la sección transversal como la fuerza axial varían a lo largo de la longitud de la barra y el material tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria general no lineal (figura 2.67b). Dado que la barra está estáticamente determinada, podemos encontrar las fuerzas axiales internas en todas las secciones transversales a partir sólo del equilibrio estático. Luego podemos determinar los esfuerzos dividiendo las fuerzas entre las áreas de las secciones transversales y las deformaciones unitarias



(a)



(b)

FIGURA 2.67 Cambio en la longitud de una barra ahusada formada de un material que tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria no lineal.

a partir de la curva esfuerzo-deformación unitaria. Por último, podemos determinar el cambio en la longitud a partir de las deformaciones unitarias, como se describe en el párrafo siguiente.

El cambio en la longitud de un elemento dx de la barra (figura 2.67a) es $\epsilon\, dx$ donde ϵ es la deformación unitaria a una distancia x desde el extremo de la barra. Integrando esta expresión desde un extremo de la barra hasta el otro, obtenemos el cambio en la longitud de toda la barra:

$$\delta = \int_0^L \epsilon\, dx \tag{2.68}$$

donde L es la longitud de la barra. Si las deformaciones unitarias se expresan en términos analíticos, es decir, mediante fórmulas algebraicas, será posible integrar la ecuación (2.68) con métodos matemáticos formales y así obtener una expresión para el cambio en la longitud. Si los esfuerzos y las deformaciones unitarias se expresan en forma numérica, es decir, por una serie de valores numéricos, podemos proceder como sigue. Podemos dividir la barra en segmentos pequeños con longitud Δx, determinar el esfuerzo y la deformación unitaria promedios para cada segmento y después calcular el alargamiento de toda la barra sumando los alargamientos de los segmentos individuales. Este proceso equivale a evaluar la integral en la ecuación (2.68) por métodos numéricos en lugar de integración formal.

Si las deformaciones unitarias son uniformes en toda la longitud de la barra, como en el caso de una barra prismática sometida a una fuerza axial constante, la integración de la ecuación (2.68) es trivial y el cambio en la longitud es

$$\delta = \epsilon L \tag{2.69}$$

como se esperaba (compare con la ecuación 1.2 en la sección 1.2).

Ley esfuerzo-deformación unitaria de Ramberg-Osgood

Las curvas esfuerzo-deformación unitaria para varios metales, incluyendo el aluminio y el magnesio, pueden representarse exactamente por la **ecuación de Ramberg-Osgood:**

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \tag{2.70}$$

En esta ecuación, σ y ϵ son el esfuerzo y la deformación unitaria, respectivamente, y ϵ_0, σ_0, α y m son constantes del material (obtenidas mediante ensayos de tensión). Una forma alternativa de la ecuación es

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \tag{2.71}$$

en donde $E = \sigma_0/\epsilon_0$ es el módulo de elasticidad en la parte inicial de la curva esfuerzo-deformación unitaria.*

En la figura 2.68 se muestra una gráfica de la ecuación (2.71) para una aleación de aluminio para la cual las constantes son las siguientes:

*La ley de esfuerzo-deformación unitaria de Ramberg-Osgood se presenta en la referencia 2.12.

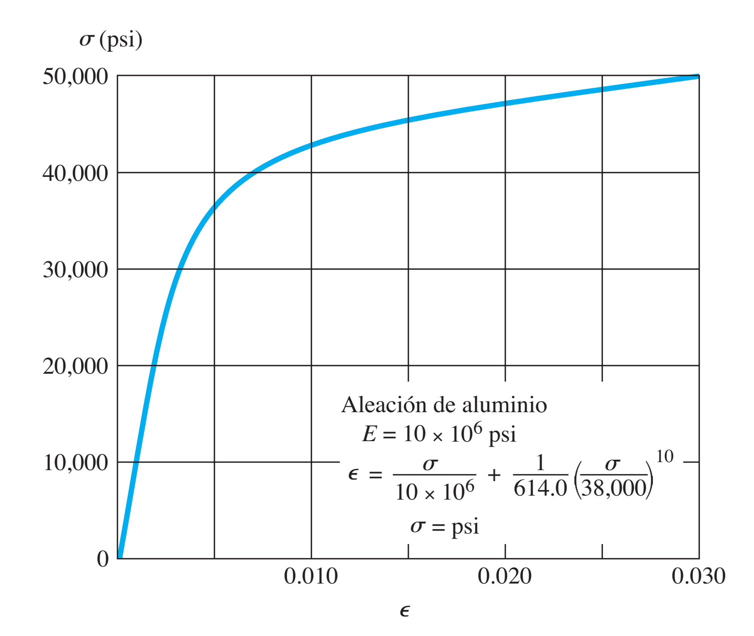


FIGURA 2.68 Curva esfuerzo-deformación unitaria para una aleación de aluminio empleando la ecuación de Ramberg-Osgood (ecuación 2.72).

$E = 10 \times 10^6$ psi, $\sigma_0 = 38{,}000$ psi, $\alpha = 3/7$ y $m = 10$. La ecuación de esta curva particular esfuerzo-deformación unitaria es

$$\epsilon = \frac{\sigma}{10 \times 10^6} + \frac{1}{614.0}\left(\frac{\sigma}{38{,}000}\right)^{10} \tag{2.72}$$

donde σ tiene unidades de libras por pulgada cuadrada (psi).

Una ecuación similar para una aleación de aluminio, pero en unidades SI ($E = 70$ GPa, $\sigma_0 = 260$ MPa, $\alpha = 3/7$ y $m = 10$) es la siguiente:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{70{,}000} + \frac{1}{628.2}\left(\frac{\sigma}{260}\right)^{10} \tag{2.73}$$

donde σ tiene unidades de megapascales (MPa). El cálculo del cambio de longitud de una barra, empleando la ecuación (2.73) para la relación esfuerzo-deformación unitaria, se ilustra en el ejemplo 2.18.

Estructuras estáticamente indeterminadas

Si una estructura es estáticamente indeterminada y el material se comporta en forma no lineal, los esfuerzos, las deformaciones unitarias y los desplazamientos se determinan resolviendo las mismas ecuaciones generales que se describieron en la sección 2.4 para estructuras linealmente elásticas, que son, ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad y relaciones fuerza-desplazamiento (o relaciones equivalentes esfuerzo-deformación unitaria). La diferencia principal es que las relaciones fuerza-desplazamiento ahora son no lineales, lo que significa que no se pueden obtener soluciones analíticas excepto en situaciones muy simples. Entonces, las ecuaciones se deben resolver de forma numérica, utilizando un programa de cómputo adecuado.

Ejemplo 2.18

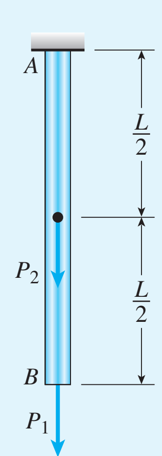


FIGURA 2.69 Ejemplo 2-18. Alargamiento de una barra de material no lineal empleando la ecuación de Ramberg-Osgood.

Una barra prismática AB con longitud $L = 2.2$ m y área de su sección transversal $A = 480$ mm^2 soporta dos cargas concentradas $P_1 = 108$ kN y $P_2 = 27$ kN, como se muestra en la figura 2.69. El material de la barra es una aleación de aluminio que tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria no lineal, representada por la ecuación de Ramberg-Osgood siguiente (ecuación 2.73):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{70{,}000} + \frac{1}{628.2}\left(\frac{\sigma}{260}\right)^{10}$$

en donde σ tiene unidades de MPa. (La forma general de esta curva esfuerzo-deformación unitaria se muestra en la figura 2.68.)

Determine el desplazamiento δ_B del extremo inferior de la barra para cada una de las siguientes condiciones: (a) la carga P_1 actúa sola, (b) la carga P_2 actúa sola y (c) las cargas P_1 y P_2 actúan simultáneamente.

Solución

(a) *Desplazamiento debido sólo a la carga P_1.* La carga P_1 produce un esfuerzo uniforme de tensión en toda la longitud de la barra igual a P_1/A o 225 MPa. Sustituyendo este valor en la relación esfuerzo-deformación unitaria da $\epsilon = 0.003589$. Por tanto, el alargamiento de la barra, igual al desplazamiento en el punto B, es (consulte la ecuación 2.69)

$$\delta_B = \epsilon L = (0.003589)(2.2 \text{ m}) = 7.90 \text{ mm}$$

(b) *Desplazamiento debido sólo a la carga P_2.* El esfuerzo en la mitad superior de la barra es P_2/A o 56.25 MPa y no hay esfuerzo en la mitad inferior. Continuando como en el inciso (a), obtenemos el siguiente alargamiento:

$$\delta_B = \epsilon L/2 = (0.0008036)(1.1 \text{ m}) = 0.884 \text{ mm}$$

(c) *Desplazamiento debido a las dos cargas que actúan simultáneamente*. El esfuerzo en la mitad inferior de la barra es P_1/A y en la mitad superior es $(P_1 + P_2)/A$. Los esfuerzos correspondientes son 225 MPa y 281.25 MPa, y las deformaciones correspondientes son 0.003589 y 0.007510 (de la ecuación de Ramberg-Osgood). Por tanto el alargamiento de la barra es

$$\delta_B = (0.003589)(1.1 \text{ m}) + (0.007510)(1.1 \text{ m})$$

$$= 3.95 \text{ mm} + 8.26 \text{ mm} = 12.2 \text{ mm}$$

Los tres valores calculados de δ_B ilustran un principio importante relativo a una estructura hecha de un material que se comporta no linealmente:

En una estructura no lineal, el desplazamiento producido por dos (o más) cargas que actúan simultáneamente no es igual a la suma de los desplazamientos producidos por las cargas actuando por separado.

*2.12 ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO

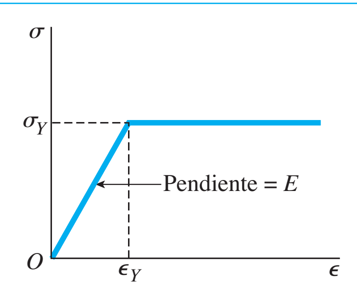


FIGURA 2.70 Diagrama idealizado esfuerzo-deformación unitaria para un material elastoplástico, como el acero estructural.

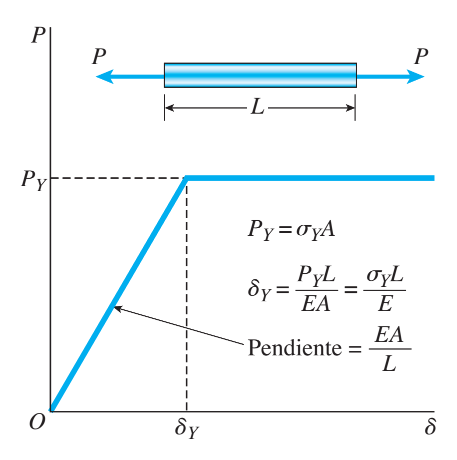


FIGURA 2.71 Diagrama carga-desplazamiento para una barra prismática de material elastoplástico.

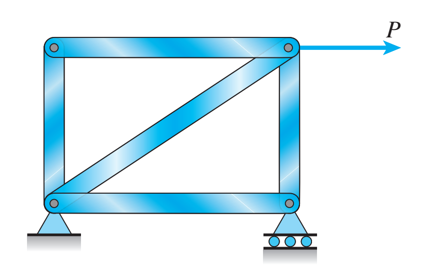


FIGURA 2.72 Estructura estáticamente determinada, consiste en elementos cargados axialmente.

En la sección anterior analizamos el comportamiento de estructuras cuando los esfuerzos en el material exceden el límite de proporcionalidad. Ahora describiremos un material de mucha importancia en el diseño de ingeniería: el acero, el metal estructural que más se utiliza. El acero dulce (o acero estructural) se puede modelar como un material *elastoplástico* con un diagrama esfuerzo-deformación unitaria como se muestra en la figura 2.70. Un material elastoplástico al inicio se comporta de una manera linealmente elástica con un módulo de elasticidad E. Después del inicio de la fluencia plástica las deformaciones unitarias aumentan a un esfuerzo más o menos constante, llamado **esfuerzo de fluencia** σ_Y. La deformación unitaria al inicio de la fluencia se conoce como **deformación unitaria de fluencia** ϵ_Y.

El diagrama carga-desplazamiento para una barra prismática de material elastoplástico sometida a una carga de tensión (figura 2.71) tiene la misma forma que el diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Al inicio, la barra se alarga de una manera linealmente elástica y sigue la ley de Hooke. Por tanto, en esta región de carga podemos determinar el cambio de longitud a partir de la fórmula conocida $\delta = PL/EA$. Una vez que se alcanza el esfuerzo de fluencia, la barra se puede alargar sin un aumento en la carga y el alargamiento no tiene una magnitud específica. La carga a la cual inicia la fluencia se llama **carga de fluencia** P_y y el alargamiento correspondiente de la barra se denomina **desplazamiento de fluencia** δ_Y. Observe que para una barra prismática individual, la carga de fluencia P_Y es igual a $\sigma_Y A$ y el desplazamiento de fluencia δ_Y es igual a $P_Y L/EA$ o $\sigma_Y L/E$. (Son válidos comentarios similares en una barra en compresión, siempre que no ocurra pandeo).

Si una estructura sólo consiste de elementos cargados axialmente es **estáticamente determinada** (figura 2.72), su comportamiento general sigue el mismo patrón. La estructura se comporta de una manera linealmente elástica hasta que uno de sus elementos alcanza el esfuerzo de fluencia. Luego ese elemento comenzará a alargarse (o acortarse) sin cambio adicional en la carga axial en ese elemento. Así, toda la estructura fluirá y su diagrama carga-desplazamiento tiene la misma forma que para una sola barra (figura 2.71).

Estructuras estáticamente indeterminadas

La situación es más compleja si una estructura es estáticamente indeterminada. Si un elemento fluye, otros elementos continuarán resistiendo cualquier aumento en la carga. Sin embargo, finalmente suficientes elementos fluirán causando que toda la estructura fluya.

Para ilustrar el comportamiento de una estructura estáticamente indeterminada, emplearemos la configuración simple que se muestra en la figura 2.73. Esta estructura consiste de tres barras que soportan una carga P aplicada mediante una placa rígida. Las dos barras exteriores tienen longitud L_1, la barra interior tiene longitud L_2 y las tres barras tienen la misma área de sección transversal A. El diagrama idealizado esfuerzo-deformación unitaria para el acero se muestra en la figura 2.70 y el módulo de elasticidad en las regiones linealmente elásticas es $E = \sigma_Y/\epsilon_Y$.

Como sucede en el caso normal de una estructura estáticamente indeterminada, iniciamos el análisis con las ecuaciones de *equilibrio* y *compatibilidad*. De acuerdo con el equilibrio de la placa rígida en la dirección vertical obtenemos

$$2F_1 + F_2 = P \tag{a}$$

donde F_1 y F_2 son las fuerzas axiales en las barras externas e interna, respectivamente. Como la placa se mueve hacia abajo como un cuerpo rígido al aplicar la carga, la ecuación de compatibilidad es

$$\delta_1 = \delta_2 \tag{b}$$

donde δ_1 y δ_2 son los alargamientos de las barras exterior e interior, respectivamente. Ya que dependen sólo del equilibrio y de la geometría, las dos ecuaciones anteriores son válidas en todos los niveles de la carga P; no importa si las deformaciones unitarias se encuentran en la región linealmente elástica o en la región plástica.

Cuando la carga P es pequeña, los esfuerzos en las barras son menores que el esfuerzo de fluencia σ_Y y el material está sometido a esfuerzos dentro de la región linealmente elástica. Por lo tanto, las *relaciones fuerza-desplazamiento* entre las fuerzas en las barras y sus alargamientos son

$$\delta_1 = \frac{F_1L_1}{EA} \qquad \delta_2 = \frac{F_2L_2}{EA} \tag{c}$$

Al sustituir en la ecuación de compatibilidad (ecuación b), obtenemos

$$F_1L_1 = F_2L_2 \tag{d}$$

Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (a) y (d), se obtiene

$$F_1 = \frac{PL_2}{L_1 + 2L_2} \qquad F_2 = \frac{PL_1}{L_1 + 2L_2} \tag{2.74a,b}$$

De esta manera, ahora hemos determinado las fuerzas en las barras en la región linealmente elástica. Los esfuerzos correspondientes son

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{PL_2}{A(L_1 + 2L_2)} \qquad \sigma_2 = \frac{F_2}{A} = \frac{PL_1}{A(L_1 + 2L_2)} \tag{2.75a,b}$$

Estas ecuaciones para las fuerzas y los esfuerzos son válidas siempre que los esfuerzos en las tres barras permanezcan menores que el esfuerzo de fluencia σ_Y.

Conforme la carga P aumenta gradualmente, los esfuerzos en las barras se incrementan hasta que se alcanza el esfuerzo de fluencia en la barra interior o bien en las barras exteriores. Supongamos que las barras exteriores son mayores que la barra interior, como se muestra en la figura 2.73:

$$L_1 > L_2 \tag{e}$$

Entonces, la barra interior está sometida a un esfuerzo mucho mayor que las otras (consulte las ecuaciones 2.75a y b) y alcanzará primero el esfuerzo de fluencia. Cuando eso sucede, la fuerza en la barra interior es $F_2 = \sigma_Y A$. La magnitud de la carga P cuando se alcanza el esfuerzo de fluencia por

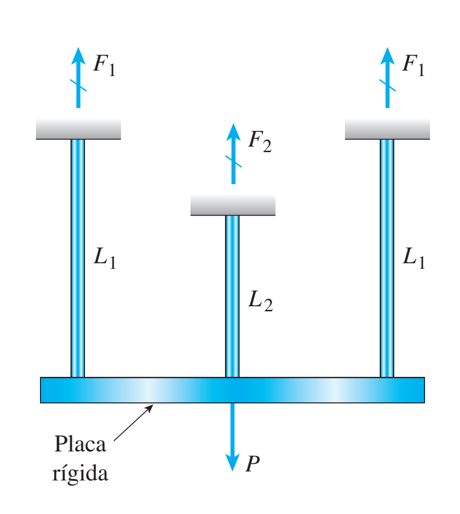


FIGURA 2.73 Análisis elastoplástico de una estructura estáticamente indeterminada.

primera vez en una de las barras se llama **carga de fluencia** P_Y. Podemos determinar P_Y igualando F_2 a $\sigma_Y A$ en la ecuación (2.74b) y despejando la carga:

$$P_Y = \sigma_Y A\left(1 + \frac{2L_2}{L_1}\right) \tag{2.76}$$

Siempre que la carga P sea menor que P_Y, la estructura se comporta de una manera linealmente elástica y las fuerzas en la barras se pueden determinar a partir de las ecuaciones (2.74a y b).

El desplazamiento hacia abajo de la barra rígida en la carga de fluencia, llamado **desplazamiento de fluencia** δ_Y, es igual al alargamiento de la barra interior cuando su esfuerzo alcanza por primera vez el esfuerzo de fluencia σ_Y:

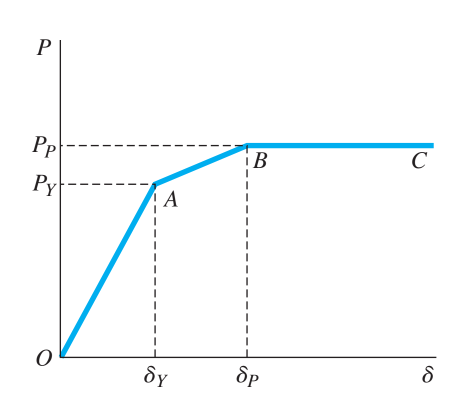
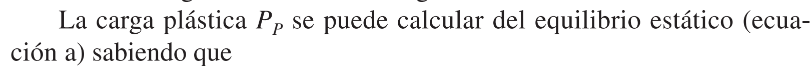


FIGURA 2.74 Diagrama carga-desplazamiento para la estructura estáticamente indeterminada que se muestra en la figura 2.73.

$$\delta_Y = \frac{F_2 L_2}{EA} = \frac{\sigma_2 L_2}{E} = \frac{\sigma_Y L_2}{E} \tag{2.77}$$

La relación entre la carga aplicada P y el desplazamiento hacia abajo δ de la barra rígida se representa en el diagrama carga-desplazamiento de la figura 2.74. El comportamiento de la estructura hasta la carga de fluencia P_Y está representado por la línea OA.

Con un aumento adicional en la carga, las fuerzas F_1 en las barras exteriores aumentan, pero la fuerza F_2 en la barra interior permanece con el valor constante $\sigma_Y A$ debido a que ahora esta barra es perfectamente plástica (consulte la figura 2.71). Cuando las fuerzas F_1 alcanzan el valor $\sigma_Y A$, las barras exteriores también fluyen y, por tanto, la estructura no puede soportar ninguna carga adicional. Entonces, las tres barras se alargarán plásticamente ante esta carga constante, llamada **carga plástica** P_P. La carga plástica está representada por el punto B en el diagrama carga-desplazamiento (figura 2.74) y la línea horizontal BC representa la región de deformación plástica continua sin ningún aumento en la carga.



La carga plástica P_P se puede calcular del equilibrio estático (ecuación a) sabiendo que

$$F_1 = \sigma_Y A \qquad F_2 = \sigma_Y A \tag{f}$$

Por tanto, a partir del equilibrio obtenemos

$$P_P = 3\sigma_Y A \tag{2.78}$$

El **desplazamiento plástico** δ_P en el instante justo que la carga alcanza la carga plástica P_P es igual al alargamiento de las barras exteriores en el instante que alcanzan el esfuerzo de fluencia. Por tanto,

$$\delta_P = \frac{F_1 L_1}{EA} = \frac{\sigma_1 L_1}{E} = \frac{\sigma_Y L_1}{E} \tag{2.79}$$

Al comparar δ_P con δ_Y, observamos que en este ejemplo la razón entre el desplazamiento plástico y el desplazamiento de fluencia es

$$\frac{\delta_P}{\delta_Y} = \frac{L_1}{L_2} \tag{2.80}$$

Además, la razón entre la carga plástica y la carga de fluencia es

$$\frac{P_P}{P_Y} = \frac{3L_1}{L_1 + 2L_2} \tag{2.81}$$

Por ejemplo, si $L_1 = 1.5L_2$, las razones son $\delta_P/\delta_Y = 1.5$ y $P_P/P_Y = 9/7 = 1.29$. En general, la razón de los desplazamientos siempre es mayor que la razón de las cargas correspondientes y la región *AB* parcialmente plástica en el diagrama carga-desplazamiento (figura 2.74) siempre tiene una pendiente menor que la región elástica *OA*. Por supuesto, la región completamente plástica *BC* tiene la pendiente menor (cero).

Comentarios generales

Para comprender por qué la gráfica de carga-desplazamiento es lineal en la región parcialmente plástica (recta *AB* en la figura 2.74) y tiene una pendiente que es menor que en la región linealmente elástica, considere lo siguiente. En la región parcialmente plástica de la estructura, las barras exteriores aún se comportan de una manera linealmente elástica. Por tanto, su alargamiento es una función lineal de la carga. Como su alargamiento es igual que el desplazamiento hacia abajo de la placa rígida, el desplazamiento de la placa rígida también debe ser una función lineal de la carga. En consecuencia, tenemos una línea recta entre los puntos *A* y *B*. Sin embargo, la pendiente del diagrama carga-desplazamiento en esta región es menor que en la región lineal inicial debido a que la barra interior fluye plásticamente y sólo las barras exteriores ofrecen una resistencia creciente a la carga creciente. En efecto, ha disminuido la rigidez de la estructura.

De acuerdo con la descripción relacionada con la ecuación (2.78), vemos que el cálculo de la carga plástica P_P sólo requiere el uso de la estática, ya que todos los elementos han fluido y se conocen sus fuerzas axiales. En contraste, el cálculo de la carga de fluencia P_Y requiere un análisis estáticamente indeterminado, lo que significa que se deben resolver las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento.

Después que se ha alcanzado la carga plástica P_P, la estructura continúa deformándose como lo muestra la línea *BC* en el diagrama carga-desplazamiento (figura 2.74). Finalmente, ocurre el endurecimiento por deformación y luego la estructura es capaz de soportar cargas adicionales. Sin embargo, la presencia de desplazamientos muy grandes por lo general significa que la estructura ya no debe usarse, por lo que es usual que la carga plástica P_P se considere como la carga de falla.

El análisis anterior fue sobre el comportamiento de una estructura cuando se le aplica carga por primera vez. Si la carga se remueve antes de que se alcance la carga de fluencia, la estructura se comportará elásticamente y regresará a su condición original sin esfuerzo. Sin embargo, si sobrepasa la carga de fluencia, algunos elementos de la estructura retendrán una deformación permanente cuando se remueva la carga, creando así una condición preesforzada. En consecuencia, la estructura tendrá *esfuerzos residuales* en ella aunque no actúen cargas externas. Si la carga se aplica una segunda vez, la estructura se comportará de una manera diferente.

Ejemplo 2.19

La estructura que se muestra en la figura 2.75a consiste en una viga horizontal AB (supuesta rígida) soportada por dos barras idénticas (barras 1 y 2) hechas de un material elastoplástico. Las barras tienen longitud L y área de sección transversal A, y el material tiene un esfuerzo de fluencia σ_Y, deformación de fluencia ϵ_Y y módulo de elasticidad $E = \sigma_Y/\epsilon_Y$. La viga tiene una longitud $3b$ y soporta una carga P en el extremo B.

(a) Determine la carga de fluencia P_Y y el desplazamiento de fluencia correspondiente δ_Y en el extremo de la barra (punto B).

(b) Determine la carga plástica P_P y el desplazamiento plástico correspondiente δ_P en el punto B.

(c) Elabore un diagrama carga-desplazamiento relacionando la carga P con el desplazamiento δ_B del punto B.

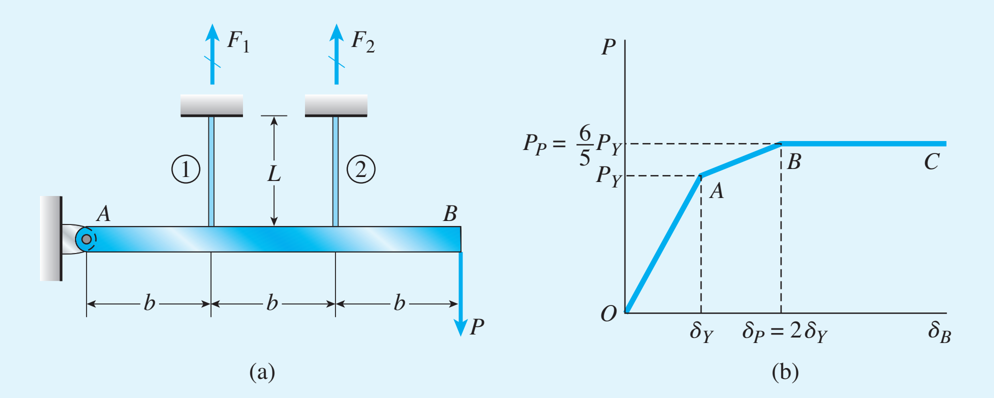


FIGURA 2.75 Ejemplo 2.19. Análisis elastoplástico de una estructura estáticamente indeterminada.

Solución

Ecuación de equilibrio. Como la estructura es estáticamente indeterminada, iniciamos con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Considerando el equilibrio de la viga AB, tomamos momentos con respecto al punto A y obtenemos

$$\sum M_A = 0 \qquad F_1(b) + F_2(2b) - P(3b) = 0$$

en donde F_1 y F_2 son las fuerzas axiales en las barras 1 y 2, respectivamente. Esta ecuación se simplifica a

$$F_1 + 2F_2 = 3P \tag{g}$$

Ecuación de compatibilidad. La ecuación de compatibilidad se basa en la geometría de la estructura. Ante la acción de la carga P la viga rígida gira con respecto al punto A y, por tanto, el desplazamiento hacia abajo en cada punto a lo largo de la viga es proporcional a su distancia desde el punto A. Entonces, la ecuación de compatibilidad es

$$\delta_2 = 2\delta_1 \tag{h}$$

donde δ_2 es el alargamiento de la barra 2 y δ_1 es el alargamiento de la barra 1.

continúa

(a) *Carga de fluencia y desplazamiento de fluencia*. Cuando la carga P es pequeña y los esfuerzos en el material son en la región linealmente elástica, las relaciones fuerza-desplazamiento para las dos barras son

$$\delta_1 = \frac{F_1L}{EA} \qquad \delta_2 = \frac{F_2L}{EA} \tag{i,j}$$

Al combinar estas ecuaciones con la ecuación de compatibilidad (ecuación h) se obtiene

$$\frac{F_2L}{EA} = 2\frac{F_1L}{EA} \qquad \text{o} \qquad F_2 = 2F_1 \tag{k}$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación de equilibrio (ecuación g), determinamos

$$F_1 = \frac{3P}{5} \qquad F_2 = \frac{6P}{5} \tag{l,m}$$

La barra 2, que tiene la fuerza mayor, será la primera en llegar al esfuerzo de fluencia. En ese instante la fuerza en la barra 2 será $F_2 = \sigma_Y A$. Al sustituir ese valor en la ecuación (m), se obtiene la carga de fluencia P_Y como sigue:

$$P_Y = \frac{5\sigma_Y A}{6} \tag{2.82}$$

El alargamiento correspondiente de la barra 2 (de la ecuación j) es $\delta_2 = \sigma_Y L/E$ y por lo tanto el desplazamiento de fluencia en el punto B es

$$\delta_Y = \frac{3\delta_2}{2} = \frac{3\sigma_Y L}{2E} \tag{2.83}$$

Tanto P_Y como δ_Y se indican en el diagrama carga-desplazamiento (figura 2.75b).

(b) *Carga plástica y desplazamiento plástico*. Cuando se alcanza la carga plástica P_P, las dos barras se alargan hasta el esfuerzo de fluencia y las dos fuerzas F_1 y F_2 serán iguales a $\sigma_Y A$. Se deduce del equilibrio (ecuación g) que la carga plástica es

$$P_P = \sigma_Y A \tag{2.84}$$

En esta carga, la barra izquierda (barra 1) apenas ha alcanzado el esfuerzo de fluencia; por tanto, su alargamiento (de la ecuación i) es $\delta_1 = \sigma_Y L/E$ y el desplazamiento plástico del punto B es

$$\delta_P = 3\delta_1 = \frac{3\sigma_Y L}{E} \tag{2.85}$$

La razón entre la carga plástica P_P y la carga de fluencia P_Y es $6/5$ y la razón entre desplazamiento plástico δ_P y el desplazamiento de fluencia δ_Y es 2. Estos valores también se muestran en el diagrama carga-desplazamiento.

(c) *Diagrama carga-desplazamiento*. El comportamiento completo carga-desplazamiento de la estructura se representa en la figura 2.75b. El comportamiento es linealmente elástico en la región de O a A, parcialmente plástico de A a B y completamente plástico de B a C.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

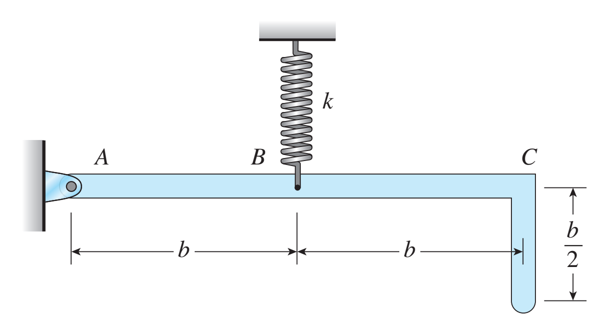
En este capítulo investigamos el comportamiento de barras cargadas axialmente sometidas a cargas distribuidas, como el propio peso y también cambios de temperaturas y deformaciones previas. Desarrollamos relaciones fuerza-desplazamiento para emplearlas en el cálculo de cambios de longitud de barras en condiciones uniformes (es decir, fuerza constante sobre toda su longitud) y no uniformes (es decir, las fuerzas axiales, y tal vez también el área de la sección transversal, varían sobre la longitud de la barra). Luego se desarrollaron ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para estructuras estáticamente indeterminadas en un procedimiento de superposición que conduce a la solución de todas las fuerzas desconocidas, esfuerzos, etcétera. Desarrollamos ecuaciones para esfuerzos normal y cortante sobre secciones inclinadas y, a partir de estas ecuaciones, determinamos los esfuerzos normal máximo y cortante máximo a lo largo de la barra. Se presentó una variedad de temas avanzados en las últimas partes del capítulo. Los conceptos principales presentados en este capítulo son los siguientes:

1. El alargamiento o acortamiento de barras prismáticas sometidas a cargas centroidales de tensión o compresión es proporcional tanto a la carga como a la longitud de la barra e inversamente proporcional a la rigidez axial (EA) de la barra; esta relación se llama ***relación fuerza-desplazamiento.***
2. Los cables son **elementos que trabajan sólo en tensión** y se debe usar un módulo de elasticidad efectivo (E_e) y un área de sección transversal efectiva (A_e) para tomar en cuenta el efecto de apriete que ocurre cuando los cables se someten a una carga.
3. La rigidez axial por unidad de longitud de una barra se refiere a su **rigidez** (k) y la relación inversa es la **flexibilidad** ($f = 1/k$) de la barra.
4. La suma de los desplazamientos de los segmentos individuales de una barra prismática es igual al alargamiento o acortamiento de toda la barra (δ). Se utilizan diagramas de cuerpo libre para determinar la fuerza axial (N) en cada segmento i; si las fuerzas axiales y/o las áreas de las secciones transversales varían continuamente, se requiere una expresión integral.
5. Si la estructura de la barra es **estáticamente indeterminada**, se requieren ecuaciones adicionales (más allá de las disponibles en la estática) para calcular fuerzas desconocidas. Las **ecuaciones de compatibilidad** se emplean para relacionar los desplazamientos de la barra con las condiciones de apoyo y así generar relaciones adicionales entre las incógnitas. Es conveniente emplear una **superposición** de estructuras "liberadas" (o estáticamente determinadas) para representar la estructura real estáticamente indeterminada de la barra.
6. Los **efectos térmicos** resultan en desplazamientos proporcionales al cambio de temperatura y a la longitud de la barra pero no en esfuerzos en estructuras estáticamente determinadas. El coeficiente de dilatación térmica (α) del material también se requiere para calcular los desplazamientos axiales debidos a los efectos térmicos.
7. El **desajuste** y las **deformaciones previas** inducen fuerzas sólo en barras estáticamente indeterminadas.
8. Los **esfuerzos normal máximo** y **cortante máximo** se pueden obtener considerando un elemento inclinado de esfuerzo para una barra cargada por fuerzas axiales. El esfuerzo normal máximo ocurre a lo largo del eje de la barra, pero el esfuerzo cortante máximo ocurre a una inclinación de 45° respecto del eje de la barra y el esfuerzo cortante máximo es la mitad del esfuerzo normal máximo.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 2

Cambios de longitud de elementos cargados axialmente

2.2.1 El brazo *ABC* on forma de "L" que se muestra en la figura se encuentra en un plano vertical y tiene una articulación que gira con respecto a un pasador horizontal en *A*. El brazo tiene un área de sección transversal constante y un peso total *W*. Un resorte vertical con rigidez *k* soporta el brazo en el punto *B*. Obtenga una fórmula para el alargamiento del resorte debido al peso del brazo.

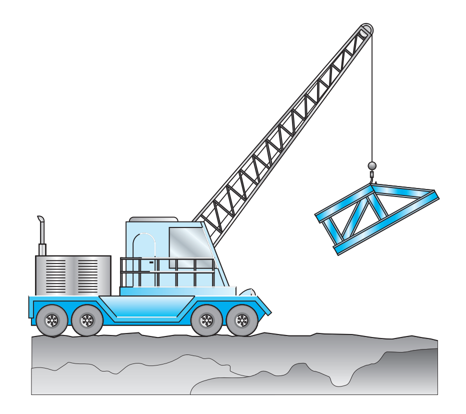


PROB. 2.2.1

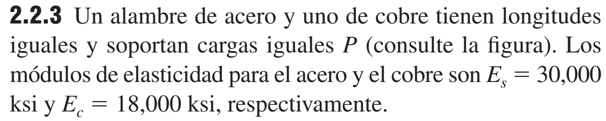
2.2.2 Un cable de acero con diámetro nominal de 25 mm (consulte la tabla 2.1) se utiliza en un patio de construcción para levantar una sección de un puente que pesa 38 kN, como se muestra en la figura. El cable tiene un módulo de elasticidad efectivo E = 140 GPa.

(a) Si el cable tiene una longitud de 14 m, ¿cuánto se estirará al levantar la carga?

(b) Si el cable está clasificado para una carga máxima de 70 kN, ¿cuál es el factor de seguridad con respecto a la falla del cable?



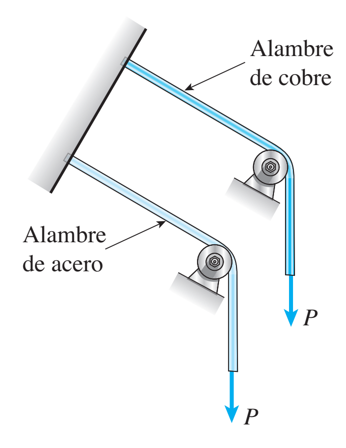
PROB. 2.2.2



2.2.3 Un alambre de acero y uno de cobre tienen longitudes iguales y soportan cargas iguales *P* (consulte la figura). Los módulos de elasticidad para el acero y el cobre son E_s = 30,000 ksi y E_c = 18,000 ksi, respectivamente.

(a) Si los alambres tienen diámetros iguales, ¿cuál es la razón entre el alargamiento del alambre de cobre y el alargamiento del alambre de acero?

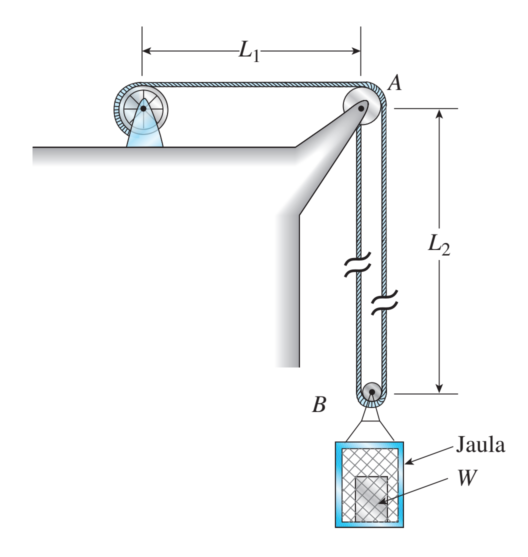
(b) Si los alambres se estiran la misma cantidad, ¿cuál es la razón entre el diámetro del alambre de cobre y el diámetro del alambre de acero?



PROB. 2.2.3

2.2.4 ¿Qué distancia *h* se mueve hacia abajo la jaula que se muestra en la figura cuando se coloca el peso *W* dentro de ella? (Consulte la figura).

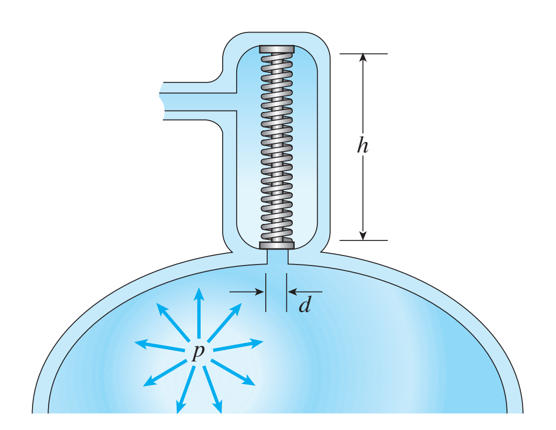
Considere sólo los efectos del estiramiento del cable, que tiene una rigidez axial EA = 10,700 kN. La polea en *A* tiene un diámetro d_A = 300 mm y la polea en *B* tiene un diámetro d_B = 150 mm. Además, la distancia L_1 = 4.6 m, la distancia L_2 = 10.5 mm y el peso W = 22 kN. (*Nota:* al calcular la longitud del cable, incluya las partes del cable que se arrollan alrededor de las poleas en *A* y *B*).



PROB. 2.2.4

2.2.5 Una válvula de seguridad en la parte superior de un recipiente que contiene vapor a una presión p tiene un orificio de descarga con diámetro d (consulte la figura). La válvula está diseñada para liberar vapor cuando la presión alcance el valor $p_{máx}$.

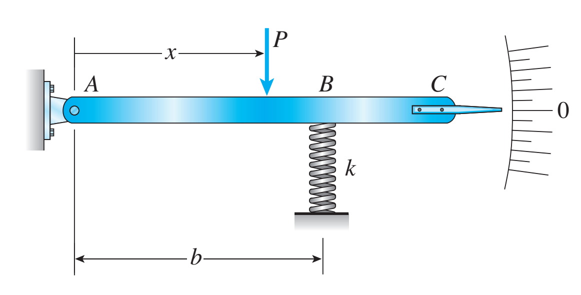
Si la longitud natural del resorte es L y su rigidez es k, ¿cuál deberá la dimensión h de la válvula? (Exprese su resultado como una fórmula para determinar h.)



PROB. 2.2.5

2.2.6 El dispositivo que se muestra en la figura consiste en un indicador ABC soportado por un resorte con rigidez $k = 800$ N/m. El resorte está colocado a una distancia $b = 150$ mm del extremo articulado A del índice. El dispositivo se ajusta de manera que cuando no hay carga P, el índice indica cero en la escala angular.

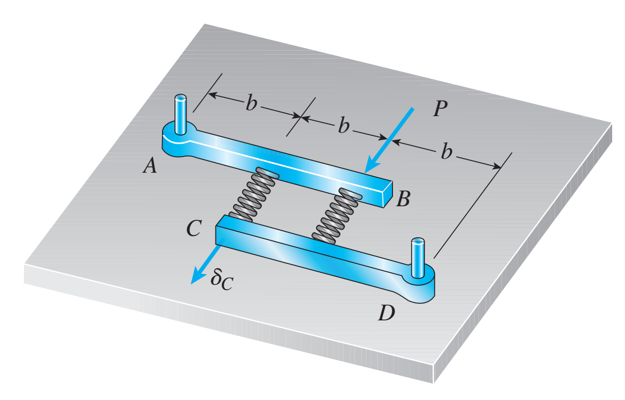
Si la carga es $P = 8$ N, ¿a qué distancia x se deberá colocar la carga para que el indicador marque 3° en la escala?



PROB. 2-2.6

2.2.7 Dos barras rígidas, AB y CD, se apoyan sobre una superficie horizontal (consulte la figura). La barra AB gira en A y la barra CD gira en D. Las barras están conectadas entre sí por dos resortes linealmente elásticos con rigidez k. Antes de que se aplique la carga P, las longitudes de los resortes son tales que las barras son paralelas y los resortes no están sometidos a esfuerzo.

Deduzca una fórmula para el desplazamiento δ_C en el punto C cuando la carga P actúa cerca del punto B como se muestra. (Suponga que las barras giran ángulos muy pequeños ante la acción de la carga P.)

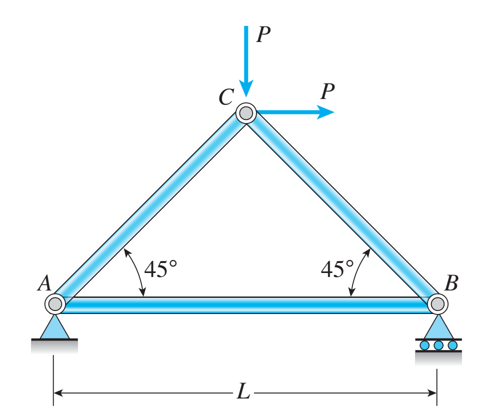


PROB. 2.2.7

2.2.8 La armadura de tres barras *ABC* que se muestra en la figura tiene un claro $L = 3$ m y está construida de tubos de acero que tienen un área de la sección transversal $A = 3900$ mm^2 y un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa. Cargas idénticas P actúan vertical y horizontalmente en el nodo C, como se muestra.

(a) Si $P = 650$ kN, ¿cuál es el desplazamiento horizontal del nodo B?

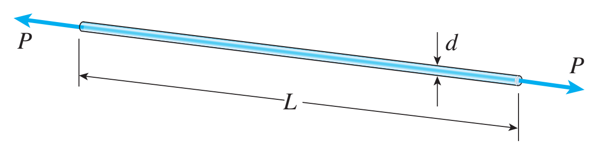
(b) ¿Cuál es el valor máximo permisible de la carga $P_{máx}$ si el desplazamiento del nodo B está limitado a 1.5 mm?



PROB. 2.2.8

2.2.9 Un alambre de aluminio con diámetro $d = 1/10$ in y longitud $L = 12$ ft se somete a una carga de tensión P (consulte la figura). El aluminio tiene un módulo de elasticidad $E = 10\,600$ ksi.

Si el alargamiento máximo permisible del alambre es 1/8 in y el esfuerzo permisible en tensión es 10 ksi, ¿cuál es la carga permisible $P_{máx}$?



PROB. 2.2.9

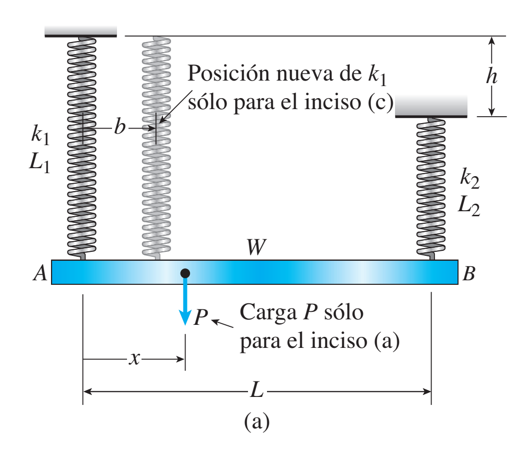
2.2.10 Una barra uniforme *AB* con peso $W = 25$ N está soportada por dos resortes, como se muestra en la figura. El resorte a la izquierda tiene una rigidez $k_1 = 300$ N/m y longitud natural $L_1 = 250$ mm. Las cantidades correspondientes para el resorte a la derecha son $k_2 = 400$ N/m y $L_2 = 200$ mm. La distancia entre los resortes es $L = 350$ mm y el resorte a la derecha está suspendido de un soporte que se ubica a una distancia $h = 80$ mm debajo del punto de soporte del resorte a la izquierda. No tome en cuenta el peso de los resortes.

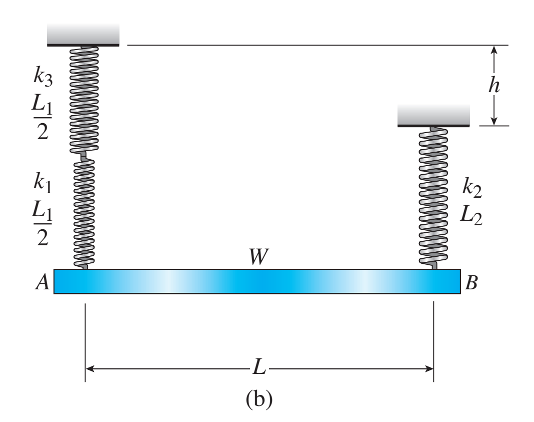
(a) ¿A qué distancia x desde el resorte a la izquierda [parte (a) de la figura] se debe colocar una carga $P = 18$ N a fin de llevar la barra a la posición horizontal?

(b) Si ahora se quita P, ¿qué valor nuevo de k_1 se requiere para que la barra [parte (a) de la figura] se suspenda en posición horizontal ante el peso W?

(c) Si P se remueve y $k_1 = 300$ N/m, ¿qué distancia b se deberá mover el resorte k_1 a la derecha tal que la barra [parte (a) de la figura] quede en una posición horizontal ante el peso W?

(d) Si ahora el resorte a la izquierda se reemplaza con dos resortes en serie ($k_1 = 300$ N/m, k_3) con longitud natural global $L_1 = 250$ mm [consulte la parte (b) de la figura], ¿qué valor de k_3 se requiere para que la barra quede en una posición horizontal ante el peso W?





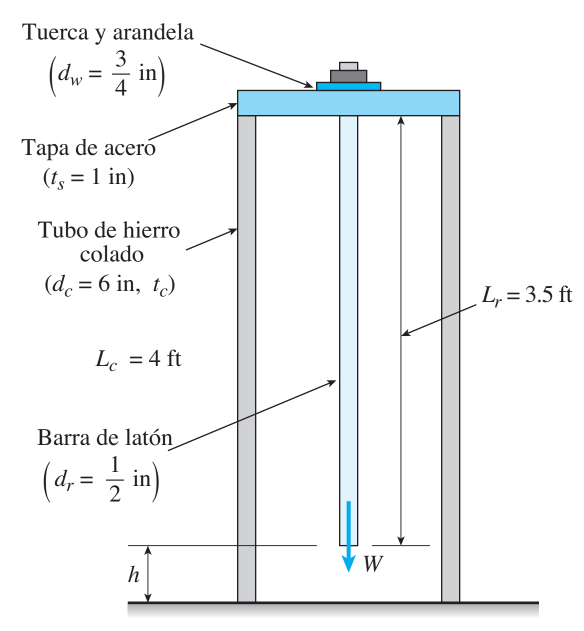
PROB. 2.2.10

2.2.11 Un tubo circular hueco de hierro colado ($E_c = 12{,}000$ ksi) soporta una barra de latón ($E_b = 14{,}000$ ksi) y un peso $W = 2$ kips, como se muestra. El diámetro exterior del tubo es $d_c = 6$ in.

(a) Si el esfuerzo permisible de compresión en el tubo es 5000 psi y su acortamiento permisible es 0.02 in, ¿cuál es el espesor de pared mínimo permisible $t_{c,mín}$? (Incluya los pesos de la barra y la tapa de acero en sus cálculos.)

(b) ¿Cuál es el alargamiento de la barra de latón δ_r debida a la carga W y a su propio peso?

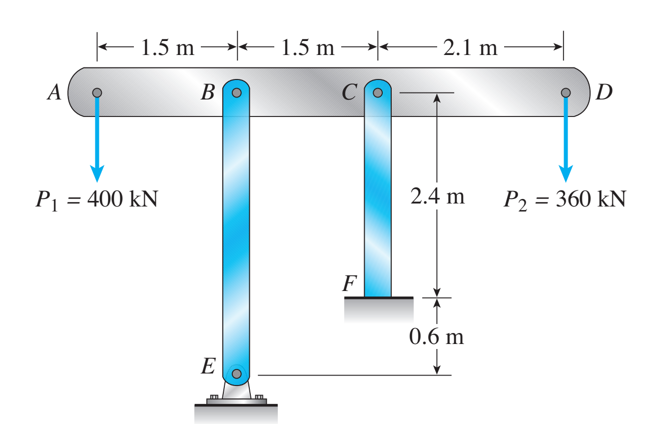
(c) ¿Cuál es el espacio libre h mínimo requerido?



PROB. 2.2.11

***2.2.12** La viga horizontal rígida *ABCD* que se muestra en la figura está soportada por las barras verticales *BE* y *CF*, y está sometida a las dos fuerzas verticales $P_1 = 400$ kN y $P_2 = 360$ kN que actúan en los puntos *A* y *D*, respectivamente (consulte la figura). Las barras *BE* y *CF* están hechas de acero ($E = 200$ GPa) y tienen áreas de sus secciones transversales $A_{BE} = 11{,}100$ mm^2 y $A_{CF} = 9280$ mm^2. Las distancias entre varios puntos en las barras se muestran en la figura.

Determine los desplazamientos verticales δ_A y δ_D de los puntos *A* y *D*, respectivamente.



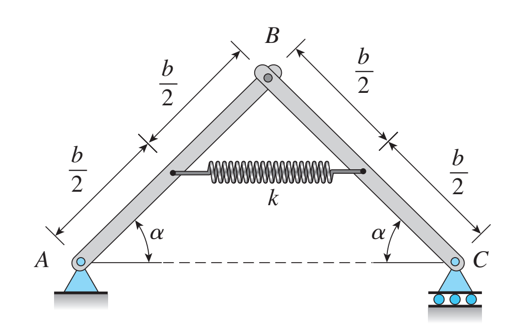
PROB. 2.2.12

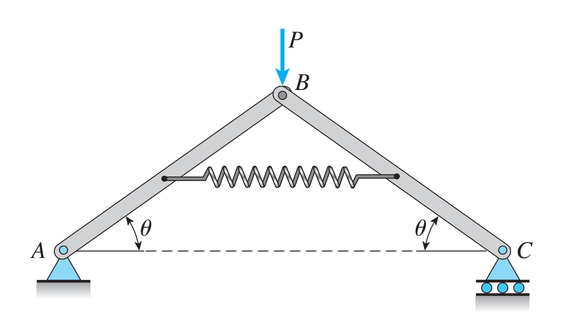
****2.2.13** La armadura *ABC* consiste de dos barras rígidas *AB* y *BC*, cada una con longitud *b* (consulte la primera parte de la figura). Las barras tienen conexiones articuladas en *A*, *B* y *C*, y están unidas por un resorte con rigidez *k*. El resorte está sujeto a los puntos medios de las barras. La armadura tiene un soporte articulado en *A* y un soporte de rodillo en *C*, y las barras están en un ángulo α con respecto a la horizontal.

Cuando se aplica una carga vertical *P* en el nodo *B* (consulte la segunda parte de la figura) el soporte de rodillo *C* se mueve hacia la derecha, el resorte se estira y el ángulo de las barras disminuye de α a θ.

Determine el ángulo θ y el aumento δ en la distancia entre los puntos *A* y *C*. (Utilice los datos siguientes: $b = 8.0$ in, $k = 16$ lb/in, $\alpha = 45°$ y $P = 10$ lb).

****2.2.14** Resuelva el problema anterior con los siguientes datos: $b = 200$ mm, $k = 3.2$ kN/m, $\alpha = 45°$ y $P = 50$ N.



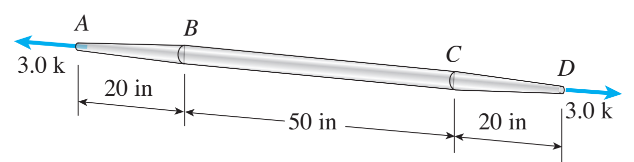


PROB. 2.2.13 y 2.2.14

Cambios de longitud en condiciones no uniformes

2.3.1 Calcule el alargamiento de una barra de cobre con sección transversal circular y con sus extremos ahusados cuando se estira por cargas axiales con magnitud 3.0 k (consulte la figura).

La longitud de los segmentos extremos es 20 in y la longitud del segmento prismático medio es 50 in. Además, los diámetros en las secciones transversales A, B, C y D son 0.5, 1.0, 1.0 y 0.5 in, respectivamente, y el módulo de elasticidad es 18,00 ksi. (*Sugerencia:* utilice el resultado del ejemplo 2.4.)

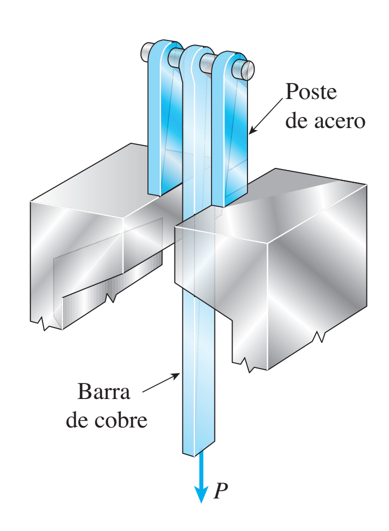


PROB. 2.3.1

2.3.2 Una barra rectangular larga de cobre sometida a una carga de tensión P cuelga de un pasador que está soportado por dos postes de acero (consulte la figura). La barra de cobre tiene una longitud de 2.0 m, un área de sección transversal de 4800 mm^2 y un módulo de elasticidad E_c = 120 GPa. Cada poste de acero tiene una altura de 0.5 m, un área de sección transversal de 450 mm^2 y un módulo de elasticidad E_s = 200 GPa.

(a) Determine el desplazamiento hacia abajo δ del extremo inferior de la barra de cobre debido a una carga P = 180 kN.

(b) ¿Cuál es la carga máxima permisible $P_{máx}$ si el desplazamiento δ está limitado a 1.0 mm?

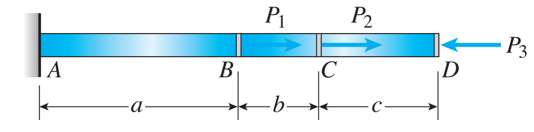


PROB. 2.3.2

2.3.3 Una barra AD (consulte la figura) tiene un área de sección transversal de 0.40 in^2 y está cargada por fuerzas P_1 = 2700 lb, P_2 = 1800 lb y P_3 = 1300 lb. Las longitudes de los segmentos de la barra son a = 60 in, b = 24 in y c = 36 in.

(a) Suponiendo que el módulo de elasticidad es $E = 30 \times 10^6$ psi, calcule el cambio de longitud δ de la barra. ¿Se alarga o se acorta la barra?

(b) ¿En qué cantidad P se debe aumentar la carga P_3 para que la barra no cambié de longitud cuando se apliquen las tres cargas?

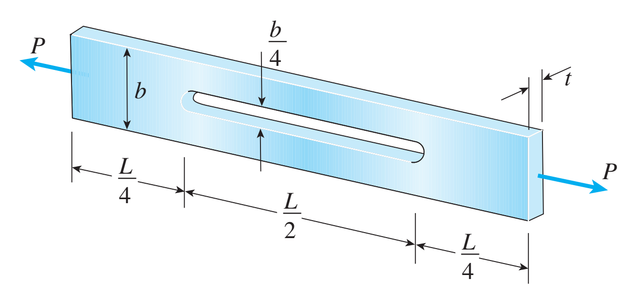


PROB. 2.3.3

2.3.4 Una barra rectangular con longitud L tiene una ranura a la mitad de su longitud (consulte la figura). La barra tiene un ancho b, espesor t y módulo de elasticidad E. La ranura tiene un ancho $b/4$.

(a) Obtenga una fórmula para el alargamiento δ de la barra debido a las cargas axiales P.

(b) Calcule el alargamiento de la barra si el material es acero de alta resistencia, el esfuerzo axial en la región media es 160 MPa, la longitud es 750 mm y el módulo de elasticidad es 210 GPa.



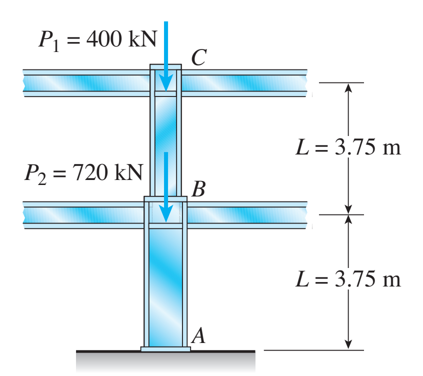
PROBS. 2.3.4 y 2.3.5

2.3.5 Resuelva el problema anterior si el esfuerzo axial en la región media es 24,000 psi, la longitud es 30 in y el módulo de elasticidad es 30×10^6 psi.

2.3.6 Un edificio de dos pisos tiene columnas de acero AB en el primer piso y BC en el segundo piso, como se muestra en la figura. La carga sobre el techo P_1 es igual a 400 kN y la carga en el segundo piso P_2 es igual a 720 kN. Cada columna tiene una longitud L = 3.75 m. Las área de las secciones transversales de las columnas del primer y segundo piso son 11,000 mm^2 y 3900 mm^2, respectivamente.

(a) Suponiendo que E = 206 GPa, determine el acortamiento total δ_{AC} de las dos columnas debido a la acción combinada de las cargas P_1 y P_2.

(b) ¿Qué carga adicional P_0 se puede colocar en la parte superior de la columna (punto C) si el acortamiento total δ_{AC} no debe exceder 4.0 mm?

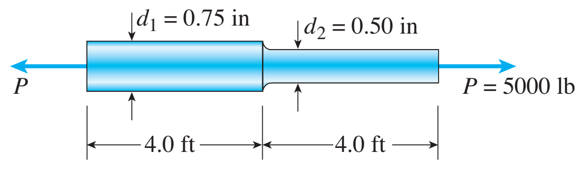


PROB. 2.3.6

2.3.7 Una barra de acero con una longitud de 8 ft tiene una sección transversal circular $d_1 = 0.75$ in en la mitad de su longitud y diámetro $d_2 = 0.5$ in en la otra mitad (consulte la figura). El módulo de elasticidad es $E = 30 \times 10^6$ psi.

(a) ¿Cuál es el alargamiento de la barra ante una carga de tensión $P = 5000$ lb?

(b) Si con el mismo volumen de material se hace una barra con diámetro constante d y longitud 8.0 ft, ¿cuál será el alargamiento con la misma carga P?



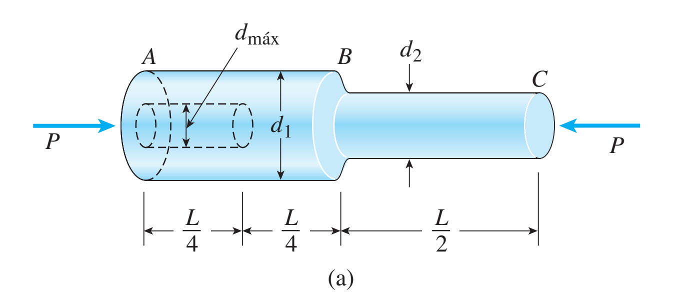
PROB. 2.3.7

2.3.8 Una barra ABC con longitud L consiste de dos partes con segmentos iguales pero diámetros diferentes. El segmento AB tiene un diámetro $d_1 = 100$ mm y el segmento BC tiene un diámetro $d_2 = 60$ mm. Los dos segmentos tienen una longitud $L/2 = 0.6$ m. En el segmento AB se perfora un agujero longitudinal con diámetro d en la mitad de su longitud (distancia $L/4 = 0.3$ m). La barra está hecha de plástico que tiene un módulo de elasticidad $E = 4.0$ GPa y sobre sus extremos actúan cargas de compresión $P = 110$ kN.

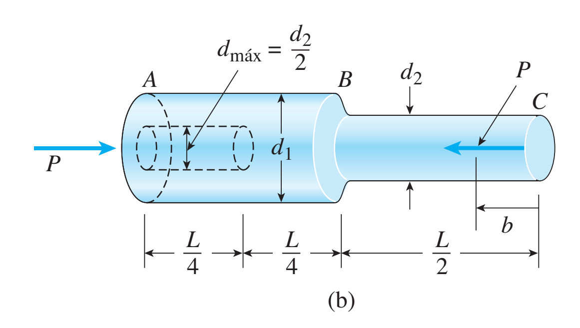
(a) Si el acortamiento de la barra está limitado a 8.0 mm, ¿cuál es el diámetro máximo permisible $d_{máx}$ del agujero? [Consulte la parte (a) de la figura].

(b) Ahora, si $d_{máx}$ se fija en $d_2/2$, ¿a qué distancia b desde el extremo C se debe aplicar la carga P para limitar el acortamiento de la barra a 8.0 mm? [Consulte la parte (b) de la figura.]

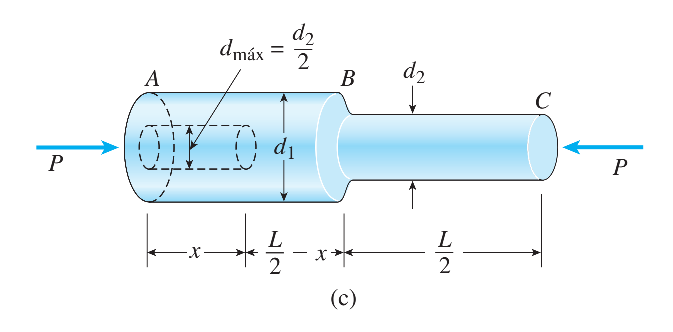
(c) Por último, si se aplican cargas P en los extremos y $d_{máx} = d_2/2$, ¿cuál es la longitud permisible x del agujero si el acortamiento está limitado a 8.0 mm? [Consulte la parte (c) de la figura.]



(a)



(b)



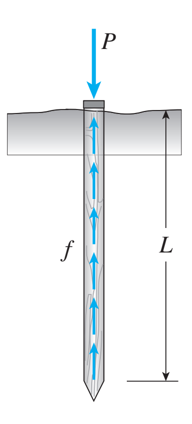
(c)

PROB. 2.3.8

2.3.9 Un pilote de madera clavado en el suelo soporta una carga P completamente por fricción sobre su superficie (consulte la figura). La fuerza de fricción f por unidad de longitud del pilote se supone que esta distribuida uniformemente sobre la superficie del mismo. La longitud del pilote es L, su área de la sección transversal es A y su módulo de elasticidad es E.

(a) Deduzca una fórmula para el acortamiento δ del pilote en términos de P, L, E y A.

(b) Dibuje un diagrama mostrando cómo el esfuerzo de compresión σ_c varía en toda la longitud del pilote.



PROB. 2.3.9

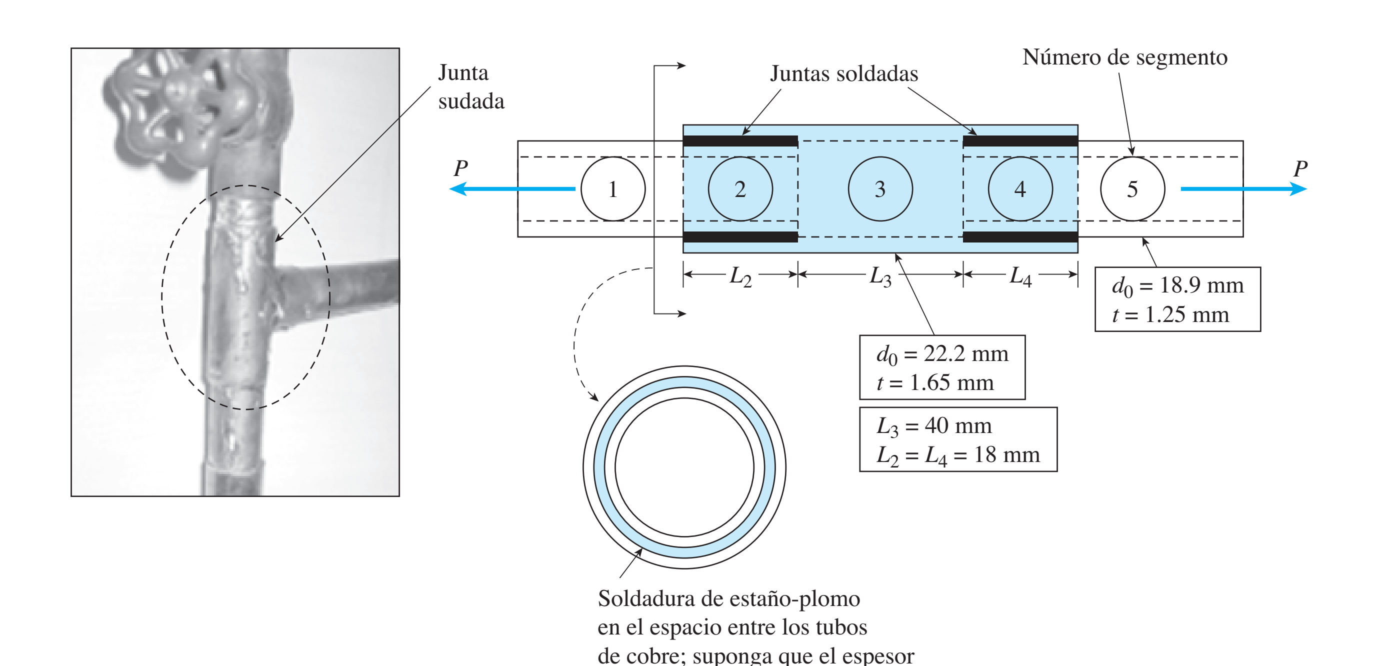
2.3.10 Considere los tubos de cobre soldados empleando una junta "sudada". Utilice las propiedades y dimensiones dadas.

(a) Determine el alargamiento total del segmento 2-3-4 (δ_{2-4}) para una fuerza de tensión aplicada de $P = 5$ kN. Use $E_c = 120$ GPa.

(b) Si la resistencia a la fluencia en cortante de la soldadura de estaño-plomo es $\tau_y = 30$ MPa y la resistencia a la fluencia en tensión del cobre es $\sigma_y = 200$ MPa, ¿cuál es la carga máxima $P_{máx}$ que se puede aplicar a la junta si el factor de seguridad deseado en cortante es $FS_\tau = 2$ y en tensión es $FS_\sigma = 1.7$?

(c) Determine el valor de L_2 en el cual las propiedades del tubo y la soldadura son iguales.

2.3.11 La barra circular no prismática en voladizo que se muestra tiene un agujero cilíndrico interno con diámetro $d/2$ de 0 a x, de manera que el área neta de la sección transversal para el segmento 1 es $(3/4)A$. La carga P se aplica en x y la carga $P/2$ se aplica en $x = L$. Suponga que E es constante.



PROB. 2.3.10

(a) Determine la fuerza de reacción R_1.

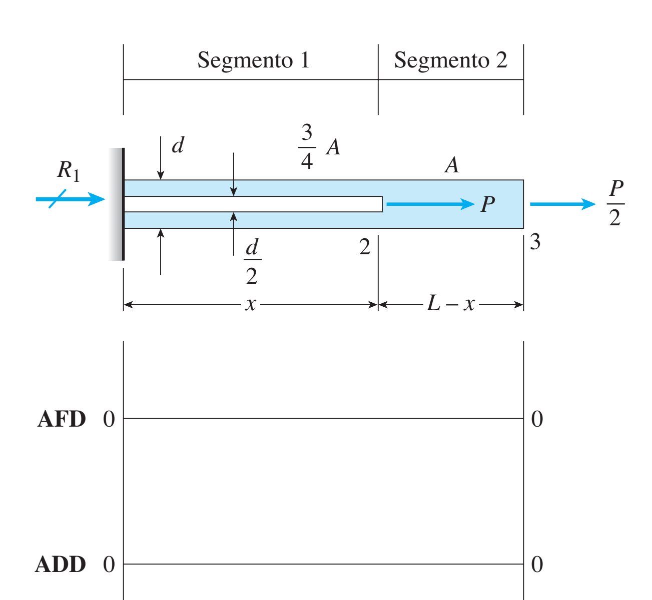
(b) Determine las fuerzas axiales N_i en los segmentos 1 y 2.

(c) Determine la distancia x requerida para obtener un desplazamiento axial en la junta 3 de $\delta_3 = PL/EA$.

(d) En el inciso (c), ¿cuál es el desplazamiento en la junta 2, δ_2?

(e) Si P actúa en $x = 2L/3$ y $P/2$ en la junta 3 se reemplaza con βP, encuentre β de manera que $\delta_3 = PL/EA$.

(f) Trace la *fuerza axial* (*AFD*: $N(x)$, $0 \le x \le L$) y los *diagrama del desplazamiento axial* (*ADD*: $\delta(x)$, $0 \le x \le L$) empleando los resultados de los incisos (b) a (d) anteriores.



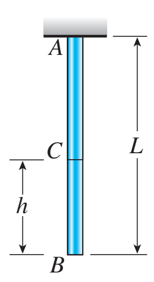
PROB. 2.3.11

2.3.12 Una barra prismática AB con longitud L, área de sección transversal A, módulo de elasticidad E y peso W cuelga verticalmente por su peso propio (consulte la figura).

(a) Obtenga una fórmula para el desplazamiento hacia abajo δ_C del punto C, ubicado a una distancia h desde el extremo inferior de la barra.

(b) ¿Cuál es el alargamiento δ_B de toda la barra?

(c) ¿Cuál es la razón β entre el alargamiento de la mitad superior de la barra y el alargamiento de la mitad inferior de la barra?



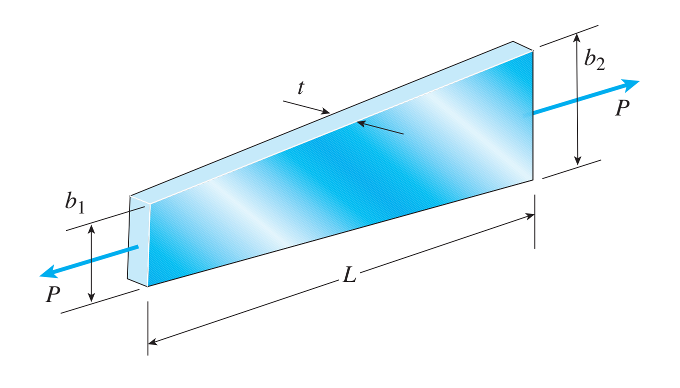
PROB. 2.3.12

***2.3.13** Una barra plana con sección transversal rectangular, longitud L y espesor t constante se somete a fuerzas de tensión P (consulte la figura). El ancho de la barra varía linealmente de b_1 en su extremo menor a b_2 en su extremo mayor. Suponga que el ángulo de ahusamiento es pequeño.

(a) Obtenga la siguiente fórmula para el alargamiento de la barra:

$$\delta = \frac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1}$$

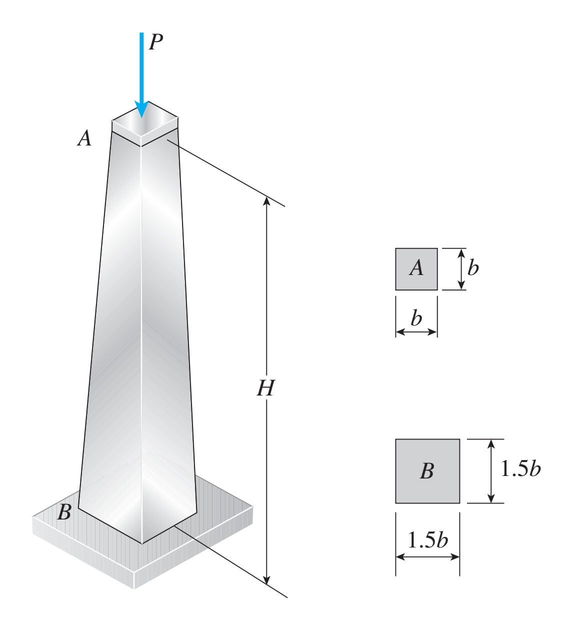
(b) Calcule el alargamiento, suponiendo $L = 5$ ft, $t = 1.0$ in, $P = 25$ k, $b_1 = 4.0$ in, $b_2 = 6.0$ in y $E = 30 \times 10^6$ psi.



PROB. 2.3.13

***2.3.14** Un poste *AB* que soporta equipo en un laboratorio está ahusado uniformemente en toda su altura *H* (consulte la figura). La secciones transversales del poste son cuadradas, con dimensiones $b \times b$ en su parte superior y $1.5b \times 1.5b$ en su base.

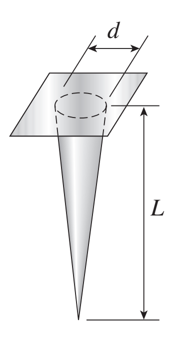
Deduzca una fórmula para el acortamiento δ del poste debido a la carga de compresión *P* que actúa en su parte superior. (Suponga que el ángulo de ahusamiento es pequeño y no tome en cuenta el peso del poste.)



PROB. 2.3.14

***2.3.15** Una barra larga esbelta con forma de cono circular recto con longitud *L* y diámetro *d* en su base cuelga verticalmente por la acción de su propio peso (consulte la figura). El peso del cono es *W* y el módulo de elasticidad del material es *E*.

Deduzca una fórmula para el aumento δ de la longitud de la barra debido a su peso. (Suponga que el ángulo de ahusamiento del cono es pequeño).

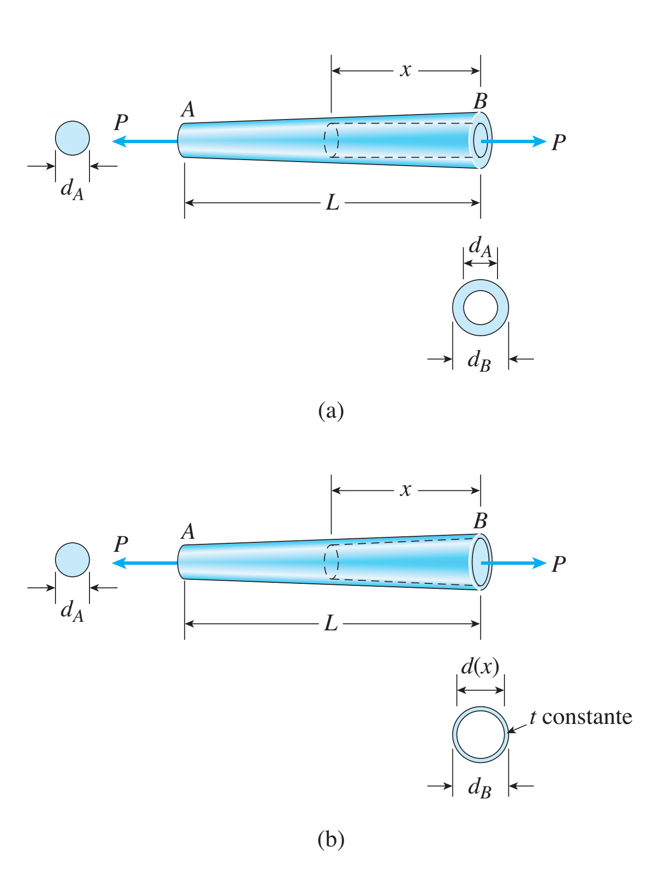


PROB. 2.3.15

2.3.16 Un tubo uniformemente ahusado *AB* con sección transversal circular y longitud *L* se muestra en la figura. Los diámetros promedio en sus extremos son d_A y $d_B = 2d_A$. Suponga que *E* es constante. Deduzca una fórmula para el alargamiento δ del tubo cuando se somete a cargas *P* que actúan en sus extremos Utilice los siguientes datos numéricos: d_A = 35 mm, $L = 300$ mm, $E = 2.1$ Gpa, $P = 25$ KN para los casos siguientes:

(a) Se perfora un agujero con diámetro *constante* d_A de *B* hacia *A* para formar una sección hueca con longitud $x = 1/2$ [consulte la parte (a) de la figura].

(b) Se perfora un agujero con diámetro *variable d(x)* de *B* hacia *A* para formar una sección hueca con longitud $x = 1/2$ y espesor constante *t* [consulte la parte (b) de la figura]. (Suponga que $t = d_A/20$.)



PROB. 2.3.16

****2.3.17** Los cables principales de suspensión de un puente colgante [consulte la parte (a) de la figura] siguen una curva que es casi parabólica debido a que la carga principal sobre los cables es el peso de la calzada del puente, que tiene una intensidad uniforme a lo largo de la horizontal. Por tanto, representemos la región central *AOB* de uno de los cables principales [consulte la parte (b) de la figura] como un cable parabólico soportado en los puntos *A* y *B*, y que sostiene una carga uni-

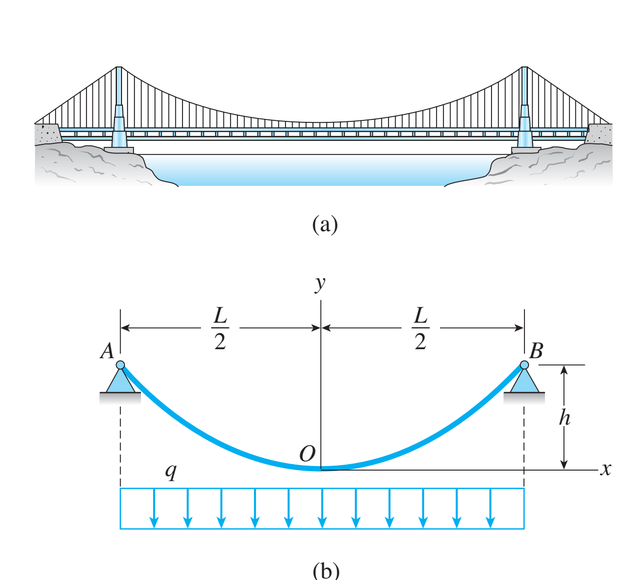
forme con intensidad q a lo largo de la horizontal. El claro del cable es L, la flecha es h, la rigidez axial es EA, y el origen de las coordenadas está en el centro del claro.

(a) Deduzca la fórmula siguiente para el alargamiento del cable AOB que se muestra en la parte (b) de la figura:

$$\delta = \frac{qL^3}{8hEA}\left(1 + \frac{16h^2}{3L^2}\right)$$

(b) Calcule el alargamiento δ del claro central de uno de los cables principales del puente Golden Gate, para el cual la dimensiones y propiedades son L = 4200 ft, h = 470 ft, q = 12,700 lb/ft y E = 28,800,000 psi. El cable consiste de 27,572 alambres paralelos con diámetro 0.196 in.

Sugerencia: determine la fuerza de tensión T en cualquier punto en el cable a partir de un diagrama de cuerpo libre de una parte del cable; luego determine el alargamiento de un elemento del cable con longitud ds; por último, integre a lo largo de la curva del cable para obtener una ecuación para el alargamiento δ.



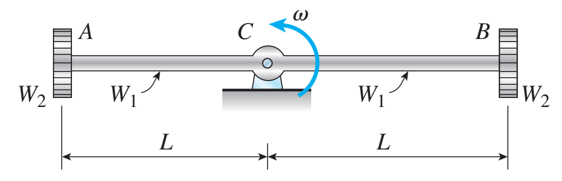
PROB. 2.3.17

****2.3.18** Una barra ABC gira en un plano horizontal con respecto a un eje vertical en el punto medio C (consulte la figura). La barra, que tiene una longitud $2L$ y área de su sección transversal A, gira a una velocidad angular constante ω. Cada mitad de la barra (AC y BC) tiene un peso W_1 y soporta un peso W_2 en su extremo.

Deduzca la fórmula siguiente para el alargamiento de una mitad de la barra (es decir, el alargamiento de AC o bien de BC):

$$\delta = \frac{L^2\omega^2}{3gEA}(W_1 + 3W_2)$$

en donde E es el módulo de elasticidad del material de la barra y g es la aceleración debida a la gravedad.



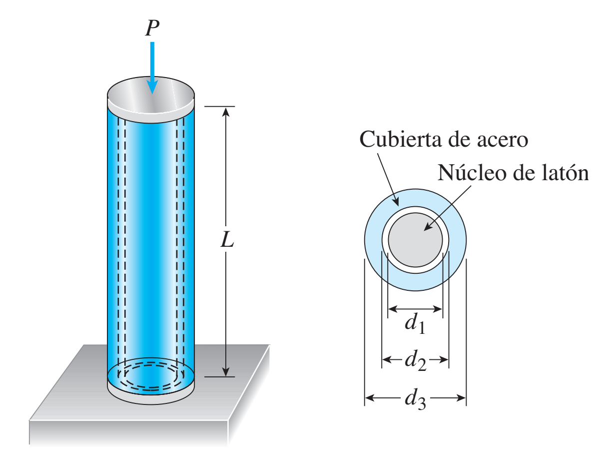
PROB. 2.3.18

Estructuras estáticamente indeterminadas

2.4.1 El conjunto que se muestra en la figura consiste de un núcleo de latón (diámetro d_1 = 0.25 in) rodeado por una cubierta de acero (diámetro interior d_2 = 0.28 in, diámetro exterior d_3 = 0.35 in). Una carga P comprime el núcleo y la cubierta, que tienen longitudes L = 4.0 in. Los módulos de elasticidad del latón y del acero son $E_b = 15 \times 10^6$ psi y $E_s = 30 \times 10^6$ psi, respectivamente.

(a) ¿Qué carga P comprimirá el conjunto en 0.003 in?

(b) Si el esfuerzo permisible en el acero es 22 ksi y el esfuerzo permisible en el latón es 16 ksi, ¿cuál es la carga de compresión permisible P_{perm}? (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones obtenidas en el ejemplo 2.5.)

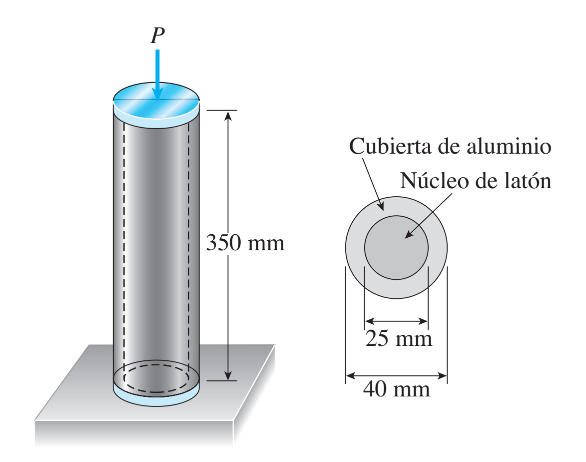


PROB. 2.4.1

2.4.2 Un conjunto cilíndrico que consiste de un núcleo de latón y una cubierta de aluminio se comprime por una carga P (consulte la figura). Las longitudes de la cubierta de aluminio y del núcleo de latón son 350 mm, el diámetro del núcleo es 25 mm y su diámetro exterior es 40 mm. Además, los módulos de elasticidad del aluminio y el latón son 72 GPa y 100 GPa, respectivamente.

(a) Si la longitud del conjunto disminuye en 0.1% cuando se aplica la carga P, ¿cuál es la magnitud de ésta?

(b) ¿Cuál es la carga máxima permisible $P_{máx}$ si los esfuerzos permisibles en el aluminio y el latón son 80 MPa y 120 MPa, respectivamente? (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones obtenidas en el ejemplo 2.5.)



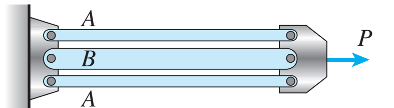
PROB. 2.4.2

2.4.3 Tres barras prismáticas, dos de material A y una de material B, transmiten una carga de tensión P (consulte la figura). Las dos barras exteriores (material A) son idénticas. El área de la sección transversal de la barra central (material B) es 50% mayor que el área de la sección transversal de una de las barras exteriores. Además, el módulo de elasticidad del material A es el doble que el del material B.

(a) ¿Qué fracción de la carga P se transmite por la barra central?

(b) ¿Cuál es la razón entre esfuerzo en la barra central y el esfuerzo en las barras exteriores?


(c) ¿Cuál es la razón entre la deformación unitaria en la barra central y la deformación unitaria en las barras exteriores?



PROB. 2.4.3

2.4.4 Una barra circular ACB con diámetro d que tiene un agujero cilíndrico con longitud x y diámetro $d/2$ de A a C está empotrada rígidamente entre los apoyos A y B. Una carga P actúa en $L/2$ desde los extremos A y B. Suponga que E es constante.

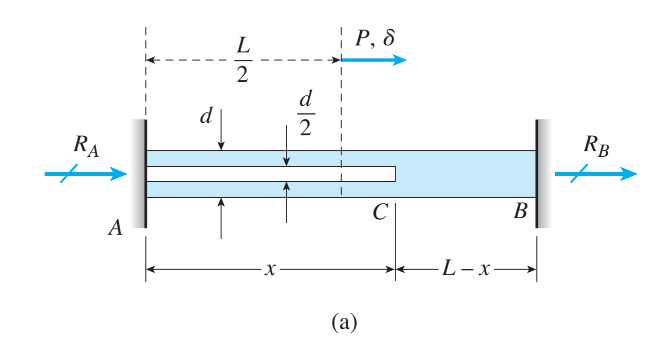
(a) Obtenga fórmulas para las reacciones R_A y R_B en los apoyos A y B, respectivamente, debidas a la carga P [consulte la parte (a) de la figura].

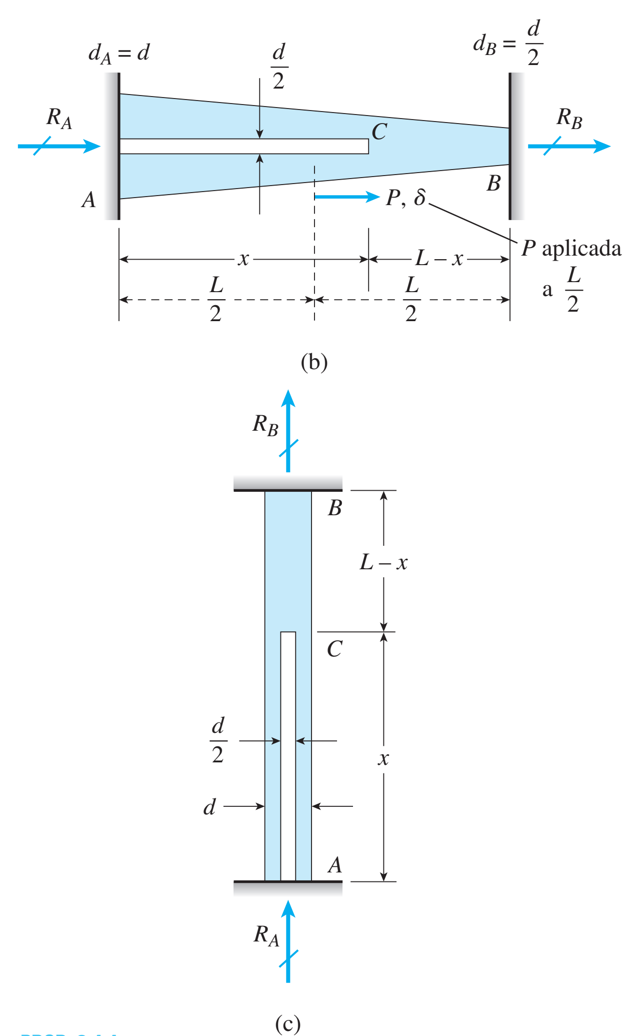
(b) Obtenga una fórmula para el desplazamiento δ en el punto de aplicación de la carga [consulte la parte (a) de la figura].

(c) ¿Para qué valor de x es $R_B = (6/5)R_A$? [Consulte la parte (a) de la figura.]

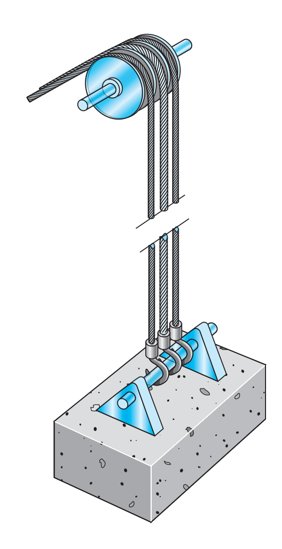
(d) Repita el inciso (a) si la barra ahora está ahusada linealmente de A a B, como se muestra en la parte (b) de la figura y $x = L/2$.

(e) Repita el inciso (a) si ahora la barra gira hasta una posición vertical, la carga P se remueve y la barra cuelga por su propio peso (suponga una densidad $= \rho$). [Consulte la parte (c) de la figura.] Suponga que $x = L/2$.





PROB. 2.4.4



PROB. 2.4.5

2.4.5 Tres cables de acero soportan en conjunto una carga de 12 k (consulte la figura). El diámetro del cable central es ¾ in y el diámetro de cada cable exterior es ½ in. La tensión en los cables se ajusta de manera que cada cable soporte un tercio de la carga (es decir, 4 k). Después la carga se aumenta en 9 k para un total de 21 k.

(a) ¿Qué porcentaje de la carga total está soportado ahora por el cable central?

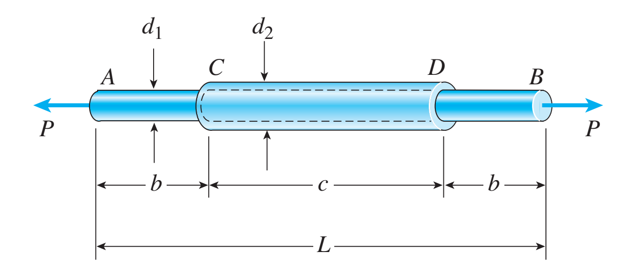
(b) ¿Cuáles son los esfuerzos σ_M y σ_O en el cable central y en los exteriores, respectivamente? (*Nota:* consulte la tabla 2.1 en la sección 2.2 para obtener las propiedades de los cables.)

2.4.6 Una barra de plástico *AB* con longitud $L = 0.5$ m tiene un diámetro $d_1 = 30$ mm (consulte la figura). Un manguito de plástico *CD* con longitud $c = 0.3$ m y diámetro exterior $d_2 = 45$ mm está pegado firmemente a la barra de manera que no ocurre deslizamiento entre la barra y el manguito. La barra está hecha de un acrílico con módulo de elasticidad $E_1 = 3.1$ GPa y el manguito está hecho de una poliamida con $E_2 = 2.5$ GPa.

(a) Calcule el alargamiento δ de la barra cuando es jalada por fuerzas axiales $P = 12$ kN.

(b) Si el manguito se extiende hasta la longitud total de la barra, ¿cuál es el alargamiento?

(c) Si el manguito se remueve, ¿cuál es el alargamiento?



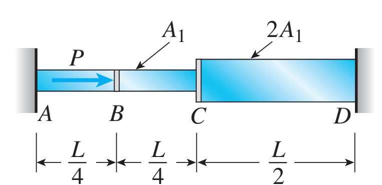
PROB. 2.4.6

2.4.7 La barra *ABCD* cargada axialmente que se muestra en la figura está sostenida entre dos soportes rígidos. La barra tiene un área de su sección transversal A_1 de *A* a *C* y $2A_1$ de *C* a *D*.

(a) Deduzca fórmulas para las reacciones R_A y R_D en los extremos de la barra.

(b) Determine los desplazamientos δ_B y δ_C en los puntos *B* y *C*, respectivamente.

(c) Trace un diagrama del desplazamiento axial en el que la abscisa sea la distancia desde el soporte izquierdo hasta cualquier punto en la barra y la ordenada sea el desplazamiento horizontal δ en ese punto.

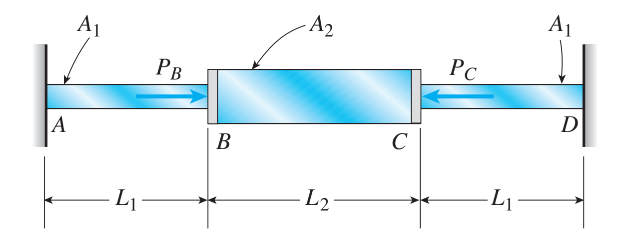


PROB. 2.4.7

2.4.8 La barra *ABCD* con extremos fijos consiste de tres segmentos prismáticos, como se muestra en la figura. Los segmentos en los extremos tienen un área de sección transversal $A_1 = 840$ mm^2 y longitud $L_1 = 200$ mm. El segmento central tiene un área de sección transversal $A_2 = 1260$ mm^2 y longitud $L_2 = 250$ mm. Las cargas P_B y P_C son de 25.5 kN y 17.0 kN, respectivamente.

(a) Determine las reacciones R_A y R_D en los soportes fijos.

(b) Determine la fuerza axial de compresión F_{BC} en el segmento central de la barra.

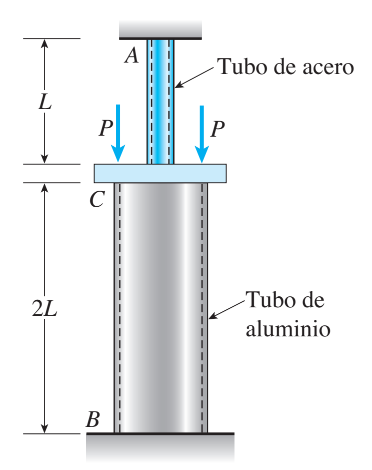


PROB. 2.4.8

2.4.9 Los tubos de aluminio y acero que se muestran en la figura están sujetos a soportes rígidos en los extremos *A* y *B*, y a una placa rígida *C* en su unión. La longitud del tubo de aluminio es el doble de la del tubo de acero. Dos cargas iguales y colocadas de manera simétrica actúan sobe la placa en *C*.

(a) Obtenga fórmulas para los esfuerzos axiales σ_a y σ_s en los tubos de aluminio y acero, respectivamente.

(b) Calcule los esfuerzos para los siguientes datos: $P =$ 12 k, área de la sección transversal del tubo de aluminio $A_a =$ 8.92 in^2, área de la sección transversal del tubo de acero $A_s =$ 1.03 in^2, módulo de elasticidad del aluminio $E_a = 10 \times 10^6$ psi y módulo de elasticidad del acero $E_s = 29 \times 10^6$ psi.



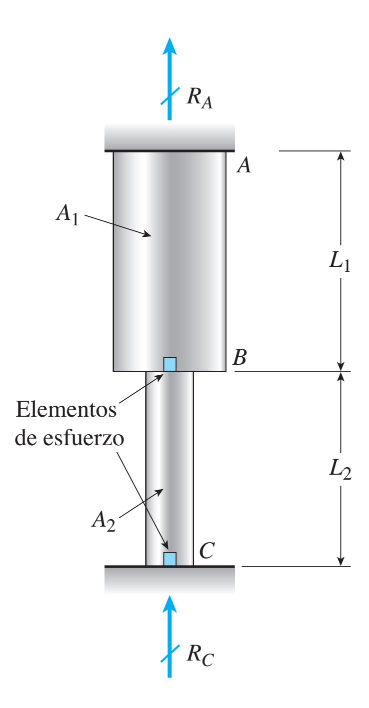
PROB. 2.4.9

2.4.10 Una barra no prismática *ABC* se compone de dos segmentos: *AB* con longitud L_1 y área de su sección transversal A_1 y *BC* con longitud L_2 y área de su sección transversal A_2. El módulo de elasticidad *E*, la densidad masa ρ y la aceleración debida a la gravedad *g* son constantes. Al inicio, la barra *ABC* está horizontal y después se restringe en *A* y *C* y se gira hasta una posición vertical. Luego la barra cuelga verticalmente por su propio peso (consulte la figura). Sea $A_1 = 2A_2 = A$ y $L_1 = \frac{3}{5}L$, $L_2 = \frac{2}{5}L$.

(a) Obtenga fórmulas para las reacciones R_A y R_C en los soportes *A* y *C*, respectivamente, debidas a la gravedad.

(b) Deduzca una fórmula para el desplazamiento hacia abajo δ_B del punto *B*.

(c) Formule expresiones para los esfuerzos axiales a una distancia pequeña arriba de los puntos *B* y *C*, respectivamente.



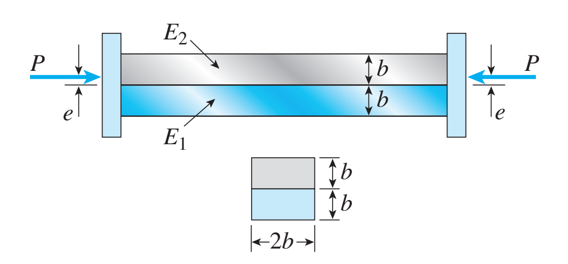
PROB. 2.4.10

2.4.11 Una barra *bimetálica* (o barra compuesta) con sección transversal cuadrada y dimensiones $2b \times 2b$ está construida de dos metales diferentes que tienen módulos de elasticidad E_1 y E_2 (consulte la figura). Las dimensiones de las secciones transversales de las dos partes de la barra son iguales. La barra se comprime por fuerzas P que actúan a través de placas extremas rígidas. La línea de acción de las cargas tiene una excentricidad e con una magnitud tal que cada parte de la barra se somete a un esfuerzo de compresión de manera uniforme.

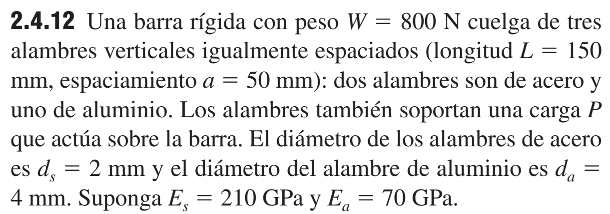
(a) Determine las fuerzas axiales P_1 y P_2 en las dos partes de la barra.

(b) Determine la excentricidad e de las cargas.

(c) Determine la razón σ_1/σ_2 de los esfuerzos en las dos partes de la barra.



PROB. 2.4.11

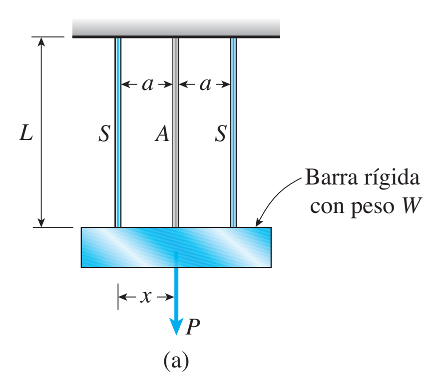


2.4.12 Una barra rígida con peso $W = 800$ N cuelga de tres alambres verticales igualmente espaciados (longitud $L = 150$ mm, espaciamiento $a = 50$ mm): dos alambres son de acero y uno de aluminio. Los alambres también soportan una carga P que actúa sobre la barra. El diámetro de los alambres de acero es $d_s = 2$ mm y el diámetro del alambre de aluminio es $d_a = 4$ mm. Suponga $E_s = 210$ GPa y $E_a = 70$ GPa.

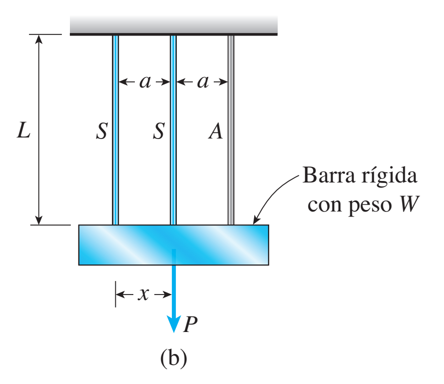
(a) ¿Qué carga P_{perm} se puede soportar *en el punto medio de la barra* $(x = a)$ si el esfuerzo permisible en los alambres de acero es 220 MPa y en el alambre de aluminio es 80 MPa? [Consulte la parte (a) de la figura.]

(b) ¿Cuál es el valor de P_{perm} si la carga se ubica en $x = a/2$? [Consulte la parte (a) de la figura.]

(c) Repita el inciso (b) si el segundo y el tercer alambre *se cambian* como se muestra en la parte (b) de la figura.



(a)

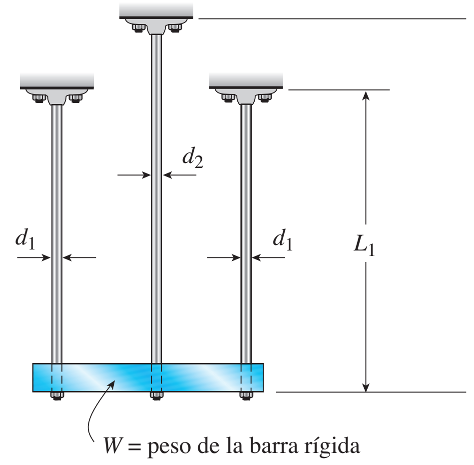


(b)

PROB. 2.4.12

***2.4.13** Una barra horizontal rígida con peso $W = 7200$ lb está soportada por tres barras circulares esbeltas que están igualmente espaciadas (consulte la figura). Las dos barras exteriores están hechas de aluminio ($E_1 = 10 \times 10^6$ psi) con diámetro $d_1 = 0.4$ in y longitud $L_1 = 40$ in. La barra interior es de magnesio ($E_2 = 6.5 \times 10^6$ psi) con diámetro d_2 y longitud L_2. Los esfuerzos permisibles en el aluminio y el magnesio son 24,000 psi y 13,000 psi, respectivamente.

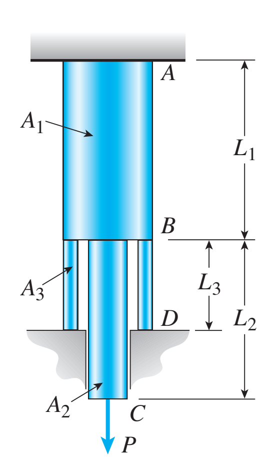
Si se desea que las tres barras estén cargadas hasta sus valores máximos permisibles, ¿cuál deberá ser el diámetro d_2 y la longitud L_2 de la barra central?



PROB. 2.4.13

2.4.14 Una barra circular de acero ABC ($E = 200$ GPa) tiene un área de su sección transversal A_1 de A a B y área de su sección transversal A_2 de B a C (consulte la figura). La barra está soportada rígidamente en el extremo A y está sometida a una carga P igual a 40 kN en el extremo C. Un collarín circular de acero BD que tiene área de su sección transversal A_3 soporta la barra en B. El collarín se ajusta firmemente en B y D donde no hay carga.

Determine el alargamiento δ_{AC} de la barra debido a la carga P. (Suponga $L_1 = 2L_3 = 250$ mm, $L_2 = 225$ mm, $A_1 = 2A_3 = 960$ mm^2 y $A_2 = 300$ mm^2.)

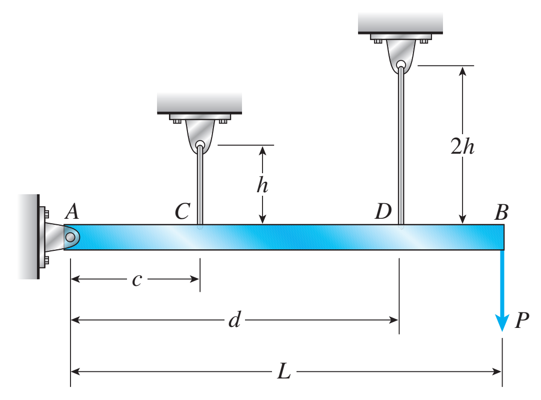


PROB. 2.4.14

****2.4.15** Una barra rígida AB con longitud $L = 66$ in está articulada en el apoyo A y soportada por dos alambres verticales sujetos en los puntos C y D (consulte la figura). Los dos alambres tienen la misma área de sección transversal ($A = 0.0272$ in^2) y están hechos del mismo material (módulo $E = 30 \times 10^6$ psi). El alambre en C tiene una longitud $h = 18$ in y el alambre en D tiene una longitud del doble que la del alambre en C. Las distancias horizontales son $c = 20$ in y $d = 50$ in.

(a) Determine los esfuerzos de tensión σ_C y σ_D en los alambres debidos a la carga $P = 340$ lb que actúa en el extremo B de la barra.

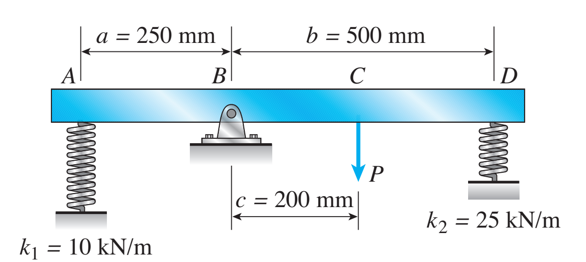
(b) Encuentre el desplazamiento hacia abajo δ_B en el extremo B de la barra.



PROB. 2.4.15

***2.4.16** Una barra rígida $ABCD$ está articulada en el punto B y soportada por dos resortes en A y D (consulte la figura). Los resortes en A y D tienen rigideces $k_1 = 10$ kN/m y $k_2 = 25$ kN/m, respectivamente, y las dimensiones a, b y c son 250 mm, 500 mm y 200 mm, respectivamente. Una carga P actúa en el punto C.

Si el ángulo de rotación de la barra debido a la acción de la carga P está limitado a 3°, ¿cuál es la carga máxima permisible $P_{máx}$?

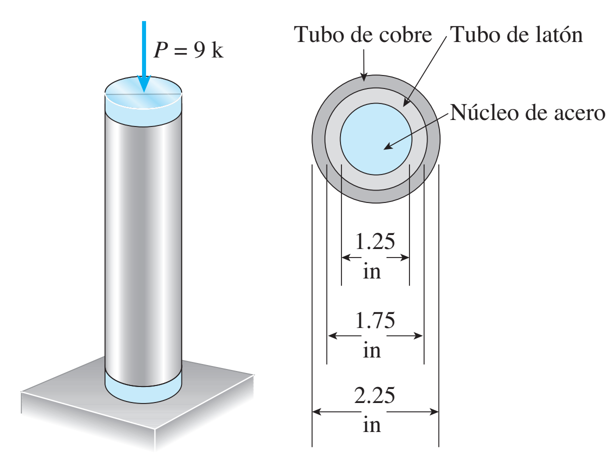


PROB. 2.4.16

****2.4.17** Una barra trimetálica es comprimida uniformemente por una fuerza axial $P = 9$ kips que se aplica mediante una placa extrema rígida (consulte la figura). La barra consiste en un núcleo circular de acero rodeado de tubos de latón y cobre.

El núcleo de cobre tiene un diámetro de 1.25 in, el tubo de latón tiene un diámetro exterior de 1.75 in y el tubo de cobre tiene un diámetro exterior de 2.25 in. Los módulos de elasticidad correspondientes son E_s = 30,000 ksi, E_b = 16,000 ksi y E_c = 18,000 ksi.

Calcule los esfuerzos de compresión σ_s, σ_b y σ_c en el acero, latón y cobre, respectivamente, debidos a la fuerza P.



PROB. 2.4.17

Efectos térmicos

2.5.1 Los rieles de una vía de ferrocarril están soldados en sus extremos (para formar rieles continuos y así eliminar el sonido del golpeteo de las ruedas) cuando la temperatura es 60°F.

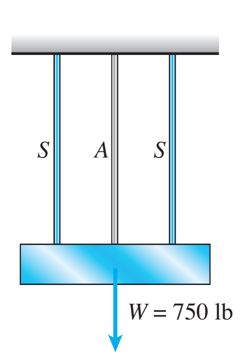
¿Qué esfuerzo de compresión σ se produce en los rieles cuando se calientan con el sol a 120°F si el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/°F y el módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ psi?

2.5.2 Un tubo de aluminio tiene una longitud de 60 m a una temperatura de 10°C. Un tubo adyacente de acero a la misma temperatura es 5 mm más largo que el de aluminio.

¿A qué temperatura (grados Celsius) será el tubo de aluminio 15 mm más largo que el de acero? (Suponga que los coeficientes de dilatación térmica del aluminio y el acero son α_a = 23×10^{-6}/°C y $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$/°C, respectivamente.)

2.5.3 Una barra rígida con peso W = 750 lb cuelga de tres alambres igualmente espaciados, dos de acero y uno de aluminio (consulte la figura). El diámetro de los alambres es 1/8 in. Antes de aplicar la carga los tres alambres tenían la misma longitud.

¿Qué aumento de temperatura ΔT en los tres alambres dará como resultado que toda la carga la soporten los alambres de acero? (Suponga $E_s = 30 \times 10^6$ psi, $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}$/°F y $\alpha_a = 12 \times 10^{-6}$/°F.)

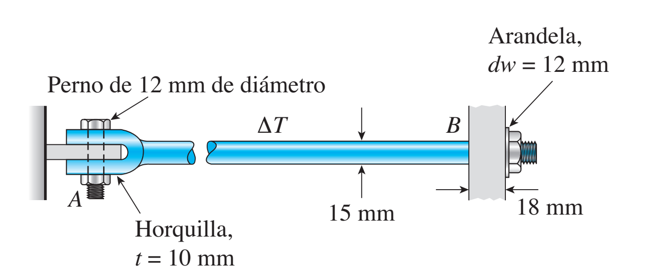


PROB. 2.5.3

2.5.4 Una barra de acero de 15 mm de diámetro se sostiene firmemente (pero sin esfuerzos iniciales) entre dos muros rígidos por la configuración que se muestra en la figura. (Para la barra de acero utilice $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C y E = 200 GPa.)

(a) Calcule la caída de temperatura ΔT (grados Celsius) a la cual el esfuerzo cortante promedio en el perno de 12 mm de diámetro es 45 MPa.

(b) ¿Cuáles son los esfuerzos de soporte promedio en el perno y la horquilla en A y la arandela (d_w = 20 mm) y el muro (t = 18 mm) en B?

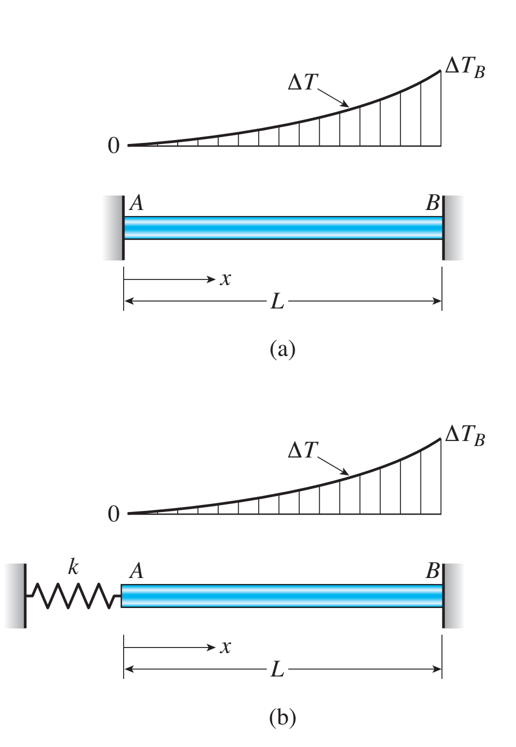


PROB. 2.5.4

2.5.5 Una barra AB con longitud L se sostiene entre dos soportes rígidos y se calienta de manera no uniforme de tal manera que el aumento de temperatura ΔT a una distancia x desde el extremo A está dado por la expresión $\Delta T = \Delta T_B x^3/L_3$, donde ΔT_B es el aumento de temperatura en el extremo B de la barra [consulte la parte (a) de figura].

(a) Deduzca una fórmula para el esfuerzo de compresión σ_c en la barra. (Suponga que el material tiene un módulo de elasticidad E y un coeficiente de dilatación térmica α.)

(b) Ahora modifique la fórmula del inciso (a) si el soporte rígido en A se reemplaza por un soporte elástico en A que tiene una constante de resorte k [consulte la parte (b) de la figura]. Suponga que sólo la barra AB está sometida al aumento de temperatura.

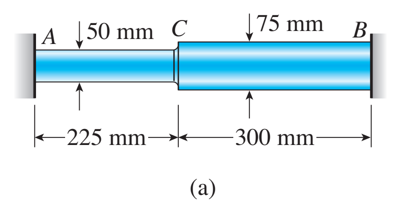


PROB. 2.5.5

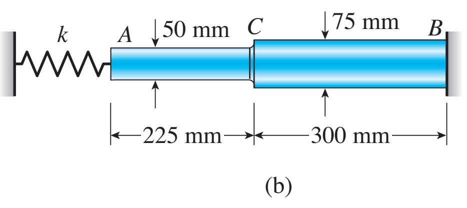
2.5.6 Una barra plástica ACB que tiene dos secciones transversales circulares sólidas se sostiene entre soportes rígidos, como se muestra en la figura. Los diámetros en las partes izquierda y derecha son 50 mm y 75 mm, respectivamente. Las longitudes correspondientes son 225 mm y 300 mm. Además, el módulo de elasticidad E es 6.0 GPa y el coeficiente de dilatación térmica α es 100×10^{-6}/°C. La barra se somete a un aumento de temperatura uniforme de 30°C.

(a) Calcule las siguientes cantidades: (1) la fuerza de compresión N en la barra; (2) el esfuerzo máximo de compresión σ_c y (3) el desplazamiento δ_C del punto C.

(b) Repita el inciso (a) si el soporte rígido en A se reemplaza por un soporte elástico que tiene una constante de resorte k = 50 MN/m [consulte la parte (b) de la figura; suponga que sólo la barra ABC se somete al aumento de temperatura].



(a)

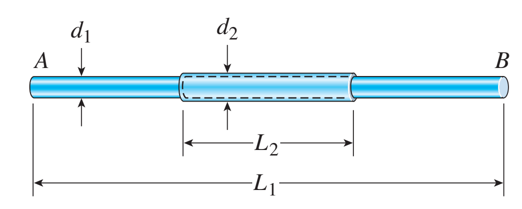


(b)

PROB. 2.5.6

2.5.7 Una barra circular de acero AB (diámetro d_1 = 1.0 in, longitud L_1 = 3.0 ft) tiene un manguito de bronce (diámetro exterior d_2 = 1.25 in, longitud L_2 = 1.0 ft) ajustado por contracción sobre ella de manera que las dos partes están firmemente unidas (consulte la figura).

Calcule el alargamiento total δ de la barra de acero debido al aumento de temperatura ΔT = 500°F. (Las propiedades de los materiales son las siguientes: para el acero, $E_s = 30 \times 10^6$ psi y $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}$/°F; para el bronce, $E_b = 15 \times 10^6$ psi y $\alpha_b = 11 \times 10^{-6}$/°F).

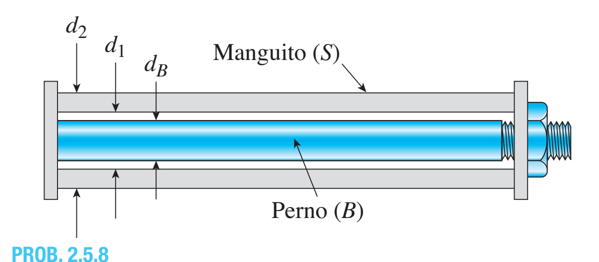


PROB. 2.5.7

2.5.8 Un manguito de latón S está ajustado sobre un perno de acero B (consulte la figura) y la tuerca se aprieta sólo hasta que está firme. El perno tiene un diámetro d_B = 25 mm y el manguito tiene diámetros interior y exterior d_1 = 26 mm y d_2 = 36 mm, respectivamente.

Calcule el aumento de temperatura ΔT necesario para producir un esfuerzo de compresión de 25 MPa en el manguito.

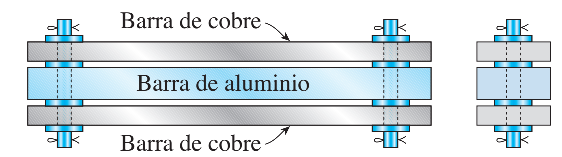
(Use las siguientes propiedades del material: para el manguito, $\alpha_S = 21 \times 10^{-6}/°C$ y $E_S = 100$ GPa; para el perno, $\alpha_B = 10 \times 10^{-6}/°C$ y $E_B = 200$ GPa). (*Sugerencia:* utilice los resultados del ejemplo 2-8.)



PROB. 2.5.8

2.5.9 Barras rectangulares de cobre y aluminio se sostienen por pasadores en sus extremos, como se muestra en la figura. Espaciadores delgados proporcionan una separación entre las barras. Las barras de cobre tienen dimensiones transversales 0.5 in × 2.0 in y la barra de aluminio tiene dimensiones 1.0 in × 2.0 in.

Determine el esfuerzo cortante en los pasadores de 7/16 in de diámetro si la temperatura se aumenta en 100°F. (Para el cobre, $E_c = 18\,000$ ksi y $\alpha_c = 9.5 \times 10^{-6}/°F$; para el aluminio, $E_a = 10\,000$ ksi y $\alpha_a = 13 \times 10^{-6}/°F$). (*Sugerencia:* utilice los resultados del ejemplo 2.8.)

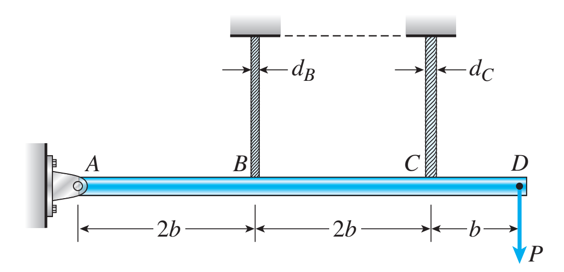


PROB. 2.5.9

***2.5.10** Una barra rígida *ABCD* está articulada en el extremo *A* y soportada por dos cables en los puntos *B* y *C* (consulte la figura). El cable en *B* tiene un diámetro nominal $d_B = 12$ mm y el cable en *C* tiene un diámetro nominal $d_C = 20$ mm. Una carga *P* actúa en el extremo *D* de la barra.

¿Cuál es la carga permisible *P* si la temperatura aumenta en 60°C y se requiere que cada cable tenga un factor de seguridad de al menos 5 contra su carga última?

(*Nota:* los cables tienen módulos de elasticidad efectivos $E = 140$ GPa y el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°C$. Otras propiedades de los cables se encuentran en la tabla 2.1 de la sección 2.2.)



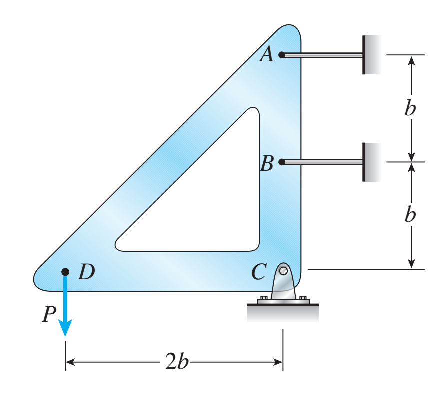
PROB. 2.5.10

***2.5.11** Un marco triangular rígido está articulado en *C* y se sostiene por dos alambres idénticos en los puntos *A* y *B* (consulte la figura). Cada alambre tiene una rigidez axial $EA = 120$ k y un coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}/°F$.

(a) Si una carga vertical $P = 500$ lb actúa en el punto *D*, ¿cuáles son las fuerzas de tensión T_A y T_B en los alambres *A* y *B*, respectivamente?

(b) Si mientras actúa la carga *P* se aumenta la temperatura de los dos alambres en 180°F, ¿cuáles son las fuerzas T_A y T_B?

(c) ¿Qué aumento adicional en la temperatura ocasionará que el alambre *B* se afloje?



PROB. 2.5.11

Desajustes y deformaciones previas

2.5.12 Un alambre de acero *AB* se estira entre dos soportes rígidos (consulte la figura). El esfuerzo previo inicial en el alambre es 42 MPa cuando la temperatura es 20°C.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo σ en el alambre cuando la temperatura baja a 0°C?

(b) ¿A qué temperatura *T* el esfuerzo en el alambre es cero? (Suponga $\alpha = 14 \times 10^{-6}/°C$ y $E = 200$ GPa).



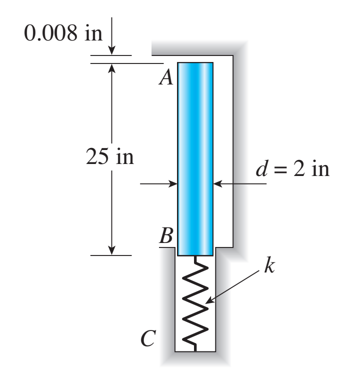
PROB. 2.5.12

2.5.13 Una barra de cobre AB con longitud de 25 in y diámetro de 2 in se coloca en posición vertical a temperatura ambiente con un espacio libre de 0.008 in entre el extremo A y una restricción rígida (consulte la figura). La barra está soportada en el extremo B por un resorte elástico con constante de resorte $k = 1.2 \times 10^6$ lb/in.

(a) Calcule el esfuerzo axial de compresión σ_c en la barra si la temperatura *sólo de la barra* aumenta 50°F. (Para el cobre utilice $\alpha = 9.6 \times 10^{-6}$/°F y $E = 16 \times 10^6$ psi.)

(b) ¿Cuál es la fuerza en el resorte? (No tome en cuenta los efectos de la gravedad.)

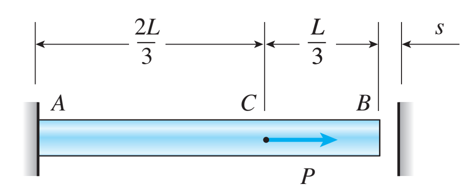
(c) Repita el inciso (a) si $k \to \infty$.



PROB. 2.5.13

2.5.14 Una barra AB que tiene una longitud L y rigidez axial EA está fija en el extremo A (consulte la figura). En el otro extremo existe un espacio libre pequeño con dimensión s entre el extremo de la barra y una superficie rígida. Una carga P actúa sobre la barra en el punto C, que está a dos tercios de la longitud desde el extremo fijo.

Si las reacciones en los soportes producidas por la carga P deben tener una magnitud igual, ¿cuál debe ser la dimensión s del espacio libre?



PROB. 2.5.14

2.5.15 El tubo 2 se ha insertado firmemente en el tubo 1, pero los agujeros para un pasador de conexión no están alineados; hay un espacio libre s. El usuario decide aplicar una fuerza P_1 al tubo 1 *o bien* una fuerza P_2 al tubo 2, la que sea menor de la dos. Determine lo siguiente empleando las propiedades numéricas que se presentan en el recuadro.

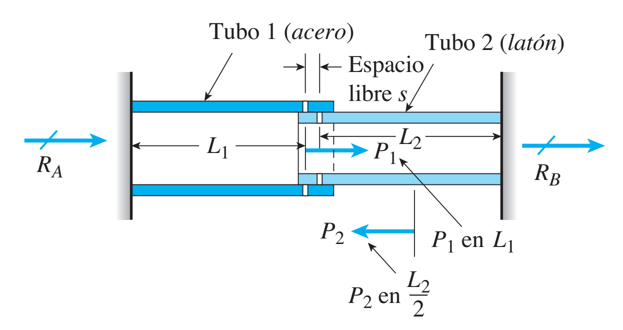
(a) Si sólo se aplica P_1, determine P_1 (kips) necesaria para cerrar el espacio libre s; si luego se inserta un pasador y se remueve P_1, ¿cuáles son las fuerzas de reacción R_A y R_B para este caso de carga?

(b) Si sólo se aplica P_2, determine P_2 (kips) necesaria para cerrar el espacio libre s; si luego se inserta un pasador y se remueve P_2, ¿cuáles son las fuerzas de reacción R_A y R_B para este caso de carga?

(c) ¿Cuál es el esfuerzo *cortante* máximo en los tubos, para las cargas indicadas en los incisos (a) y (b)?

(d) Si se va a aplicar un aumento de temperatura ΔT en toda la estructura para cerrar el espacio libre s (*en lugar de aplicar las fuerzas P_1 y P_2*), determine el ΔT necesario para cerrar el espacio libre. Si se inserta un pasador después que se ha cerrado el espacio libre, ¿cuáles son las fuerzas de reacción R_A y R_B para este caso?

(e) Por último, si la estructura (con el pasador insertado) luego se enfría hasta la temperatura ambiente *original*, ¿cuáles son las fuerzas de reacción R_A y R_B?



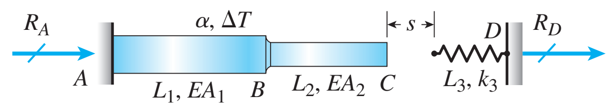
Propiedades numéricas
$E_1 = 30{,}000$ ksi, $E_2 = 14{,}000$ ksi
$\alpha_1 = 6.5 \times 10^{-6}$/°F, $\alpha_2 = 11 \times 10^{-6}$/°F
Espacio libre $s = 0.05$ in
$L_1 = 56$ in, $d_1 = 6$ in, $t_1 = 0.5$ in, $A_1 = 8.64$ in^2
$L_2 = 36$ in, $d_2 = 5$ in, $t_2 = 0.25$ in, $A_2 = 3.73$ in^2

PROB. 2.5.15

2.5.16 Una barra no prismática ABC compuesta de segmentos AB (longitud L_1, área de sección transversal A_1) y BC (longitud L_2, área de sección transversal A_2) está fija en A y libre en C (consulte la figura). El módulo de elasticidad de la barra es E. Existe un espacio libre pequeño con dimensión s entre el extremo de la barra y un resorte elástico con longitud L_3 y constante de resorte k_3. Si sólo la barra ABC (*no el resorte*) se somete a un aumento de temperatura ΔT determine lo siguiente:

(a) Escriba una expresión para las fuerzas de reacción R_A y R_D si el alargamiento de ABC excede la longitud del espacio libre s.

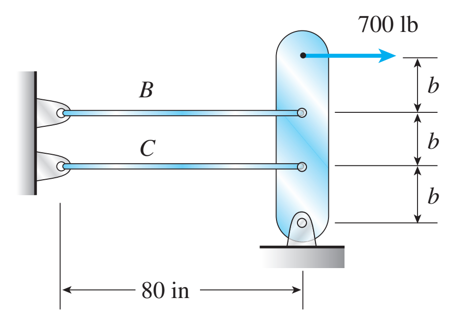
(b) Determine expresiones para los desplazamientos de los puntos B y C si el alargamiento de ABC excede la longitud libre s.



PROB. 2.5.16

2.5.17 Los alambres B y C están sujetos a un soporte en el extremo izquierdo y a una barra rígida articulada en el extremo derecho (consulte la figura). Cada alambre tiene un área de sección transversal $A = 0.03$ in^2 y módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ psi. Cuando la barra está en una posición vertical, la longitud de cada alambre es $L = 80$ in. Sin embargo, antes de sujetarse a la barra, la longitud del alambre B era 79.98 in y la del alambre C era 79.95 in.

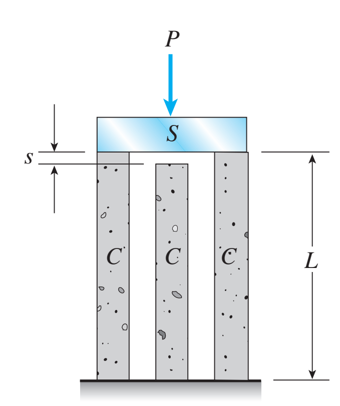
Calcule las fuerzas de tensión T_B y T_C en los alambres por la acción de una fuerza $P = 700$ lb que actúa en el extremo superior de la barra.



PROB. 2.5.17

2.5.18 Una placa rígida de acero está soportada por tres postes de concreto de alta resistencia, cada uno con área de sección transversal efectiva $A = 40\,000$ mm^2 y longitud $L = 2$ m (consulte la figura). Antes de que se aplique la carga, el poste central es más corto que los otros en una cantidad $s = 1.0$ mm.

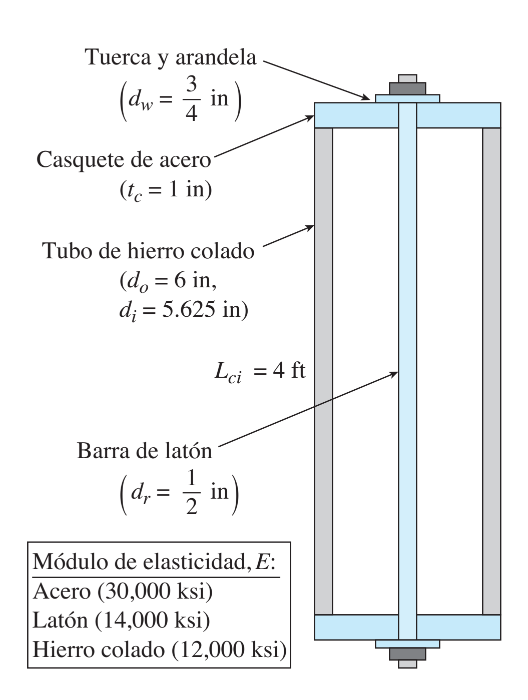
Determine la carga máxima permisible P_{perm} si el esfuerzo de compresión permisible en el concreto es $\sigma_{perm} = 20$ MPa. (Utilice $E = 30$ GPa para el concreto.)



PROB. 2.5.18

2.5.19 Un tubo de hierro colado con casquete es comprimido por una barra de latón, como se muestra. La tuerca se gira hasta que sólo está firme, luego se gira un cuarto de vuelta adicional para precomprimir el tubo de hierro colado. El paso de las roscas del perno es $p = 52$ mils (un mil es un milésimo de pulgada). Utilice las propiedades numéricas dadas.

(a) ¿Qué esfuerzos σ_p y σ_r se producirán en el tubo de hierro colado y la barra de latón, respectivamente, por el cuarto de giro adicional de la tuerca?



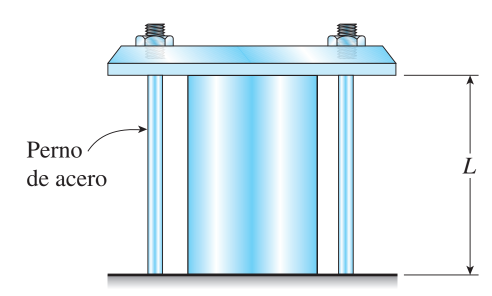
PROB. 2.5.19

(b) Determine el esfuerzo de soporte σ_b bajo la arandela y el esfuerzo cortante τ_c en el casquete de acero.

2.5.20 Un cilindro de plástico está sujeto firmemente entre una placa rígida y una cimentación, mediante dos pernos de acero (consulte la figura).

Determine el esfuerzo de compresión σ_P en el plástico cuando las tuercas en los pernos de acero se aprietan dándoles una vuelta completa.

Los datos para este conjunto son los siguientes: L = 200 mm, paso de las roscas del perno p = 1.0 mm, módulo de elasticidad para el acero E_s = 200 GPa, módulo de elasticidad para el plástico E_p = 7.5 GPa, área de la sección transversal de un perno A_s = 36.0 mm^2 y área del cilindro de plástico A_p = 960 mm^2.



PROBS. 2.5.20 y 2.5.21

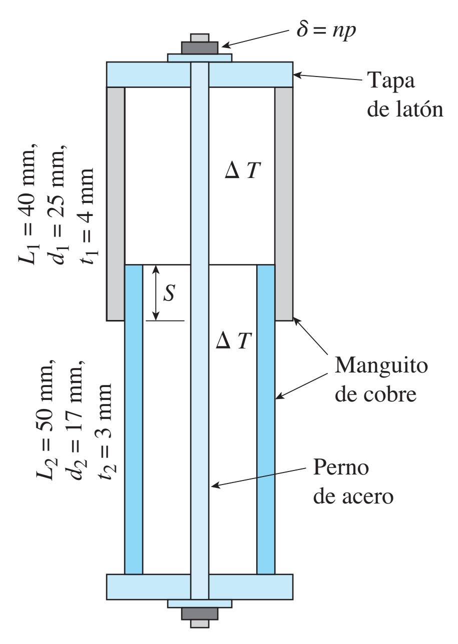
2.5.21 Resuelva el problema anterior si los datos para el conjunto son los siguientes: longitud L = 10 in, paso de las roscas del perno p = 0.058 in, módulo de elasticidad para el acero $E_s = 30 \times 10^6$ psi, módulo de elasticidad para el plástico E_p = 500 ksi, área de la sección transversal de un perno A_s = 0.06 in^2 y área de la sección transversal del cilindro de plástico A_p = 1.5 in^2.

2.5.22 Considere el manguito hecho de dos tubos de cobre unidos con soldadura de estaño-cobre en una distancia s. El manguito tiene tapas de latón en los dos extremos, que están sujetados mediante un perno y una arandela de acero con esta última apretada sólo firmemente al inicio. Luego, se aplican dos "cargas": n = ½ vuelta aplicada a la tuerca; al mismo tiempo se eleva la temperatura en ΔT = 30°C.

(a) Encuentre las fuerzas en el manguito y el perno, P_s y P_b debidas tanto a las dos presiones en el perno como al aumento de temperatura. Para el cobre utilice E_c = 120 GPa y $\alpha_c = 17 \times 10^{-6}$/°C; para el acero utilice E_s = 200 GPa y $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$/°C. El paso de las roscas del perno es p = 1.0 mm. Suponga s = 26 mm y diámetro del perno d_b = 5 mm.

(b) Determine la longitud necesaria de la junta soldada, s, si el esfuerzo cortante en la junta sudada no debe sobrepasar el esfuerzo cortante permisible τ_{aj} = 18.5 MPa.

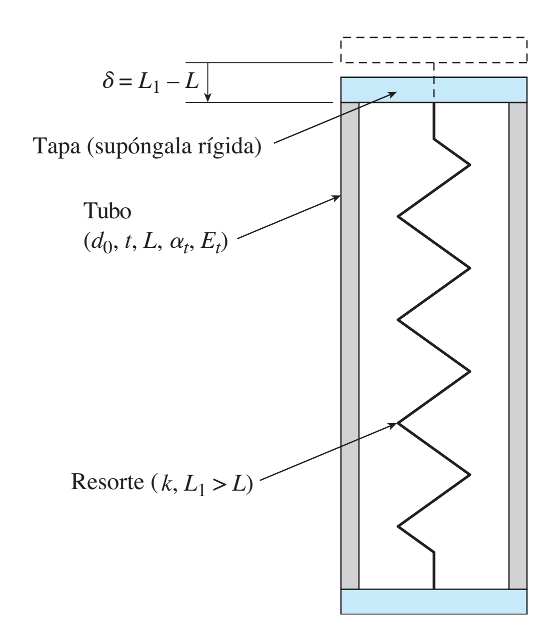
(c) ¿Cuál es el alargamiento final del todo el conjunto debida al cambio de temperatura ΔT y a los presfuerzos iniciales en el perno?



PROB. 2.5.22

2.5.23 Un tubo de polietileno (longitud L) tiene una tapa que cuando está instalada comprime un resorte (con longitud sin deformar $L_1 > L$) en una cantidad $\delta = (L_1 - L)$. No tome en cuenta las deformaciones de la tapa y la base. Utilice la fuerza en la base de los resortes como la redundante. Use las propiedades numéricas que se dan en los recuadros.

(a) ¿Cuál es la fuerza resultante en el resorte, F_k?
(b) ¿Cuál es la fuerza resultante en el tubo, F_t?
(c) ¿Cuál es la longitud final del tubo, L_f?
(d) ¿Qué cambio de temperatura ΔT dentro del tubo resultará en una fuerza cero en el resorte?



Módulo de elasticidad
Tubo de polietileno (E_t = 100 ksi)
Coeficientes de dilatación térmica
$\alpha_t = 80 \times 10^{-6}/°F$, $\alpha_k = 6.5 \times 10^{-6}/°F$

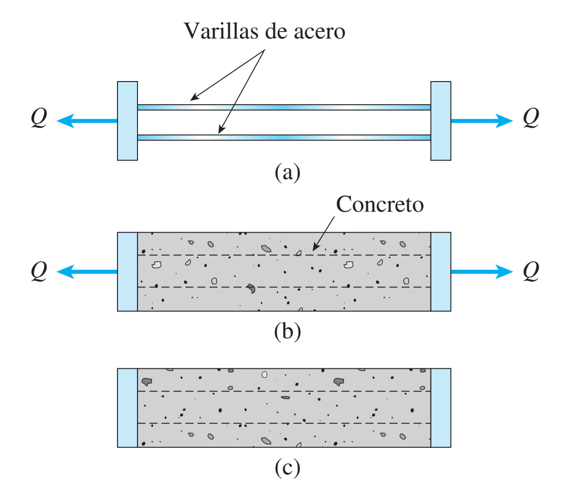
Propiedades y dimensiones
$d_0 = 6$ in $\quad t = \dfrac{1}{8}$ in
$L_1 = 12.125$ in $> L = 12$ in $\quad k = 1.5\ \dfrac{\text{kip}}{\text{in}}$

PROB. 2.5.23

2.5.24 En ocasiones las vigas de concreto preesforzado se fabrican de la siguiente manera. Se estiran varillas de acero de alta resistencia mediante un mecanismo con gatos hidráulicos que aplican una fuerza Q, como se representa en el esquema de la parte (a) de la figura. Luego se vacía concreto alrededor de las varillas para formar una viga, como se muestra en la parte (b) de la figura.

Después que el concreto ha fraguado apropiadamente, se liberan los gatos y se remueve la fuerza Q [consulte la parte (c) de la figura]. De esta manera la viga se deja en una condición preesforzada, con las varillas en tensión y el concreto en compresión.

Supongamos que la fuerza de esfuerzo previo Q produce en las varillas de acero un esfuerzo inicial σ_0 = 620 MPa. Si los módulos de elasticidad del acero y del concreto tienen una razón 12:1 y las áreas de las secciones transversales tienen una razón de 1:50, ¿cuáles son los esfuerzos finales σ_s y σ_c en los dos materiales?



PROB. 2.5.24

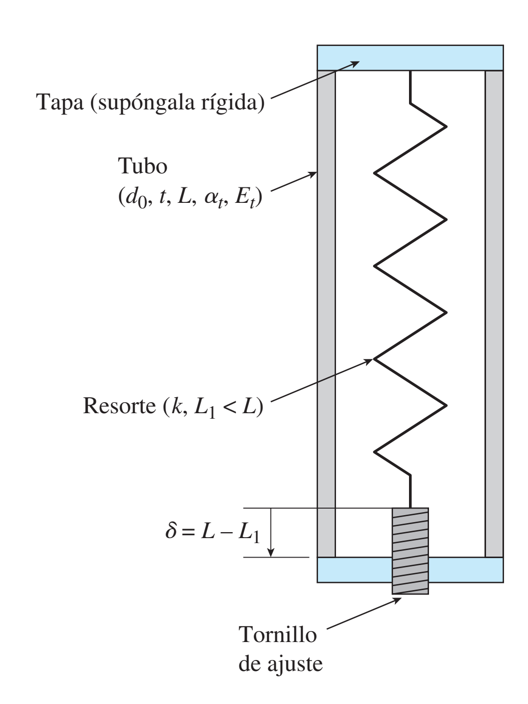
2.5.25 Un tubo de polietileno (longitud L) tiene una tapa que se mantiene en posición por un resorte (con longitud sin deformar $L_1 < L$). Después de instalar la tapa, el resorte se tensa despúes girando un tornillo de ajuste una cantidad δ. No tome en cuenta las deformaciones de la tapa y la base. Utilice la fuerza en la base del resorte como la redundante. Emplee las propiedades numéricas que se dan en los recuadros.

(a) ¿Cuál es la fuerza resultante en el resorte, F_k?

(b) ¿Cuál es la fuerza resultante en el tubo, F_t?

(c) ¿Cuál es la longitud final del tubo, L_f?

(d) ¿Qué cambio de temperatura ΔT dentro del tubo resultará en una fuerza cero en el resorte?



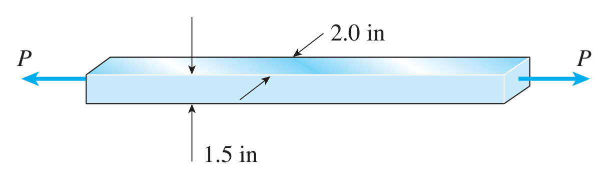
Tornillo

Módulo de elasticidad
Tubo de polietileno (E_t = 100 ksi)
Coeficientes de dilatación térmica
$\alpha_t = 80 \times 10^{-6}/°F$, $\alpha_k = 6.5 \times 10^{-6}/°F$

Propiedades y dimensiones
$d_0 = 6$ in $\quad t = \dfrac{1}{8}$ in
$L = 12$ in $\quad L_1 = 11.875$ in $\quad k = 1.5\ \dfrac{\text{kip}}{\text{in}}$

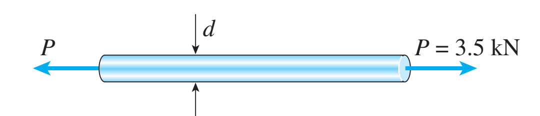
Esfuerzos sobre secciones inclinadas

2.6.1 Una barra de acero con sección transversal rectangular (1.5 in × 2.0 in) soporta una carga de tensión P (consulte la figura). Los esfuerzos permisibles en tensión y cortante son 14,500 psi y 7100 psi, respectivamente. Determine la carga máxima permisible $P_{máx}$.



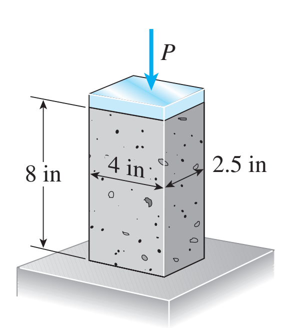
PROB. 2.6.1

2.6.2 Una barra redonda de acero con diámetro d está sometida a una fuerza de tensión P = 3.5 kN (consulte la figura). Los esfuerzos permisibles en tensión y cortante son 118 MPa y 48 MPa, respectivamente. ¿Cuál es el diámetro mínimo permisible $d_{mín}$ de la barra?



PROB. 2.6-2

2.6.3 Un ladrillo estándar (dimensiones 8 in × 4 in × 2.5 in) se comprime en sentido longitudinal mediante una fuerza P, como se ilustra en la figura. Si el esfuerzo cortante último para el ladrillo es 1200 psi y el esfuerzo de compresión último es 3600 psi, ¿qué fuerza $P_{máx}$ se requiere para romper el ladrillo?



PROB. 2.6.3

2.6.4 Un alambre de latón con diámetro d = 2.42 mm se estira firmemente entre dos soportes rígidos de manera que la fuerza de tensión es T = 98 N (consulte la figura). El coeficiente de dilatación térmica del alambre es 19.5×10^{-6}/°C y el módulo de elasticidad es E = 110 GPa.

(a) ¿Cuál es la caída de temperatura máxima permisible ΔT si el esfuerzo cortante permisible en el alambre es 60 MPa?

(b) ¿A qué cambio de temperatura se afloja el alambre?



PROBS. 2.6.4 y 2.6.5

2.6.5 Un alambre de latón con diámetro d = 1/16 in se estira entre dos soportes rígidos con una tensión inicial T de 37 lb (consulte la figura). Suponga que el coeficiente de dilatación térmica es 10.6×10^{-6}/°F y el módulo de elasticidad es 15×10^6 psi).

(a) Si la temperatura se disminuye en 60°F, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el alambre?

(b) Si el esfuerzo cortante permisible es 10 000 psi, ¿cuál es la caída de temperatura máxima permisible?

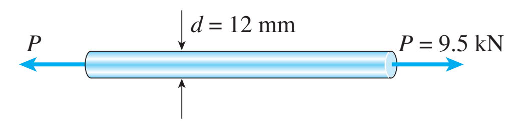
(c) ¿A qué cambio de temperatura ΔT se afloja el alambre?

2.6.6 Una barra de acero con diámetro d = 12 mm se somete a una carga de tensión P = 9.5 kN (consulte la figura).

(a) ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo $\sigma_{máx}$ en la barra?

(b) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$?

(c) Trace un elemento de esfuerzo orientado a 45° con respecto al eje de la barra y muestre todos los esfuerzos que actúan sobre las caras de este elemento.



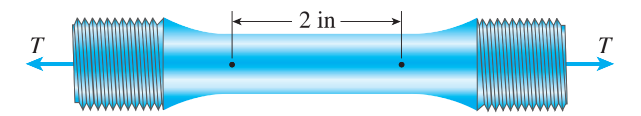
PROB. 2.6.6

2.6.7 Durante un ensayo a la tensión de una probeta de acero dulce (consulte la figura), el extensómetro muestra una alargamiento de 0.00120 in con una longitud calibrada de 2 in. Suponga que el acero se esfuerza debajo del límite de proporcionalidad y que el módulo de elasticidad es $E = 30 \times 10^6$ psi.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo $\sigma_{máx}$ en la probeta?

(b) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$?

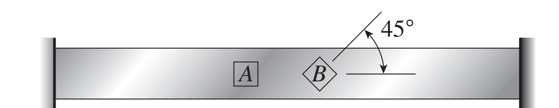
(c) Trace un elemento de esfuerzo orientado a un ángulo de 45° con respecto al eje de la barra y muestre todos los esfuerzos que actúan sobre las caras de este elemento.



PROB. 2.6.7

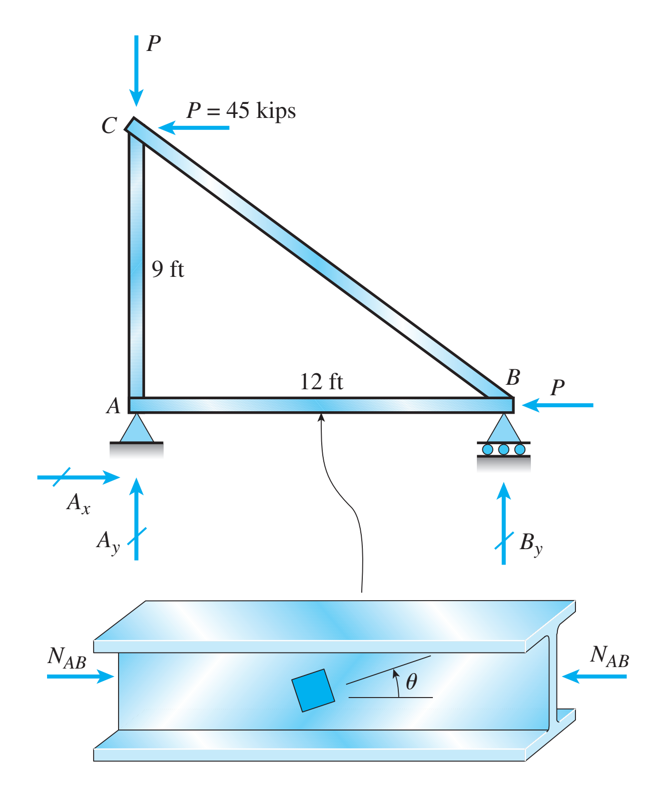
2.6.8 Una barra de cobre con sección transversal rectangular está sostenida sin aplicar ningún esfuerzo entre dos soportes rígidos (consulte la figura). Luego se aumenta la temperatura de la barra 50°C.

Determine los esfuerzos sobre todas las caras de los elementos A y B, y muestre estos esfuerzos en dibujos de los elementos. (Suponga $\alpha = 17.5 \times 10^{-6}/°C$ y $E = 120$ GPa.)



PROB. 2.6.8

2.6.9 La cuerda inferior AB de una armadura pequeña ABC (consulte la figura) está fabricada con un perfil de acero de patín ancho W8 × 28. El área de su sección transversal es $A = 8.25$ in^2 [apéndice E, tabla E-1(a)] y cada una de las tres cargas aplicadas son $P = 45$ k. Primero, encuentre la fuerza en el elemento N_{AB}; luego, determine los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre todas las caras de los elementos de esfuerzo ubicados en el alma del elemento AB y orientados (a) en un ángulo $\theta = 0°$, (b) en un ángulo $\theta = 30°$ y (c) en ángulo $\theta = 45°$. En cada caso, muestre los esfuerzos en un diagrama de un elemento apropiadamente orientado.

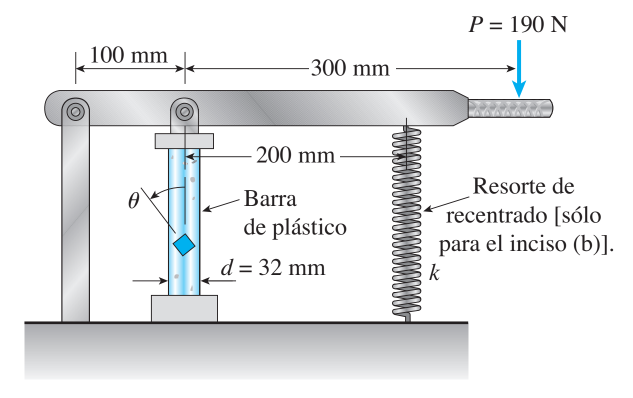


PROB. 2.6.9

2.6.10 Una barra de plástico con diámetro $d = 32$ mm se comprime en un dispositivo de prueba mediante una fuerza $P = 190$ N aplicada como se muestra en la figura.

(a) Determine los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre todas las caras de los elementos orientados (1) en un ángulo $\theta = 0°$, (2) en un ángulo $\theta = 22.5°$ y (3) en un ángulo $\theta = 45°$. En cada caso, muestre los esfuerzos en un bosquejo de un elemento apropiadamente orientado. ¿Cuáles son los valores de $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$?

(b) Encuentre $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$ en la barra de plástico si se inserta un resorte de recentrado con rigidez k en el dispositivo de prueba, como se muestra en la figura. La rigidez del resorte es $1/6$ de la rigidez axial de la barra de plástico.



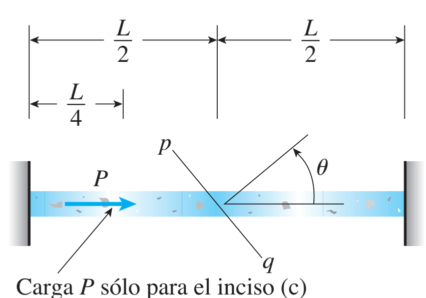
PROB. 2.6.10

2.6.11 Una barra de plástico con sección transversal rectangular ($b = 1.5$ in y $h = 3$ in) está ajustada firmemente entre soportes rígidos a temperatura ambiente (68°F) pero sin esfuerzo inicial (consulte la figura). Cuando la temperatura de la barra se aumenta a 160°F, el esfuerzo de compresión sobre un plano inclinado *pq* a la mitad del claro alcanza un valor de 1700 psi.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo cortante sobre el plano *pq*? (Suponga $\alpha = 60 \times 10^{-6}$/°F y $E = 450 \times 10^3$ psi.)

(b) Dibuje un elemento de esfuerzo orientado con respecto al plano *pq* y muestre los esfuerzos que actúan sobre todas las caras de este elemento.

(c) Si el esfuerzo normal permisible es 3400 psi y el esfuerzo cortante permisible es 1650 psi, ¿cuál es la carga máxima *P* (*en la dirección* +x) que se puede agregar en el punto a un cuarto del claro (además de los efectos térmicos anteriores) sin rebasar los valores del esfuerzo permisible en la barra?



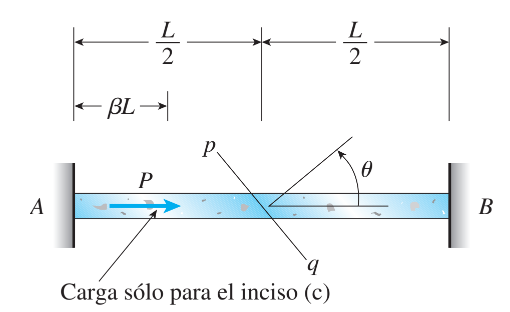
PROB. 2.6.11

2.6.12 Una barra de cobre con sección transversal rectangular ($b = 18$ mm y $h = 40$ mm) se sostiene firmemente (pero sin ningún esfuerzo inicial) entre dos soportes rígidos (consulte la figura). Los esfuerzos permisibles sobre el plano inclinado *pq* a la mitad del claro, para el cual $\theta = 55°$, se especifican como 60 MPa en compresión y 30 MPa en cortante.

(a) ¿Cuál es el aumento de temperatura máximo permisible ΔT si no se deben rebasar los esfuerzos permisibles sobre el plano *pq*? (Suponga $\alpha = 17 \times 10^{-6}$/°C y $E = 120$ GPa).

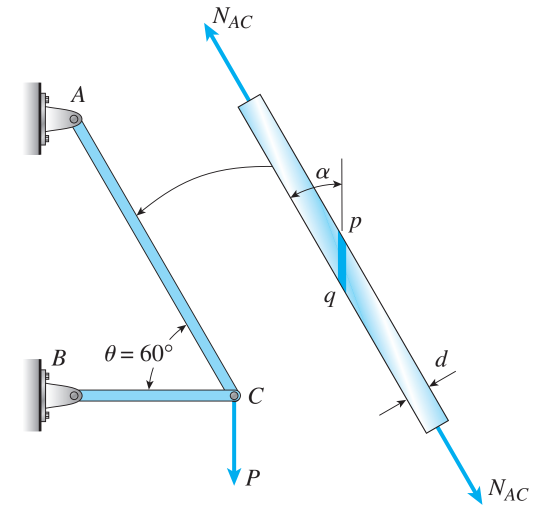
(b) Si la temperatura aumenta en la cantidad máxima permisible, ¿cuáles son los esfuerzos en el plano *pq*?

(c) Si la temperatura aumenta $\Delta T = 28$°C, ¿qué tan alejada hacia la derecha del extremo *A* (distancia βL expresada como una fracción de la longitud *L*) se puede aplicar la carga $P = 15$ kN sin rebasar los valores del esfuerzo permisible en la barra? Suponga que $\sigma_a = 75$ MPa y $\tau_a = 35$ MPa.



PROB. 2.6.12

2.6.13 Una barra circular de latón con diámetro *d* es el elemento *AC* en la armadura *ABC* que tiene una carga $P = 5000$ lb aplicada en el nodo *C*. La barra *AC* se compone de dos segmentos soldados en un plano *pq* formando un ángulo $\alpha = 36°$ con el eje de la barra (consulte la figura). Los esfuerzos permisibles en el latón son 13,500 psi en tensión y 6500 en cortante. En la junta soldada, los esfuerzos permisibles son 6000 psi en tensión y 3000 psi en cortante. ¿Cuál es la fuerza de tensión N_{AC} en la barra *AC*? ¿Cuál es el diámetro mínimo necesario $d_{mín}$ de la barra *AC*?



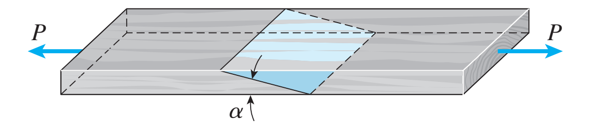
PROB. 2.6.13

2.6.14 Dos tableros se unen con pegamento mediante una junta empalmada, como se muestra en la figura. Para fines de cortar y pegar, el ángulo α entre el plano de la junta y las caras de los tableros deben estar entre 10° y 40°. Con una carga de tensión *P*, el esfuerzo normal en los tableros es 4.9 MPa.

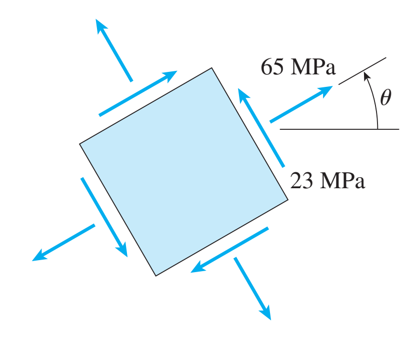
(a) ¿Cuáles son los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre la junta pegada si $\alpha = 20°$?

(b) Si el esfuerzo cortante permisible sobre la junta es 2.25 MPa, ¿cuál es el valor máximo permisible del ángulo α?

(c) ¿Para qué ángulo α el esfuerzo cortante sobre la junta pegada será numéricamente igual al doble del esfuerzo normal sobre la junta?



PROB. 2.6.14

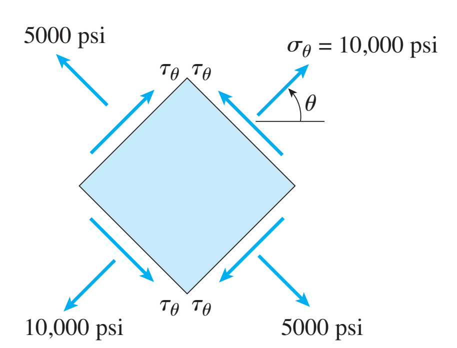


PROB. 2.6.16

2.6.15 Sobre los lados de un elemento de esfuerzo cortado de una barra en esfuerzo uniaxial actúan esfuerzos de tensión de 10,000 psi y 5000 psi, como se muestra en la figura.

(a) Determine el ángulo θ y el esfuerzo cortante τ_θ y muestre todos los esfuerzos en un diagrama del elemento.

(b) Determine el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el material.

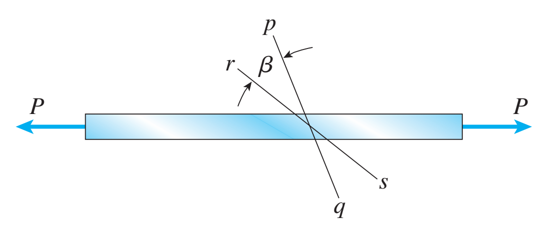


PROB. 2.6.15

2.6.16 Una barra prismática se somete a una fuerza axial que produce un esfuerzo de tensión $\sigma_\theta = 65$ MPa y un esfuerzo cortante $\tau_\theta = 23$ MPa sobre cierto plano inclinado (consulte la figura). Determine los esfuerzos que actúan sobre todas las caras de un elemento de esfuerzo orientado en un ángulo $\theta = 30°$ y muestre los esfuerzos en un diagrama del elemento.

***2.6.17** El esfuerzo normal sobre el plano *pq* de una barra prismática en tensión (consulte la figura) es 7500 psi. En el plano *rs* que forma un ángulo $\beta = 30°$ con el plano *pq*, el esfuerzo es 2500 psi.

Determine el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en la barra.

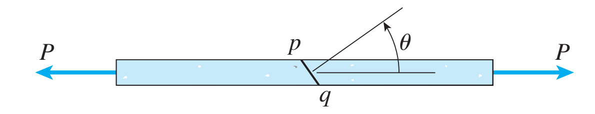


PROB. 2.6.17

***2.6.18** Se quiere construir un elemento en tensión con dos piezas de plástico pegadas a lo largo del plano *pq* (consulte la figura). Para fines de cortar y pegar, el ángulo θ debe estar entre 25° y 45°. Los esfuerzos permisibles sobre la junta pegada en tensión y cortante son 5.0 MPa y 3.0 MPa, respectivamente.

(a) Determine el ángulo θ de manera que la barra soporte la mayor carga posible *P*. (Suponga que la resistencia de la junta pegada controla el diseño).

(b) Determine la carga máxima permisible $P_{\text{máx}}$ si el área de la sección transversal de la barra es 225 mm^2.

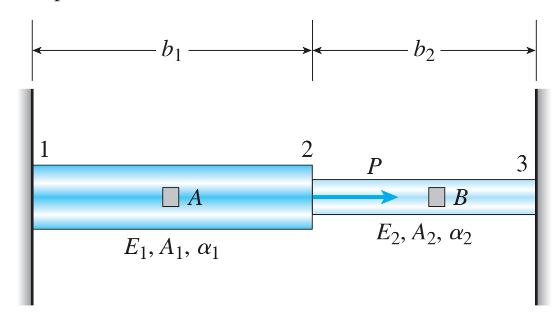


PROB. 2.6.18

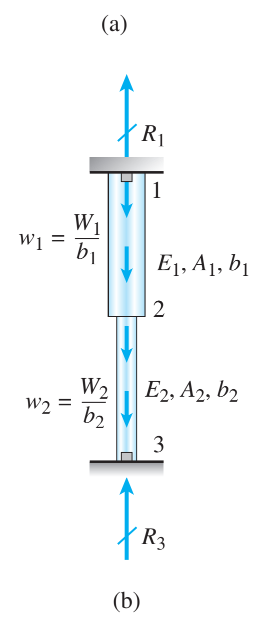
2.6.19 Una barra no prismática 1-2-3 con sección área A transversal de dos materiales se sostiene firmemente (pero sin ningún esfuerzo inicial) entre soportes rígidos (consulte la figura). Los esfuerzos permisibles en compresión y cortante se especifican como σ_a y τ_a, respectivamente. Utilice los datos numéricos siguientes. (*Datos*: $b_1 = 4b_2/3 = b$; $A_1 = 2A_2 = A$; $6 = 8$ in, $\gamma = 490$ lb ft^3, $E_1 = 3E_2/4 = E$; $\alpha_1 = 5\alpha_2/4 = \alpha$; $\sigma_{a1} = 4\sigma_{a2}/3 = \sigma_a$, $\tau_{a1} = 2\sigma_{a1}/5$, $\tau_{a2} = 3\sigma_{a2}/5$; sea $\sigma_a = 11$ksi, $P = 12$ kips, $A = 6$ in^2, $E = 30{,}000$ ksi, $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/°$F; $\gamma_1 = 5\gamma_2/3 = \gamma$).

(a) Si la carga P se aplica en la junta 2 como se muestra en la figura, formule una expresión para el aumento de temperatura máximo permisible $\Delta T_{máx}$ tal que no se sobrepasen los esfuerzos permisibles en cualquier ubicación A o B.

(b) Si se remueve la carga P y ahora la barra se gira a una posición vertical donde cuelga bajo su peso propio (intensidad de carga $= w_1$ en el segmento 1-2 y w_2 en el segmento 2-3), formule una expresión para el aumento de temperatura máximo permisible $\Delta T_{máx}$ de manera que no se excedan los esfuerzos permisibles en cualquier ubicación 1 o 3. Las ubicaciones 1 y 3 están a una distancia corta de los soportes 1 y 3, respectivamente.



(a)



(b)

PROB. 2.6.19

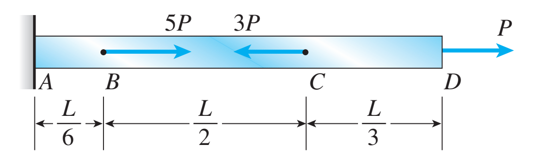
Energía de deformación

Al resolver los problemas de la sección 2.7, suponga que el material se comporta de manera linealmente elástica.

2.7.1 Una barra prismática AD con longitud L, área de su sección transversal A y módulo de elasticidad E se somete a cargas $5P$, $3P$ y P que actúan en los puntos B, C y D, respectivamente (consulte la figura). Los segmentos AB, BC y CD tienen longitudes $L/6$, $L/2$ y $L/3$, respectivamente.

(a) Obtenga una fórmula para la energía de deformación U de la barra.

(b) Calcule la energía de deformación si $P = 6$ k, $L = 52$ in, $A = 2.76$ in^2 y el material es aluminio con $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

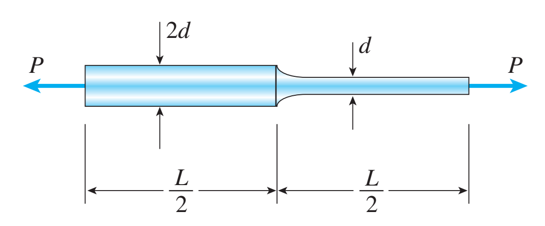


PROB. 2.7.1

2.7.2 En la figura se muestra una barra con sección transversal circular que tiene dos diámetros distintos d y $2d$. La longitud de cada segmento de la barra es $L/2$ y el módulo de elasticidad del material es E.

(a) Obtenga una fórmula para la energía de deformación U de la barra debida a la carga P.

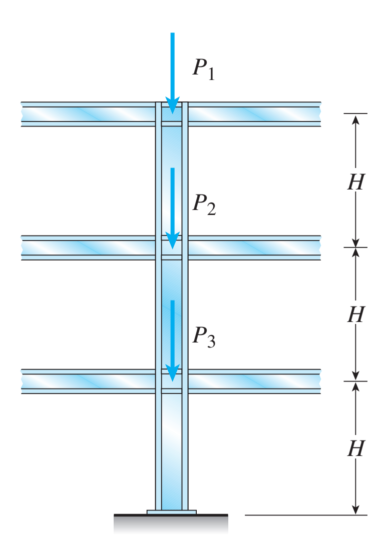
(b) Calcule la energía de deformación si la carga $P = 27$ kN, la longitud $L = 600$ mm, el diámetro $d = 40$ mm y el material es latón con $E = 105$ GPa.



PROB. 2.7.2

2.7.3 Una columna con altura de tres pisos en un edificio soporta cargas del techo y del entrepiso como se muestra en la figura. La altura de un piso H es 10.5 ft, el área de la sección transversal A de la columna es 15.5 in^2 y el módulo de elasticidad E del acero es 30×10^6 psi.

Calcule la energía de deformación U de la columna suponiendo $P_1 = 40$ K y $P_2 = P_3 = 60$ k.



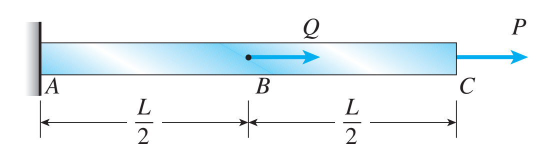
PROB. 2.7.3

2.7.4 La barra *ABC* que se muestra en la figura está cargada por una fuerza *P* que actúa en el extremo *C* y por una fuerza *Q* que actúa en el punto medio *B*. La barra tiene una rigidez axial constante *EA*.

(a) Determine la energía de deformación U_1 de la barra cuando sólo actúa la fuerza P ($Q = 0$).

(b) Determine la energía de deformación U_2 cuando sólo actúa la carga Q ($P = 0$).

(c) Determine la energía de deformación U_3 cuando las fuerzas *P* y *Q* actúan simultáneamente sobre la barra.



PROB. 2.7.4

2.7.5 Determine la energía de deformación por unidad de volumen (unidades de psi) y la energía de deformación por unidad de peso (unidades de in) que se pueden almacenar en cada uno de los materiales que se presentan en la tabla siguiente, suponiendo que el material se esfuerza hasta el límite proporcional.

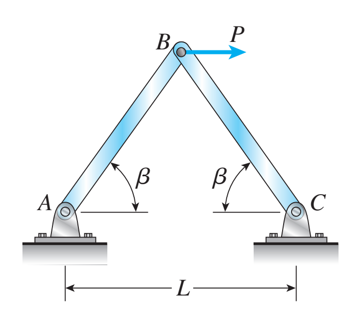
DATOS PARA EL PROBLEMA 2.7.5

Material	Peso específico (lb/in^3)	Módulo de elasticidad (ksi)	Límite de proporcionalidad (psi)
Acero dulce	0.284	30,000	36,000
Acero para herramientas	0.284	30,000	75,000
Aluminio	0.0984	10,500	60,000
Caucho (suave)	0.0405	0.300	300

2.7.6 La armadura *ABC* que se muestra en la figura está sometida a una carga horizontal *P* en el nodo *B*. Las dos barras son idénticas con un área de su sección transversal *A* y módulo de elasticidad *E*.

(a) Determine la energía de deformación *U* de la armadura si el ángulo $\beta = 60°$.

(b) Determine el desplazamiento horizontal δ_B del nodo *B* igualando la energía de deformación de la armadura con el trabajo realizado por la carga.



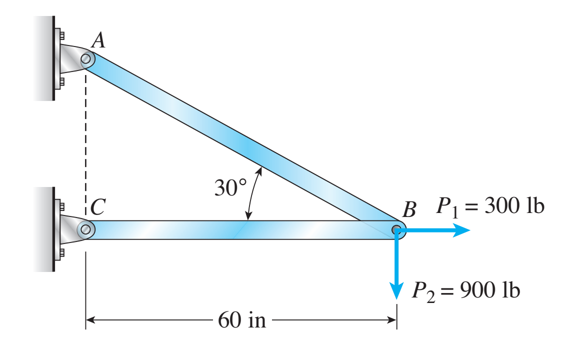
PROB. 2.7.6

2.7.7 La armadura *ABC* que se muestra en la figura soporta una carga horizontal $P_1 = 300$ lb y una carga vertical $P_2 = 900$ lb. Las dos barras tienen un área de su sección transversal $A = 2.4\ in^2$ y están hechas de acero con $E = 30 \times 10^6$ psi.

(a) Determine la energía de deformación U_1 de la armadura cuando sólo actúa la carga P_1 ($P_2 = 0$).

(b) Determine la energía de deformación U_2 cuando sólo actúa la carga P_2 ($P_1 = 0$).

(c) Determine la energía de deformación U_3 cuando las dos cargas actúan simultáneamente.



PROB. 2.7.7

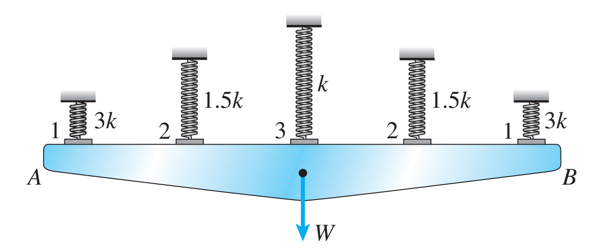
2.7.8 La estructura estáticamente indeterminada que se muestra en la figura consiste de una barra rígida horizontal AB soportada por cinco resortes igualmente espaciados. Los resortes 1, 2 y 3 tienen rigideces $3k$, $1.5k$ y k, respectivamente. Cuando no están sometidos a una carga, los extremos inferiores de los cinco resortes se encuentran a lo largo de una línea horizontal. La barra AB, que tiene un peso W, ocasiona que los resortes se estiren en una cantidad δ.

(a) Obtenga una fórmula para la energía de deformación total U de los resortes en términos del desplazamiento hacia abajo δ de la barra.

(b) Obtenga una fórmula para el desplazamiento δ igualando la energía de deformación de los resortes con el trabajo realizado por el peso W.

(c) Determine las fuerzas F_1, F_2 y F_3 en los resortes.

(d) Determine la energía de deformación U, el desplazamiento δ y las fuerzas en los resortes si $W = 600$ N y $k = 7.5$ N/mm.

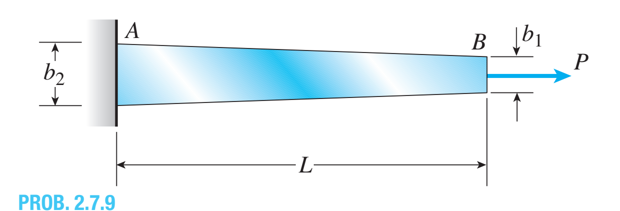


PROB. 2.7.8

2.7.9 Una barra ligeramente ahusada AB con sección transversal rectangular y longitud L se somete a una fuerza P (consulte la figura). El ancho de la barra varía uniformemente de b_2 en el extremo A a b_1 en el extremo B. El espesor t es constante.

(a) Determine la energía de deformación U de la barra.

(b) Determine el alargamiento δ de la barra igualando la energía de deformación con el trabajo realizado por la fuerza P.



PROB. 2.7.9

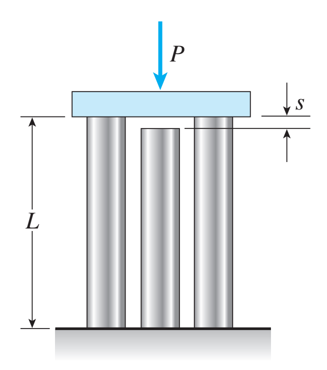
***2.7.10** Una carga de compresión P se transmite mediante una placa rígida a tres barras de una aleación de magnesio que son idénticas excepto que inicialmente la barra central es ligeramente más corta que las otras barras (consulte la figura). Las dimensiones y las propiedades del conjunto son las siguientes: $L = 1.0$ m, área de la sección transversal de cada barra $A = 3000$ mm^2 y módulo de elasticidad $E = 45$ GPa y el espacio libre $s = 1.0$ mm.

(a) Calcule la carga P_1 necesaria para cerrar el espacio libre.

(b) Calcule el desplazamiento hacia abajo δ de la placa rígida cuando $P = 400$ kN.

(c) Calcule la energía de deformación total U de las tres barras cuando $P = 400$ kN.

(d) Explique por qué la energía de deformación U *no* es igual a $P/2$. (*Sugerencia:* trace un diagrama de carga-desplazamiento.)



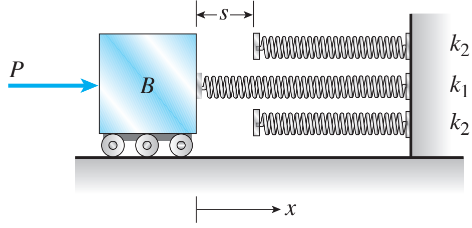
PROB. 2.7.10

****2.7.11** El bloque B es empujado contra tres resortes por una fuerza P (consulte la figura). El resorte central tiene una rigidez k_1 y los resortes exteriores tienen una rigidez k_2. Al inicio, los resortes están sin esfuerzo y el resorte central es más largo que los exteriores (la diferencia de longitud se denota con s).

(a) Trace un diagrama fuerza-desplazamiento con la fuerza P como la ordenada y el desplazamiento x del bloque como la abscisa.

(b) Del diagrama, determine la energía de deformación U_1 de los resortes cuando $x = 2s$.

(c) Explique por qué la energía de deformación U_1 no es igual a $P\delta/2$, donde $\delta = 2s$.



PROB. 2.7.11

*****2.7.12** Una cuerda elástica que se comporta de manera linealmente elástica tiene una longitud sin estirar $L_0 = 760$ mm y una rigidez $k = 140$ N/m. La cuerda está sujeta a dos

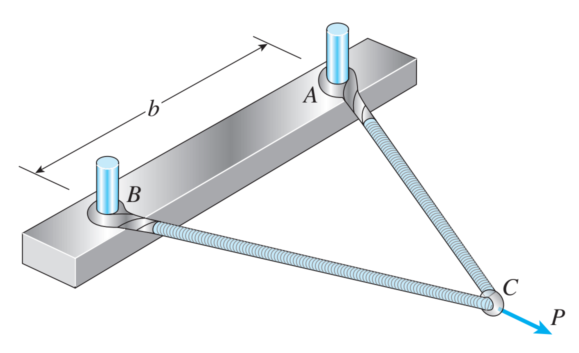
espigas, separadas una distancia $b = 380$ mm y jaladas en su punto medio por una fuerza $P = 80$ N (consulte la figura).

(a) ¿Cuánta energía de deformación U está almacenada en la cuerda?

(b) ¿Cuál es el desplazamiento δ_C del punto donde se aplica la carga?

(c) Compare la energía de deformación U con la cantidad $P\delta_C/2$.

(*Nota:* el alargamiento de la cuerda *no* es pequeño comparado con su longitud original.)



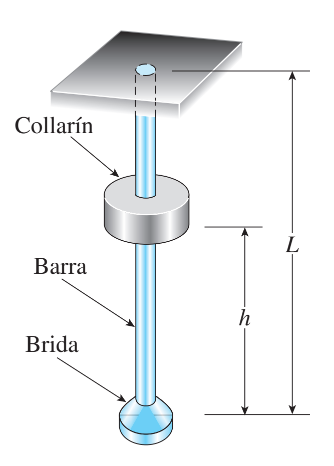
PROB. 2.7.12

Carga de impacto

Los problemas de la sección 2.8 deben resolverse con base en las suposiciones e idealizaciones descritas en el texto. En particular, suponga que el material se comporta de manera linealmente elástica y que no se pierde energía durante el impacto.

2.8.1 Un collarín deslizante con peso $W = 150$ lb cae desde una altura $h = 2.0$ in hacia una brida ubicada en el fondo de una barra esbelta vertical (consulte la figura). La barra tiene una longitud $L = 4.0$ ft, área de su sección transversal $A = 0.75$ in^2 y módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ psi.

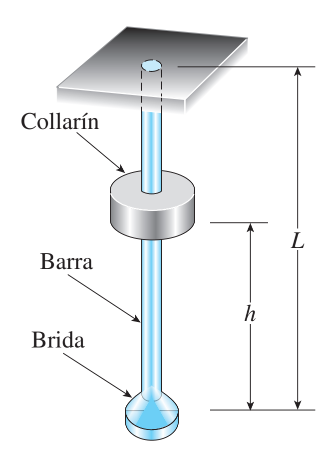
Calcule las cantidades siguientes: (a) el desplazamiento máximo hacia abajo de la brida, (b) el esfuerzo de tensión máximo en la barra y (c) el factor de impacto.



PROB. 2.8.1

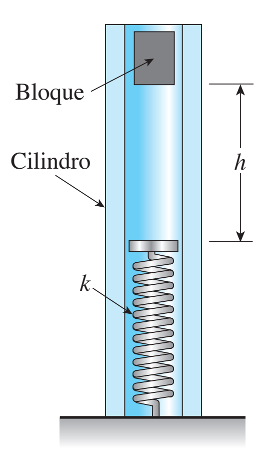
2.8.2 Resuelva el problema anterior si el collarín tiene una masa $M = 80$ kg, la altura es $h = 0.5$ m, la longitud es $L = 3.0$ m, el área de la sección transversal es $A = 350$ mm^2 y el módulo de elasticidad es $E = 170$ GPa.

2.8.3 Resuelva el problema 2.8.1 si el collarín tiene un peso $W = 50$ lb, la altura es $h = 2.0$ in, la longitud es $L = 3.0$ ft, el área de la sección transversal es $A = 0.25$ in^2 y el módulo de elasticidad es $E = 30{,}000$ ksi.



PROBS. 2.8.2 y 2.8.3

2.8.4 Un bloque que pesa $W = 5.0$ N cae dentro de un cilindro desde una altura $h = 200$ mm hacia un resorte que tiene rigidez $k = 90$ N/m (consulte la figura). (a) Determine el acortamiento máximo del resorte debido al impacto y (b) determine el factor de impacto.

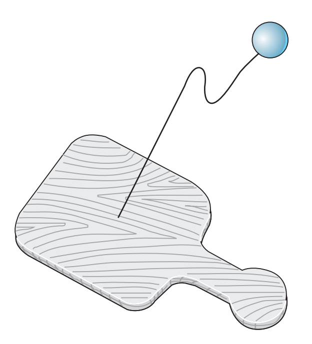


PROBS. 2.8.4 y 2.8.5

2.8.5 Resuelva el problema anterior si el bloque pesa W = 1.0 lb, h = 12 in y k = 0.5 lb/in.

2.8.6 Una pelota pequeña de caucho (peso W = 450 mN) está sujeta a una paleta de madera por una cuerda de caucho (consulte la figura). La longitud natural de la cuerda es L_0 = 200 mm, su área de la sección transversal es A = 1.6 mm^2 y su módulo de elasticidad es E = 2.0 MPa. Después de ser golpeada por la paleta, la pelota estira la cuerda hasta una longitud total L_1 = 900 mm.

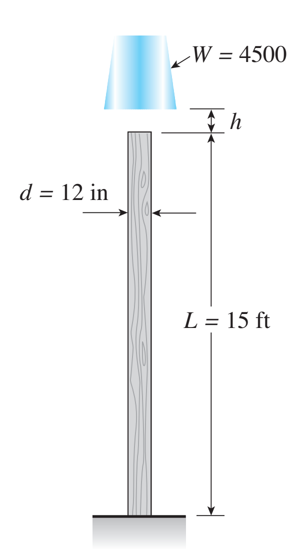
¿Cuál es la velocidad v de la pelota cuando rebota sobre la paleta? (Suponga un comportamiento linealmente elástico de la cuerda de caucho y no tome en cuenta la energía potencial debida a cualquier cambio en la elevación de la pelota.)



PROB. 2.8.6

2.8.7 Un peso W = 4500 lb cae desde una altura h sobre un poste vertical de madera que tiene longitud L = 15 ft, diámetro d = 12 in y módulo de elasticidad E = 1.6 × 10^6 psi (consulte la figura).

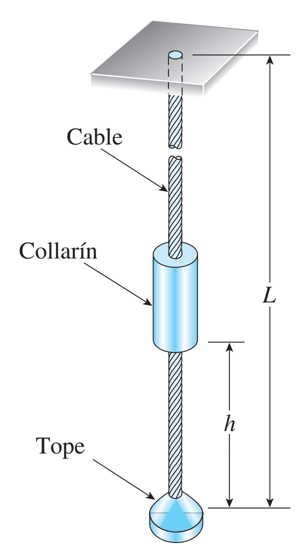
Si el esfuerzo permisible en la madera para una carga de impacto es 2500 psi, ¿cuál es la altura h máxima permisible?



PROB. 2.8.7

2.8.8 Un cable con un tope en el fondo cuelga verticalmente de su extremo superior (consulte la figura). El cable tiene un área de la sección transversal efectiva A = 40 mm^2 y un módulo de elasticidad efectivo E = 130 GPa. Un collarín con masa M = 35 kg cae desde una altura h = 1.0 m sobre el tope.

Si el esfuerzo permisible en el cable para una carga de impacto es 500 MPa, ¿cuál es la longitud mínima permisible L del cable?

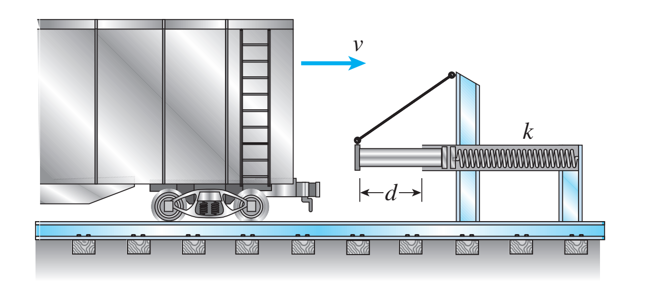


PROBS. 2.8.8 y 2.8.9

2.8.9 Resuelva el problema anterior si el collarín tiene un peso W = 100 lb, h = 45 in, A = 0.080 in^2, E = 21 × 10^6 psi y el esfuerzo permisible es 70 ksi.

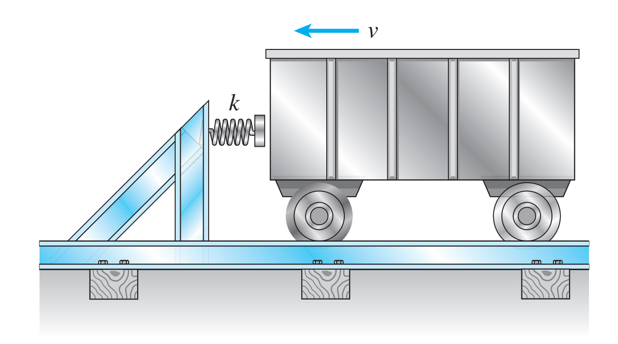
2.8.10 Un poste parachoques al final de un vía de ferrocarril en un patio de trenes tiene una constante de resorte k = 8.0 MN/m (consulte la figura). El desplazamiento máximo posible d del extremo de la placa de impacto es 450 mm.

¿Cuál es la velocidad máxima $v_{máx}$ que un vagón de ferrocarril con peso W = 545 kN puede tener sin dañar el poste al golpearlo?



PROB. 2.8.10

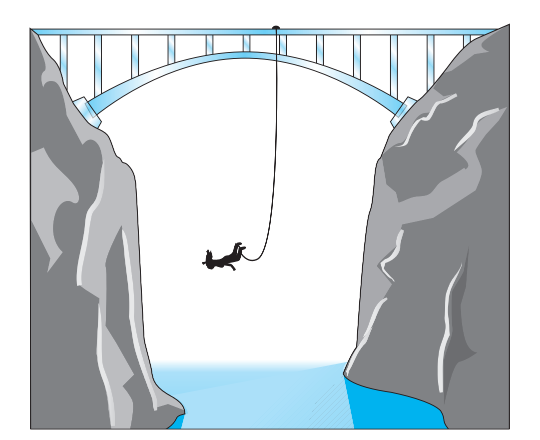
2.8.11 Un parachoques para vagones de mina se construye con un resorte con rigidez $k = 1120$ lb/in (consulte la figura). Si un vagón con peso de 3450 lb viaja a una velocidad $v = 7$ mph cuando golpea el resorte, ¿cuál es el acortamiento máximo del resorte?



PROB. 2.8.11

***2.8.12** Un saltador con cuerda elástica que tiene una masa de 55 kg salta desde un puente, interrumpiendo su caída con una cuerda larga elástica contra impactos que tiene una rigidez axial $EA = 2.3$ kN (consulte la figura).

Si el punto de salto está a 60 m arriba del agua y si se desea mantener una distancia libre de 10 m entre el saltador y el agua, ¿qué longitud L de la cuerda debe emplearse?

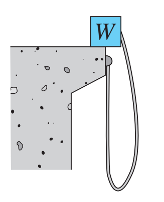


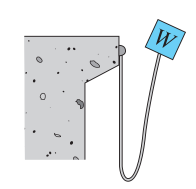
PROB. 2.8.12

***2.8.13** Un peso W está sobre la parte superior de una pared y está sujeto al extremo de una cuerda muy flexible que tiene un área de su sección transversal A y un módulo de elasticidad E (consulte la figura). El otro extremo de la cuerda está sujeto firmemente a la pared. Luego el peso se empuja y cae libremente una distancia igual a la longitud total de la cuerda.

(a) Determine una fórmula para el factor de impacto.

(b) Evalúe el factor de impacto si el peso, cuando cuelga estáticamente, estira la cuerda 2.5 por ciento de su longitud original.

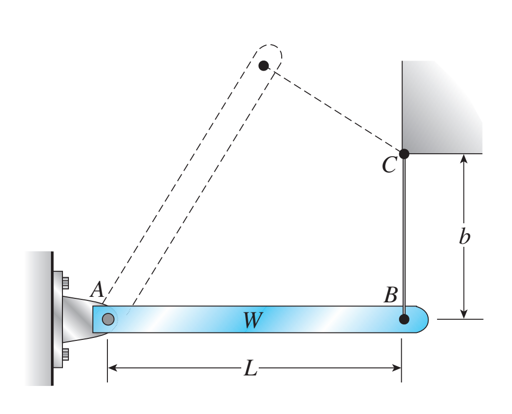




PROB. 2.8.13

****2.8.14** Una barra rígida AB con masa $M = 1.0$ kg y longitud $L = 0.5$ m está articulada en el extremo A y soportada en el extremo B por una cuerda de nailon BC (consulte la figura). La cuerda tiene un área de su sección transversal $A = 30$ mm^2, longitud $b = 0.25$ m y módulo de elasticidad $E = 2.1$ GPa.

Si la barra se eleva hasta su altura máxima y luego se deja caer, ¿cuál es el esfuerzo máximo en la cuerda?



PROB. 2.8.14

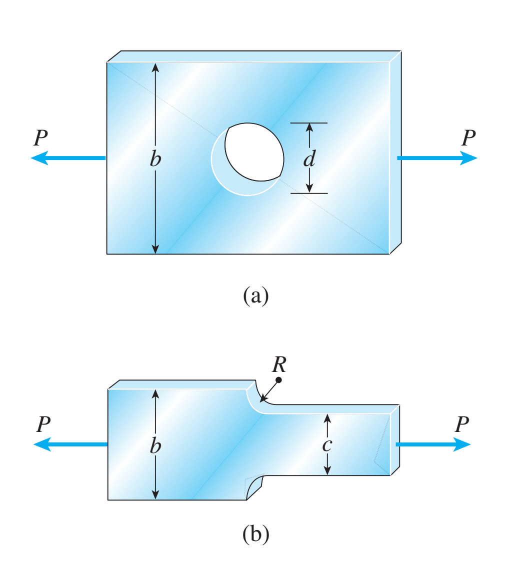
Concentraciones de esfuerzos

Los problemas de la sección 2.10 se deben resolver considerando los factores de concentración de esfuerzos y suponiendo un comportamiento linealmente elástico.

2.10.1 Las barras planas que se muestran en las partes (a) y (b) de la figura están sometidas a fuerzas de tensión $P = 3.0$ k. Cada barra tiene un espesor $t = 0.25$ in.

(a) Para la barra con un agujero circular, determine los esfuerzos máximos para diámetros de los agujeros $d = 1$ in y $d = 2$ in. Si el ancho $b = 6.0$ in.

(b) Para la barra escalonada con filetes en los rebordes, determine los esfuerzos máximos para radios de los filetes $R = 0.25$ in y $R = 0.5$ in si los anchos de la barra son $b = 4.0$ in y $c = 2.5$ in.



PROBS. 2.10.1 y 2.10.2

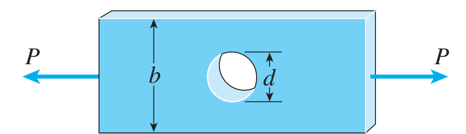
2.10.2 Las barras planas que se muestran en las partes (a) y (b) de la figura están sometidas a fuerzas de tensión $P = 2.5$ kN. Cada barra tiene un espesor $t = 5.0$ mm.

(a) Para la barra con un agujero circular determine los esfuerzos máximos para diámetros de los agujeros $d = 12$ mm y $d = 20$ mm si el ancho es $b = 60$ mm.

(b) Para la barra escalonada con filetes en los rebordes, determine los esfuerzos máximos para radios de los filetes $R = 6$ mm y $R = 10$ mm si los anchos de las barras son $b = 60$ mm y $c = 40$ mm.

2.10.3 Una barra plana con ancho b y espesor t tiene una agujero con diámetro d (consulte la figura). El agujero puede tener cualquier diámetro que tenga cabida dentro de la barra.

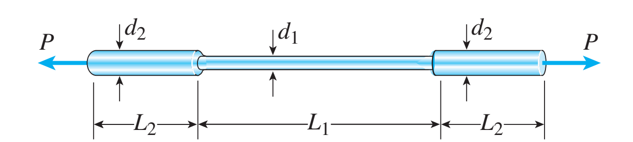
¿Cuál es la carga de tensión máxima permisible $P_{máx}$ si el esfuerzo de tensión permisible en el material es σ_t?



PROB. 2.10.3

2.10.4 Una barra redonda de latón con diámetro $d_1 = 20$ mm tiene extremos recalcados con diámetro $d_2 = 26$ mm (consulte la figura). Las longitudes de los segmentos de la barra son $L_1 = 0.3$ m y $L_2 = 0.1$ m. Se utilizan filetes de un cuarto de círculo en los rebordes de la barra y el módulo de elasticidad del latón es $E = 100$ GPa.

Si la barra se alarga 0.12 mm con una carga de tensión P, ¿cuál es el esfuerzo máximo $\sigma_{máx}$ en la barra?



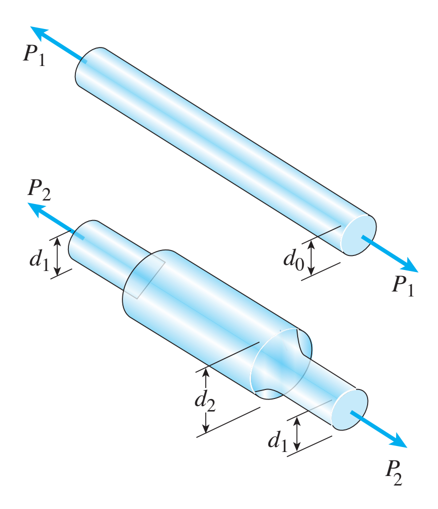
PROBLEMAS 2.10.4 y 2.10.5

2.10.5 Resuelva el problema anterior para una barra de metal monel que tiene las propiedades siguientes: $d_1 = 1.0$ in, $d_2 = 1.4$ in, $L_1 = 20.0$ in, $L_2 = 5.0$ in y $E = 25 \times 10^6$ psi. Además, la barra se alarga 0.0040 in cuando se aplica la carga de tensión.

2.10.6 Una barra prismática con diámetro $d_0 = 20$ mm se compara con una barra escalonada con el mismo diámetro ($d_1 = 20$ mm) que está agrandada en su parte media a un diámetro $d_2 = 25$ mm (consulte la figura). El radio de los filetes en la barra escalonada es de 2.0 mm.

(a) ¿El agrandamiento de la barra en la parte media la hace más fuerte que la barra prismática? Demuestre su respuesta determinando la carga máxima permisible P_1 para la barra prismática y la carga máxima permisible P_2 para la barra alargada, suponiendo que el esfuerzo permisible para el material es 80 MPa.

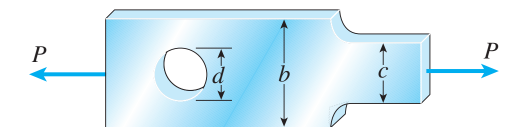
(b) ¿Cuál debe ser el diámetro d_0 de la barra prismática si debe tener la misma carga permisible máxima que la barra escalonada?



PROB. 2.10.6

2.10.7 Una barra escalonada con un agujero (consulte la figura) tiene anchos b = 2.4 in y c = 1.6 in. Los filetes tienen radios iguales a 0.2 in.

¿Cuál es el diámetro $d_{máx}$ del agujero más grande que se puede taladrar en la barra sin reducir su capacidad de soporte de carga?



PROB. 2.10.7

Comportamiento no lineal (cambios de longitud de barras)

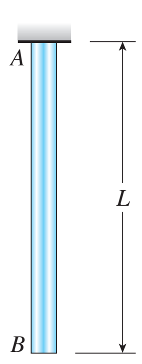
2.11.1 Una barra AB Con longitud L y densidad de peso γ cuelga verticalmente por su peso propio (consulte la figura). La relación esfuerzo-deformación unitaria para el material está dada por la ecuación de Ramberg-Osgood (ecuación 2.71):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0 \alpha}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$$

Deduzca la fórmula siguiente

$$\delta = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{\sigma_0 \alpha L}{(m+1)E}\left(\frac{\gamma L}{\sigma_0}\right)^m$$

para el alargamiento de la barra.



PROB. 2.11.1

2.11.2 Una barra prismática con longitud L = 1.8 m y área de su sección transversal A = 480 mm^2 está cargada por fuerzas P_1 = 30 kN y P_2 = 60 kN (consulte la figura). La barra está construida de una aleación de magnesio que tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria descrita por la ecuación de Ramberg-Osgood siguiente:

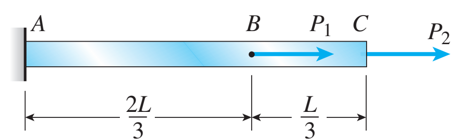
$$\epsilon = \frac{\sigma}{45{,}000} + \frac{1}{618}\left(\frac{\sigma}{170}\right)^{10} \qquad (\sigma = \text{MPa})$$

en donde σ tiene unidades de megapascales.

(a) Calcule el desplazamiento δ_C del extremo de la barra cuando sólo actúa la carga P_1.

(b) Calcule el desplazamiento cuando sólo actúa la carga P_2.

(c) Calcule el desplazamiento cuando actúan las dos cargas simultáneamente.



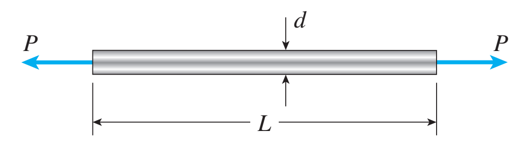
PROB. 2.11.2

2.11.3 Una barra circular con longitud L = 32 in y diámetro d = 0.75 in está sometida a tensión por fuerzas P (consulte la figura). La barra está hecha de una aleación de cobre que tiene la *relación hiperbólica esfuerzo-deformación unitaria* siguiente:

$$\sigma = \frac{18{,}000\epsilon}{1 + 300\epsilon} \qquad 0 \leq \epsilon \leq 0.03 \qquad (\sigma = \text{ksi})$$

(a) Trace un diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el material.

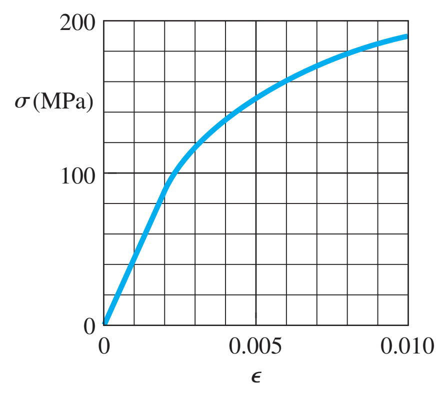
(b) Si el alargamiento de la barra está limitado a 0.25 in y el esfuerzo máximo está limitado a 40 ksi, ¿cuál es la carga permisible P?



PROB. 2.11.3

2.11.4 Una barra prismática en tensión tiene una longitud $L = 2.0$ m y un área de su sección transversal $A = 249$ mm^2. El material de la barra tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria como se muestra en la figura.

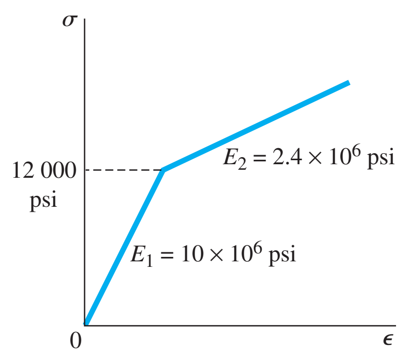
Determine el alargamiento δ de la barra para cada una de las cargas axiales siguientes: $P = 10$ kN, 20 kN, 30 kN, 40 kN y 45 kN. A partir de estos resultados, trace un diagrama de la carga P contra el alargamiento δ (diagrama carga-desplazamiento).



PROB. 2.11.4

2.11.5 Una barra de aluminio sometida a fuerzas de tensión P tiene una longitud $L = 150$ in y un área de su sección transversal $A = 2.0$ in^2. El comportamiento esfuerzo-deformación unitaria del aluminio se puede representar de manera aproximada mediante el diagrama bilineal esfuerzo-deformación unitaria que se muestra en la figura.

Calcule el alargamiento δ de la barra para cada una de las cargas axiales siguientes: $P = 8$ k, 16 k, 24 k, 32 k y 40 k. A partir de estos resultados, trace un diagrama de la carga P contra el alargamiento δ (diagrama carga desplazamiento).



PROB. 2.11.5

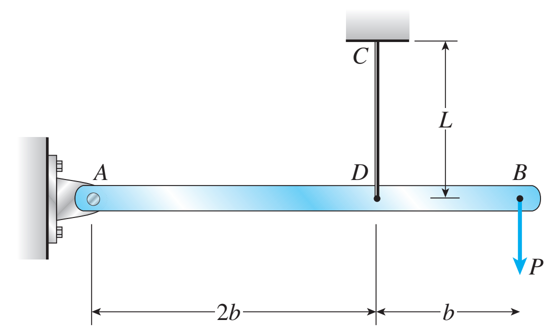
***2.11.6** Una barra rígida AB, articulada en el extremo A, está soportada por un alambre CD y cargada por una fuerza P en el extremo B (consulte la figura). El alambre está hecho de acero de alta resistencia que tiene un módulo de elasticidad $E = 210$ GPa y un esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 820$ MPa. La longitud del alambre es $L = 1.0$ m y su diámetro es $d = 3$ mm. El diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el acero se define por la *ley de la potencia modificada* como sigue:

$$\sigma = E\epsilon \qquad 0 \leq \sigma \leq \sigma_Y$$

$$\sigma = \sigma_Y\left(\frac{E\epsilon}{\sigma_Y}\right)^n \qquad \sigma \geq \sigma_Y$$

(a) Suponiendo $n = 0.2$, calcule el desplazamiento δ_B en el extremo de la barra debido a la carga P. Tome los valores de P de 2.4 kN a 5.6 kN en incrementos de 0.8 kN.

(b) Trace un diagrama carga-desplazamiento mostrando P contra δB.



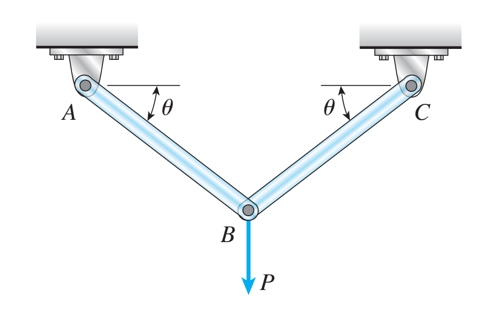
PROB. 2.11.6

Análisis elastoplástico

Los problemas de la sección 2.12 se deben resolver suponiendo que el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia σ_Y, deformación unitaria de fluencia ϵ_Y y módulo de elasticidad E en la región linealmente elástica (consulte la figura 2.70).

2.12.1 Dos barras idénticas AB y BC soportan una carga vertical P (consulte la figura). Las barras están hechas de acero que tiene una curva esfuerzo-deformación unitaria que se puede idealizar como elastoplástica con esfuerzo de fluencia σ_Y. Cada barra tiene un área de la sección transversal A.

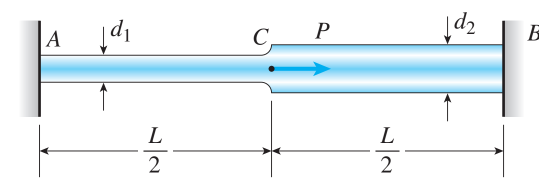
Determine la carga de fluencia P_Y y la carga plástica P_P.



PROB. 2.12.1

2.12.2 Una barra escalonada *ACB* con sección transversal circular está sostenida entre dos soportes rígidos y sometida a una fuerza axial *P* en su parte media (consulte la figura). Los diámetros de las dos partes de la barra son $d_1 = 20$ mm y $d_2 = 25$ mm, y el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 250$ MPa.

Determine la carga plástica P_P.



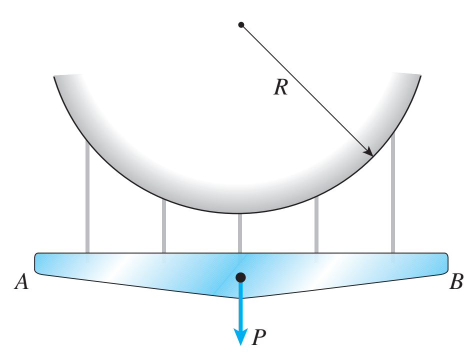
PROB. 2.12.2

2.12.3 Una barra rígida horizontal *AB* que soporta una carga *P* cuelga de cinco alambres colocados simétricamente, cada uno con área de su sección transversal *A* (consulte la figura). Los alambres están sujetos a una superficie curva con radio *R*.

(a) Determine la carga plástica P_P si el material de los alambres es elastoplástico con esfuerzo de fluencia σ_Y.

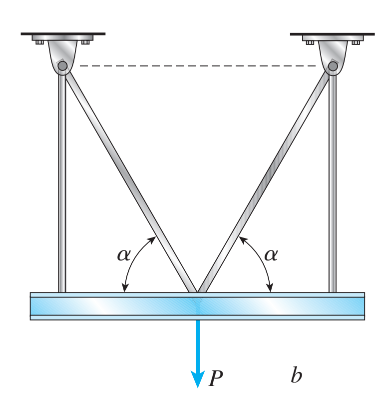
(b) ¿Cómo cambia P_P si la barra *AB* es flexible en vez de rígida?

(c) ¿Cómo cambia P_P si aumenta el radio *R*?



PROB. 2.12.3

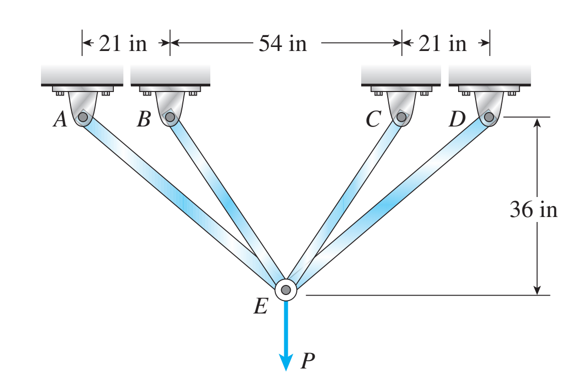
2.12.4 Una carga *P* actúa sobre una viga horizontal que está soportada por cuatro barras configuradas en un patrón simétrico como se muestra en la figura. Cada barra tiene un área de sección transversal *A* y el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia σ_Y. Determine la carga plástica P_P.



PROB. 2.12.4

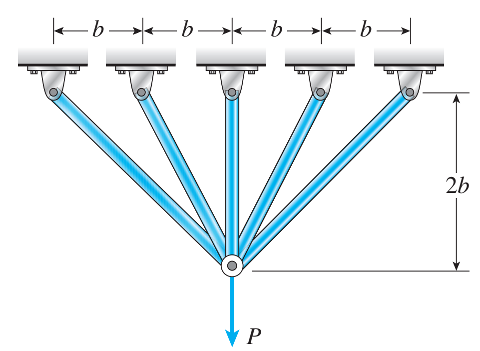
2.12.5 La armadura simétrica *ABCDE* que se muestra en la figura está construida con cuatro barras y soporta una carga *P* en el nodo *E*. Cada una de las dos barras exteriores tiene un área de su sección transversal de 0.307 in^2 y cada una de las dos barras interiores tiene un área de su sección transversal de 0.601 in^2. El material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 36$ ksi.

Determine la carga plástica P_P.



PROB. 2.12.5

2.12.6 Cinco barras, cada una con diámetro de 10 mm, soportan una carga P como se muestra en la figura. Determine la carga plástica P_P si el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 250$ MPa.

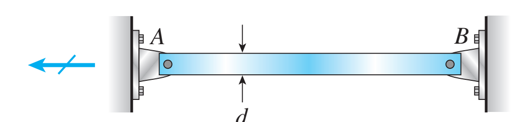


PROB. 2.12.6

2.12.7 Una barra circular de acero AB con diámetro $d = 6.0$ in es alargada firmemente entre dos soportes de manera que al inicio el esfuerzo de tensión en la barra es 10 ksi (consulte la figura). Luego se aplica una fuerza axial P a la barra en un punto intermedio C.

(a) Determine la carga plástica P_P si el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 36$ ksi.

(b) ¿Cómo cambia P_P si el esfuerzo de tensión inicial se duplica a 20 ksi?



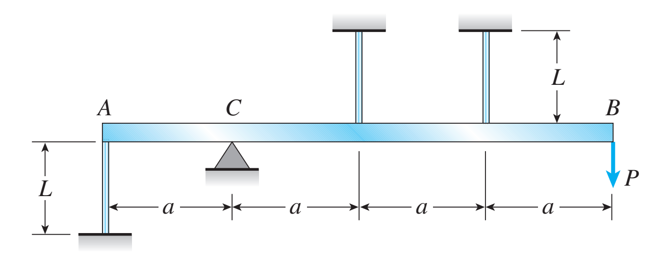
PROB. 2.12.7

***2.12.8** Una barra rígida ACB está soportada sobre un fulcro en C y sometida a una fuerza P en el extremo B (consulte la figura). Tres alambres idénticos hechos de un material elastoplástico (esfuerzo de fluencia σ_Y y módulo de elasticidad E) resisten la carga P. Cada alambre tiene un área de la sección transversal A y longitud L.

(a) Determine la carga de fluencia P_Y y el desplazamiento correspondiente de fluencia δ_Y en el punto B.

(b) Determine la carga plástica P_P y el desplazamiento correspondiente de fluencia δ_P en el punto B cuando la carga apenas alcanza el valor P_P.

(c) Trace un diagrama carga-desplazamiento con la carga P como ordenada y el desplazamiento δ_B del punto B como abscisa.



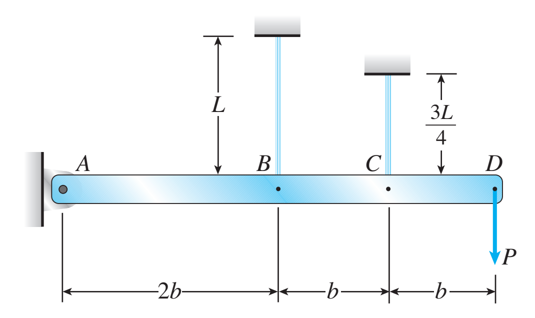
PROB. 2.12.8

***2.12.9** La estructura que se muestra en la figura consiste de una barra rígida horizontal $ABCD$ soportada por dos alambres de acero, uno con longitud L y el otro con longitud $3L/4$. Los dos alambres tienen un área de la sección transversal A y están hechos de un material elastoplástico con esfuerzo de fluencia σ_Y y módulo de elasticidad E. Una carga vertical P actúa en el extremo D de la barra.

(a) Determine la carga de fluencia P_Y y el desplazamiento de fluencia correspondiente δ_Y en el punto D.

(b) Determine la carga plástica P_P y el desplazamiento correspondiente δ_P en el punto D cuando la carga apenas alcanza el valor P_P.

(c) Trace un diagrama de carga-desplazamiento con la carga P como ordenada y el desplazamiento δ_D del punto D como abscisa.



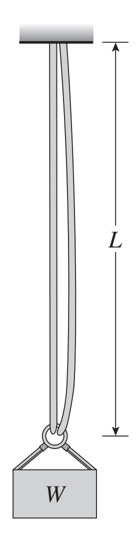
PROB. 2.12.9

****2.12.10** Dos cables, cada uno con longitud L de aproximadamente 40 m, soportan un contenedor cargado con peso W (consulte la figura). Los cables, que tienen un área de sección transversal efectiva $A = 48.0$ mm^2 y módulo de elasticidad efectivo $E = 160$ GPa, son idénticos excepto que un cable es más largo que el otro cuando cuelgan separadamente y sin carga. La diferencia en las longitudes es $d = 100$ mm. Los cables están hechos de acero que tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria elastoplástico con $\sigma_Y = 500$ MPa. Suponga que el peso W inicialmente es cero y se incrementa lentamente agregando material al contenedor.

(a) Determine el peso W_Y que produce primero la fluencia del cable más corto. Además, determine el alargamiento δ_Y correspondiente del cable más corto.

(b) Determine el peso W_P que produce fluencia de los cables. Además, determine el alargamiento δ_P del cable más corto cuando el peso W apenas alcanza el valor W_P.

(c) Elabore un diagrama de carga-desplazamiento mostrando el peso W como ordenada y el alargamiento δ del cable más corto como abscisa. (*Sugerencia:* el diagrama carga-desplazamiento no es una sola línea recta en la región $0 \leq W \leq W_Y$.)



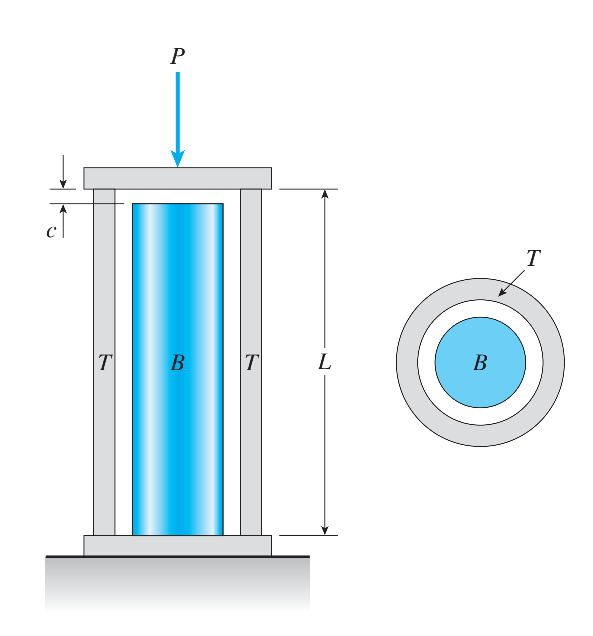
PROB. 2.12.10

****2.12.11** Un tubo circular hueco T con longitud $L = 14$ in está comprimido uniformemente por una fuerza P que actúa sobre una placa rígida (consulte la figura). Los diámetros interior y exterior del tubo son 3.0 y 2.75 in, respectivamente. Una barra circular sólida concéntrica B con 1.5 in de diámetro está montada dentro del tubo. Cuando no hay carga, hay un espacio libre $c = 0.0100$ in entre la barra B y la placa rígida. La barra y el tubo están hechos de acero que tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria elastoplástico con $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi.

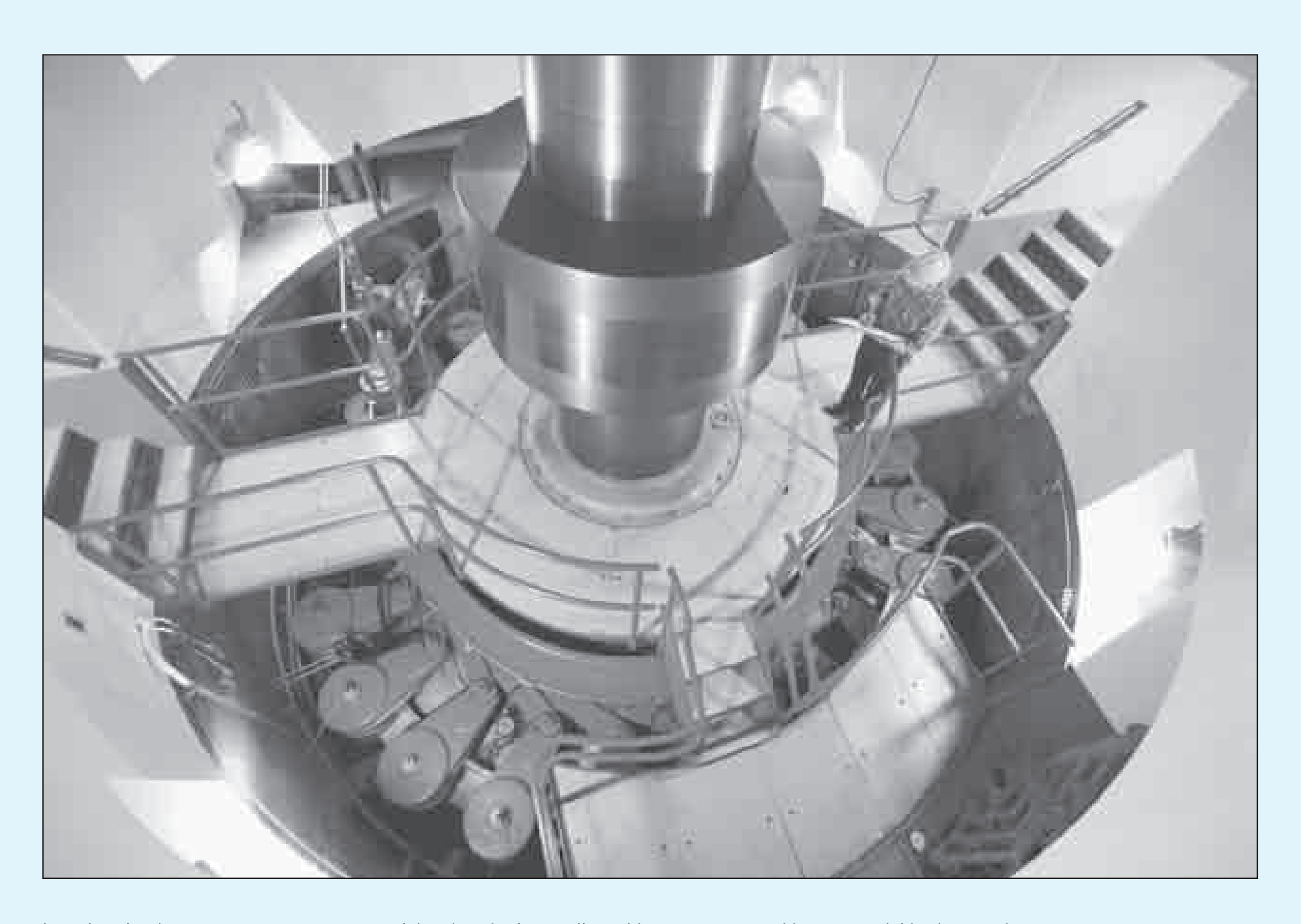
(a) Determine la carga de fluencia P_Y y el acortamiento correspondiente δ_Y del tubo.

(b) Determine la carga plástica P_P y el acortamiento correspondiente δ_Y del tubo.

(c) Elabore un diagrama carga-desplazamiento mostrando la carga P como ordenada y el acortamiento δ del tubo como abscisa. (*Sugerencia:* el diagrama carga-desplazamiento no es una sola línea recta en la región $0 \leq P \leq P_Y$.)



PROB. 2.12.11



Los ejes circulares son componentes esenciales de máquinas y dispositivos para generación y transmisión de energía.

3

Torsión

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata del torcimiento de barras circulares y ejes huecos sometidos a momentos torsionales. Primero consideramos la **torsión uniforme** que se refiere al caso en el cual el par de torsión es constante en toda la longitud de un eje prismático, en tanto que la **torsión no uniforme** describe casos en los que el momento torsional y/o la rigidez torsional de la sección varía en toda la longitud. Como en el caso de deformaciones axiales, debemos relacionar el esfuerzo y la deformación unitaria y también la carga aplicada y la deformación unitaria. Para torsión, recuerde que la ley de Hooke para cortante establece que los esfuerzos cortantes, τ, son proporcionales a las deformaciones unitarias por cortante, γ, con G como la constante de proporcionalidad, que es el módulo de elasticidad en cortante. Los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias por cortante varían linealmente con la distancia radial en la sección transversal, como se describe con la **fórmula de la torsión**. El ángulo de torsión, φ, es proporcional al momento torsional interno y a la flexibilidad torsional de la barra circular. La mayor parte del análisis en este capítulo se dedica al comportamiento lineal elástico y a rotaciones pequeñas de elementos estáticamente determinados. Sin embargo, si la barra es **estáticamente indeterminada,** debemos aumentar las ecuaciones del equilibrio estático con ecuaciones de compatibilidad (que se basan en **relaciones par de torsión-desplazamiento**) para resolver cualesquiera incógnitas de interés, como momentos de soporte o momentos torsionales internos en elementos. Los esfuerzos sobre secciones inclinadas también se estudian como primer paso hacia una consideración más complicada de estados de esfuerzo plano en capítulos posteriores. Por último, al final del capítulo se introduce una variedad de temas especializados y avanzados (como energía de deformación, flujo cortante en tubos de pared delgada y concentraciones de esfuerzos en torsión).

El capítulo 3 está organizado como sigue:

*Temas especializados y/o avanzados

3.1 INTRODUCCIÓN

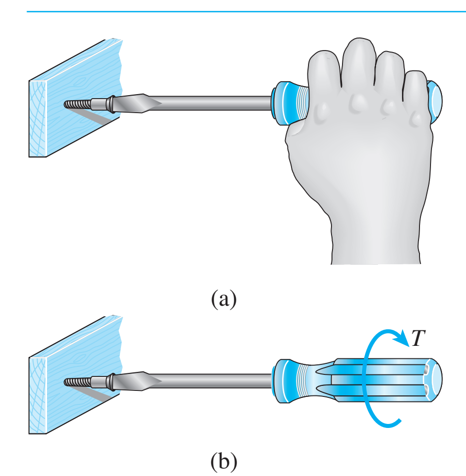


FIGURA 3.1 Torsión de un destornillador debida al par de torsión T aplicado al mango.

En los capítulos 1 y 2 analizamos el comportamiento del tipo de elemento estructural más simple, que es una barra recta sometida a cargas axiales. Ahora consideramos un tipo de comportamiento ligeramente más complejo conocido como **torsión.** Torsión se refiere al torcimiento de una barra recta al ser cargada por momentos (o pares de torsión) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra. Por ejemplo, cuando usted gira un destornillador (figura 3.1a), su mano aplica un par de torsión T al mango (figura 3.1b) y tuerce el vástago del destornillador. Otros ejemplos de barras en torsión son los ejes de impulsión en automóviles, ejes de transmisión, ejes de hélices, barras de dirección y brocas de taladros.

Un caso idealizado de carga torsional se representa en la figura 3.2a, donde se muestra una barra recta soportada en un extremo y cargada por dos pares de fuerzas iguales y opuestas. El primer par consiste en las fuerzas P_1 que actúan cerca del punto medio de la barra y el segundo para consiste de las fuerzas P_2 que actúan en el extremo. Cada par de fuerzas forma un **par de torsión** que tiende a torcer la barra con respecto a su eje longitudinal. Como sabemos de la estática, el **momento de un par de torsión** es igual al producto de una de las fuerzas y la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas; por tanto, el primer par de torsión tiene un momento $T_1 = P_1d_1$ y el segundo tiene un momento $T_2 = P_2d_2$.

Las **unidades** en el sistema inglés para el momento son la libra-pie (lb-ft) y la libra-pulgada (lb-in). La unidad en el SI para el momento es el newton metro (N·m).

El momento de un par de torsión se puede representar por un **vector** en forma de una flecha con cabeza doble (figura 3.2b). La flecha es perpendicular al plano que contiene el par de torsión y, por tanto, en este caso las dos flechas son paralelas al eje de la barra. La dirección (o *sentido*) del momento se indica mediante la *regla de la mano derecha* para vectores momento: empleando su mano derecha, permita que sus dedos se curven en el sentido del momento y entonces su dedo pulgar apuntará en la dirección del vector.

Una representación alternativa de un momento es una flecha curva que actúa en el sentido de la rotación (figura 3.2c). La flecha curva y las representaciones vectoriales son de uso común y en este libro emplearemos las dos. La elección depende de la conveniencia y la preferencia personal.

Los momentos que producen el torcimiento de una barra, como los marcados T_1 y T_2 en la figura 3.2, se llaman **pares de torsión** o **momentos de torsión**. Los elementos cilíndricos que se someten a pares de torsión y transmiten potencia mediante rotación se llaman **ejes**; por ejemplo, el eje impulsor de un automóvil o el eje de la hélice de un barco. La mayor parte de los ejes tienen secciones transversales circulares sean sólidas o tubulares.

En este capítulo iniciamos el desarrollo de fórmulas para las deformaciones unitarias y los esfuerzos en barras circulares sometidas a torsión. Luego, analizamos el estado de esfuerzo conocido como *cortante puro* y obtendremos la relación entre los módulos de elasticidad E y G en tensión y cortante, respectivamente. Enseguida, estudiaremos los ejes rotatorios y determinaremos la potencia que transmiten. Por último, estudiaremos varios temas adicionales relacionados con la torsión, los cuales son: elementos estáticamente indeterminados, energía de deformación, tubos de pared delgada con sección transversal no circular y concentraciones de esfuerzos.

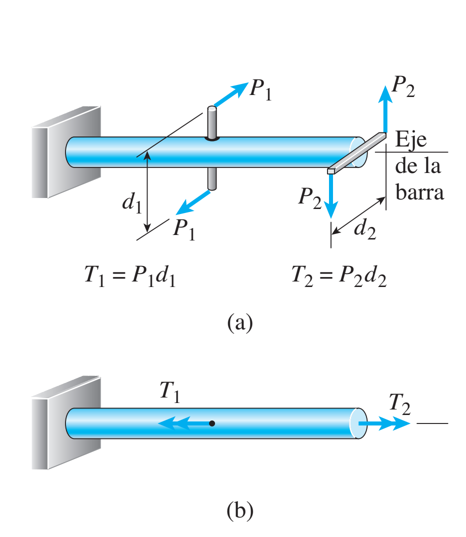


FIGURA 3.2 Barra circular sometida a torsión por los pares de torsión T_1 y T_2.

3.2 DEFORMACIONES TORSIONANTES DE UNA BARRA CIRCULAR

Comenzamos nuestro estudio de torsión al considerar una barra prismática con sección transversal circular torcida por pares de torsión T que actúan en sus extremos (figura 3.3a). Dado que cada sección transversal de la barra es idéntica y puesto que cada sección transversal se somete al mismo par de torsión interno, decimos que la barra está en **torsión pura.** A partir de consideraciones de simetría, se puede demostrar que las secciones transversales de la barra no cambian de forma conforme giran con respecto al eje longitudinal. En otras palabras, todas las secciones transversales permanecen planas y circulares y todos los radios permanecen rectos. Además, si el ángulo de rotación entre un extremo de la barra y el otro es pequeño, no cambiarán la longitud de la barra ni sus radios.

Para ayudar a visualizar la deformación de la barra, imagine que el extremo izquierdo de la misma (figura 3.3a) está fijo. Luego, ante la acción del par de torsión T, el extremo derecho girará (con respecto al extremo izquierdo) un ángulo pequeño ϕ, conocido como **ángulo de torsión** (o *ángulo de rotación*). Debido a esta rotación, una línea recta longitudinal pq en la superficie de la barra se convertirá en la curva helicoidal pq', donde q' es la posición del punto q después de que la sección transversal extrema ha girado el ángulo ϕ (figura 3.3b).

El ángulo de torsión cambia a lo largo del eje de la barra y en secciones transversales intermedias tendrá un valor $\phi(x)$ que está entre cero en el extremo izquierdo y ϕ en el extremo derecho. Si cada sección transversal de la barra tiene el mismo radio y se somete al mismo par de torsión (torsión pura), el ángulo $\phi(x)$ variará linealmente entre los extremos.

Deformaciones unitarias por cortante en la superficie exterior

Ahora considere un elemento de la barra entre dos secciones transversales separadas una distancia dx (consulte la figura 3.4a). Este elemento se muestra agrandado en la figura 3.4b. En su superficie exterior identificamos un elemento pequeño $abcd$, con lados ab y cd que al inicio son paralelos al eje longitudinal. Durante el torcimiento de la barra, las secciones transversales derechas giran con respecto a las secciones transversales izquierdas un ángulo pequeño de torsión $d\phi$, de manera que los puntos b y c se mueven a b' y c', respectivamente. Las longitudes de los lados del elemento, que ahora es el elemento $ab'c'd$, no cambian durante esta rotación pequeña.

Sin embargo, los ángulos en las esquinas del elemento (figura 3.4b) ya no son iguales a 90°. Por tanto, el elemento está en un estado de **cortante puro,** lo cual significa que el elemento está sometido a deformaciones por

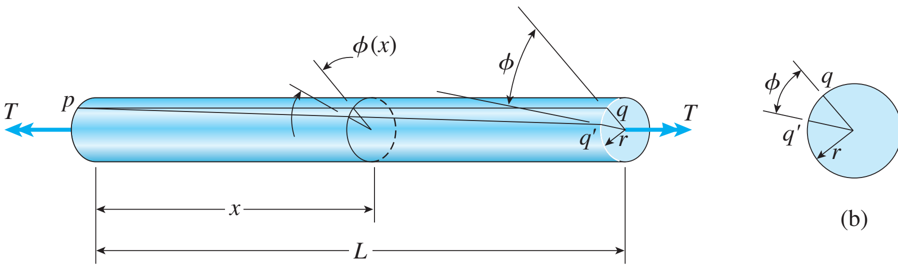
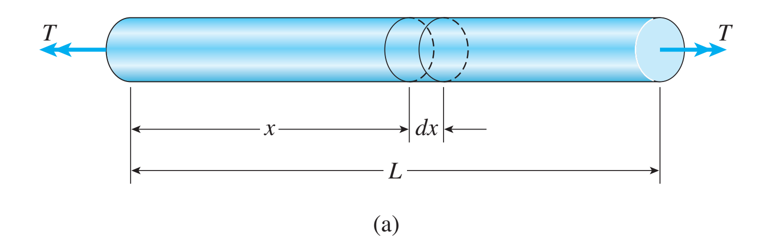


FIGURA 3.3 Deformaciones de una barra circular en torsión pura.



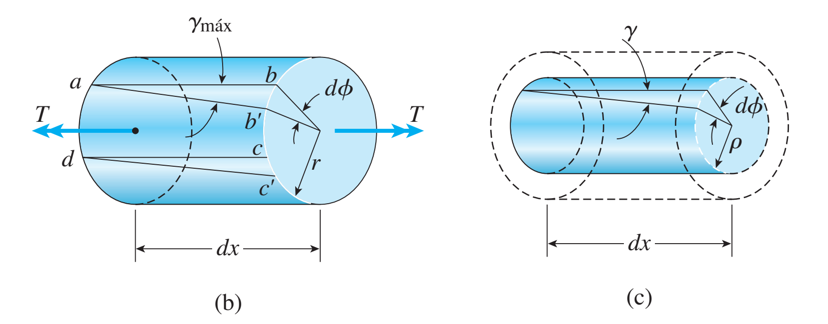


FIGURA 3.4 Deformación de un elemento con longitud *dx* cortado de una barra en torsión.

cortante pero no a deformaciones normales (consulte la figura 1.28 de la sección 1.6). La magnitud de la deformación por cortante en la superficie exterior de la barra, denotada $\gamma_{\text{máx}}$, es igual al decremento en el ángulo en el punto *a*, es decir, el decremento en el ángulo *bad*. De la figura 3.4b observamos que el decremento en este ángulo es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{bb'}{ab} \qquad \text{(a)}$$

donde $\gamma_{\text{máx}}$ se mide en radianes, bb' es la distancia que se desplaza el punto *b* y *ab* es la longitud del elemento (igual a *dx*). Si *r* denota el radio de la barra, podemos expresar la distancia *bb´* como $rd\phi$, donde $d\phi$ también se mide en radianes. Por tanto, la ecuación anterior se convierte en

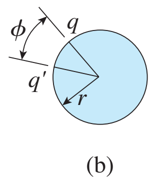
$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{rd\phi}{dx} \qquad \text{(b)}$$

Esta ecuación relaciona la deformación unitaria cortante en la superficie exterior de la barra con el ángulo de torsión.

La cantidad $d\phi/dx$ es la razón de cambio del ángulo de torsión ϕ con respecto a la distancia *x* medida a lo largo del eje de la barra. Denotaremos $d\phi/dx$ con el símbolo θ y nos referiremos a ella como **razón de torsión** o **ángulo de torsión por unidad de longitud.**

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \qquad (3.1)$$

Con esta notación ahora podemos escribir la ecuación para la deformación unitaria por cortante en la superficie exterior (ecuación b) como sigue:



(b)

FIGURA 3.3b (Repetida.)

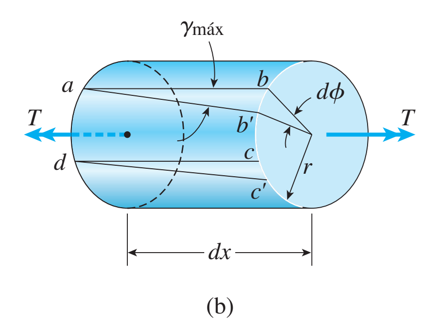
$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{rd\phi}{dx} = r\theta \tag{3.2}$$

Por conveniencia hemos considerado una barra sujeta a torsión pura al deducir las ecuaciones (3.1) y (3.2). Sin embargo, las dos ecuaciones son válidas en casos más generales de torsión, como cuando la razón de torsión θ no es constante sino que varía con la distancia x a lo largo del eje de la barra.

En el caso especial de torsión pura, la razón de torsión es igual al ángulo total de torsión ϕ dividido entre la longitud L, es decir, $\theta = \phi/L$. Por lo tanto, *sólo para torsión pura*, obtenemos

$$\gamma_{\text{máx}} = r\theta = \frac{r\phi}{L} \tag{3.3}$$

Esta ecuación se puede obtener directamente de la geometría de la figura 3.3a al observar que $\gamma_{\text{máx}}$ es el ángulo entre las líneas pq y pq', es decir, $\gamma_{\text{máx}}$ es el ángulo qpq'. Por tanto, $\gamma_{\text{máx}}L$ es a la distancia qq' en el extremo de la barra. Pero como la distancia qq' también es igual a $r\phi$ (figura 3.3b), obtenemos $r\phi = \gamma_{\text{máx}}L$, que concuerda con la ecuación (3.3).



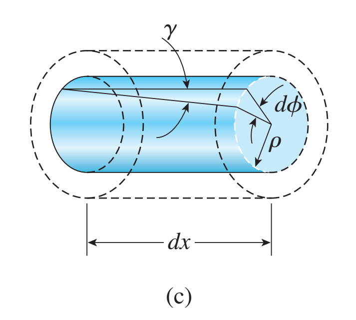
(b)

FIGURA 3.4b (Repetida.)

Deformaciones unitarias por cortante dentro de la barra

Las deformaciones unitarias por cortante en el interior de la barra se pueden determinar mediante el mismo método empleado para encontrar la deformación unitaria por cortante $\gamma_{\text{máx}}$ en la superficie. Como los radios en las secciones transversales de una barra permanecen rectos y sin distorsión durante la torsión, observamos que el análisis anterior para un elemento *abcd* en la superficie exterior (figura 3.4b) también será válido para un elemento similar situado en la superficie de un cilindro interior con radio ρ (figura 3.4c). Por tanto, los elementos interiores también están en cortante puro con las deformaciones unitarias por cortante correspondientes dadas por la ecuación (compare con la ecuación 3.2):

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.4}$$



(c)

FIGURA 3.4c (Repetida.)

Esta ecuación muestra que las deformaciones unitarias cortantes en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro, siendo cero la deformación unitaria en el centro y alcanzando un valor máximo $\gamma_{\text{máx}}$ en la superficie exterior.

Tubos circulares

Un repaso de los análisis anteriores demostrará que las ecuaciones para las deformaciones unitarias cortantes (ecuaciones 3.2 a 3.4) se aplican a **tubos circulares** (figura 3.5) así como a barras circulares sólidas. En la figura 3.5 se muestra la variación lineal en deformación unitaria por cortante entre la deformación unitaria máxima en la superficie exterior y la deformación unitaria mínima en la superficie interior. Las ecuaciones para estas deformaciones unitarias son las siguientes:

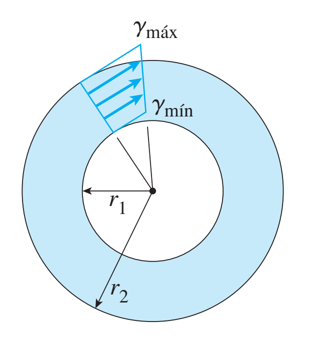


FIGURA 3.5 Deformaciones unitarias por cortante en un tubo circular.

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{r_2\phi}{L} \qquad \gamma_{\text{mín}} = \frac{r_1}{r_2}\gamma_{\text{máx}} = \frac{r_1\phi}{L} \tag{3.5a,b}$$

en donde r_1 y r_2 son los radios interior y exterior, respectivamente, del tubo.

Todas las ecuaciones anteriores para las deformaciones unitarias en una barra circular se basan en conceptos geométricos y no incluyen las propiedades del material. Por tanto, las ecuaciones son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte elástica o inelásticamente, lineal o no linealmente. Sin embargo, las ecuaciones están limitadas a barras con ángulos de torsión pequeños y deformaciones unitarias mínimas.

3.3 BARRAS CIRCULARES DE MATERIALES LINEALMENTE ELÁSTICOS

Ahora que hemos investigado las deformaciones unitarias por cortante en una barra circular en torsión (consulte las figuras 3.3 a 3.5) podemos determinar las direcciones y magnitudes de los esfuerzos cortantes correspondientes. Las direcciones de los esfuerzos se pueden determinar por inspección, como se ilustra en la figura 3.6a, donde observamos que el par de torsión T tiende a girar el extremo derecho de la barra en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde la derecha. Por tanto, los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre un elemento de esfuerzo ubicado en la superficie de la barra tendrán las direcciones que se muestran en la figura.

Por claridad, el elemento de esfuerzo que se muestra en la figura 3.6a está agrandado en la figura 3.6b, donde se muestran tanto la deformación unitaria por cortante como los esfuerzos cortantes. Como se explicó antes en la sección 2.6, acostumbramos a dibujar elementos de esfuerzo en dos dimensiones, como en la figura 3.6b, pero siempre debemos recordar que los elementos de esfuerzo en realidad son objetos tridimensionales con un espesor perpendicular al plano de la figura.

Las magnitudes de los esfuerzos cortantes se pueden determinar a partir de las deformaciones unitarias mediante la relación esfuerzo-deformación unitaria para el material de la barra. Si el material es linealmente elástico, podemos utilizar la **ley de Hooke en cortante** (ecuación 1.14):

$$\tau = G\gamma \tag{3.6}$$

en donde G es el módulo de elasticidad en cortante y γ es la deformación unitaria por cortante en radianes. Al combinar esta ecuación con las ecuaciones para las deformaciones unitarias por cortante (ecuaciones 3.2 y 3.4), obtenemos

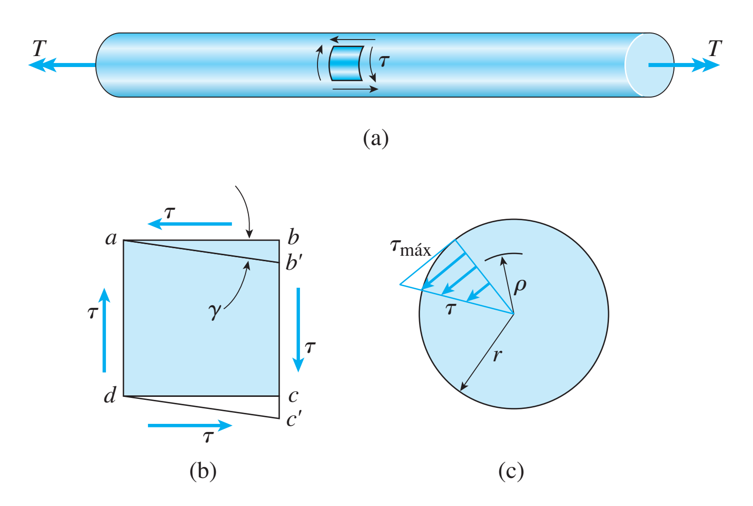


FIGURA 3.6 Esfuerzos cortantes en una barra circular en torsión.

$$\tau_{máx} = Gr\theta \qquad \tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{máx} \tag{3.7a,b}$$

en donde $\tau_{máx}$ es el esfuerzo cortante en la superficie exterior de la barra (radio r), τ es el esfuerzo cortante en un punto interior (radio ρ) y θ es la razón de torsión. (En estas ecuaciones, θ tiene unidades de radianes por unidad de longitud).

Las ecuaciones (3.7a) y (3.7b) muestran que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia desde el centro de la barra, como se ilustra por el diagrama triangular en la figura 3.6c. Esta variación lineal del esfuerzo es una consecuencia de la ley de Hooke. Si la relación esfuerzo-deformación unitaria no es lineal, los esfuerzos no variarán linealmente y se necesitarán otros métodos de análisis.

FIGURA 3.7 Esfuerzos cortantes longitudinal y transversal en una barra circular sometida a torsión.

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un plano transversal van acompañados de esfuerzos cortantes con la misma magnitud que las que actúan sobre planos longitudinales (figura 3.7). Esta conclusión se deriva del hecho que en planos mutuamente perpendiculares siempre existen esfuerzos cortantes iguales, como se explicó en la sección 1.6. Si el material de la barra es más débil en cortante en planos longitudinales que en planos transversales, como es común en la madera cuando el grano corre paralelo al eje de la barra, la primera grieta debida a la torsión aparecerá en la superficie en la dirección longitudinal.

El estado de cortante puro en la superficie de la barra (figura 3.6b) equivale a esfuerzos iguales de tensión y compresión que actúan en un elemento orientado a un ángulo de 45°, como se explica más adelante en la sección 3.5. Por tanto, un elemento rectangular con lados a 45° con respecto al eje de la barra estará sometido a esfuerzos de tensión y compresión, como se muestra en la figura 3.8. Si una barra en torsión está hecha de un material que es más débil en tensión que en cortante, la falla ocurrirá en tensión a lo largo de una hélice inclinada a 45° con respecto al eje, como usted lo puede demostrar torciendo una pieza de gis para pizarrón.

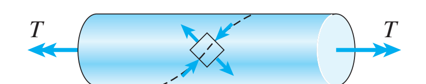


FIGURA 3.8 Esfuerzos de tensión y compresión que actúan sobre un elemento orientado a 45° con respecto al eje longitudinal.

La fórmula de la torsión

El paso siguiente en nuestro análisis es determinar la relación entre los esfuerzos cortantes y el par de torsión T. Una vez determinada esta relación, podremos calcular los esfuerzos y las deformaciones unitarias en una barra debidas a cualquier conjunto de pares de torsión aplicados.

La distribución de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal se representa en las figuras 3.6c y 3.7. Debido a que dichos esfuerzos actúan continuamente alrededor de la sección transversal, tienen una resultante en la forma de un momento que es igual al par de torsión T que actúa sobre la barra. Para determinar esta resultante consideramos un elemento de área dA ubicado a una distancia radial ρ desde el eje de la barra (figura 3.9). La fuerza cortante que actúa sobre este elemento es igual a $\tau\, dA$, donde τ es el esfuerzo cortante a un radio ρ. El momento de esta fuerza con respecto al eje de la barra es igual a la fuerza multiplicada por su distancia desde el centro, o $\tau\rho dA$. Sustituyendo el valor del esfuerzo cortante τ dado por la ecuación (3.7b), podemos expresar este momento elemental como

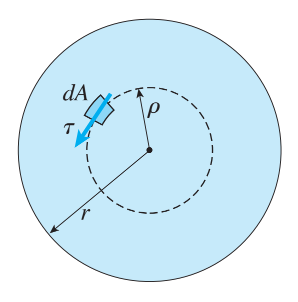


FIGURA 3.9 Determinación de la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal.

$$dM = \tau\rho dA = \frac{\tau_{máx}}{r}\rho^2 dA$$

El momento resultante (igual al par de torsión T) es la suma a lo largo de toda el área de la sección transversal de todos los momentos elementales:

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{r} I_P \qquad (3.8)$$

en donde

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \qquad (3.9)$$

es el **momento polar de inercia** de la sección transversal circular.

Para un **círculo** con radio r y diámetro d, el momento polar de inercia es

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \qquad (3.10)$$

como se indica en el apéndice D, caso 9. Observe que los momentos de inercia tienen unidades de longitud a la cuarta potencia.*

Es posible obtener una expresión para el esfuerzo cortante máximo reacomodando la ecuación (3.8), como sigue:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tr}{I_P} \qquad (3.11)$$

Esta ecuación, conocida como la **fórmula de la torsión**, muestra que el esfuerzo cortante máximo es proporcional al par de torsión aplicado T e inversamente proporcional al momento de inercia polar I_P.

Las **unidades** comunes empleadas en la fórmula de la torsión son las siguientes. En el sistema SI el par de torsión T suele expresarse en newton metro (N·m), el radio r en metros (m), el momento polar de inercia I_P en metros a la cuarta potencia (m^4) y el esfuerzo cortante τ en pascales (Pa). Si se utilizan unidades inglesas, con frecuencia T se expresa en libra-pies (lb-ft) o libra-pulgadas (lb-in), r en pulgadas (in), I_P en pulgadas a la cuarta potencia (in^4) y τ en libras por pulgada cuadrada (psi).

Sustituyendo $r = d/2$ e $I_P = \pi d^2/32$ en la fórmula de la torsión, obtenemos la ecuación siguiente para el esfuerzo máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3} \qquad (3.12)$$

Esta ecuación sólo se aplica a barras con *sección transversal circular sólida*, en tanto que la fórmula de la torsión (ecuación 3.11) se aplica tanto a barras sólidas como a tubos circulares, como se explica más adelante. La ecuación (3.12) muestra que el esfuerzo cortante es inversamente proporcional al cubo del diámetro. Por tanto, si se duplica el diámetro, el esfuerzo se reduce por un factor de ocho.

*Los momentos polares de inercia se ilustran en la sección 12.6 del capítulo 12.

El esfuerzo cortante a una distancia ρ desde el centro de la barra es

$$\tau = \frac{\rho}{r}\,\tau_{\text{máx}} = \frac{T\rho}{I_P} \tag{3.13}$$

que se obtiene al combinar la ecuación (3.7b) con la fórmula de la torsión (ecuación 3.11). La ecuación (3.13) es una *fórmula generalizada de la torsión* y de nuevo observamos que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia radial desde el centro de la barra.

Ángulo de torsión

Ahora podemos relacionar el ángulo de torsión de una barra de material linealmente elástico con el par de torsión aplicado T. Al combinar la ecuación (3.7a) con la fórmula de la torsión obtenemos

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \tag{3.14}$$

en donde θ tiene unidades de radianes por unidad de longitud. Esta ecuación muestra que la razón de torsión θ es directamente proporcional al par de torsión T e inversamente proporcional al producto GI_P, conocido como **rigidez torsional** de la barra.

Para una barra en **torsión pura,** el ángulo de torsión ϕ total, igual a la razón de torsión multiplicada por la longitud de la barra (es decir, $\phi = \theta L$), es

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \tag{3.15}$$

en donde ϕ se mide en radianes. El uso de las ecuaciones anteriores tanto en análisis como en diseño se ilustra en los ejemplos 3.1 y 3.2.

La cantidad GI_P/L, llamada **rigidez torsional** de la barra, es el par de torsión necesario para producir una rotación de un ángulo unitario. La **flexibilidad torsional** es el recíproco de la rigidez, o L/GI_P, y se define como el ángulo de rotación producido por un par de torsión unitario. Por tanto, tenemos las expresiones siguientes:

$$k_T = \frac{GI_P}{L} \qquad f_T = \frac{L}{GI_P} \tag{a,b}$$

Estas cantidades son análogas a la rigidez axial $k = EA/L$ y a la flexibilidad axial $f = L/EA$ de una barra en tensión o compresión (compare con las ecuaciones 2.4a y 2.4b). Las rigideces y las flexibilidades desempeñan papeles importantes en el análisis estructural.

La ecuación para el ángulo de torsión (ecuación 3.15) proporciona una forma conveniente para determinar el módulo de elasticidad en cortante G de un material. Al realizar una prueba de torsión en una barra circular podemos medir el ángulo de torsión ϕ producido por un par de torsión conocido T. Luego se puede calcular el valor de G con la ecuación (3.15).

Tubos circulares

Los tubos circulares resisten con más eficiencia las cargas torsionales que las barras sólidas. Como sabemos, los esfuerzos cortantes en una barra circular sólida son máximos en el borde exterior de la sección transversal y cero en el centro. Por tanto, la mayor parte del material en un eje sólido se somete a un esfuerzo significativamente menor que el esfuerzo cortante máximo. Además, los esfuerzos cerca del centro de la sección transversal tiene un brazo de momento menor ρ a tomar en cuenta en la determinación del par de torsión (consulte la figura 3.9 y la ecuación 3.8).

En contraste, en un tubo hueco común la mayor parte del material está cerca del borde exterior de la sección transversal donde los esfuerzos cortantes y los brazos de momento son mayores (figura 3.10). Por tanto si en una aplicación es importante reducir peso y ahorrar material, se aconseja emplear un tubo circular. Por ejemplo, los ejes de impulsión largos, los ejes de hélices y los ejes de generadores usualmente tienen secciones transversales huecas.

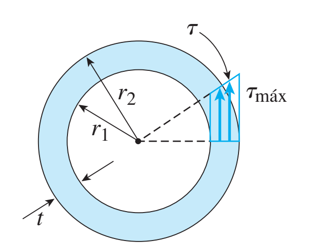


FIGURA 3.10 Tubo circular en torsión.

El análisis de la torsión de un tubo circular es casi idéntico al de una barra sólida. Se pueden emplear las mismas expresiones básicas para los esfuerzos cortantes (por ejemplo, las ecuaciones 3.7a y 3.7b). Por supuesto, la distancia radial ρ está limitada al intervalo r_1 a r_2, donde r_1 es el radio interior y r_2 es el radio exterior de la barra (figura 3.10).

La relación entre el par de torsión T y el esfuerzo máximo está dada por la ecuación (3.8), pero los límites en la integral para el momento polar de inercia (ecuación 3.9) son $\rho = r_1$ y $\rho = r_2$. Por tanto, el momento polar de inercia del área de la sección transversal de un tubo es

$$I_P = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) \tag{3.16}$$

Las expresiones anteriores también se pueden escribir en las siguientes formas:

$$I_P = \frac{\pi r t}{2}(4r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4}(d^2 + t^2) \tag{3.17}$$

en donde r es el *radio promedio* del tubo, igual a $(r_1 + r_2)/2$; d es el *diámetro promedio*, igual a $(d_1 + d_2)/2$ y t es el *espesor de la pared* (figura 3.10), igual a $r_2 - r_1$. Por supuesto, las ecuaciones (3.16) y (3.17) dan los mismos resultados, pero en ocasiones la última es más conveniente.

Si el tubo es relativamente delgado, de tal modo que el espesor de la pared t es pequeño en comparación con el radio promedio r, podemos ignorar los términos t^2 en la ecuación (3.17). Con esta simplificación obtenemos las *fórmulas aproximadas* siguientes para el momento polar de inercia:

$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \tag{3.18}$$

Estas expresiones se dan en el caso 22 del apéndice D.

Recordatorios: en las ecuaciones 3.17 y 3.18, las cantidades r y d son el radio y el diámetro promedios, no los máximos. Además, las ecuaciones 3.16 y 3.17 son exactas; la ecuación 3.18 es aproximada.

La fórmula de la torsión (ecuación 3.11) se puede emplear para un tubo circular de material linealmente elástico siempre que I_P se evalúe de acuerdo con la ecuaciones (3.16), (3.17) o, si es apropiado, con la ecuación (3.18). Los mismos comentarios se aplican a la ecuación general para el esfuerzo cortante (ecuación 3.13), a las ecuaciones para la razón de torsión y el ángulo de torsión (ecuaciones 3.14 y 3.15) y a las ecuaciones para la rigidez y la flexibilidad (ecuaciones a y b).

La distribución del esfuerzo cortante en un tubo se representa en la figura 3.10, donde se observa que el esfuerzo promedio en un tubo delgado es casi tan grande como el esfuerzo máximo. Esto significa que en una barra hueca se utiliza el material de manera más eficiente que en una barra sólida, como se explicó antes y se demuestra más adelante en los ejemplos 3.2 y 3.3.

Al diseñar un tubo circular para transmitir un par de torsión, debemos estar seguros de que el espesor t es suficientemente grande para evitar el arrugamiento o pandeo de la pared del tubo. Por ejemplo, se puede especificar un valor máximo de la razón entre el radio y el espesor, como $(r_2/t)_{\text{máx}} = 12$. Otras consideraciones incluyen los factores ambientales y de durabilidad, que también imponen requerimientos para el espesor mínimo de la pared del tubo. Estos temas se estudian en cursos y libros de texto sobre diseño mecánico.

Limitaciones

Las ecuaciones deducidas en esta sección están limitadas a barras con sección transversal circular (sólidas o huecas) que se comportan de una manera linealmente elástica. En otras palabras, las cargas deben ser tales que los esfuerzos no sobrepasen el límite de proporcionalidad del material. Además, las ecuaciones para esfuerzos son válidas sólo en partes de las barras alejadas de concentraciones de esfuerzos (como agujeros y otros cambios abruptos de la forma) y alejadas de las secciones transversales donde se aplican las cargas. (Las concentraciones de esfuerzos en torsión se analizan más adelante en la sección 3.11.)

Por último, es importante hacer énfasis en que las ecuaciones para la torsión de barras y tubos circulares no se pueden utilizar para barras que tengan otras formas. Las barras no circulares, como las rectangulares y las que tienen secciones transversales en forma de "I," se comportan de manera muy diferente a las barras circulares. Por ejemplo, sus secciones transversales *no* permanecen planas y sus esfuerzos máximos *no* se ubican en las distancias más alejadas desde los puntos medios de las secciones transversales. Entonces, estas barras requieren métodos de análisis más avanzados, como los que se presentan en libros sobre teoría de elasticidad y mecánica de materiales avanzada.*

---

*La teoría de la torsión para barras circulares se originó con el trabajo del famoso científico francés C. A. de Coulomb (1736-1806); se atribuyen desarrollos adicionales a Thomas Young y A. Duleau (referencia 3.1). La teoría general de la torsión (para barras con cualquier forma) se debe al más famoso investigador de la elasticidad de todos los tiempos, Barré de Saint-Venant (1797-1886); consulte la referencia 2.10.

Ejemplo 3.1

Una barra sólida de acero con sección transversal circular (figura 3.11) tiene un diámetro d = 1.5 in, longitud L = 54 in y módulo de elasticidad en cortante $G = 11.5 \times 10^6$ psi. La barra está sometida a pares de torsión T que actúan en sus extremos.

(a) Si los pares de torsión tienen una magnitud T = 250 lb-ft, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en la barra? ¿Cuál es el ángulo de torsión entre los extremos?

(b) Si el esfuerzo cortante permisible es 6000 psi y el ángulo de torsión permisible es 2.5°, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible?

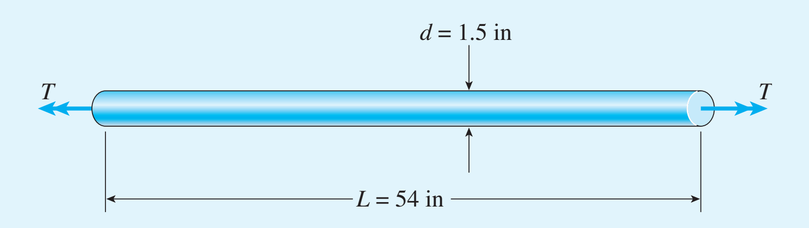
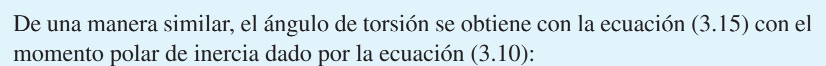


FIGURA 3.11 Ejemplo 3.1. Barra en torsión pura.

Solución

(a) *Esfuerzo cortante máximo y ángulo de torsión*. Dado que la barra tiene una sección transversal circular sólida, podemos determinar el esfuerzo cortante con la ecuación (3.12), como sigue:



$$\tau_{máx} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in/ft})}{\pi(1.5 \text{ in})^3} = 4530 \text{ psi}$$

De una manera similar, el ángulo de torsión se obtiene con la ecuación (3.15) con el momento polar de inercia dado por la ecuación (3.10):

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(1.5 \text{ in})^4}{32} = 0.4970 \text{ in}^4$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} = \frac{(250 \text{ lb-ft})(12 \text{ in/ft})(54 \text{ in})}{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in}^4)} = 0.02834 \text{ rad} = 1.62°$$

Por tanto, el análisis de la barra ante la acción del par de torsión dado está completo.

(b) *Par de torsión máximo*. El par de torsión máximo se determina mediante el esfuerzo cortante permisible o bien por el ángulo de torsión permisible. Iniciando con el esfuerzo cortante, reacomodamos la ecuación (3.12) y el cálculo es el siguiente:

$$T_1 = \frac{\pi d^3 \tau_{perm}}{16} = \frac{\pi}{16}(1.5 \text{ in})^3(6000 \text{ psi}) = 3980 \text{ lb-in} = 331 \text{ lb-ft}$$

Cualquier par de torsión mayor que este valor resultará en un esfuerzo cortante que sobrepasará el esfuerzo permisible de 6000 psi.

Utilizando la ecuación (3.15) reacomodada, ahora podemos calcular el par de torsión con base en el ángulo de torsión:



El eje impulsor de un barco es una parte clave del sistema de propulsión

$$T_2 = \frac{GI_P\phi_{\text{perm}}}{L} = \frac{(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(0.4970 \text{ in}^4)(2.5°)(\pi \text{ rad}/180°)}{54 \text{ in}}$$

$$= 4618 \text{ lb-in} = 385 \text{ lb-ft}$$

Cualquier par de torsión mayor que T_2 resultará en un ángulo de torsión mayor que el permisible.

El par de torsión máximo es el menor de T_1 y T_2:

$$T_{\text{máx}} = 331 \text{ lb-ft}$$

En este ejemplo el esfuerzo cortante permisible proporciona la condición limitante.

Ejemplo 3.2



Cigüeñal complejo

Se va a fabricar un eje de acero como una barra circular sólida o bien como un tubo circular (figura 3.12). Se requiere que el eje transmita un par de torsión de 1200 N·m sin que se exceda un esfuerzo cortante permisible de 40 MPa ni una razón de torsión permisible de 0.75°/m. (El módulo de elasticidad en cortante del acero es 78 GPa).

(a) Determine el diámetro necesario d_0 del eje sólido.

(b) Determine el diámetro exterior necesario d_2 del eje hueco si su espesor t se especifica igual a un décimo del diámetro exterior.

(c) Determine la razón de los diámetros (es decir, la razón d_2/d_0) y la razón de los pesos de los ejes hueco y sólido.

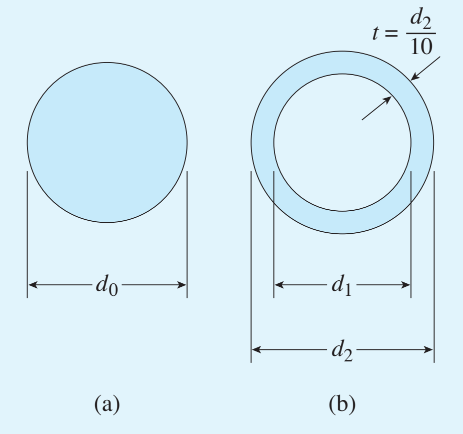


FIGURA 3.12 Ejemplo 3.2. Torsión de un eje de acero.

Solución

(a) *Eje sólido*. El diámetro requerido d_0 se determina a partir del esfuerzo cortante o bien de la razón de torsión permisible. En el caso del esfuerzo cortante permisible reacomodamos la ecuación (3.12) y obtenemos

$$d_0^3 = \frac{16T}{\pi\tau_{\text{perm}}} = \frac{16(1200 \text{ N·m})}{\pi(40 \text{ MPa})} = 152.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

continúa

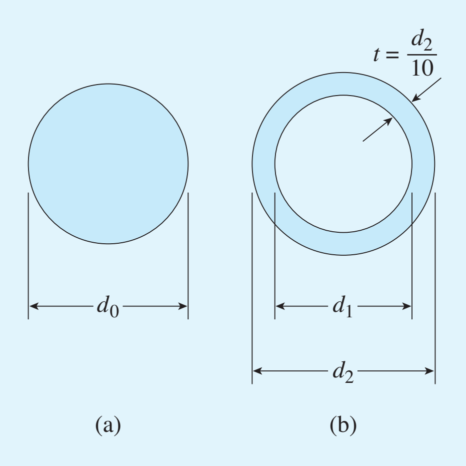


FIGURA 3.12 (Repetida.)

de donde obtenemos

$$d_0 = 0.0535 \text{ m} = 53.5 \text{ mm}$$

En el caso de la razón de torsión permisible, empezamos determinando el momento polar de inercia (consulte la ecuación 3.14):

$$I_P = \frac{T}{G\theta_{\text{perm}}} = \frac{1200 \text{ N·m}}{(78 \text{ GPa})(0.75°/\text{m})(\pi \text{ rad}/180°)} = 1175 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Como el momento polar de inercia es igual a $\pi d^4/32$, el diámetro necesario es

$$d_0^4 = \frac{32 I_P}{\pi} = \frac{32(1175 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}{\pi} = 11.97 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

o

$$d_0 = 0.0588 \text{ m} = 58.8 \text{ mm}$$

Al comparar los dos valores de d_0, observamos que la razón de torsión gobierna el diseño y el diámetro necesario del eje sólido es

$$d_0 = 58.8 \text{ mm}$$



En un diseño práctico, seleccionaríamos un diámetro ligeramente mayor que el valor calculado de d_0; por ejemplo, 60 mm.

(b) *Eje hueco*. De nuevo, el diámetro requerido se basa en el esfuerzo cortante permisible o bien en la razón de torsión permisible. Comenzamos observando que el diámetro exterior de la barra es d_2 y el diámetro interior es

$$d_1 = d_2 - 2t = d_2 - 2(0.1d_2) = 0.8d_2$$

Por tanto, el momento polar de inercia (ecuación 3.16) es

$$I_P = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32}\left[d_2^4 - (0.8d_2)^4\right] = \frac{\pi}{32}(0.5904 d_2^4) = 0.05796 d_2^4$$

En el caso del esfuerzo cortante permisible, utilizamos la fórmula de la torsión (ecuación 3.11) como sigue:

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{T(d_2/2)}{0.05796 d_2^4} = \frac{T}{0.1159 d_2^3}$$

Reacomodando términos, obtenemos

$$d_2^3 = \frac{T}{0.1159\tau_{\text{perm}}} = \frac{1200 \text{ N·m}}{0.1159(40 \text{ MPa})} = 258.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Resolviendo para d_2 da

$$d_2 = 0.0637 \text{ m} = 63.7 \text{ mm}$$

que es el diámetro exterior necesario con base en el esfuerzo cortante.

En el caso de la razón de torsión permisible, utilizamos la ecuación (3.14) reemplazando θ con θ_{perm} e I_P con la expresión que obtuvimos antes; por tanto,

$$\theta_{\text{perm}} = \frac{T}{G(0.05796 d_2^4)}$$

de donde

$$d_2^4 = \frac{T}{0.05796 G \theta_{\text{perm}}}$$
$$= \frac{1200 \text{ N·m}}{0.05796(78 \text{ GPa})(0.75°/\text{m})(\pi \text{ rad}/180°)} = 20.28 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Resolviendo para d_2 obtenemos

$$d_2 = 0.0671 \text{ m} = 67.1 \text{ mm}$$

que es el diámetro necesario con base en la razón de torsión.

Al comparar los dos valores de d_2, observamos que la razón de torsión gobierna el diseño y el diámetro exterior necesario del eje hueco es

$$d_2 = 67.1 \text{ mm}$$

El diámetro interior d_1 es igual a $0.8d_2$, o 53.7 mm. (Como valores prácticos, podríamos seleccionar $d_2 = 70$ mm y $d_1 = 0.8d_2 = 56$ mm.)

(c) *Razones de diámetros y pesos*. La razón entre diámetro exterior del eje hueco y el diámetro del eje sólido (empleando los valores calculados) es

$$\frac{d_2}{d_0} = \frac{67.1 \text{ mm}}{58.8 \text{ mm}} = 1.14$$

Como los pesos de los ejes son proporcionales a las áreas de sus secciones transversales, podemos expresar la razón entre peso del eje hueco y el peso del eje sólido como sigue:

$$\frac{W_{\text{hueco}}}{W_{\text{sólido}}} = \frac{A_{\text{hueco}}}{A_{\text{sólido}}} = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)/4}{\pi d_0^2/4} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_0^2}$$
$$= \frac{(67.1 \text{ mm})^2 - (53.7 \text{ mm})^2}{(58.8 \text{ mm})^2} = 0.47$$

Estos resultados muestran que para el eje hueco sólo se requiere 47 por ciento del material necesario para el eje sólido, en tanto que el diámetro exterior sólo es 14 por ciento mayor.

Nota: este ejemplo muestra cómo determinar los tamaños necesarios de barras sólidas y tubos circulares cuando se conocen los esfuerzos permisibles y las razones de torsión permisibles. También ilustra el hecho que los tubos circulares utilizan el material de manera más eficiente que las barras sólidas.

Ejemplo 3.3

Un eje hueco y uno sólido construidos con el mismo material tienen la misma longitud y radios exteriores R (figura 3.13). El radio interior del eje hueco es $0.6R$.

(a) Suponiendo que los dos ejes se someten al mismo par de torsión, compare sus esfuerzos cortantes, ángulos de torsión y pesos.

(b) Determine las razones entre resistencia y peso de los ejes.

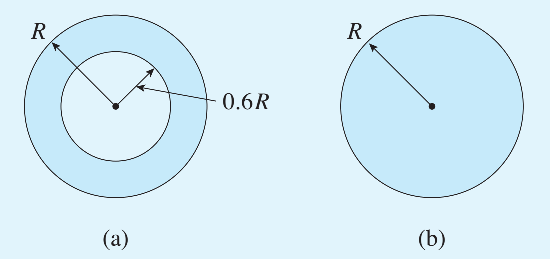


FIGURA 3.13 Ejemplo 3.3. Comparación de un eje hueco y uno sólido.

Solución

(a) *Comparación de los esfuerzos cortantes*. Los esfuerzos cortantes máximos, dados por la fórmula de la torsión (ecuación 3.11), son proporcionales a $1/I_P$ ya que los pares de torsión y los radios son los mismos. Para el eje hueco, obtenemos

$$I_P = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi(0.6R)^4}{2} = 0.4352\pi R^4$$

y para el eje sólido,

$$I_P = \frac{\pi R^4}{2} = 0.5\pi R^4$$

Por tanto, la razón β_1 entre el esfuerzo cortante máximo en el eje hueco y en el eje sólido es

$$\beta_1 = \frac{\tau_H}{\tau_S} = \frac{0.5\pi R^4}{0.4352\pi R^4} = 1.15$$

donde los subíndices H y S se refieren al eje hueco y al sólido, respectivamente.

Comparación de los ángulos de torsión. Los ángulos de torsión (ecuación 3.15) también son proporcionales a $1/I_P$, debido a que los pares de torsión T, las longitudes L y los módulos de elasticidad G son los mismos para los dos ejes. Por tanto, su razón es la misma que para los esfuerzos cortantes:

$$\beta_2 = \frac{\phi_H}{\phi_S} = \frac{0.5\pi R^4}{0.4352\pi R^4} = 1.15$$

Comparación de los pesos. Los pesos de los ejes son proporcionales a las áreas de sus secciones transversales, en consecuencia, el peso del eje sólido es proporcional a πR^2 y el peso del eje hueco es proporcional a

$$\pi R^2 - \pi(0.6R)^2 = 0.64\pi R^2$$

Por tanto, la razón entre peso del eje hueco y el peso del eje sólido es

$$\beta_3 = \frac{W_H}{W_S} = \frac{0.64\pi R^2}{\pi R^2} = 0.64$$

De las razones anteriores observamos de nuevo la ventaja inherente de los ejes huecos. En este ejemplo el eje hueco tiene un esfuerzo 15 por ciento mayor y un ángulo de rotación 15 por ciento mayor que el eje sólido pero 36 por ciento menos peso.

(b) *Razones entre resistencia y peso*. Algunas veces la eficiencia relativa de una estructura se mide por su razón entre *resistencia y peso*, que para una barra en torsión se define como el par de torsión permisible dividido entre el peso. El par de torsión permisible para el eje hueco de la figura 3.13a (de la fórmula de la torsión) es

$$T_H = \frac{\tau_{\text{máx}} I_P}{R} = \frac{\tau_{\text{máx}}(0.4352\pi R^4)}{R} = 0.4352\pi R^3 \tau_{\text{máx}}$$

y para el eje sólido es

$$T_S = \frac{\tau_{\text{máx}} I_P}{R} = \frac{\tau_{\text{máx}}(0.5\pi R^4)}{R} = 0.5\pi R^3 \tau_{\text{máx}}$$

Los pesos de los ejes son iguales a las áreas de sus secciones transversales multiplicadas por su longitud L y por el peso especifico γ del material:

$$W_H = 0.64\pi R^2 L\gamma \qquad W_S = \pi R^2 L\gamma$$

Entonces, las razones entre resistencia y peso, S_H y S_S para las barras hueca y sólida, respectivamente, son

$$S_H = \frac{T_H}{W_H} = 0.68\,\frac{\tau_{\text{máx}} R}{\gamma L} \qquad S_S = \frac{T_S}{W_S} = 0.5\,\frac{\tau_{\text{máx}} R}{\gamma L}$$

En este ejemplo la razón entre resistencia y peso del eje hueco es 36 por ciento mayor que la razón entre resistencia y peso del eje sólido, demostrando una vez más la eficiencia relativa de los ejes huecos. Para un eje más esbelto, el porcentaje aumentará; para un eje más robusto, disminuirá.

3.4 TORSIÓN NO UNIFORME

Como se explicó en la sección 3.2, *torsión pura* se refiere a la torsión de una barra prismática sometida a pares de torsión que actúan sólo en sus extremos. **Torsión no uniforme** difiere de la torsión pura en que no se requiere que la barra sea prismática y los pares de torsión aplicados pueden actuar en cualquier parte a lo largo del eje de la barra. Las barras en torsión no uniforme se pueden analizar aplicando las fórmulas de torsión pura a segmentos finitos de la barra y luego se suman los resultados, o se aplican las fórmulas a elementos diferenciales de la barra y luego se integran.

Para ilustrar estos procedimientos, consideraremos tres casos de torsión no uniforme. Otros casos se pueden manejar mediante técnicas similares a las que aquí se describirán.

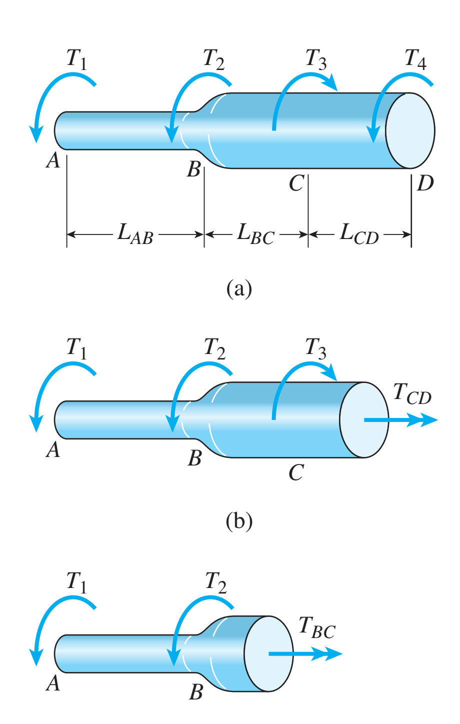


FIGURA 3.14 Barra en torsión no uniforme (caso 1).

Caso 1. *Barra constituida de segmentos prismáticos con par de torsión constante en cada segmento* (figura 3.14). La barra que se muestra en la parte (a) de la figura tiene dos diámetros diferentes y está sometida a pares de torsión que actúan en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. En consecuencia, dividimos la barra en segmentos, de tal manera que cada uno sea prismático y esté sometido a un par de torsión constante. En este ejemplo hay tres segmentos, *AB*, *BC* y *CD*. Cada segmento está en torsión pura, y por tanto, se pueden aplicar todas las fórmulas deducidas en la sección anterior a cada segmento por separado.

El primer paso en el análisis es determinar la magnitud y el sentido del par de torsión interno en cada segmento. Es usual que los pares de torsión se determinen por inspección, pero si es necesario se pueden encontrar al cortar secciones a través de la barra, trazar diagramas de cuerpo libre y resolver ecuaciones de equilibrio. Este proceso se ilustra en las partes (b), (c) y (d) de la figura. El primer corte se hace en cualquier parte del segmento *CD*, con lo cual se expone el par de torsión interno T_{CD}. Del diagrama de cuerpo libre (figura 3.14b), observamos que T_{CD} es igual a $-T_1 - T_2 + T_3$. Del siguiente diagrama vemos que T_{BC} es igual a $-T_1 - T_2$ y del último tenemos que T_{AB} es igual a $-T_1$. Por tanto,

$$T_{CD} = -T_1 - T_2 + T_3 \qquad T_{BC} = -T_1 - T_2 \qquad T_{AB} = -T_1 \qquad \text{(a,b,c)}$$

Cada uno de estos pares de torsión es constante en toda la longitud de su segmento.

Al determinar los esfuerzos cortantes en cada segmento, sólo necesitamos las magnitudes de estos pares de torsión internos, ya que las direcciones de los esfuerzos no son de interés. Sin embargo, al obtener el ángulo de torsión para toda la barra, necesitamos conocer la dirección o sentido de la torsión en cada segmento a fin de combinar los ángulos de torsión de manera correcta. Por tanto, es necesario establecer una *convención de signos* para los pares de torsión internos. Una regla conveniente en muchos casos es la siguiente: *un par de torsión es positivo cuando su vector apunta en dirección contraria a la sección cortada y negativo cuando su vector apunta hacia la sección*. De esta manera, todos los pares de torsión internos que se muestran en la figuras 3.14b, c y d están representados con sus sentidos positivos. Si el par de torsión calculado (con la ecuación a, b o c) resulta tener un signo positivo, significa que actúa en el sentido supuesto; si el par de torsión tiene un signo negativo, actúa en el sentido opuesto.

El esfuerzo cortante máximo en cada segmento de la barra se obtiene fácilmente a partir de la fórmula de la torsión (ecuación 3.11) al emplear las

dimensiones apropiadas y el par de torsión adecuado. Por ejemplo, el esfuerzo máximo en el segmento BC (figura 3.14) se determina al utilizar el diámetro de ese segmento y el par de torsión T_{BC} que se calcula mediante la ecuación (b). El esfuerzo máximo en toda la barra es el esfuerzo mayor de entre los esfuerzos calculados para cada uno de los tres segmentos.

El ángulo de torsión para cada segmento de determina con la ecuación (3.15), al emplear de nuevo las dimensiones adecuadas y el par de torsión apropiado. Luego se obtiene el ángulo de torsión total de un extremo de la barra con respecto al otro mediante la siguiente suma algebraica:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n \tag{3.19}$$

donde ϕ_1 es el ángulo de torsión para el segmento 1, ϕ_2 es el ángulo de torsión para el segmento 2, etcétera, y n es el número total de segmentos. Puesto que cada ángulo de torsión se determina con la ecuación (3.15), podemos escribir la fórmula general

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i (I_P)_i} \tag{3.20}$$

en donde el subíndice i es un índice de numeración para los diversos segmentos. Para el segmento i de la barra, T_i es el par de torsión interno (encontrado del equilibrio como se ilustra en la figura 3.14), L_i es la longitud, G_i es el módulo de cortante e $(I_P)_i$ es el momento polar de inercia. Algunos de los pares de torsión (y los ángulos de torsión correspondientes) pueden ser positivos y algunos negativos. Al sumar de *manera algebraica* los ángulos de torsión de todos los segmentos se obtiene el ángulo de torsión ϕ total entre los extremos de la barra. El proceso se ilustra más adelante en el ejemplo 3.4.

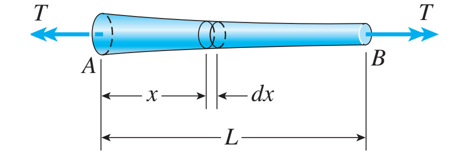


FIGURA 3.15 Barra en torsión no uniforme (caso 2).

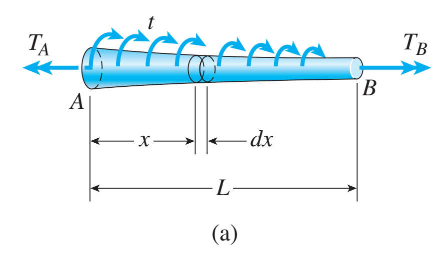
Caso 2. *Barra con secciones transversales que varían continuamente y par de torsión constante* (figura 3.15). Cuando el par de torsión es constante, el esfuerzo cortante máximo en una barra sólida siempre ocurre en la sección transversal que tiene el diámetro menor, como se muestra en la figura (3.12). Además, es usual que esta observación sea válida para barras tubulares; si este es el caso, sólo necesitamos investigar la sección transversal más pequeña a fin de calcular el esfuerzo cortante máximo. De lo contrario, puede ser necesario evaluar los esfuerzos en más de una ubicación con objeto de determinar el esfuerzo máximo.

Para encontrar el ángulo de torsión, consideramos un elemento con longitud dx a una distancia x desde un extremo de la barra (figura 3.15). El ángulo diferencial de rotación $d\phi$ para este elemento es

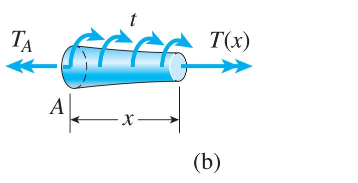
$$d\phi = \frac{T dx}{G I_P(x)} \tag{d}$$

en donde $I_P(x)$ es el momento polar de inercia de la sección transversal a una distancia x desde el extremo. El ángulo de torsión para toda la barra es la suma de los ángulos diferenciales de rotación:

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T dx}{G I_P(x)} \tag{3.21}$$



(a)



(b)

FIGURA 3.16 Barra en torsión no uniforme (caso 3).

Si la expresión para el momento polar de inercia $I_P(x)$ no es demasiado compleja, esta integral se puede evaluar de manera analítica, como en el ejemplo 3.5. En otros casos, se debe evaluar de manera numérica.

Caso 3. *Barra con secciones transversales continuamente variables y par de torsión continuamente variable* (figura 3.16). La barra que se muestra en la parte (a) de la figura está sometida a un *par de torsión distribuido* con intensidad t por unidad de distancia a lo largo del eje de la barra. Como resultado, el par de torsión interno $T(x)$ varía de manera continua a lo largo del eje (figura 3.16b). El par de torsión interno se puede evaluar con ayuda del diagrama de cuerpo libre y una ecuación de equilibrio. Como en el caso 2, el momento polar de inercia $I_P(x)$ se puede evaluar con las dimensiones de la sección transversal de la barra.

Conociendo el par de torsión y el momento polar de inercia como funciones de x, se puede emplear la fórmula de la torsión para determinar cómo varía el esfuerzo cortante a lo largo del eje de la barra. Luego se puede identificar la sección transversal de esfuerzo cortante máximo y determinar el esfuerzo cortante máximo.

El ángulo de torsión de la barra de la figura 3.16a se puede encontrar de la misma manera que se describió para el caso 2. La única diferencia es que el par de torsión, al igual que el momento polar de inercia, también varía a lo largo del eje. En consecuencia, la ecuación para el ángulo de torsión se convierte en

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{GI_P(x)} \tag{3.22}$$

Esta integral se puede evaluar de forma analítica en algunos casos, pero es usual que se deba evaluar de manera numérica.

Limitaciones

Los análisis descritos en esta sección son válidos para barras hechas de materiales linealmente elásticos con secciones transversales circulares (sólidas o huecas). Además, los esfuerzos determinados con la fórmula de la torsión son válidos en regiones de la barra *alejadas* de concentraciones de esfuerzos, que son esfuerzos altamente localizados que ocurren cuando el diámetro cambia abruptamente y cuando se aplican pares de torsión concentrados (consulte la sección 3.11). Sin embargo, las concentraciones de esfuerzos tienen relativamente poco efecto sobre el ángulo de torsión y, por tanto, en general las ecuaciones para ϕ son válidas.

Por último, debemos tener en cuenta que la fórmula de la torsión y las fórmulas para los ángulos de torsión se dedujeron para barras prismáticas. Podemos aplicarlas con seguridad a barras con secciones transversales variables sólo cuando los cambios de diámetro sean pequeños y graduales. Como regla básica, las fórmulas dadas aquí son satisfactorias siempre que el ángulo de ahusamiento (el ángulo entre los lados de la barra) sea menor que 10°.

Ejemplo 3.4

Un eje sólido de acero *ABCDE* (figura 3.17) con diámetro $d = 30$ mm gira libremente sobre cojinetes en los puntos *A* y *E*. El eje es impulsado por un engrane en *C* que aplica un par de torsión $T_2 = 450$ N·m en el sentido que se muestra en la figura. Los engranes *B* y *D* son impulsados por el eje y tienen pares de torsión resistentes $T_1 = 275$ N·m y $T_3 = 175$ N·m, respectivamente, que actúan en el sentido opuesto al par de torsión T_2. Los segmentos *BC* y *CD* tienen longitudes $L_{BC} = 500$ mm y $L_{CD} = 400$ mm, respectivamente, y el módulo de cortante es $G = 80$ GPa.

Determine el esfuerzo cortante máximo en cada parte del eje y el ángulo de torsión entre los engranes *B* y *D*.

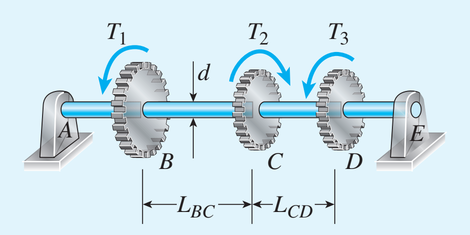


FIGURA 3.17 Ejemplo 3.4. Eje de acero en torsión.

Solución

Cada segmento de la barra es prismático y está sometido a un par de torsión constante (caso 1). Por tanto, el primer paso en el análisis es determinar los pares de torsión que actúan en los segmentos, después de lo cual podemos determinar los esfuerzos cortantes y los ángulos de torsión.

Pares de torsión que actúan en los segmentos. Los pares de torsión en los segmentos extremos (*AB* y *DE*) son cero puesto que no estamos tomando en cuenta ninguna fricción en los cojinetes en los soportes. Por tanto, los segmentos extremos no tienen esfuerzos ni ángulos de torsión.

El par de torsión T_{CD} en el segmento *CD* se determina cortando la sección a través del segmento y elaborando un diagrama de cuerpo libre, como en la figura 3.18a. El par de torsión se supone positivo y, por tanto, su vector apunta alejándose de la sección cortada. Del equilibrio del cuerpo libre, obtenemos

$$T_{CD} = T_2 - T_1 = 450 \text{ N·m} - 275 \text{ N·m} = 175 \text{ N·m}$$

El signo positivo en el resultado significa que T_{CD} actúa en el sentido positivo supuesto.

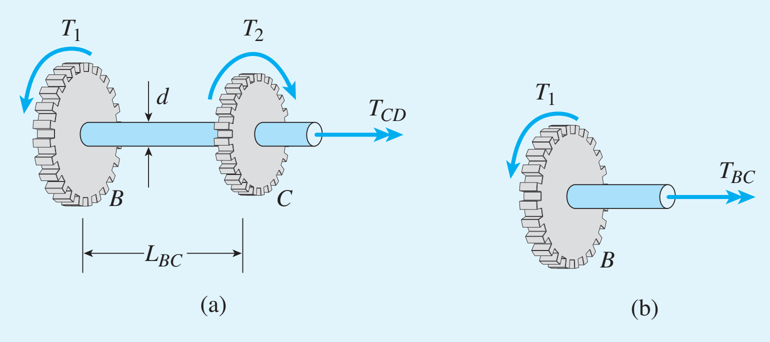


FIGURA 3.18 Diagramas de cuerpo libre del ejemplo 3.4.

continúa

El par de torsión en el segmento BC se determina de una manera similar, utilizando el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.18b:

$$T_{BC} = -T_1 = -275 \text{ N·m}$$

Observe que este par de torsión tiene un signo negativo, lo que significa que su sentido es opuesto al que se muestra en la figura.

Esfuerzos cortantes. Los esfuerzos cortantes máximos en los segmentos BC y CD se encuentran con la forma modificada de la fórmula de la torsión (ecuación 3.12); por tanto

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16(275 \text{ N·m})}{\pi(30 \text{ mm})^3} = 51.9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CD} = \frac{16T_{CD}}{\pi d^3} = \frac{16(175 \text{ N·m})}{\pi(30 \text{ mm})^3} = 33.0 \text{ MPa}$$

Como las direcciones de los esfuerzos cortantes no son de interés en este ejemplo, en los cálculos anteriores sólo se emplean los valores absolutos de los pares de torsión

Ángulos de torsión. El ángulo de torsión ϕ_{BD} entre los engranes B y D es la suma algebraica de los ángulos de torsión para los segmentos intermedios de la barra, según la ecuación (3.19); entonces,

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD}$$

Al calcular los ángulos de torsión individuales, necesitamos el momento de inercia de la sección transversal:

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(30 \text{ mm})^4}{32} = 79{,}520 \text{ mm}^4$$

Ahora podemos determinar los ángulos de torsión como se muestra:

$$\phi_{\text{BC}} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} = \frac{(-275 \text{ N·m})(500 \text{ mm})}{(80 \text{ GPa})(79{,}520 \text{ mm}^4)} = -0.0216 \text{ rad}$$

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GI_P} = \frac{(175 \text{ N·m})(400 \text{ mm})}{(80 \text{ GPa})(79{,}520 \text{ mm}^4)} = 0.0110 \text{ rad}$$

Observe que en este ejemplo los ángulos de torsión tienen sentidos opuestos. Sumando algebraicamente, obtenemos el ángulo de torsión total:

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD} = -0.0216 + 0.0110 = -0.0106 \text{ rad} = -0.61°$$

El signo negativo significa que el engrane D gira en el sentido de las manecillas del reloj (cuando se ve desde el extremo derecho del eje) con respecto al engrane B. Sin embargo, para la mayor parte de los fines sólo se necesita el valor absoluto del ángulo de torsión y, por tanto, es suficiente decir que el ángulo de torsión entre los engranes B y D es 0.61°. El ángulo de torsión entre los dos extremos de un eje en ocasiones se llama *enrollado*.

Notas: los procedimientos ilustrados en este ejemplo se pueden utilizar para ejes con segmentos de diferentes diámetros o de materiales distintos, siempre que las dimensiones y las propiedades permanezcan constantes en cada segmento.

En este ejemplo y en los problemas al final del capítulo sólo se consideran los efectos de la torsión. Los efectos de la flexión se consideran más adelante, al inicio del capítulo 4.

Ejemplo 3.5

Una barra ahusada AB con sección transversal circular se somete a pares de torsión T aplicados en los extremos (figura 3.19). El diámetro de la barra varía linealmente de d_A en el extremo izquierdo a d_B en el extremo derecho, suponiendo que d_B es mayor que d_A.

(a) Determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

(b) Deduzca una fórmula para el ángulo de torsión de la barra.

Solución

(a) *Esfuerzos cortantes*. Como el esfuerzo cortante máximo en cualquier sección transversal de una barra sólida está dado por la fórmula modificada de la torsión (ecuación 3.12), sabemos de inmediato que el esfuerzo cortante máximo ocurre en la sección transversal que tenga el diámetro menor, es decir, en el extremo A (consulte la figura 3.19):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d_A^3}$$

(b) *Ángulo de torsión*. Como el par de torsión es constante y el momento polar de inercia varía continuamente con la distancia x desde el extremo A (caso 2), utilizaremos la ecuación (3.21) para determinar el ángulo de torsión. Iniciamos formulando una expresión para el diámetro d a una distancia x desde el extremo A:

$$d = d_A + \frac{d_B - d_A}{L}x \tag{3.23}$$

en donde L es la longitud de la barra. Ahora podemos escribir una expresión para el momento polar de inercia:

$$I_P(x) = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(d_A + \frac{d_B - d_A}{L}x\right)^4 \tag{3.24}$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (3.21), obtenemos una fórmula para el ángulo de torsión:

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GI_P(x)} = \frac{32T}{\pi G}\int_0^L \frac{dx}{\left(d_A + \dfrac{d_B - d_A}{L}x\right)^4} \tag{3.25}$$

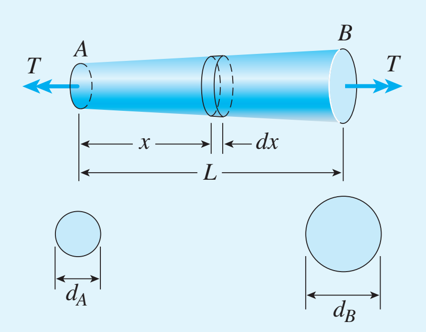


FIGURA 3.19 Ejemplo 3.5. Barra ahusada en torsión.

continúa

Para evaluar la integral en esta ecuación, observamos que es de la forma

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^4}$$

en donde

$$a = d_A \qquad b = \frac{d_B - d_A}{L} \tag{e,f}$$

Con ayuda de una tabla de integrales (consulte el apéndice C), obtenemos

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^4} = -\frac{1}{3b(a + bx)^3}$$

Esta integral se evalúa sustituyendo x con los límites 0 y L y con los valores de a y b de las expresiones en las ecuaciones (e) y (f). Por tanto, la integral en la ecuación (3.25) es igual a

$$\frac{L}{3(d_B - d_A)}\left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3}\right) \tag{g}$$

Al reemplazar la integral en la ecuación (3.25) con esta expresión, obtenemos

$$\phi = \frac{32TL}{3\pi G(d_B - d_A)}\left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3}\right) \tag{3.26}$$

que es la ecuación deseada para el ángulo de torsión de la barra ahusada.

Una forma conveniente de escribir la ecuación anterior es

$$\phi = \frac{TL}{G(I_P)_A}\left(\frac{\beta^2 + \beta + 1}{3\beta^3}\right) \tag{3.27}$$

en donde

$$\beta = \frac{d_B}{d_A} \qquad (I_P)_A = \frac{\pi d_A^4}{32} \tag{3.28}$$

La cantidad β es la razón de los diámetros extremos e $(I_P)_A$ es el momento polar de inercia en el extremo A.

En el caso especial de una barra prismática, tenemos $\beta = 1$ y la ecuación (3.27) da $\phi = TL/G(I_P)_A$, como se esperaba. Para valores de β mayores que 1, el ángulo de rotación disminuye debido a que el diámetro mayor en el extremo B produce un aumento en la rigidez torsional (en comparación con una barra prismática).

3.5 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES UNITARIAS EN CORTANTE PURO

Cuando una barra circular, sea sólida o hueca, se somete a torsión, actúan esfuerzos cortantes sobre las secciones transversales y sobre planos longitudinales, como se ilustró previamente en la figura 3.7. Ahora examinaremos con más detalle los esfuerzos y las deformaciones unitarias producidas durante la torsión de una barra.

Iniciamos considerando un elemento de esfuerzo *abcd* cortado entre dos secciones transversales de una barra en torsión (figuras 3.20a y b). Este elemento está en un estado de **cortante puro**, debido a que los únicos esfuerzos que actúan sobre él son esfuerzos cortantes τ en los cuatro lados (consulte el análisis sobre esfuerzos cortantes en la sección 1.6).

Las direcciones de estos esfuerzos cortantes dependen de los sentidos de los pares de torsión aplicados *T*. En este análisis suponemos que los pares de torsión giran el extremo derecho de la barra en el sentido de las manecillas del reloj cuando se ve desde la derecha (figura 3.20a); de aquí que los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento tienen las direcciones que se muestran en la figura. Este mismo estado de esfuerzo existe en un elemento similar cortado desde el interior de la barra, excepto que las magnitudes de los esfuerzos cortantes son menores debido a que la distancia radial hasta el elemento es menor.

Los sentidos de los pares de torsión que se muestran en la figura 3.20a están elegidos intencionalmente de modo que los esfuerzos cortantes resultantes (figura 3.20a) sean positivos de acuerdo con la convención de signos para esfuerzos cortantes descrita previamente en la sección 1.6. Esta **convención de signos** se repite a continuación:

Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara positiva de un elemento es positivo si actúa en el sentido positivo de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en el sentido negativo de un eje. Y lo opuesto, un esfuerzo que actúa en una cara negativa de un elemento es positivo si actúa en la dirección negativa de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en la dirección positiva de un eje.

Al aplicar esta convención de signos a los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento de esfuerzo de la figura 3.20b observamos que los cuatro esfuerzos cortantes son positivos. Por ejemplo, el esfuerzo en la cara derecha (que es positiva debido a que el eje *x* está dirigido hacia la derecha) actúa en la dirección positiva del eje *y*; por tanto, es un esfuerzo cortante positivo. Además, el esfuerzo en la cara izquierda (que es negativa) actúa en la dirección negativa del eje *y*; por tanto, es un esfuerzo cortante positivo. Comentarios análogos se aplican a los esfuerzos restantes.

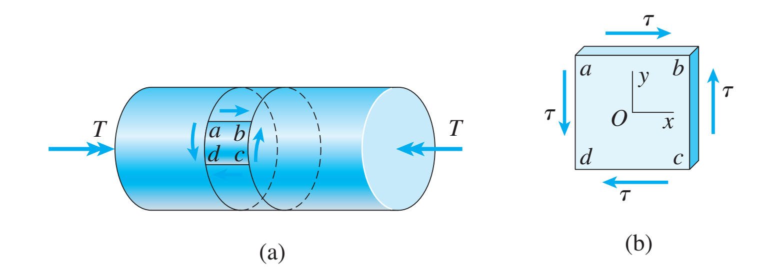


FIGURA 3.20 Esfuerzos que actúan sobre un elemento de esfuerzo cortado de una barra en torsión (cortante puro).

Esfuerzos sobre planos inclinados

Ahora ya podemos determinar los esfuerzos que actúan sobre *planos inclinados* cortados a través del elemento de esfuerzo en cortante puro. Seguiremos el mismo enfoque que se empleó en la sección 2.6 para analizar los esfuerzos en esfuerzo uniaxial.

En la figura 3.21a se muestra una vista bidimensional del elemento de esfuerzo. Como ya se explicó en la sección 2.6, usualmente trazamos una vista bidimensional por conveniencia, pero siempre debemos estar conscientes de que el elemento tiene una tercera dimensión (espesor) perpendicular al plano de la figura.

Ahora cortamos un elemento de esfuerzo con forma de cuña (o "triangular") con una cara orientada a un ángulo θ con respecto al eje x (figura 3.21b). Los esfuerzos normales σ_θ y los esfuerzos cortantes τ_θ actúan sobre esta cara inclinada y en la figura se muestran en sus direcciones positivas. La **convención de signos** para los esfuerzos σ_θ y τ_θ se describió con anterioridad en la sección 2.6 y se repite a continuación:

Los esfuerzos normales σ_θ son positivos en tensión y los esfuerzos cortantes τ_θ son positivos cuando tienden a producir rotación del material en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (Observe que esta convención de signos para el esfuerzo cortante τ_θ que actúa sobre un plano inclinado es diferente de la convención de signos para los esfuerzos cortantes ordinarios τ que actúan sobre los lados de elementos rectangulares orientados con respecto a un conjunto de ejes xy).

Las caras horizontal y vertical del elemento triangular (figura 3.21b) tienen esfuerzos cortantes positivos τ que actúan sobre ellas y las caras anterior y posterior del elemento están libres de esfuerzo. Por tanto, todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento son visibles en esta figura.

Ahora se pueden determinar los esfuerzos σ_θ y τ_θ a partir del equilibrio del elemento triangular. Las *fuerzas* que actúan sobre sus tres caras se obtienen multiplicando los esfuerzos por las áreas sobre las que actúan. Por ejemplo, la fuerza sobre la cara izquierda es igual a τA_0, donde A_0 es el área de la cara vertical. Esta fuerza actúa en la dirección y negativa y se muestra en el *diagrama de cuerpo libre* de la figura 3.21c. Puesto que el espesor del elemento en la dirección z es constante, observamos que el área de la cara inferior es $A_0 \tan\theta$ y el área de la cara inclinada es $A_0 \sec\theta$. Al multiplicar

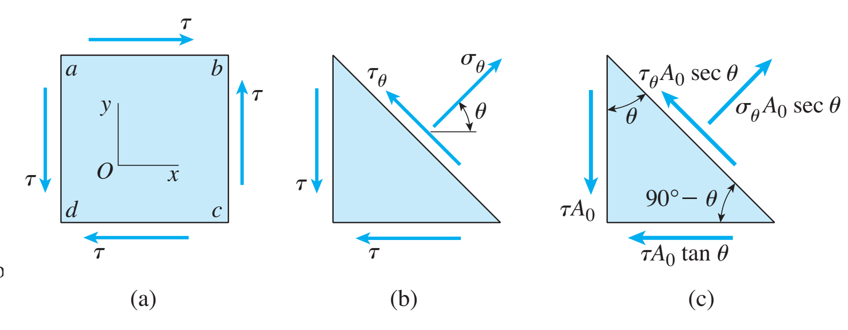


FIGURA 3.21 Análisis de esfuerzos sobre planos inclinados: (a) elemento en cortante puro, (b) esfuerzos que actúan sobre un elemento triangular de esfuerzo y (c) fuerzas que actúan sobre el elemento triangular de esfuerzo (diagrama de cuerpo libre).

los esfuerzos que actúan sobre estas caras por las áreas correspondientes nos permite obtener las fuerzas restantes y de allí completar el diagrama de cuerpo libre (figura 3.21c).

Ahora estamos en condiciones de escribir dos ecuaciones de equilibrio para el elemento triangular, una en la dirección de σ_θ y la otra en la dirección de τ_θ. Al escribir estas ecuaciones, las fuerzas que actúan sobre las caras izquierda e inferior se deben descomponer en componentes en las direcciones de σ_θ y τ_θ. De esta manera, la primera ecuación, obtenida sumando fuerzas en la dirección de σ_θ, es

$$\sigma_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \operatorname{sen}\theta + \tau A_0 \tan\theta\cos\theta$$

o

$$\sigma_\theta = 2\tau \operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad (3.29a)$$

La segunda ecuación se obtiene sumando fuerzas en la dirección de τ_θ:

$$\tau_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \cos\theta - \tau A_0 \tan\theta \operatorname{sen}\theta$$

o

$$\tau_\theta = \tau(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad (3.29b)$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en formas más simples introduciendo las identidades trigonométricas siguientes (consulte el apéndice C):

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

Entonces las ecuaciones para σ_θ y τ_θ se convierten en

$$\sigma_\theta = \tau \operatorname{sen} 2\theta \qquad \tau_\theta = \tau\cos 2\theta \qquad (3.30a,b)$$

Las ecuaciones (3.30a y b) dan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre cualquier plano inclinado en términos de los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre los planos x y y (figura 3.21a) y del ángulo θ que define la orientación del plano inclinado (figura 3.21b).

La manera en que varían los esfuerzos σ_θ y τ_θ con la orientación del plano inclinado se muestra en la figura 3.22, que es una gráfica de las ecuaciones (3.30a y b), en donde observamos que para $\theta = 0$, que es la cara derecha del elemento de esfuerzo en la figura 3.21a, la gráfica da $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = \tau$. Este último resultado era de esperarse, porque el esfuerzo cortante

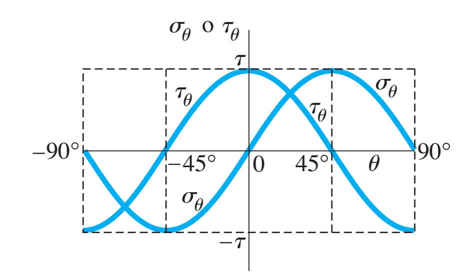


FIGURA 3.22 Gráfica de esfuerzos normales σ_θ y esfuerzos cortantes τ_θ contra el ángulo θ del plano inclinado.

τ actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj contra el elemento y, por tanto, produce un esfuerzo cortante positivo τ_θ.

Para la cara superior del elemento ($\theta = 90°$), obtenemos $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_\theta = -\tau$. El signo menos de τ_θ significa que actúa en el sentido de las manecillas del reloj contra el elemento, es decir, hacia la derecha sobre la cara *ab* (figura 3.21a), lo es consistente con la dirección del esfuerzo cortante τ. Observe que los esfuerzos cortantes numéricamente mayores ocurren en los planos para los que $\theta = 0$ y 90°, así como sobre las caras opuestas ($\theta =$ 180° y 270°).

De la gráfica observamos que el esfuerzo normal σ_θ alcanza un valor máximo en $\theta = 45°$. En ese ángulo el esfuerzo es positivo (tensión) y numéricamente igual al esfuerzo cortante τ. De manera similar, σ_θ tiene su valor mínimo (que es de compresión) en $\theta = -45°$. En los dos ángulos de 45°, el esfuerzo cortante τ_θ es igual a cero. Estas condiciones se representan en la figura 3.23 donde se muestran elementos de esfuerzos orientados en $\theta = 0$ y $\theta = 45°$. El elemento a 45° está sometido a esfuerzos de tensión y compresión iguales en direcciones perpendiculares, sin esfuerzos cortantes.

Observe que los esfuerzos normales que actúan sobre el elemento a 45° (figura 3.23b) corresponden a un elemento sometido a esfuerzos cortantes τ que actúan en la dirección que se muestra en la figura 3.23a. Si se invierte la dirección de los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento de la figura 3.23a, los esfuerzos normales que actúan sobre los planos a 45° también cambiarán direcciones.

Si un elemento de esfuerzo está orientado a un ángulo distinto a 45°,

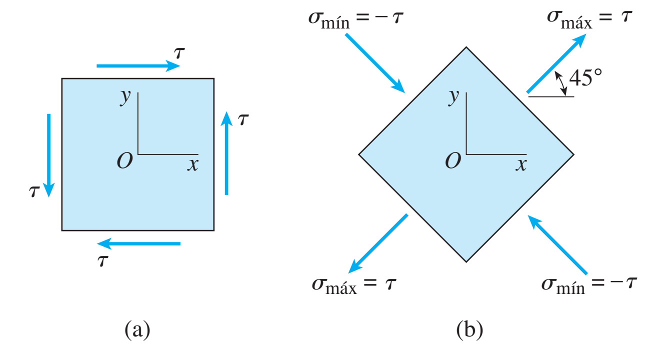


FIGURA 3.23 Elementos de esfuerzo orientados en $\theta = 0$ y $\theta = 45°$ para cortante puro.

los esfuerzos normal y cortante actuarán sobre las caras inclinadas (consulte las ecuaciones 3.30a y b y la figura 3.22). Los elementos de esfuerzo sujetos a estas condiciones más generales se analizan con detalle en el capítulo 7.

Las ecuaciones deducidas en esta sección son válidas para un elemento de esfuerzo en cortante puro sin importar si el elemento se corta de una barra en torsión o de algún otro elemento estructural. Además, como las ecuaciones (3.30) se dedujeron sólo a partir del equilibrio, son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte o no de una manera linealmente elástica.

La existencia de esfuerzos de tensión máximos sobre planos a 45° con respecto al eje *x* (figura 3.23b) explica por qué las barras en torsión que están hechas de materiales frágiles y débiles en tensión fallan agrietándose a lo largo de una superficie helicoidal a 45° (figura 3.24). Como se mencionó en la sección 3.3, este tipo de falla se demuestra fácilmente torciendo una

FIGURA 3.24 Falla por torsión de un material frágil por agrietamiento de tensión a lo largo de una superficie helicoidal a 45°.

pieza de tiza para pizarrón.

Deformaciones unitarias en cortante puro

Ahora analizamos las deformaciones unitarias en un elemento en cortante puro. Por ejemplo, considere el elemento en cortante puro que se muestra en la figura 3.23a. Las deformaciones unitarias por cortante correspondientes se muestran en la figura 3.25a, donde están muy exageradas. La deformación unitaria cortante γ es el cambio en ángulo entre dos líneas que originalmente eran perpendiculares entre sí, como se analizó con anterioridad en la sección 1.6. Por tanto, la disminución en el ángulo en la esquina inferior izquierda del elemento es la deformación unitaria por cortante γ (medida en radianes). Este mismo cambio de ángulo ocurre en la esquina superior derecha, donde el ángulo disminuye y en las otras dos esquinas, donde los ángulos aumentan. Sin embargo, las longitudes de los lados del elemento, incluyendo el espesor perpendicular al plano de la hoja, no cambian cuando ocurren estas deformaciones unitarias por cortante. Por tanto, el elemento cambia su forma de un paralelepípedo rectangular (figura 3.23a) a un paralelepípedo oblícuo (figura 3.25a). Este cambio de forma se llama **distorsión cortante.**

Si el material es linealmente elástico, la deformación unitaria por cortante para el elemento orientado en $\theta = 0$ (figura 3.25a) está relacionada con el esfuerzo cortante mediante la ley de Hooke en cortante:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \tag{3.31}$$

donde, como es usual, el símbolo G representa el módulo de elasticidad en cortante.

A continuación considere las deformaciones unitarias que ocurren en

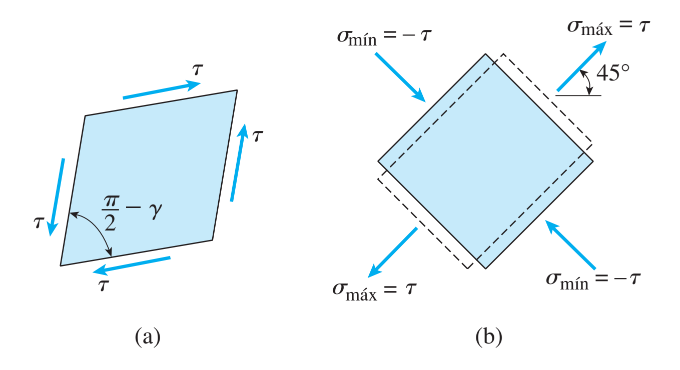


FIGURA 3.25 Deformaciones unitarias en cortante puro: (a) distorsión cortante de un elemento orientado en $\theta = 0$ y (b) distorsión de un elemento orientado en $\theta = 45°$.

un elemento orientado en $\theta = 45°$ (figura 3.25b). Los esfuerzos de tensión que actúan a 45° tienden a alargar el elemento en esa dirección. Debido al efecto de Poisson, también tienden a acortarlo en la dirección perpendicular (donde $\theta = 135°$ o $-45°$). De manera similar, los esfuerzos de compresión que actúan a 135° tienden a acortar el elemento en esa dirección y a alargarlo en la dirección a 45°. Estos cambios dimensionales se muestran en la figura 3.25b, donde las líneas discontinuas muestran el elemento deformado. Como no hay distorsiones cortantes, el elemento permanece siendo un paralelepípedo rectangular no obstante que sus dimensiones han cambiado.

Si el material es linealmente elástico y obedece la ley de Hooke, podemos obtener una ecuación que relacione las deformaciones unitarias con el esfuerzo para el elemento en $\theta = 45°$ (figura 3.25b). El esfuerzo de tensión $\sigma_{\text{máx}}$ que actúa en $\theta = 45°$ produce una deformación unitaria normal en esa dirección igual a $\sigma_{\text{máx}}/E$. Como $\sigma_{\text{máx}} = \tau$, también podemos expresar esta deformación unitaria como τ/E. El esfuerzo $\sigma_{\text{máx}}$ también produce una deformación unitaria normal en la dirección perpendicular igual a $-\nu\tau/E$, donde ν es la relación de Poisson. De manera similar, el esfuerzo $\sigma_{\text{mín}} = -\tau$ (en $\theta = 135°$) produce una deformación unitaria igual a $-\tau/E$ en esa dirección y una deformación unitaria positiva en la dirección perpendicular (la dirección a 45°) igual a $\nu\tau/E$. Por tanto, la deformación unitaria normal en la dirección a 45° es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\tau}{E} + \frac{\nu\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \qquad (3.32)$$

que es positiva, representando alargamiento. La deformación unitaria en la dirección perpendicular es una deformación unitaria negativa de la misma magnitud. En otras palabras, el cortante puro produce alargamiento en la dirección a 45° y acortamiento en la dirección a 135°. Estas deformaciones unitarias son consistentes con la forma del elemento deformado de la figura 3.25a, debido a que la diagonal a 45° se ha alargado y la diagonal a 135° se ha acortado.

En la siguiente sección emplearemos la geometría del elemento deformado para relacionar la deformación unitaria por cortante γ (figura 3.25a) con la deformación unitaria normal $\epsilon_{\text{máx}}$ en la dirección a 45° (figura 3.25b). Al hacerlo deduciremos la siguiente relación:

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\gamma}{2} \qquad (3.33)$$

Esta ecuación, junto con la ecuación (3.31), se pueden emplear para calcular las deformaciones unitarias por cortante máximas y las deformaciones unitarias normales máximas en torsión pura cuando se conoce el esfuerzo cortante τ.

Ejemplo 3.6

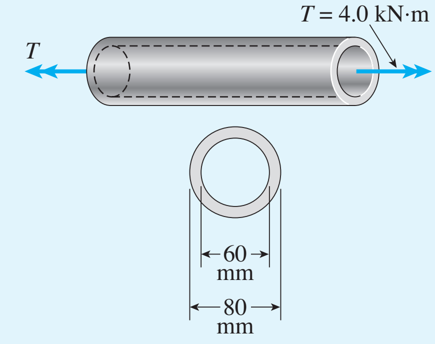


FIGURA 3.26 Ejemplo 3.6. Tubo circular en torsión.

Un tubo circular con diámetro exterior de 80 mm y diámetro interior de 60 mm se somete a un par de torsión $T = 4.0$ kN·m (figura 3.26). El tubo está hecho de una aleación de aluminio 7075-T6.

(a) Determine los esfuerzos máximos de cortante, tensión y compresión en el tubo y muéstrelos en diagramas de elementos de esfuerzo apropiadamente orientados.

(b) Determine las deformaciones unitarias máximas correspondientes en el tubo y muéstrelas en diagramas de los elementos deformados.

Solución

(a) *Esfuerzos máximos*. Los valores máximos de los tres esfuerzos (cortante, de tensión y de compresión) son numéricamente iguales, aunque actúan sobre planos diferentes. Sus magnitudes se determinan con la fórmula de la torsión:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{(4000 \text{ N·m})(0.040 \text{ m})}{\frac{\pi}{32}\left[(0.080 \text{ m})^4 - (0.060 \text{ m})^4\right]} = 58.2 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre planos transversales y longitudinales, como se muestra en la figura 3.27a, donde el eje x es paralelo al eje longitudinal del tubo.

Los esfuerzos máximos de tensión y compresión son

$$\sigma_t = 58.2 \text{ MPa} \qquad \sigma_c = -58.2 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos actúan sobre planos a 45° con respecto al eje (figura 3.27b).

(b) *Deformaciones unitarias máximas*. La deformación unitaria máxima en el tubo se obtiene con la ecuación (3.31). El módulo de elasticidad cortante se obtiene de la tabla H-2 del apéndice H, que es $G = 27$ GPa. Por tanto, la deformación unitaria máxima es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G} = \frac{58.2 \text{ MPa}}{27 \text{ GPa}} = 0.0022 \text{ rad}$$

El elemento deformado se muestra mediante las líneas discontinuas en la figura 3.27c.

La magnitud de las deformaciones unitarias normales (de la ecuación 3.33) es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = 0.0011$$

Por tanto, las deformaciones unitarias máximas en tensión y compresión son

$$\epsilon_t = 0.0011 \qquad \epsilon_c = -0.0011$$

El elemento deformado se muestra mediante las líneas discontinuas en la figura 3.27d para un elemento con lados de dimensiones unitarias.

continúa

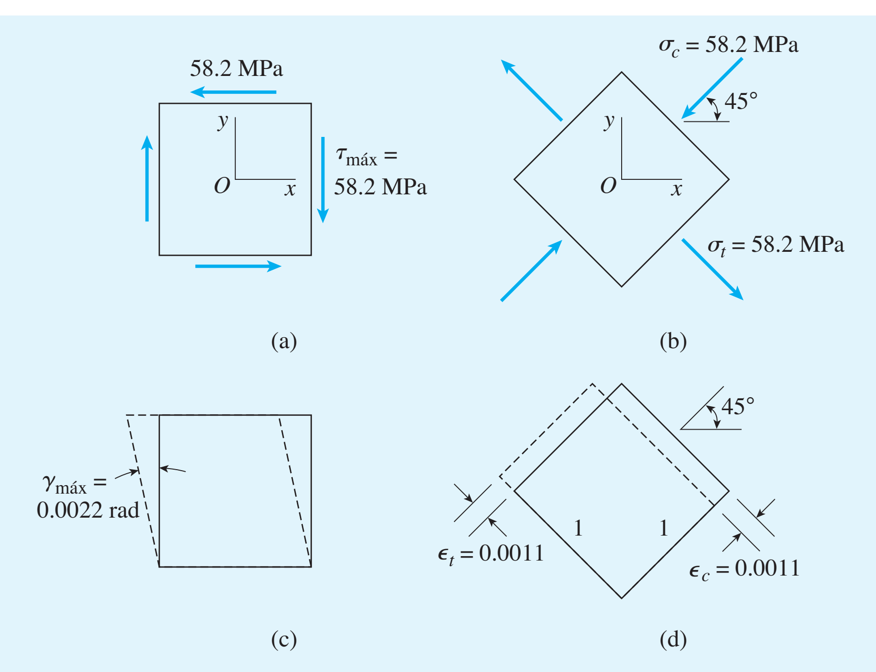


FIGURA 3.27 Elementos de esfuerzo y deformación unitaria para el tubo del ejemplo 3.6: (a) esfuerzos cortantes máximos, (b) esfuerzos máximos de tensión y compresión, (c) deformaciones unitarias máximas y (d) deformaciones unitarias máximas de tensión y compresión.

3.6 RELACIÓN ENTRE LOS MÓDULOS DE ELASTICIDAD *E* Y *G*

Es posible obtener una relación importante entre los módulos de elasticidad E y G a partir de las ecuaciones deducidas en la sección anterior. Para este fin, considere el elemento de esfuerzo *abcd* que se muestra en la figura 3.28a. La cara anterior se supone que es cuadrada, la longitud de cada lado se denota con h. Cuando este elemento se somete a cortante puro por esfuerzos τ, la cara anterior se distorsiona en un rombo (figura 3.28b) con lados de longitud h y con deformación unitaria por cortante $\gamma = \tau/G$. Debido a la distorsión, la diagonal *bd* se alarga y la diagonal *ac* se acorta. La longitud de la diagonal *bd* es igual a su longitud inicial $\sqrt{2}\,h$ multiplicada por el factor $1 + \epsilon_{máx}$, donde $\epsilon_{máx}$ es la deformación unitaria normal en la dirección a 45°; por tanto,

$$L_{bd} = \sqrt{2}\,h(1 + \epsilon_{máx}) \qquad \text{(a)}$$

Esta longitud se puede relacionar con la deformación unitaria normal γ considerando la geometría del elemento deformado.

Para obtener las relaciones geométricas requeridas, considere el triángulo *abd* (figura 3.28c) que representa la mitad de los rombos presentados en la figura 3.28b. El lado *bd* de este triángulo tiene una longitud L_{bd} (ecuación a) y los otros lados tienen una longitud h. El ángulo *adb* del triángulo es igual a la mitad del ángulo *adc* del rombo o $\pi/4 - \gamma/2$. El ángulo *abd* en el triángulo es el mismo. Por tanto, el ángulo *dab* del triángulo es igual a $\pi/2 + \gamma$. Ahora, empleando la ley de los cosenos (consulte el apéndice C) para el triángulo *abd*, obtenemos

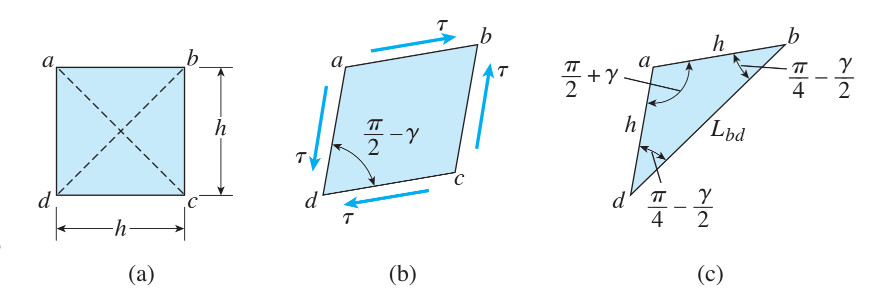


FIGURA 3.28 Geometría de un elemento deformado en cortante puro.

$$L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

Al sustituir L_{bd} obtenido en la ecuación (a) y simplificando, obtenemos

$$(1 + \epsilon_{\text{máx}})^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

Desarrollando el término en el lado izquierdo y observando que $\cos(\pi/2 + \gamma) = -\text{sen}\ \gamma$, obtenemos

$$1 + 2\epsilon_{\text{máx}} + \epsilon^2_{\text{máx}} = 1 + \text{sen}\ \gamma$$

Como $\epsilon_{\text{máx}}$ y γ son deformaciones unitarias muy pequeñas, podemos ignorar el término $\epsilon^2_{\text{máx}}$ en comparación con $2\epsilon_{\text{máx}}$ y remplazar sen γ con γ. La expresión resultante es

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\gamma}{2} \tag{3.34}$$

que establece la relación ya presentada en la sección 3.5 como la ecuación (3.33).

La deformación unitaria por cortante γ que aparece en la ecuación (3.34) es igual a τ/G según la ley de Hooke (ecuación 3.31) y la deformación unitaria normal $\epsilon_{\text{máx}}$ es igual a $\tau(1 + \nu)/E$ de acuerdo con la ecuación (3.32). Al realizar estas dos sustituciones en la ecuación (3.34) se obtiene

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{3.35}$$

Vemos que E, G y ν no son propiedades independientes de un material linealmente elástico y, si dos de ellas se conocen, la tercera se puede calcular a partir de la ecuación (3.35).

Algunos valores comunes de E, G y ν se presentan en la tabla H.2 del apéndice H.

3.7 TRANSMISIÓN DE POTENCIA POR EJES CIRCULARES

El uso más importante de los ejes circulares es transmitir potencia mecánica de un dispositivo o una máquina a otra, como en el caso del eje impulsor de un automóvil, el eje de la hélice de un barco o el eje de una bicicleta. La potencia se transmite mediante el movimiento rotatorio del eje, y la cantidad de potencia transmitida depende de la magnitud del par de torsión y de la velocidad de rotación. Un problema común de diseño es determinar el tamaño necesario de un eje tal que transmita una cantidad especificada de potencia a una velocidad rotacional especificada sin sobrepasar los esfuerzos permisibles para el material.

Supongamos que un eje impulsado por un motor (figura 3.29) gira a una velocidad angular ω, medida en radianes por segundo (rad/s). El eje transmite un par de torsión T al dispositivo (no se muestra en la figura) que realiza trabajo útil. El par de torsión aplicado por el eje al dispositivo externo tiene el mismo sentido que la velocidad angular ω, es decir, su vector apunta hacia la izquierda. Sin embargo, el par de torsión que se muestra en la figura es el par de torsión ejercido *sobre el eje* por el dispositivo y, por tanto, su vector apunta en la dirección opuesta.

En general, el trabajo W realizado por un par de torsión de magnitud constante es igual al producto del par de torsión por el ángulo que gira; es decir,

$$W = T\psi \qquad (3.36)$$

donde ψ es el ángulo de rotación en radianes.

Potencia es la *rapidez* con que se realiza el trabajo o

$$P = \frac{dW}{dt} = T\frac{d\psi}{dt} \qquad (3.37)$$

en donde P es el símbolo para la potencia y t representa el tiempo. La razón de cambio $d\psi/dt$ del desplazamiento angular ψ es la velocidad angular ω y, por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$P = T\omega \qquad (\omega = \text{rad/s}) \qquad (3.38)$$

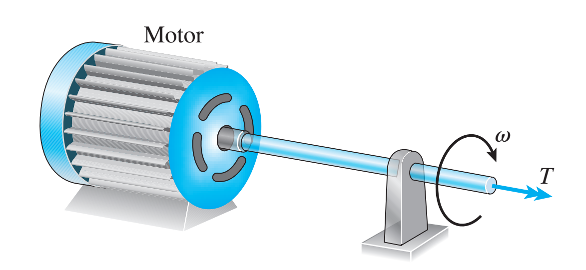


FIGURA 3.29 Eje que transmite un par de torsión T constante a una velocidad angular ω.

Esta fórmula, que resulta familiar de la física elemental, da la potencia transmitida por un eje rotatorio que transmite un par de torsión constante T.

Las **unidades** que se deben utilizar en la ecuación (3.38) son las siguientes. Si el par de torsión T se expresa en newtons metro, entonces la potencia se expresa en watts (W). Un watt es igual a un newton metro por segundo (o un joule por segundo). Si T se expresa en libras-pie, entonces la potencia se expresa en pies-libra por segundo.*

Con frecuencia la velocidad angular se expresa como la frecuencia f de rotación, que es el número de revoluciones por unidad de tiempo. La unidad de la frecuencia es el hertzio (Hz), que es igual a una revolución por segundo (s^{-1}). Como una revolución es igual a 2π radianes, obtenemos

$$\omega = 2\pi f \qquad (\omega = \text{rad/s},\ f = \text{Hz} = \text{s}^{-1}) \tag{3.39}$$

Entonces la expresión para la potencia (ecuación 3.38) se convierte en

$$P = 2\pi f T \qquad (f = \text{Hz} = \text{s}^{-1}) \tag{3.40}$$

Otra unidad de uso común es el número de revoluciones por minuto (rpm), denotada con la letra n. Por tanto, también tenemos las siguientes relaciones:

$$n = 60f \tag{3.41}$$

y

$$P = \frac{2\pi n T}{60} \qquad (n = \text{rpm}) \tag{3.42}$$

En las ecuaciones (3.40) y (3.42), las cantidades P y T tienen las mismas unidades que en la ecuación (3.38); es decir, P tiene unidades de watts si T tiene unidades de newtons metro y P tiene unidades de pies-libra por segundo si T tiene unidades de libras-pie.

En la práctica de ingeniería en Estados Unidos, la potencia algunas veces se expresa en caballos de potencia (hp), una unidad igual a 550 ft-lb/s. Por tanto, los caballos de potencia H transmitidos por un eje rotatorio son

$$H = \frac{2\pi n T}{60(550)} = \frac{2\pi n T}{33{,}000} \qquad (n = \text{rpm},\ T = \text{lb-ft},\ H = \text{hp}) \tag{3.43}$$

Un caballo de potencia es aproximadamente igual a 746 watts.

Las ecuaciones anteriores relacionan el par de torsión que actúa en un eje con la potencia transmitida por éste. Al conocer el par de torsión podemos determinar los esfuerzos cortantes, las deformaciones unitarias por cortante, los ángulos de torsión y otras cantidades que se deseen mediante los métodos descritos en las secciones 3.2 a 3.5.

Los ejemplos siguientes ilustran algunos de los procedimientos para analizar ejes rotatorios.

*Consulte la tabla A-1 del apéndice A, para ver las unidades de trabajo y potencia.

Ejemplo 3.7

Un motor que impulsa un eje sólido circular de acero transmite 40 hp al engrane en *B* (figura 3.30). El esfuerzo cortante permisible en el acero es 6000 psi.

(a) ¿Cuál es el diámetro *d* requerido para el eje si opera a una velocidad de 500 rpm?

(b) ¿Cuál es el diámetro *d* requerido para el eje si opera a una velocidad de 300 rpm?

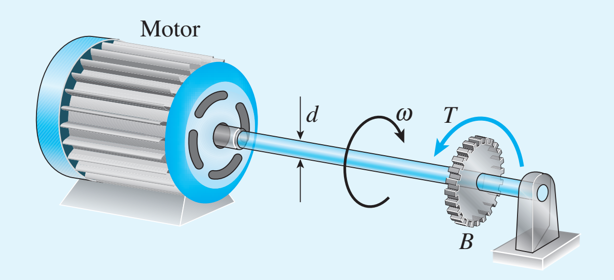


FIGURA 3.30 Ejemplo 3.7. Eje de acero en torsión.

Solución

(a) *Motor que opera a 500 rpm*. Conociendo la potencia y la velocidad de rotación, podemos encontrar el par de torsión *T* que actúa sobre el eje empleando la ecuación (3.43). Despejando *T* en la esa ecuación, obtenemos

$$T = \frac{33{,}000H}{2\pi n} = \frac{33{,}000(40\text{ hp})}{2\pi(500\text{ rpm})} = 420.2\text{ lb-ft} = 5042\text{ lb-in}$$

Este par de torsión lo transmite el eje del motor al engrane.

El esfuerzo cortante máximo en el eje se puede obtener con la fórmula modificada de la torsión (ecuación 3.12):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

Al despejar el diámetro *d* en esta ecuación y al sustituir t_{perm} con $\tau_{\text{máx}}$, obtenemos

$$d^3 = \frac{16T}{\pi\tau_{\text{perm}}} = \frac{16(5042\text{ lb-in})}{\pi(6000\text{ psi})} = 4.280\text{ in}^3$$

de donde

$$d = 1.62\text{ in}$$

El diámetro del eje debe tener al menos esta medida para no exceder el esfuerzo cortante permisible.

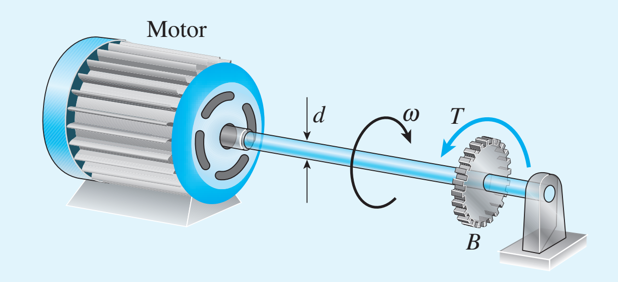


FIGURA 3.30 (Repetida)

(b) *Motor operando a 300 rpm*. Siguiendo el mismo procedimiento que en el inciso (a), obtenemos

$$T = \frac{33{,}000H}{2\pi n} = \frac{33{,}000(40 \text{ hp})}{2\pi(3000 \text{ rpm})} = 70.03 \text{ lb-ft} = 840.3 \text{ lb-in}$$

$$d^3 = \frac{16T}{\pi\tau_{\text{perm}}} = \frac{16(840.3 \text{ lb-in})}{\pi(6000 \text{ psi})} = 0.7133 \text{ in}^3$$

$$d = 0.89 \text{ in}$$

que es menor que el diámetro determinado en el inciso (a).

Este ejemplo ilustra que a mayor velocidad de rotación, menor será el tamaño requerido del eje (para la misma potencia y mismo esfuerzo permisible).

Ejemplo 3.8

Un eje sólido de acero *ABC* con 50 mm de diámetro (figura 3.31a) es impulsada en *A* por un motor que transmite 50 kW al eje a 10 Hz. Los engranes en *B* y *C* impulsan maquinaria que requiere potencia igual a 35 kW y 15 kW, respectivamente.

Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el eje y el ángulo de torsión ϕ_{AC} entre el motor en *A* y el engrane en *C*. (Utilice $G = 80$ GPa).

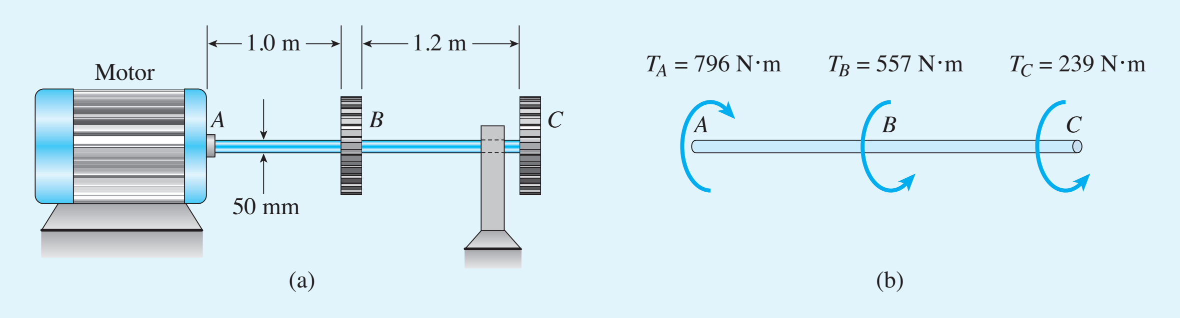


FIGURA 3.31 Ejemplo 3.8. Eje de acero en torsión.

continúa

Solución

Pares de torsión en el eje. Iniciamos el análisis determinando los pares de torsión aplicados al eje por el motor y los dos engranes. Como el motor suministra 50 kW a 10 Hz, crea un par de torsión T_A en el extremo A del eje (figura 3.31b) que podemos calcular con la ecuación (3.40):

$$T_A = \frac{P}{2\pi f} = \frac{50 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 796 \text{ N·m}$$

De una manera similar, podemos calcular los pares de torsión T_B y T_C aplicados por los engranes al eje:

$$T_B = \frac{P}{2\pi f} = \frac{35 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 557 \text{ N·m}$$

$$T_C = \frac{P}{2\pi f} = \frac{15 \text{ kW}}{2\pi(10 \text{ Hz})} = 239 \text{ N·m}$$

Estos pares de torsión se muestran en el diagrama de cuerpo libre del eje (figura 3.31b). Observe que los pares de torsión aplicados por los engranes tienen sentidos opuestos al par de torsión aplicado por el motor. (Si consideramos T_A como la "carga" aplicada al eje por el motor, entonces los pares de torsión T_B y T_C son las "reacciones" de los engranes).

Ahora se determinan (por inspección) los pares de torsión internos en los dos segmentos del eje a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.31b:

$$T_{AB} = 796 \text{ N·m} \qquad T_{BC} = 239 \text{ N·m}$$

Los dos pares de torsión internos actúan en el mismo sentido y por lo tanto, los ángulos de torsión en los segmentos AB y BC son aditivos al determinar el ángulo total de torsión. (Para ser específicos, los dos pares de torsión son positivos de acuerdo con la convención de signos adoptada en la sección 3.4).

Esfuerzos cortantes y ángulos de torsión. El esfuerzo cortante y el ángulo de torsión en el segmento AB del eje se determinan de la manera usual con las ecuaciones (3.12) y (3.15):

$$\tau_{AB} = \frac{16T_{AB}}{\pi d^3} = \frac{16(796 \text{ N·m})}{\pi(50 \text{ mm})^3} = 32.4 \text{ MPa}$$

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GI_P} = \frac{(796 \text{ N·m})(1.0 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})\left(\frac{\pi}{32}\right)(50 \text{ mm})^4} = 0.0162 \text{ rad}$$

Las cantidades correspondientes para el segmento BC son

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16(239 \text{ N·m})}{\pi(50 \text{ mm})^3} = 9.7 \text{ MPa}$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} = \frac{(239 \text{ N·m})(1.2 \text{ m})}{(80 \text{ GPa})\left(\frac{\pi}{32}\right)(50 \text{ mm})^4} = 0.0058 \text{ rad}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en el eje se tiene en el segmento AB y es

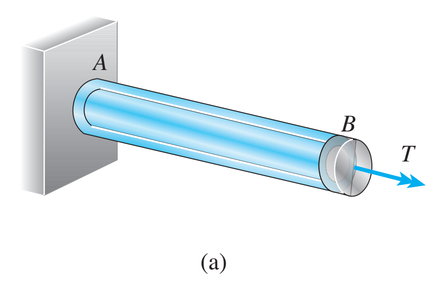
$$\tau_{\text{máx}} = 32.4 \text{ MPa}$$

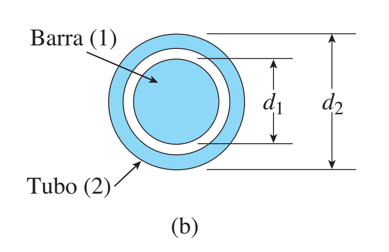
Además, el ángulo total de torsión entre el motor en A y el engrane en C es

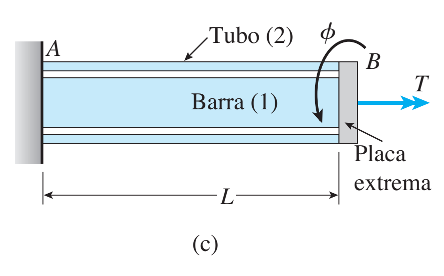
$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} = 0.0162 \text{ rad} + 0.0058 \text{ rad} = 0.0220 \text{ rad} = 1.26°$$

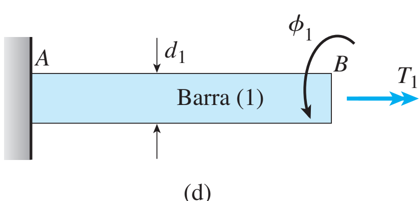
Como se explicó antes, las dos partes del eje giran en el mismo sentido, por lo que sus ángulos de torsión se suman.

3.8 ELEMENTOS DE TORSIÓN ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS









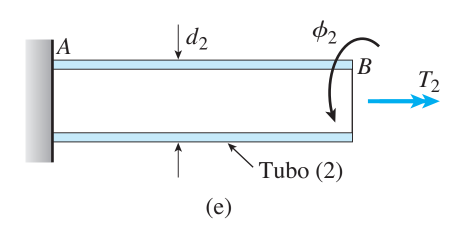


FIGURA 3.32 Barra estáticamente indeterminada en torsión.

Las barras y los ejes descritos en las secciones anteriores de este capítulo están *estáticamente indeterminados* debido a que todos los pares de torsión internos y todas las reacciones se pueden obtener de diagramas de cuerpo libre y de las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, si se agregan restricciones adicionales a las barras, como soportes fijos, las ecuaciones de equilibrio ya no serán adecuadas para determinar los pares de torsión. Entonces, las barras se clasifican como **estáticamente indeterminadas**. Los elementos torsionales de este tipo se pueden analizar complementando las ecuaciones de equilibrio con ecuaciones de compatibilidad relativas a los desplazamientos rotacionales. De esta manera, el método general para analizar elementos torsionales estáticamente indeterminados es el mismo que se describió en la sección 2.4 para barras estáticamente indeterminadas con cargas axiales.

El primer paso en el análisis es escribir **ecuaciones de equilibrio**, que se obtienen de diagramas de cuerpo libre de la situación física dada. Las cantidades desconocidas en las ecuaciones de equilibrio son los pares de torsión, ya sea internos o de reacciones.

El segundo paso en el análisis es formular **ecuaciones de compatibilidad**, con base en las condiciones físicas relativas a los ángulos de torsión. Como consecuencia, las ecuaciones de compatibilidad contienen ángulos de torsión como incógnitas.

El tercer paso es relacionar los ángulos de torsión con los pares de torsión mediante **relaciones par de torsión-desplazamiento**, como $\phi = TL/GI_P$. Después de introducir estas relaciones en las ecuaciones de compatibilidad, también se convierten en ecuaciones que contienen pares de torsión como incógnitas. Por tanto, el último paso es obtener los pares de torsión desconocidos y resolver de manera simultánea las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad.

Para ilustrar el método de solución. Analizaremos la barra compuesta *AB* que se muestra en la figura 3.32a. La barra está sujeta a un soporte fijo en el extremo *A* y cargada por un par de torsión *T* en el extremo *B*. Además, la barra consiste de dos partes: una barra sólida y un tubo (figuras 3.32b y c), con la barra sólida y el tubo unidos a una placa extrema rígida en *B*.

Por conveniencia, identificaremos la barra sólida y el tubo (y sus propiedades) con los números 1 y 2, respectivamente. Por ejemplo, el diámetro de la barra sólida se denota d_1 y el diámetro exterior del tubo se denota d_2. Existe un espacio libre entre la barra y el tubo, por tanto el diámetro interior del tubo es ligeramente mayor que el diámetro d_1 de la barra.

Al aplicar un par de torsión *T* a la barra compuesta, la placa extrema gira un ángulo pequeño ϕ (figura 3.32c) y se desarrollan los pares de torsión T_1 y T_2 en la barra sólida y el tubo, respectivamente (figuras 3.32d y e). Del equilibrio sabemos que la suma de estos pares de torsión es igual a la carga aplicada, por tanto la *ecuación de equilibrio* es

$$T_1 + T_2 = T \quad \text{(a)}$$

Como esta ecuación contiene dos incógnitas (T_1 y T_2), reconocemos que la barra compuesta está estáticamente indeterminada.

Para obtener una segunda ecuación debemos considerar los desplazamientos rotacionales tanto de la barra sólida como del tubo. Si denotamos el ángulo de torsión de la barra sólida (figura 3.32d) con ϕ_1 y el ángulo de torsión del tubo con ϕ_2 (figura 3.32e). Estos ángulos de torsión deben ser iguales en virtud de que la barra y el tubo están unidos firmemente a la placa extrema y giran con ella; en consecuencia, la *ecuación de compatibilidad* es

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{b}$$

Los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 están relacionados con los pares de torsión T_1 y T_2 por las *relaciones par de torsión-desplazamiento*, que en el caso de materiales linealmente elásticos se obtienen de la ecuación $\phi = TL/GI_P$. Por tanto,

$$\phi_1 = \frac{T_1 L}{G_1 I_{P1}} \qquad \phi_2 = \frac{T_2 L}{G_2 I_{P2}} \tag{c,d}$$

en donde G_1 y G_2 son los módulos de elasticidad en cortante de los materiales e I_{P1} e I_{P2} son los momentos polares de inercia de las secciones transversales.

Al sustituir las expresiones anteriores para ϕ_1 y ϕ_2 en la ecuación (b), la ecuación de compatibilidad se convierte en

$$\frac{T_1 L}{G_1 I_{P1}} = \frac{T_2 L}{G_2 I_{P2}} \tag{e}$$

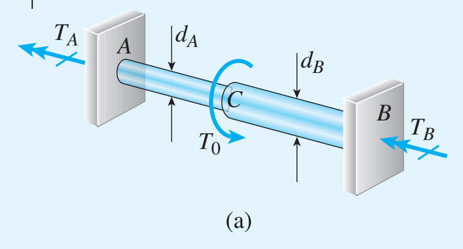
Ahora tenemos dos ecuaciones (ecuaciones a y e) con dos incógnitas, por lo que podemos despejar de ellas los pares de torsión T_1 y T_2. Los resultados son

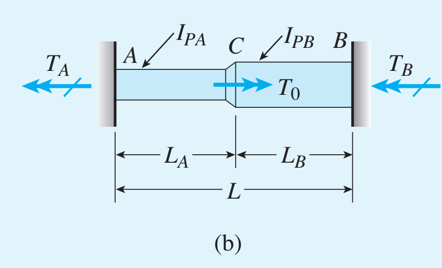
$$T_1 = T\left(\frac{G_1 I_{P1}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}}\right) \qquad T_2 = T\left(\frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}}\right) \tag{3.44a,b}$$

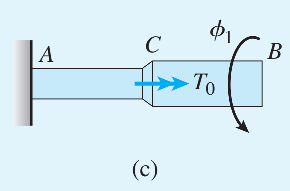
Conociendo estos pares de torsión, la parte esencial del análisis estáticamente indeterminado está completa; ahora todas las otras ecuaciones, como los esfuerzos y los ángulos de torsión, se pueden determinar a partir de los pares de torsión.

Mediante el análisis anterior se ilustra la metodología general para analizar un sistema en torsión estáticamente indeterminado. En el siguiente ejemplo se utiliza el mismo enfoque para analizar una barra que está fija contra la rotación en los dos extremos. En el ejemplo y en los problemas, suponemos que las barras están hechas de materiales linealmente elásticos. Sin embargo, la metodología general también se aplica a barras de materiales no lineales, el único cambio es en las relaciones par de torsión-desplazamiento.

Ejemplo 3.9







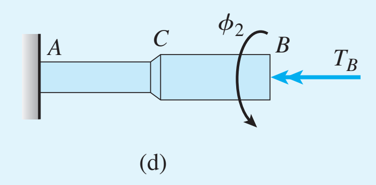


FIGURA 3.33 Ejemplo 3.9. Barra estáticamente indeterminada en torsión.

La barra *ACB* que se muestren en las figuras 3-33a y b está fija en los dos extremos y cargada por un par de torsión T_0 en el punto *C*. Los segmentos *AC* y *CB* de la barra tienen diámetros d_A y d_B, longitudes L_A y L_B y momentos polares de inercia I_{PA} e I_{PB}, respectivamente. El material de la barra es el mismo en los dos segmentos.

Obtenga fórmulas para (a) los pares de torsión reactivos T_A y T_B en los extremos, (b) los esfuerzos cortantes máximos τ_{AC} y τ_{CB} en cada segmento de la barra y (c) el ángulo de rotación ϕ_C en la sección transversal donde se aplica la carga T_0.

Solución

Ecuación de equilibrio. La carga T_0 produce reacciones T_A y T_B en los extremos de la barra, como se muestra en las figuras 3.33a y b. Por tanto, del equilibrio de la barra obtenemos

$$T_A + T_B = T_0 \tag{f}$$

Dado que hay dos incógnitas en esta ecuación (y ninguna otra ecuación útil de equilibrio), la barra es estáticamente indeterminada.

Ecuación de compatibilidad. Ahora separamos la barra de su soporte en el extremo *B* y obtenemos una barra que está fija en el extremo *A* y libre en el extremo *B* (figuras 3.33c y d). Cuando la carga T_0 actúa sola (figura 3.33c), produce un ángulo de torsión en el extremo *B* que denotamos ϕ_1. De manera similar, cuando el par de torsión reactivo T_B actúa solo, produce un ángulo ϕ_2 (figura 3.33d). El ángulo de torsión en el extremo *B* en la barra original, igual a la suma de ϕ_1 y ϕ_2, es cero. Por tanto, la ecuación de compatibilidad es

$$\phi_1 + \phi_2 = 0 \tag{g}$$

Observe que ϕ_1 y ϕ_2 se suponen positivos en el sentido que se muestra en la figura.

Ecuaciones par de torsión-desplazamiento. Los ángulos de torsión ϕ_1 y ϕ_2 se pueden expresar en términos de los pares de torsión T_0 y T_B con referencia a las figuras 3.33c y d, y utilizando la ecuación $\phi = TL/GI_P$. Las ecuaciones son las siguientes:

$$\phi_1 = \frac{T_0 L_A}{G I_{PA}} \qquad \phi_2 = -\frac{T_B L_A}{G I_{PA}} - \frac{T_B L_B}{G I_{PB}} \tag{h,i}$$

El signo de menos aparece en la ecuación (i) debido a que T_B produce una rotación con sentido opuesto al sentido positivo de ϕ_2 (figura 3.33d).

Ahora sustituimos los ángulos de torsión (ecuaciones h e i) en la ecuación de compatibilidad (ecuación g) y obtenemos

$$\frac{T_0 L_A}{G I_{PA}} - \frac{T_B L_A}{G I_{PA}} - \frac{T_B L_B}{G I_{PB}} = 0$$

o

$$\frac{T_B L_A}{I_{PA}} + \frac{T_B L_B}{I_{PB}} = \frac{T_0 L_A}{I_{PA}} \tag{j}$$

Solución de ecuaciones. En la ecuación anterior se puede despejar el par de torsión T_B, que luego se puede sustituir en la ecuación de equilibrio (ecuación f) para obtener el par de torsión T_A. Los resultados son

$$T_A = T_0\left(\frac{L_B I_{PA}}{L_B I_{PA} + L_A I_{PB}}\right) \qquad T_B = T_0\left(\frac{L_A I_{PB}}{L_B I_{PA} + L_A I_{PB}}\right) \tag{3.45a,b}$$

Por tanto, hemos determinado los pares de torsión reactivos en los extremos de la barra y la parte estáticamente indeterminada del análisis está completa.

Como un caso especial, observe que si la barra es prismática ($I_{PA} = I_{PB} = I_P$) los resultados anteriores se simplifican a

$$T_A = \frac{T_0 L_B}{L} \qquad T_B = \frac{T_0 L_A}{L} \tag{3.46a,b}$$

donde L es la longitud total de la barra. Estas ecuaciones son análogas a las de las reacciones de una barra cargada axialmente con extremos fijos (consulte las ecuaciones 2.9a y b).

Esfuerzos cortantes máximos. Los esfuerzos cortantes máximos en cada parte de la barra se obtienen directamente de la fórmula de la torsión:

$$\tau_{AC} = \frac{T_A d_A}{2I_{PA}} \qquad \tau_{CB} = \frac{T_B d_B}{2I_{PB}}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.45a) y (3.45b) en la ecuación anterior da

$$\tau_{AC} = \frac{T_0 L_B d_A}{2(L_B I_{PA} + L_A I_{PB})} \qquad \tau_{CB} = \frac{T_0 L_A d_B}{2(L_B I_{PA} + L_A I_{PB})} \tag{3.47a,b}$$

Comparando el producto $L_B d_A$ con el producto $L_A d_B$, podemos determinar de inmediato cuál segmento de la barra tiene el esfuerzo mayor.

Ángulo de rotación. El ángulo de rotación ϕ_C en la sección C es igual al ángulo de torsión de cualquier segmento de la barra, puesto que los dos giran el mismo ángulo en la sección C. Por tanto, obtenemos

$$\phi_C = \frac{T_A L_A}{G I_{PA}} = \frac{T_B L_B}{G I_{PB}} = \frac{T_0 L_A L_B}{G(L_B I_{PA} + L_A I_{PB})} \tag{3.48}$$

En el caso especial de una barra prismática ($I_{PA} = I_{PB} = I_P$), el ángulo de rotación en la sección donde se aplica la carga es

$$\phi_C = \frac{T_0 L_A L_B}{G L I_P} \tag{3.49}$$

Este ejemplo ilustra el análisis de una barra estáticamente indeterminada y también las técnicas para determinar esfuerzos y ángulos de rotación. Además, observe que los resultados obtenidos en este ejemplo son válidos para una barra que consiste de segmentos sólidos o tubulares.

3.9 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN TORSIÓN Y CORTANTE PURO

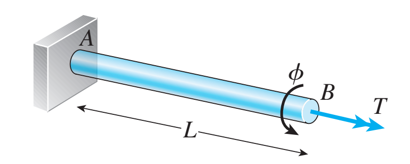


FIGURA 3.34 Barra prismática en torsión pura.

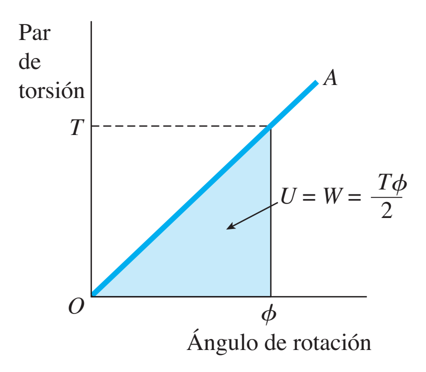


FIGURA 3.35 Diagrama par de torsión-rotación para una barra en torsión pura (material linealmente elástico).

Cuando se aplica una carga a una estructura, la carga realiza trabajo y en la estructura se desarrolla una energía de deformación, como se describió con detalle en la sección 2.7 para una barra sometida a cargas axiales. En esta sección utilizaremos los mismos conceptos básicos para determinar la energía de deformación de una barra en torsión.

Considere una barra prismática *AB* en **torsión pura** ante la acción de un par de torsión *T* (figura 3.34). Cuando la carga se aplica estáticamente, la barra se tuerce y el extremo libre gira un ángulo ϕ. Si suponemos que el material de la barra es linealmente elástico y que obedece la ley de Hooke, entonces la relación entre el par de torsión aplicado y el ángulo de torsión también será lineal, como se muestra en el diagrama par de torsión-rotación de la figura 3.35 y como se da por la ecuación $\phi = TL/GI_P$.

El trabajo *W* realizado por el par de torsión conforme gira a través del ángulo ϕ es igual al área debajo de la línea par de torsión-rotación *OA*, es decir, es igual al área del triángulo sombreado en la figura 3.35. Además, del principio de conservación de la energía sabemos que la energía de deformación de la barra es igual al trabajo realizado por la carga, siempre que no se gane o pierda energía en forma de calor. Por tanto, obtenemos la siguiente ecuación para la energía de deformación *U* de la barra:

$$U = W = \frac{T\phi}{2} \tag{3.50}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación $U = W = P\delta/2$ para una barra sometida a una carga axial (consulte la ecuación 2.35).

Utilizando la ecuación $\phi = TL/GI_P$, podemos expresar la energía de deformación en las siguientes formas:

$$U = \frac{T^2L}{2GI_P} \qquad U = \frac{GI_P\phi^2}{2L} \tag{3.51a,b}$$

La primera expresión está en términos de la carga y la segunda en términos del ángulo de torsión. Una vez más, observe la analogía con las ecuaciones correspondientes para una barra con una carga axial (consulte las ecuaciones 2.37a y b).

La unidad SI para el trabajo y la energía es el joule (J), que es igual a un newton metro (1 J = 1 N · m). La unidad inglesa básica es el pie-libra (ft-lb), pero es común emplear otras unidades similares, como la pulgada-libra (in-lb) y pulgada-kip (in-k).

Torsión no uniforme

Si una barra se somete a una torsión no uniforme (descrita en la sección 3.4), necesitamos fórmulas adicionales para la energía de deformación. En los casos en que la barra consista en segmentos prismáticos con par de torsión constante en cada segmento (consulte la figura 3.14 de la sección 3.4),

podemos determinar la energía de deformación de cada segmento y luego sumarlas para obtener la energía total de la barra:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i \tag{3.52}$$

en donde U_i es la energía de deformación del segmento i y n es el número de segmentos. Por ejemplo, si utilizamos la ecuación (3.51a) para obtener las energías de deformación individuales, la ecuación anterior se transforma en

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2 L_i}{2G_i (I_P)_i} \tag{5.53}$$

en donde T_i es el par de torsión interno en el segmento i y L_i, G_i e $(I_P)_i$ son las propiedades torsionales del segmento.

Si la sección transversal de la barra o el par de torsión interno varía a lo largo del eje, como se ilustra en las figuras 3.15 y 3.16 de la sección 3.4, podemos obtener la energía de deformación total determinando primero la energía de deformación de un elemento y luego integrando a lo largo del eje. Para un elemento con longitud dx, la energía de deformación es (consulte la ecuación 3.51a)

$$dU = \frac{[T(x)]^2 dx}{2GI_P(x)}$$

en donde $T(x)$ es el par de torsión interno que actúa sobre el elemento e $I_P(x)$ es el momento polar de inercia de la sección transversal en el elemento. Por tanto, la energía de deformación total de la barra es

$$U = \int_0^L \frac{[T(x)]^2 dx}{2GI_P(x)} \tag{3-54}$$

De nuevo deben observarse las similitudes de las expresiones para la energía de deformación en torsión y carga axial (compare las ecuaciones 3.53 y 3.54 con las ecuaciones 2.40 y 2.41 de la sección 2.7).

El empleo de las ecuaciones anteriores para torsión no uniforme se ilustra en los ejemplos que siguen. En el ejemplo 3.10 la energía de deformación se determina para una barra en torsión pura con segmentos prismáticos y en los ejemplos 3.11 y 3.12 se determina la energía de deformación para barras con pares de torsión variables y dimensiones de sus secciones transversales variables.

Además, en el ejemplo 3.12 se muestra cómo en condiciones muy limitadas el ángulo de torsión de una barra se puede determinar a partir de su energía de deformación. (Para un análisis más detallado de este método, incluyendo sus limitaciones, consulte la subsección "Desplazamientos causados por una sola carga" en la sección 2.7).

Limitaciones

Al evaluar la energía de deformación debemos tener en cuenta que las ecuaciones deducidas en esta sección sólo se aplican a barras de materiales linealmente elásticos con ángulos de torsión pequeños. Además, debemos recordar la observación importante enunciada previamente en la sección 2.7: *la energía de deformación de una estructura que soporta más de una carga no se puede obtener sumando las energías de deformación obtenidas*

para las cargas individuales que actúan por separado. Esta observación se demuestra en el ejemplo 3.10.

Densidad de energía de deformación en cortante puro

Como los elementos individuales de una barra en torsión se someten a esfuerzos en cortante puro, es útil obtener expresiones para la energía de deformación asociada con los esfuerzos cortantes. Iniciamos el análisis considerando un elemento pequeño de material sometido a esfuerzos cortantes τ sobre sus caras laterales (figura 3.36a). Por conveniencia supondremos que la cara anterior del elemento es cuadrada, con cada lado de longitud h. Si bien la figura muestra sólo una vista bidimensional del elemento, reconocemos que el elemento en realidad es tridimensional con espesor t perpendicular al plano de la figura.

Ante la acción de los esfuerzos cortantes, el elemento se distorsiona de manera tal que la cara anterior se convierte en un rombo. Como se muestra en la figura 3.36b. El cambio de ángulo en cada esquina del elemento es la deformación unitaria por cortante γ.

Las fuerzas cortantes V que actúan sobre las caras laterales del elemento (figura 3.36c) se determinan multiplicando los esfuerzos por las áreas ht sobre las que actúan:

$$V = \tau h t \qquad \text{(a)}$$

Estas fuerzas realizan trabajo conforme el elemento se deforma desde su forma inicial (figura 3.36a) hasta forma distorsionada (figura 3.36b). Para calcular este trabajo necesitamos determinar las distancias relativas a través de las cuales se mueven se las fuerzas cortantes. Esta tarea se facilita si el elemento en la figura 3.36c se gira como un cuerpo rígido hasta que dos de sus caras sean horizontales, como en la figura 3.36d. Durante la rotación

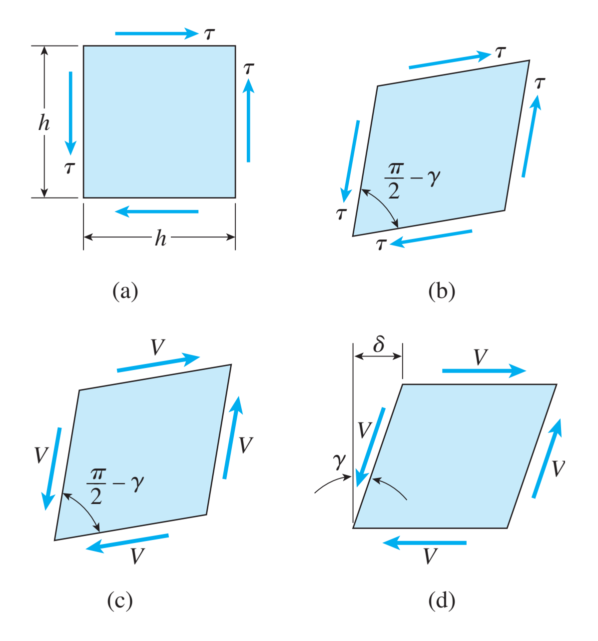


FIGURA 3.36 Elemento en cortante puro.

de cuerpo rígido, el trabajo neto realizado por las fuerzas V es cero debido a que éstas ocurren en pares que forman dos pares iguales y opuestos.

Como se puede observar en la figura 3.36d, la cara superior del elemento se desplaza de forma horizontal a través de una distancia δ (con respecto a la cara inferior) conforme la fuerza cortante aumenta gradualmente de cero a su valor final V. El desplazamiento δ es igual al producto de la deformación unitaria por cortante γ (que es un ángulo pequeño) y la dimensión vertical del elemento:

$$\delta = \gamma h \qquad \text{(b)}$$

Si suponemos que el material es linealmente elástico y que obedece la ley de Hooke, entonces el trabajo realizado por las fuerzas V es igual a $V\delta/2$, que también es la energía de deformación almacenada en el elemento:

$$U = W = \frac{V\delta}{2} \qquad \text{(c)}$$

Observe que las fuerzas que actúan sobre las caras del elemento (figura 3.36d) no se mueven a lo largo de sus líneas de acción, de aquí que no realicen trabajo.

Sustituyendo las ecuaciones (a) y (b) en la ecuación (c), obtenemos la energía de deformación total del elemento:

$$U = \frac{\tau\gamma h^2 t}{2}$$

Como el volumen del elemento es h^2t, la **densidad de la energía de deformación** u (es decir, la energía de deformación por unidad de volumen) es

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} \qquad \text{(d)}$$

Por último, sustituimos la ley de Hooke en cortante ($\tau = G\gamma$) y obtenemos las siguientes ecuaciones para la densidad de la energía de deformación en cortante puro:

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \qquad u = \frac{G\gamma^2}{2} \qquad \text{(3.55a,b)}$$

Estas ecuaciones son similares en forma a las del esfuerzo uniaxial (consulte las ecuaciones 2.44a y b de la sección 2.7).

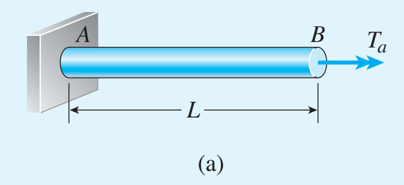
La unidad SI para la energía de deformación es el joule por metro cúbico (J/m^3) y la unidad inglesa es la pulgada-libra por pulgada cúbica (u otras unidades similares). Como estas unidades son las mismas que para el esfuerzo, también podemos expresar la densidad de la energía de deformación en pascales (Pa) o libras por pulgada cuadrada (psi).

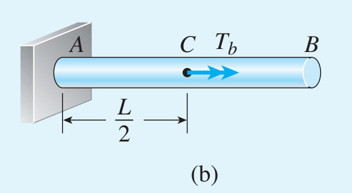
En la sección siguiente (sección 3.10) utilizaremos la ecuación para la densidad de la energía de deformación en términos del esfuerzo cortante (ecuación 3.55a) para determinar el ángulo de torsión de un tubo de pared delgada con forma arbitraria en su sección transversal.

Ejemplo 3.10

Una barra circular sólida *AB* con longitud *L* está fija en un extremo y libre en el otro (figura 3.37). Se deben considerar tres condiciones diferentes de carga: (a) par de torsión T_a que actúa en el extremo libre; (b) par de torsión T_b que actúa en el punto medio de la barra y (c) pares de torsión T_a y T_b que actúa de manera simultánea.

Para cada caso de carga, obtenga una fórmula para la energía de deformación almacenada en la barra. Luego evalúe la energía de deformación para los datos siguientes: T_a = 100 N·m, T_b = 150 N·m, L = 1.6 m, G = 80 GPa e $I_P = 79.52 \times 10^3$ mm^4.





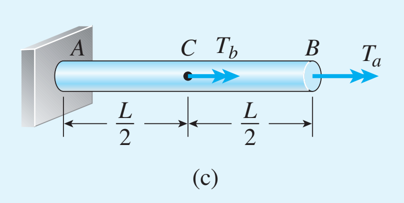


FIGURA 3.37 Ejemplo 3.10. Energía de deformación producida por dos cargas.

Solución

(a) *Par de torsión T_a que actúan en el extremo libre (figura 3.37a)*. En este caso la energía de deformación se obtiene directamente con la ecuación (3.51a):

$$U_a = \frac{T_a^2 L}{2GI_P} \qquad \text{(e)}$$

(b) *Par de torsión T_b que actúa en el punto medio de la barra (figura 3.37b)*. Cuando el par de torsión actúa en el punto medio, aplicamos la ecuación (3.51a) al segmento *AC* de la barra:

$$U_b = \frac{T_b^2(L/2)}{2GI_P} = \frac{T_b^2 L}{4GI_P} \qquad \text{(f)}$$

(c) *Pares de torsión T_a y T_b que actúan simultáneamente (figura 3.37c)*. Cuando las dos cargas actúan sobre la barra, el par de torsión en el segmento *CB* es T_a y el par de torsión en el segmento *AC* es $T_a + T_b$. Por tanto, la energía de deformación (de la ecuación 3.53) es

$$U_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2 L_i}{2G(I_P)_i} = \frac{T_a^2(L/2)}{2GI_P} + \frac{(T_a + T_b)^2(L/2)}{2GI_P}$$
$$= \frac{T_a^2 L}{2GI_P} + \frac{T_a T_b L}{2GI_P} + \frac{T_b^2 L}{4GI_P} \qquad \text{(g)}$$

Al comparar las ecuaciones (e), (f) y (g) se tiene que la energía de deformación producida por las dos cargas actuando simultáneamente *no* es igual a la suma de las energías de deformación producidas por las cargas actuando por separado. Como se destacó en la sección 2.7, la razón es que la energía de deformación es una función cuadrática de las cargas, no una función lineal.

(d) *Resultados numéricos*. Al sustituir los datos dados en la ecuación (e), obtenemos

$$U_a = \frac{T_a^2 L}{2GI_P} = \frac{(100 \text{ N·m})^2(1.6 \text{ m})}{2(80 \text{ GPa})(79.52 \times 10^3 \text{ mm}^4)} = 1.26 \text{ J}$$

Recuerde que un joule es igual un newton metro (1 J = 1 N · m).

Continuando de la misma manera para las ecuaciones (f) y (g), obtenemos

$$U_b = 1.41 \text{ J}$$

$$U_c = 1.26 \text{ J} + 1.89 \text{ J} + 1.41 \text{ J} = 4.56 \text{ J}$$

Observe que el término medio, que comprende el producto de las dos cargas, contribuye de manera significativa a la energía de deformación y no se puede ignorar.

Ejemplo 3.11

Una barra prismática AB, fija en un extremo y libre en el otro, está cargada por un par de torsión distribuido, con intensidad constante t por unidad de distancia a lo largo del eje de la barra (figura 3.38).

(a) Deduzca una fórmula para la energía de deformación de la barra.

(b) Evalúe la energía de deformación de un eje hueco empleado para perforar en el suelo si los datos son los siguientes:

$t = 480$ lb-in/in, $L = 12$ ft, $G = 11.5 \times 10^6$ psi e $I_P = 17.18$ in^4.

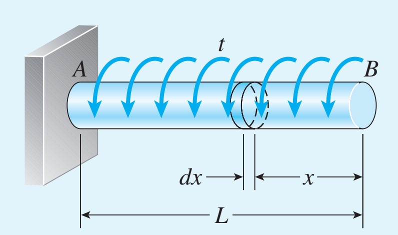


FIGURA 3.38 Ejemplo 3.11. Energía de deformación producida por un par de torsión distribuido.

Solución

(a) *Energía de deformación de la barra*. El primer paso en la solución es determinar el par de torsión interno $T(x)$ que actúa a una distancia x desde el extremo libre de la barra (figura 3.38). Este par de torsión interno es igual al par de torsión total que actúa sobre la parte de la barra entre $x = 0$ y $x = x$. Este último par de torsión es igual a la intensidad t del par de torsión por la distancia x sobre la que actúa:

$$T(x) = tx \tag{h}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.54), obtenemos

$$U = \int_0^L \frac{[T(x)]^2 dx}{2GI_P} = \frac{1}{2GI_P}\int_0^L (tx)^2 dx = \frac{t^2L^3}{6GI_P} \tag{3.56}$$

Esta expresión da la energía de deformación total almacenada en la barra.

(b) *Resultados numéricos*. Para evaluar la energía de deformación del eje hueco sustituimos los datos dados en la ecuación (3.56):

$$U = \frac{t^2L^3}{6GI_P} = \frac{(480 \text{ lb-in/in})^2 \ (144 \text{ in})^3}{6(11.5 \times 10^6 \text{ psi})(17.18 \text{ in}^4)} = 580 \text{ in-lb}$$

Este ejemplo ilustra el uso del proceso de integración para evaluar la energía de deformación de una barra sometida a un par de torsión distribuido.

Ejemplo 3.12

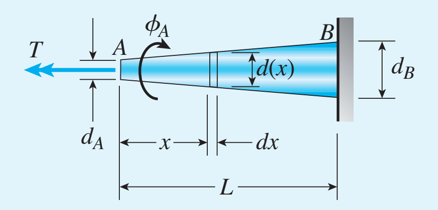


FIGURA 3.39 Ejemplo 3.12. Barra ahusada en torsión.

Una barra ahusada en voladizo AB con sección transversal circular sólida está soportada en el extremo derecho y cargada por un par de torsión T en el otro extremo (figura 3.39). El diámetro de la barra varía linealmente de d_A en el extremo izquierdo a d_B en el extremo derecho.

Determine el ángulo de rotación ϕ_A en el extremo A de la barra igualando la energía de deformación con el trabajo realizado por la carga.

Solución

Del principio de conservación de la energía sabemos que el trabajo realizado por el par de torsión aplicado es igual a la energía de deformación de la barra; por tanto, $W = U$. El trabajo está dado por la ecuación

$$W = \frac{T\phi_A}{2} \tag{i}$$

y la energía de deformación U se puede determinar con la ecuación (3.54).

Para utilizar la ecuación (3.54), necesitamos expresiones para el par de torsión $T(x)$ y el momento polar de inercia $I_P(x)$. El par de torsión es constante a lo largo del eje de la barra e igual a la carga T, y el momento polar de inercia es

$$I_P(x) = \frac{\pi}{32}\left[d(x)\right]^4$$

en donde $d(x)$ es el diámetro de la barra a una distancia x desde el extremo A. De la geometría de la figura observamos que

$$d(x) = d_A + \frac{d_B - d_A}{L}x \tag{j}$$

y, por tanto,

$$I_P(x) = \frac{\pi}{32}\left(d_A + \frac{d_B - d_A}{L}x\right)^4 \tag{k}$$

Ahora podemos sustituir en la ecuación (3.54), como sigue:

$$U = \int_0^L \frac{[T(x)]^2 dx}{2GI_P(x)} = \frac{16T^2}{\pi G}\int_0^L \frac{dx}{\left(d_A + \frac{d_B - d_A}{L}x\right)^4}$$

La integral en esta expresión se puede integrar con ayuda de una tabla de integrales (consulte el apéndice C). Sin embargo, ya evaluamos esta integral en el ejemplo 3.5 de la sección 3.4 (consulte la ecuación g de ese ejemplo) y determinamos que

$$\int_0^L \frac{dx}{\left(d_A + \frac{d_B - d_A}{L}x\right)^4} = \frac{L}{3(d_B - d_A)}\left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3}\right)$$

continúa

Por tanto, la energía de deformación de la barra ahusada es

$$U = \frac{16T^2L}{3\pi G(d_B - d_A)}\left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3}\right) \quad (3.57)$$

Igualando la energía de deformación con el trabajo del par de torsión (ecuación i) y despejando ϕ_A, obtenemos

$$\phi_A = \frac{32TL}{3\pi G(d_B - d_A)}\left(\frac{1}{d_A^3} - \frac{1}{d_B^3}\right) \quad (3.58)$$

Esta ecuación, que es igual a la ecuación (3.26) del ejemplo 3.5 de la sección 3.4, da el ángulo de rotación en el extremo *A* de la barra ahusada.

Observe en especial que el método empleado en este ejemplo para encontrar el ángulo de rotación sólo es adecuado cuando la barra se somete a una sola carga y luego sólo cuando el ángulo deseado corresponde a esa carga. De lo contrario, debemos encontrar los desplazamientos angulares por los métodos usuales descritos en las secciones 3.3, 3.4 y 3.8.

3.10 TUBOS DE PARED DELGADA

La teoría de la torsión descrita en las secciones anteriores se aplica a barras sólidas o huecas con secciones transversales circulares. Las formas circulares son las más eficientes para resistir torsión y en consecuencia son las de uso más común. Sin embargo, en estructuras de peso ligero, como aeronaves y naves espaciales, con frecuencia se requieren elementos tubulares de pared delgada con secciones transversales no circulares para resistir la torsión. En esta sección analizaremos elementos estructurales de este tipo.

Para obtener fórmulas que se puedan aplicar a una variedad de formas, consideremos un tubo de pared delgada con sección transversal arbitraria (figura 3.40a). El tubo tiene forma cilíndrica, es decir, todas las secciones transversales son idénticas y el eje longitudinal es una línea recta. El espesor *t* de la pared no necesariamente es constante sino que puede variar alrededor de la sección transversal. Sin embargo, debe ser pequeño en comparación con el diámetro total del tubo. El tubo se somete a torsión pura por pares de torsión *T* que actúan en los extremos.

Esfuerzos cortantes y flujo cortante

Los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre una sección transversal del tubo se representan en la figura 3.40b, en donde se muestra un elemento del tubo cortado entre dos secciones transversales que está separadas una distancia *dx*. Los esfuerzos actúan paralelos a los límites de la sección transversal y "fluyen" alrededor de ésta. La intensidad de los esfuerzos varía tan ligeramente *a través* del espesor del tubo (debido a que el tubo se supone delgado) que podemos suponer que τ es constante en esa dirección. Sin embargo, si el espesor *t* no es constante, los esfuerzos variarán en intensidad conforme

se va *alrededor* de la sección transversal, y se debe determinar la manera en que varían a partir del equilibrio.

Para determinar la magnitud de los esfuerzos cortantes consideraremos un elemento rectangular *abcd* obtenido haciendo dos cortes longitudinales *ab* y *cd* (figuras 3.40a y b). Este elemento está aislado del cuerpo libre en la figura 3.40c. Actuando sobre la cara transversal *bc* están los esfuerzos cortantes τ que se muestran en la figura 3.40b. Suponemos que éstos varían en intensidad al moverse a lo largo de la sección transversal de *b* a *c*; por lo tanto, el esfuerzo cortante en *b* lo denotamos τ_b y el esfuerzo en *c* lo denotamos τ_c (consulte la figura 3.40c).

Como sabemos del equilibrio, esfuerzos idénticos actúan en la dirección opuesta sobre la cara transversal opuesta *ad* y esfuerzos cortantes con la misma magnitud también actúan sobre las caras longitudinales *ab* y *cd*. Por tanto, los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras *ab* y *cd* son iguales a τ_b y τ_c, respectivamente.

Los esfuerzos que actúan sobre las caras longitudinales *ab* y *cd* producen fuerzas F_b y F_c (figura 3.40d). Estos factores se obtienen multiplicando los esfuerzos por las áreas sobre las que actúan:

$$F_b = \tau_b t_b dx \qquad F_c = \tau_c t_c dx$$

en donde t_b y t_c representan los espesores del tubo en los puntos *b* y *c*, respectivamente (figura 3.40d).

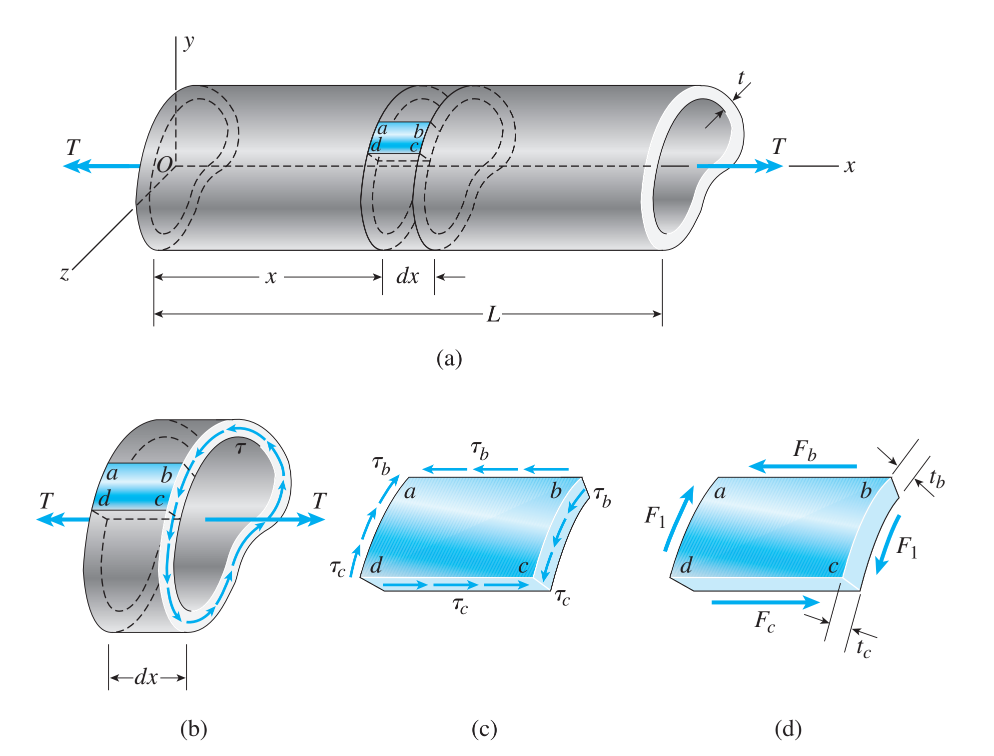


FIGURA 3.40 Tubo de pared delgada con forma transversal arbitraria.

Además, las fuerzas F_1 se producen por los esfuerzos que actúan sobre las caras *bc* y *ad*. Del equilibrio del elemento en la dirección longitudinal (la dirección *x*), observamos que $F_b = F_c$, o

$$\tau_b t_b = \tau_c t_c$$

En virtud de que las ubicaciones de los cortes longitudinales *ab* y *cd* se seleccionaron arbitrariamente, se deduce de la ecuación anterior que el producto del esfuerzo cortante τ por el espesor t del tubo es el mismo en cada punto en la sección transversal. Este producto se conoce como **flujo cortante** y se denota con la letra f:

$$f = \tau t = \text{constante} \tag{3.59}$$

Esta relación muestra que el esfuerzo cortante máximo ocurre donde el espesor del tubo es menor, y viceversa. En regiones donde el espesor es constante, el esfuerzo cortante es constante. Observe que el flujo cortante es la fuerza cortante por unidad de distancia a lo largo de la sección transversal.

Fórmula de la torsión para tubos de pared delgada

El siguiente paso en el análisis es relacionar el flujo cortante f (y de aquí el esfuerzo cortante τ) con el par de torsión T que actúa sobre el tubo. Para ese fin, examinemos la sección transversal del tubo, como se representa en la figura 3.41. La **línea central** (también llamada *línea mediana* o *línea media*) de la pared del tubo se muestra como una línea discontinua en la figura. Consideramos un elemento de área con longitud ds (medida a lo largo de la línea central) y espesor t. La distancia s que define la ubicación del elemento se mide a lo largo de la línea central desde algún punto de referencia elegido arbitrariamente.

La fuerza cortante total que actúa sobre el elemento de área es fds y el momento de esta fuerza con respecto a cualquier punto O dentro del tubo es

$$dT = rfds$$

en donde r es la distancia perpendicular desde el punto O hasta la línea de acción de la fuerza fds. (Observe que la línea de acción de la fuerza fds es tangente a la línea central de la sección transversal en el elemento ds). El par de torsión total T producido por los esfuerzos cortantes se obtiene integrando a lo largo de la línea central de la sección transversal:

$$T = f\int_0^{L_m} r\,ds \tag{a}$$

en donde L_m denota la longitud hasta la línea central.

La integral en la ecuación (a) puede ser difícil de resolver mediante medios matemáticos formales, pero por fortuna se puede evaluar con facilidad dándole una interpretación geométrica simple. La cantidad rds representa el doble del área del triángulo sombreado que se muestra en la figura 3.41. (Observe que el triángulo tiene una longitud en su base ds y una altura igual

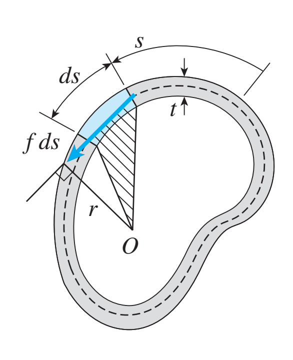


FIGURA 3.41 Sección transversal de un tubo de pared delgada.

a r). Por tanto, la integral representa dos veces el área A_m contenida hasta la línea central de la sección transversal:

$$\int_0^{L_m} r\,ds = 2A_m \tag{b}$$

De la ecuación (a) se deduce que $T = 2fA_m$ y por tanto el **flujo cortante** es

$$f = \frac{T}{2A_m} \tag{3.60}$$

Ahora podemos eliminar el flujo cortante f entre las ecuaciones (3.59) y (3.60) y obtener una **fórmula de torsión para tubos de pared delgada:**

$$\tau = \frac{T}{2tA_m} \tag{3.61}$$

Como t y A_m son propiedades de la sección transversal, el esfuerzo cortante τ se puede calcular con la ecuación (3.61) para cualquier tubo de pared delgada sometido a un par de torsión T conocido. (*Recordatorio:* el área A_m es el área *contenida* hasta la línea central, *no* es el área de la sección transversal del tubo).

Para ilustrar el uso de la fórmula de la torsión, considere un **tubo circular** de pared delgada (figura 3.42) con espesor t y radio r hasta la línea central. El área contenida hasta la línea central es

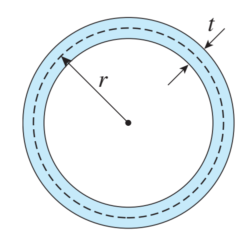


FIGURA 3.42 Tubo circular de pared delgada.

$$A_m = \pi r^2 \tag{3.62}$$

y por tanto el esfuerzo cortante (constante alrededor de la sección transversal) es

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} \tag{3.63}$$

Esta fórmula concuerda con el esfuerzo obtenido con la fórmula estándar de la torsión (ecuación 3.11) cuando la fórmula estándar se aplica a un tubo circular con paredes delgadas empleando la expresión aproximada $I_p \approx 2\pi r^3\, t$ para el momento polar de inercia (ecuación 3.18).

Como segunda ilustración, considere un **tubo rectangular** de pared delgada (figura 3.43) que tiene espesor t_1 en sus lados y espesor t_2 en sus partes superior e inferior. Además, la altura y el ancho (medidos hasta la línea central de la sección transversal) son h y b, respectivamente. El área dentro de la línea central es

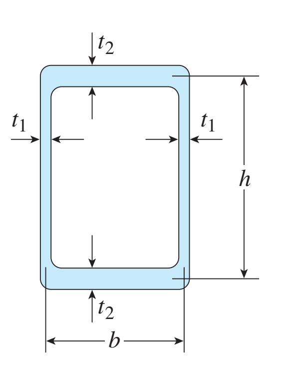


FIGURA 3.43 Tubo rectangular de pared delgada.

$$A_m = bh \tag{3.64}$$

y, por tanto, los esfuerzos cortantes en los lados vertical y horizontal, respectivamente, son

$$\tau_{\text{vert}} = \frac{T}{2t_1bh} \qquad \tau_{\text{horiz}} = \frac{T}{2t_2bh} \tag{3.65a,b}$$

Si t_2 es mayor que t_1, el esfuerzo cortante máximo ocurrirá en los lados verticales de la sección transversal.

Energía de deformación y constante de torsión

La energía de deformación de un tubo de pared delgada se puede determinar primero encontrando la energía de deformación de un elemento y luego integrando sobre todo el volumen de la barra. Considere un elemento del tubo con área *t ds* en la sección transversal (consulte el elemento en la figura 3.41) y longitud *dx* (consulte el elemento en la figura 3.40). El volumen del elemento, que tiene forma similar al elemento *abcd* que se muestra en la figura 3.40a, es *t ds dx*. Como los elementos del tubo están en cortante puro, la densidad de la energía de deformación del elemento es $\tau^2/2G$, como se da en la ecuación (3.55a). La energía de deformación total del elemento es igual a la densidad de la energía de deformación total por el volumen:

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} t\,ds\,dx = \frac{\tau^2 t^2}{2G}\frac{ds}{t}dx = \frac{f^2}{2G}\frac{ds}{t}dx \qquad \text{(c)}$$

en donde reemplazamos τt con el flujo de cortante *f* (una constante).

La energía de deformación total del tubo se obtiene integrando *dU* sobre todo el volumen del tubo, es decir, *ds* se integra de 0 a L_m alrededor de la línea central y *dx* se integra a lo largo del eje del tubo de 0 a *L*, donde *L* es la longitud. Por tanto,

$$U = \int dU = \frac{f^2}{2G}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}\int_0^L dx \qquad \text{(d)}$$

Observe que el espesor *t* puede variar alrededor de la línea central y debe permanecer con *ds* bajo el signo de integración. Como la última integral es igual a la longitud *L* del tubo, la ecuación para la energía de deformación se convierte en

$$U = \frac{f^2 L}{2G}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t} \qquad \text{(e)}$$

Sustituyendo el flujo de cortante dado en la ecuación (3.60), obtenemos

$$U = \frac{T^2 L}{8GA_m^2}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t} \qquad (3.66)$$

como la ecuación para la energía de deformación del tubo en términos del par de torsión *T*.

La expresión anterior para la energía de deformación se puede escribir en forma más simple introduciendo una propiedad nueva de la sección transversal, llamada **constante de torsión**. Para un tubo de pared delgada, la constante de torsión (denotada con la letra *J*) se define así:

$$J = \frac{4A_m^2}{\displaystyle\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}} \qquad (3.67)$$

Con esta notación, la ecuación para la **energía de deformación** (ecuación 3.66) se convierte en

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \tag{3.68}$$

que tiene la misma forma que la ecuación para la energía de deformación en una barra circular (consulte la ecuación 3.51a). La única diferencia es que la constante de torsión J ha reemplazado al momento polar de inercia I_P. Observe que la constante de torsión tiene unidades de longitud a la cuarta potencia.

En el caso especial de una sección transversal con espesor constante t, la expresión para J (ecuación 3.67) se simplifica a

$$J = \frac{4tA_m^2}{L_m} \tag{3.69}$$

Para cada forma de sección transversal, podemos evaluar J con la ecuación (3.67) o bien con la ecuación (3.69).

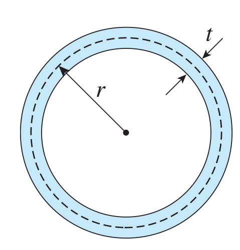


FIGURA 3.42 (Repetida.)

Como ejemplo, considere de nuevo el **tubo circular** de pared delgada de la figura 3.42. Como el espesor es constante utilizamos la ecuación (3.69) y sustituimos $L_m = 2\pi r$ y $A_m = \pi r^2$; el resultado es

$$J = 2\pi r^3 t \tag{3.70}$$

que es la expresión apropiada para el momento polar de inercia (ecuación 3.18). Así, en el caso de un tubo circular de pared delgada, el momento polar de inercia es igual a la constante de torsión.

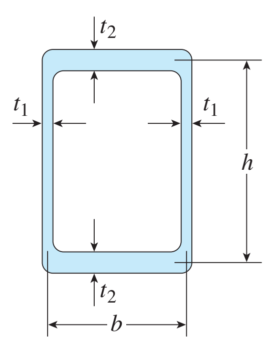


FIGURA 3.43 (Repetida.)

Como segunda ilustración, utilizaremos el **tubo rectangular** de la figura 3.43. Para esta sección transversal tenemos $A_m = bh$. Además, la integral en la ecuación (3.67) es

$$\int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = 2\int_0^h \frac{ds}{t_1} + 2\int_0^b \frac{ds}{t_2} = 2\left(\frac{h}{t_1} + \frac{b}{t_2}\right)$$

Por tanto, la constante de torsión (ecuación 3.67) es

$$J = \frac{2b^2h^2t_1t_2}{bt_1 + ht_2} \tag{3.71}$$

Las constantes de torsión para otras secciones transversales de pared delgada se pueden encontrar de una manera similar.

Ángulo de torsión

El ángulo de torsión ϕ para un tubo de pared delgada con sección transversal arbitraria (figura 3.44) se puede determinar igualando el trabajo W realizado por el par de torsión T a la energía de deformación U del tubo. Por tanto,

$$W = U \quad \text{o} \quad \frac{T\phi}{2} = \frac{T^2L}{2GJ}$$

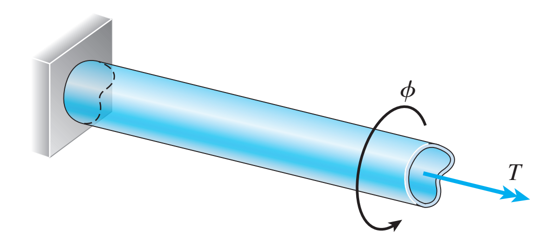


FIGURA 3.44 Ángulo de torsión ϕ para un tubo de pared delgada.

de donde obtenemos la ecuación para el ángulo de torsión:

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \tag{3.72}$$

Un vez más, observe que la ecuación tiene la misma forma que la ecuación correspondiente para una barra circular (ecuación 3.15), pero con el momento polar de inercia reemplazado con la constante de torsión. La cantidad GJ se llama **rigidez torsional** del tubo.

Limitaciones

Las fórmulas desarrolladas en esta sección se aplican a elementos prismáticos que tienen formas tubulares cerradas con paredes delgadas. Si la sección transversal es de pared delgada pero abierta, como en el caso de las vigas con forma de I y canales, la teoría dada aquí no se aplica. Para hacer énfasis en este punto, imagine que tomamos un tubo de pared delgada y lo cortamos a lo largo, entonces la sección transversal se convierte en una sección abierta, los esfuerzos cortantes y los ángulos de torsión aumentan, la resistencia torsional disminuye y las fórmulas presentadas en esta sección no se pueden emplear.

Algunas de las fórmulas que se dan en esta sección están restringidas a materiales linealmente elásticos, por ejemplo, cualquier ecuación que contenga el módulo de elasticidad G se encuentra en esta categoría. Sin embargo, las ecuaciones para el flujo cortante y el esfuerzo cortante (ecuaciones 3.60 y 3.61) se basan sólo en el equilibrio y son válidas sin importar las propiedades del material. Toda la teoría es aproximada debido a que se basa en dimensiones hasta la línea central y los resultados se hacen menos precisos conforme aumenta el espesor t de la pared.*

Una consideración importante en el diseño de cualquier elemento de pared delgada es la posibilidad de que las paredes se pandeen. Entre más delgadas sean las paredes y más largo sea el tubo, más probable será que ocurra pandeo. En el caso de tubos no circulares, a menudo se utilizan atiesadores y diafragmas para mantener la forma del tubo y evitar pandeo localizado. En todos nuestros análisis y problemas suponemos que se evita el pandeo.

*La teoría de la torsión para tubos de pared delgada descrita en esta sección la desarrolló R. Bredt, un ingeniero alemán que la presentó en 1896 (referencia 3.2). Con frecuencia se llama *teoría de la torsión de Bredt*.

Ejemplo 3.13

Compare el esfuerzo cortante máximo en un tubo circular (figura 3.45) calculado mediante la teoría aproximada para un tubo de pared delgada con el esfuerzo calculado mediante la teoría exacta de la torsión. (Observe que el tubo tiene espesor t constante y radio r hasta la línea central de la sección transversal).

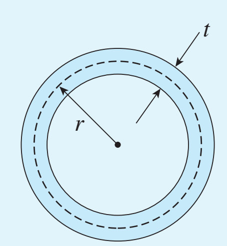


FIGURA 3.45 Ejemplo 3.13. Comparación de las teorías aproximada y exacta de la torsión.

Solución

Teoría aproximada. El esfuerzo cortante obtenido con la teoría aproximada para un tubo de pared delgada (ecuación 3.63) es

$$\tau_1 = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T}{2\pi t^3 \beta^2} \qquad (3.73)$$

en la cual se introduce la relación:

$$\beta = \frac{r}{t} \qquad (3.74)$$

Fórmula de la torsión. El esfuerzo máximo obtenido con la fórmula de la torsión que es más precisa (ecuación 3.11) es

$$\tau_2 = \frac{T(r + t/2)}{I_P} \qquad \text{(f)}$$

donde

$$I_P = \frac{\pi}{2}\left[\left(r + \frac{t}{2}\right)^4 - \left(r - \frac{t}{2}\right)^4\right] \qquad \text{(g)}$$

Después de desarrollarla, esta expresión se simplifica a

$$I_P = \frac{\pi r t}{2}(4r^2 + t^2) \qquad (3.75)$$

y la expresión para el esfuerzo cortante (ecuación f) se transforma en

$$\tau_2 = \frac{T(2r + t)}{\pi r t(4r^2 + t^2)} = \frac{T(2\beta + 1)}{\pi t^3 \beta(4\beta^2 + 1)} \qquad (3.76)$$

Razón. La razón τ_1/τ_2 de los esfuerzos cortantes es

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4\beta^2 + 1}{2\beta(2\beta + 1)} \qquad (3.77)$$

que depende sólo de la razón β.

Para valores de β iguales a 5, 10 y 20, con la ecuación (3.77) obtenemos los valores $\tau_1/\tau_2 = 0.92$, 0.95 y 0.98, respectivamente. De esta manera, observamos que la fórmula aproximada para los esfuerzos cortantes da resultados que son ligeramente menores que los obtenidos con la fórmula exacta. La precisión de la fórmula aproximada aumenta conforme disminuye el espesor de la pared. En el límite, cuando el espesor tiende a cero y β tiende al infinito, la razón τ_1/τ_2 se vuelve 1.

Ejemplo 3.14

Un tubo circular y uno cuadrado (figura 3.46) están construidos con el mismo material y se someten al mismo par de torsión. Los dos tubos tienen la misma longitud, mismo espesor de pared y tienen la misma área de sección transversal.

¿Cuáles son las razones de sus esfuerzos cortantes y ángulos de torsión? (No tome en cuenta los efectos de las concentraciones de esfuerzos en las esquinas del tubo cuadrado).

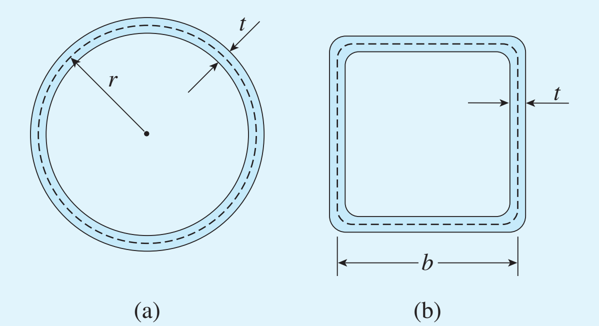


FIGURA 3.46 Ejemplo 3.14. Comparación de un tubo circular con uno cuadrado.

Solución

Tubo circular. Para el tubo circular, el área A_{m1} contenida hasta la línea central de la sección transversal es

$$A_{m1} = \pi r^2 \qquad \text{(h)}$$

donde r es el radio de la línea central. Además, la constante de torsión (ecuación 3.70) y el área de la sección transversal son

$$J_1 = 2\pi r^3 t \qquad A_1 = 2\pi r t \qquad \text{(i,j)}$$

Tubo cuadrado. Para el tubo cuadrado, el área de la sección transversal es

$$A_2 = 4bt \qquad \text{(k)}$$

donde b es la longitud de un lado, medida a lo largo de la línea central. Puesto que las áreas de los tubos son iguales, obtenemos $b = \pi r/2$. Además, la constante de torsión (ecuación 3.71) y el área contenida por la línea central de la sección transversal son

$$J_2 = b^3 t = \frac{\pi^3 r^3 t}{8} \qquad A_{m2} = b^2 = \frac{\pi^2 r^2}{4} \qquad \text{(1,m)}$$

Razones. La razón τ_1/τ_2 entre esfuerzo cortante en el tubo circular y el esfuerzo cortante en el tubo cuadrado (de la ecuación (3.61) es

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{\pi^2 r^2/4}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.79 \quad \text{(n)}$$

La razón de los ángulos de torsión (de la ecuación 3.2) es

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\pi^3 r^3 t/8}{2\pi r^3 t} = \frac{\pi^2}{16} = 0.62 \quad \text{(o)}$$

Estos resultados muestran que el tubo circular no sólo tiene un esfuerzo cortante 21 por ciento menor que el tubo circular, sino también mayor rigidez contra la rotación.

*3.11 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS EN TORSIÓN

En las secciones anteriores de este capítulo analizamos los esfuerzos en elementos torsionales suponiendo que la distribución del esfuerzo variaba de una manera uniforme y continua. Esta hipótesis es válida siempre que no haya cambios abruptos en la forma de la barra (sin agujeros, ranuras, escalones abruptos y cambios similares) y siempre que la región en consideración esté alejada de cualesquiera puntos de carga. Si existe alguna o algunas condiciones disruptivas, entonces se desarrollarán esfuerzos muy localizados en las regiones circundantes a las discontinuidades. En el trabajo práctico de ingeniería estas **concentraciones de esfuerzos** se manejan mediante **factores de concentración de esfuerzos**, como ya se explicó en la sección 2.10.

Los efectos de una concentración de esfuerzos están confinados a una región pequeña alrededor de la discontinuidad, de acuerdo con el principio de Saint-Venant (consulte la sección 2.10). Por ejemplo, considere un eje escalonado que consiste de dos segmentos con diámetros diferentes (figura 3.47). El segmento mayor tiene un diámetro D_2 y el segmento menor tiene un diámetro D_1. La unión entre los dos segmentos forma un “escalón” u “hombro” que está maquinado con un filete de radio R. Sin el filete, el factor de concentración de esfuerzo teórico sería infinitamente grande debido a la esquina abrupta reentrante a 90°. Por supuesto, los esfuerzos infinitos no pueden ocurrir, más bien, el material en la esquina reentrante se deformaría y aliviaría parcialmente la concentración de esfuerzos elevada. Sin embargo, ese tipo de situación es muy peligrosa ante cargas dinámicas y en un buen diseño siempre se utiliza un filete. Entre mayor sea el radio del filete, menores serán los esfuerzos.

A una distancia desde el hombro aproximadamente igual al diámetro D_2 (por ejemplo, en la sección transversal A-A en la figura 3.47a) los esfuerzos cortantes torsionales prácticamente no se ven afectados por la discontinuidad. Por tanto, el esfuerzo máximo τ_2 a una distancia suficiente a la izquierda del hombro se puede encontrar con la fórmula de la torsión empleando D_2 como el diámetro (figura 3.47b). Los mismos comentarios

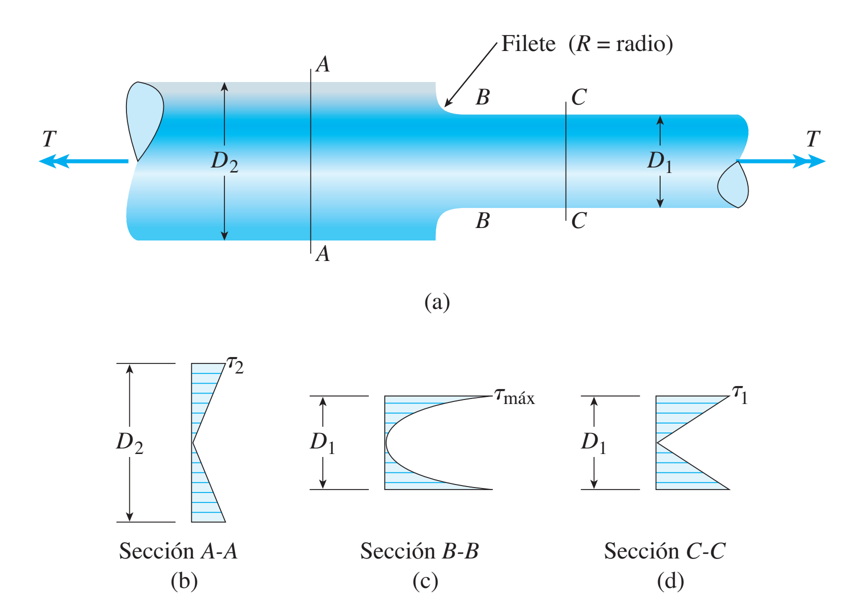


FIGURA 3.47 Eje escalonado en torsión.

generales se aplican a la sección *C*-*C*, que es la distancia D_1 (o mayor) desde el inicio del filete. Como el diámetro D_1 es menor que el diámetro D_2, el esfuerzo máximo τ_1 en la sección *C*-*C* (figura 3.47d) es mayor que el esfuerzo τ_2.

El efecto de concentración de esfuerzos es mayor en la sección *B*-*B*, que corta a travéz del inicio del filete. En esta sección el esfuerzo máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = K\tau_{\text{nom}} = K\frac{Tr}{I_P} = K\left(\frac{16T}{\pi D_1^3}\right) \tag{3.78}$$

En esta ecuación, *K* es el factor de concentración de esfuerzos y τ_{nom} (igual a τ_1) es el esfuerzo cortante nominal, es decir, el esfuerzo cortante en la parte menor del eje.

Los valores del factor *K* están trazados en la figura 3.48 como una función de la razón R/D_1. Las curvas se presentan para varios valores de la razón D_2/D_1. Observe que cuando el radio del filete *R* es muy pequeño y la transición de un diámetro al otro es abrupta, el valor de *K* es muy grande. Al contrario, cuando *R* es grande, el valor de *K* tiende a 1.0 y el efecto de la concentración de esfuerzos desaparece. La curva discontinua en la figura 3.48 es para el caso especial de un filete de un cuarto de círculo, lo cual significa que $D_2 = D_1 = 2R$. (*Nota:* los problemas 3.11.1 a 3.11.5 proporcionan práctica para obtener valores de *K* de la figura 3.48).

En la bibliografía técnica (consulte, por ejemplo, la referencia 2.9) se encuentran muchos otros casos de concentraciones de esfuerzos para ejes circulares, como un eje con una grieta y un eje con un agujero.

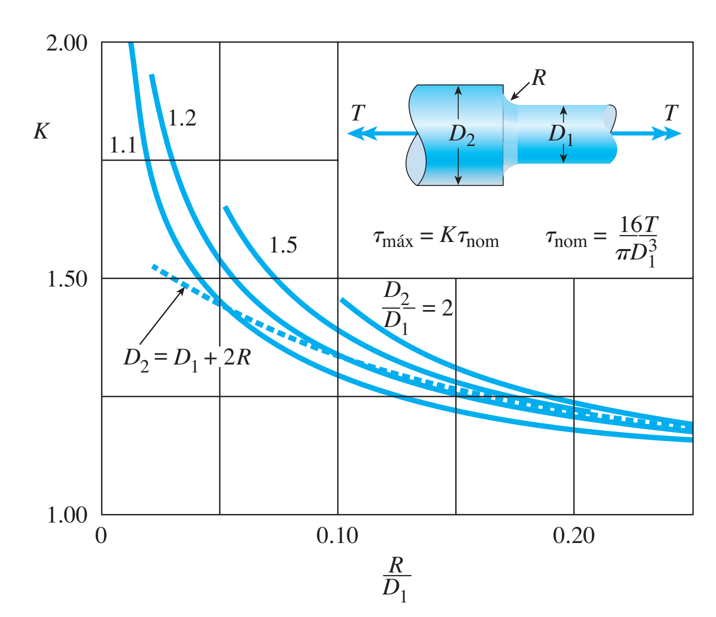


FIGURA 3.48 Factor de concentración de esfuerzos K para un eje escalonado en torsión. (La línea discontinua es para un filete de un cuarto de círculo.)

Como se explicó en la sección 2.10, las concentraciones de esfuerzos son importantes para los materiales frágiles ante cargas estáticas y para la mayor parte de los materiales sometidos a cargas dinámicas. Como caso de ejemplo, las fallas por fatiga son de mayor interés en el diseño de ejes rotatorios y flechas (consulte la sección 2.9 para un análisis breve de la fatiga). Los factores de concentración de esfuerzos teóricos K dados en esta sección se basan en un comportamiento linealmente elástico del material. Sin embargo, experimentos de fatiga demuestran que esos factores son conservadores y que las fallas por fatiga en materiales dúctiles, en general, ocurren con cargas más grandes que las anticipadas por los factores teóricos.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo investigamos el comportamiento de barras y tubos huecos sometidos a pares de torsión concentrados o a momentos torsionales distribuidos, así como a efectos de deformaciones previas. Desarrollamos relaciones par de torsión-desplazamiento para emplearlas en el cálculo de ángulos de torsión de barras en condiciones uniformes (es decir, momento torsional constante sobre toda su longitud) y no uniformes (o sea, pares de torsión y tal vez también el momento polar de inercia varían sobre la longitud de la barra). Luego se desarrollaron ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para estructuras estáticamente indeterminadas en un procedimiento de superposición que conduce a la solución para todos los pares de torsión desconocidos, desplazamientos rotacionales, esfuerzos, etcétera. Iniciando con un estado de cortante puro o elementos de esfuerzo alineados con el eje de la barra, desarrollamos luego ecuaciones para esfuerzos normal y cortante sobre secciones inclinadas. Se presentó una variedad de temas especiales en las últimas partes del capítulo. Los conceptos importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

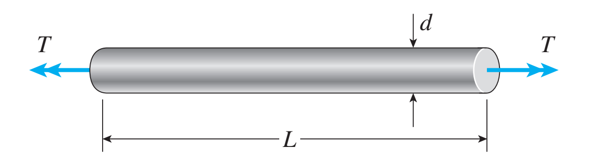
1. Para barras y tubos circulares, el **esfuerzo cortante** (τ) y la **deformación unitaria** (γ) varían linealmente con la distancia radial desde el centro de la sección transversal.
2. La **fórmula de la torsión** define la relación entre el esfuerzo cortante y el momento torsional. El esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ se presenta en la superficie exterior de la barra o del tubo y depende del momento torsional T, de la distancia radial r y del segundo momento de inercia de la sección transversal I_P conocido como momento polar de inercia para secciones transversales circulares. Se observa que los tubos de pared delgada son más eficientes en torsión, debido a que el material disponible está sometido a esfuerzo de manera más uniforme que las barras circulares sólidas.
3. El ángulo de torsión ϕ de barras prismáticas circulares sometidas a momento(s) torsional(es) es proporcional al par de torsión T y a la longitud de la barra L, e inversamente proporcional a la rigidez torsional (GI_P) de la barra; esta relación se llama ***relación par de torsión-desplazamiento***.
4. El ángulo de torsión por unidad de longitud de una barra se refiere a su **flexibilidad torsional** (f_T) y la relación inversa es la **rigidez** torsional ($k_T = 1/f_T$) de la barra o eje.
5. La suma de las deformaciones por torsión de los segmentos individuales de un eje no prismático es igual a la torsión de toda la barra (ϕ). Se utilizaron diagramas de cuerpo libre para determinar los momentos torsionales (T_i) en cada segmento i. Si los momentos torsionales y/o las propiedades de la sección transversal (I_P) varían continuamente, se requiere una expresión integral.
6. Si la estructura de la barra es **estáticamente indeterminada,** se requieren ecuaciones adicionales para resolver los momentos desconocidos. Las **ecuaciones de compatibilidad** se emplean para relacionar rotaciones de la barra con las condiciones de apoyo y, por tanto, generan relaciones adicionales entre las incógnitas. Es conveniente usar una **superposición** de estructuras "liberadas" (o estáticamente determinadas) para representar la estructura estáticamente indeterminada real de la barra.
7. Los **desajustes** y las **deformaciones previas** inducen momentos torsionales sólo en barras o ejes estáticamente indeterminados.
8. Un eje circular está sometido a **cortante puro** debido a momentos torsionales. Los **esfuerzos normal** y **cortante máximos** se pueden obtener considerando un elemento de esfuerzo inclinado. El esfuerzo cortante máximo ocurre en un elemento alineado con el eje de la barra; pero el esfuerzo normal máximo sucede en una inclinación a 45° con respecto al eje de la barra y el esfuerzo normal máximo es igual al esfuerzo cortante máximo.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 3

Deformaciones por torsión

3.2.1 Una barra de cobre con longitud $L = 18.0$ in se torcerá mediante pares de torsión T (consulte la figura) hasta que el ángulo de rotación entre los extremos de la barra sea 3.0°

Si la deformación unitaria por cortante permisible en el cobre es 0.0006 rad, ¿cuál es el diámetro máximo permisible de la barra?



PROBS. 3.2.1 y 3.2.2

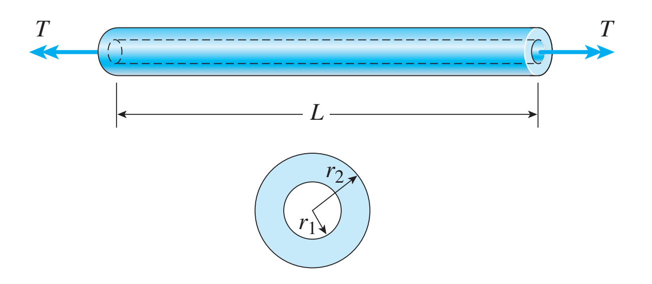
3.2.2 Una barra de plástico con diámetro $d = 56$ mm se torcerá por pares de torsión T (consulte la figura) hasta que el ángulo de rotación entre los extremos sea 4.0°.

Si la deformación unitaria por cortante permisible en el plástico es 0.012 rad, ¿cuál es la longitud mínima permisible de la barra?

3.2.3 Un tubo circular de aluminio sometido a torsión pura mediante pares de torsión T (consulte la figura) tiene un diámetro exterior r_2 igual a 1.5 multiplicado por el radio interior r_1.

(a) Si la deformación unitaria por cortante máxima en el tubo es 400×10^{-6} rad, ¿cuál es la deformación unitaria por cortante γ_1 en la superficie interior?

(b) Si la razón de torsión máxima permisible es 0.125 grados por pie y la deformación unitaria por cortante máxima se debe mantener en 400×10^{-6} rad ajustando el par de torsión T, ¿cuál es el radio exterior mínimo requerido $(r_2)_{mín}$?



PROBS. 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.5

3.2.4 Un tubo circular de acero con longitud $L = 1.0$ m está cargado en torsión por pares de torsión T (consulte la figura).

(a) Si el radio interior del tubo es $r_1 = 45$ mm y el ángulo de torsión medido entre los extremos es 0.5°, ¿cuál es la deformación unitaria por cortante γ_1 (en radianes) en la superficie interior?

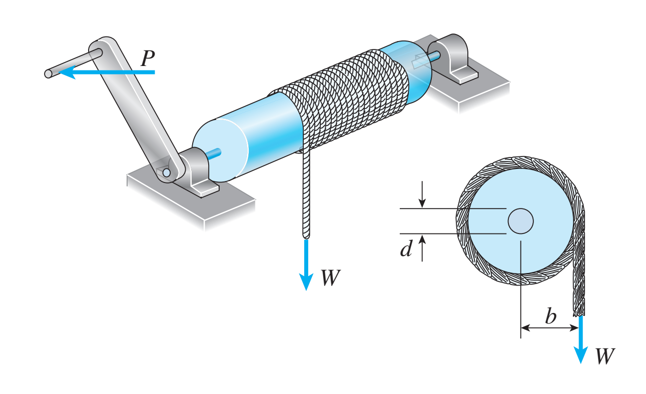
(b) Si la deformación unitaria por cortante máxima permisible es 0.0004 rad y el ángulo de torsión se debe mantener en 0.45° ajustando el par de torsión T, ¿cuál es radio exterior máximo permisible $(r_2)_{máx}$?

3.2.5 Resuelva el problema anterior si la longitud $L = 56$ in, el radio interior $r_1 = 1.25$ in, el ángulo de torsión es 0.5° y la deformación unitaria por cortante permisible es 0.0004 rad.

Barras y tubos circulares

3.3.1 Un minero utiliza un malacate de operación manual (consulte la figura) para izar un cubo de mineral en el tiro de su mina. El eje del malacate es una barra de acero con diámetro $d = 0.625$ in. Además, la distancia desde el centro del eje hasta el centro de la cuerda de izado es $b = 4.0$ in.

Si el peso del cubo cargado es $W = 100$ lb, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en el eje debido a la torsión?

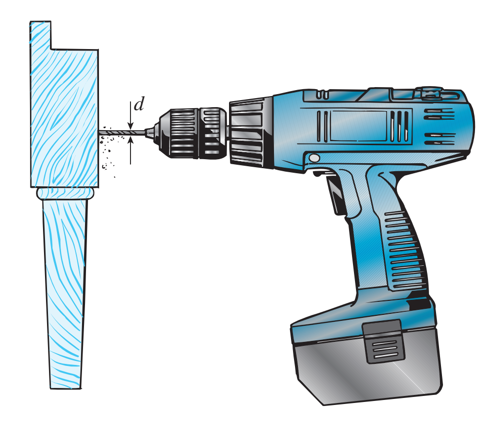


PROB. 3.3.1

3.3.2 Al taladrar un agujero en una pata de una mesa, un carpintero utiliza un taladro de operación manual (consulte la figura) con una broca con diámetro $d = 4.0$ mm.

(a) Si el par de torsión resistente suministrado por la pata de la mesa es igual a 0.3 N·m, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en la broca del taladro?

(b) Si el módulo de elasticidad cortante del acero es $G = 75$ GPa, ¿cuál es la razón de torsión de la broca del taladro (grados por metro)?

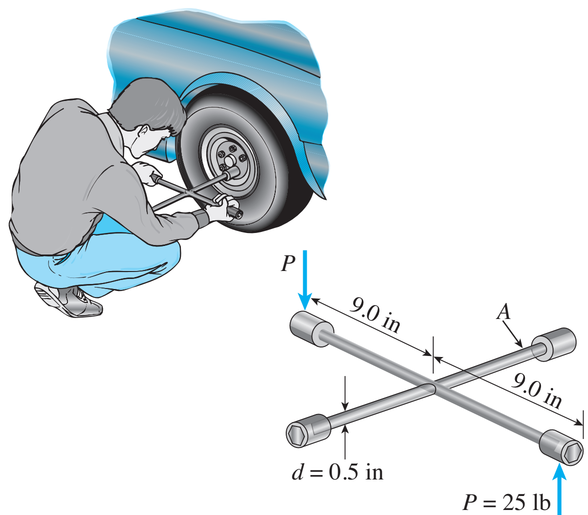


PROB. 3.3.2

3.3.3 Al desmontar una rueda para cambiar un neumático, un conductor aplica fuerzas $P = 25$ lb en los extremos de dos de los brazos de una llave de cruz (consulte la figura). La llave está hecha de acero con módulo de elasticidad en cortante $G = 11.4 \times 10^6$ psi. Cada brazo de la llave tiene una longitud de 9.0 in y tiene una sección transversal circular sólida con diámetro $d = 0.5$ in.

(a) Determine el esfuerzo cortante máximo en el brazo que gira la tuerca del birlo (brazo A).

(b) Determine el ángulo de torsión (en grados) de este mismo brazo.

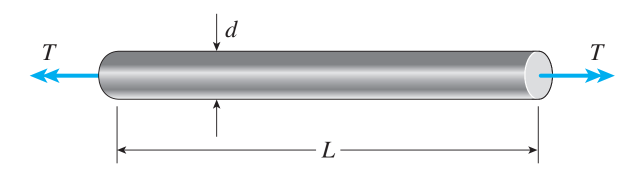


PROB. 3.3.3

3.3.4 Una barra de aluminio con sección transversal sólida se tuerce por pares de torsión T que actúan en los extremos (consulte la figura). Las dimensiones y el módulo de elasticidad en cortante son las siguientes: $L = 1.4$ m, $d = 32$ mm y $G = 28$ GPa.

(a) Determine la rigidez torsional de la barra.

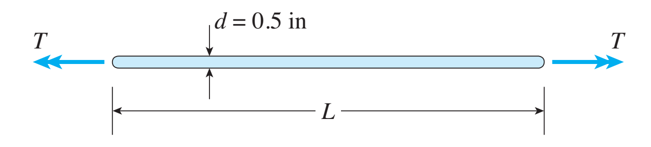
(b) Si el ángulo de torsión de la barra es 5°, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo? ¿Cuál es la deformación unitaria por cortante máxima (en radianes)?



PROB. 3.3.4

3.3.5 Una barra de perforación de acero de alta resistencia utilizada para taladrar un agujero en el suelo tiene un diámetro de 0.5 in (consulte la figura). El esfuerzo cortante permisible en el acero es 40 ksi y el módulo de elasticidad en cortante es 11,600 ksi.

¿Cuál es la longitud mínima requerida de la barra de manera que uno de sus extremos se pueda torcer 30° con respecto al otro sin sobrepasar el esfuerzo permisible?

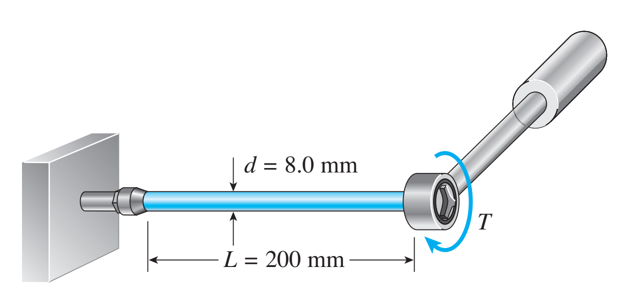


PROB. 3.3.5

3.3.6 El eje de acero de una llave de cubo tiene un diámetro de 8.0 mm y una longitud de 200 mm (consulte la figura).

Si el esfuerzo permisible en la barra es 60 MPa, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible $T_{máx}$ que se puede ejercer con la llave?

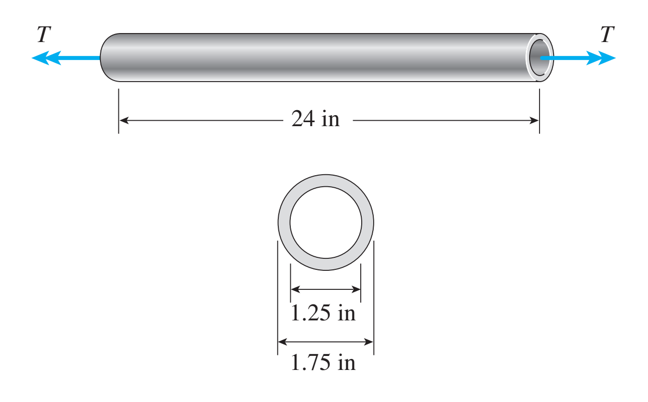
¿Qué ángulo ϕ (en grados) girará el eje ante la acción del par de torsión máximo? (Suponga $G = 78$ GPa y no tome en cuenta ninguna flexión del eje).



PROB. 3.3.6

3.3.7 Un tubo circular de aluminio se somete a torsión por pares de torsión T aplicados en los extremos (consulte la figura). La barra tiene una longitud de 24 in y los diámetros interior y exterior son 1.25 in y 1.75 in, respectivamente. Mediante una medición se ha determinado que el ángulo de torsión es 4° cuando el par de torsión es 6200 lb-in.

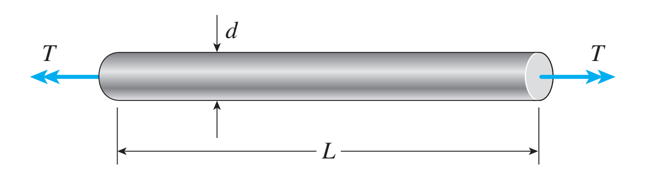
Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el tubo, el módulo de elasticidad en cortante G y la deformación unitaria por cortante máxima $\gamma_{máx}$ (en radianes).



PROB. 3.3.7

3.3.8 Un eje de hélice para un yate pequeño está hecho de una barra sólida de acero con diámetro de 104 mm. El esfuerzo permisible en cortante es 48 MPa y la razón de torsión permisible es 2.0° en 3.5 metros.

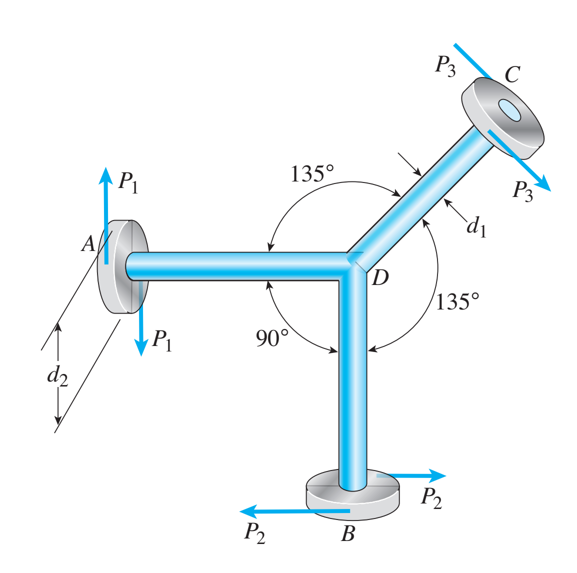
Suponiendo que el módulo de elasticidad en cortante es $G = 80$ GPa, determine el par de torsión máximo $T_{máx}$ que se pueda aplicar al eje.



PROB. 3.3.8

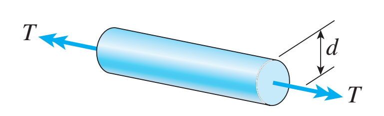
3.3.9 Tres discos circulares idénticos A, B y C están soldados a los extremos de tres barras circulares idénticas (consulte la figura). Las barras se encuentran en un plano común y los discos están en planos perpendiculares a los ejes de las barras. Las barras están soldadas en su intersección D para formar una conexión rígida. Cada barra tiene un diámetro $d_1 = 0.5$ in y cada disco tiene un diámetro $d_2 = 3.0$ in.

Las fuerzas P_1, P_2 y P_3 actúan sobre los discos A, B y C, respectivamente, sometiendo de esta manera las barras a torsión. Si $P_1 = 28$ lb, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en cualquiera de las tres barras?



PROB. 3.3.9

3.3.10 El eje de acero de un malacate grande en un trasatlántico está sometido a un par de torsión de 1.65 kN·m (consulte la figura). ¿Cuál es el diámetro mínimo requerido $d_{mín}$ si el esfuerzo cortante permisible es 48 MPa y la razón de torsión permisible es 0.75°/m? (Suponga que el módulo de elasticidad en cortante es 80 GPa.)



PROB. 3.3.10

3.3.11 Un eje hueco de acero empleado en una barrena de construcción tiene un diámetro exterior $d_2 = 6.0$ in y un diámetro interior $d_1 = 4.5$ in (consulte la figura). El acero tiene un módulo de elasticidad $G = 11.0 \times 10^6$ psi.

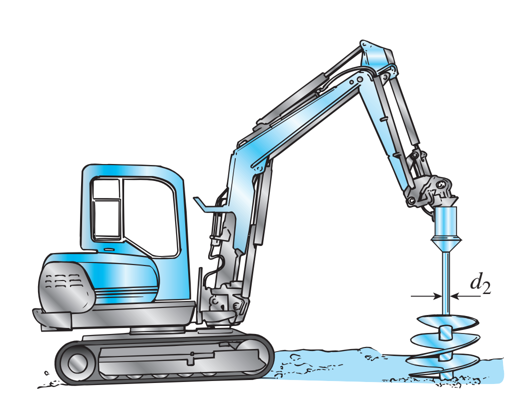
Para un par de torsión aplicado de 150 k-in, determine las cantidades siguientes:

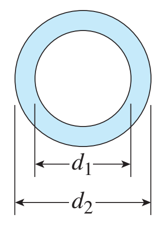
(a) El esfuerzo cortante τ_2 en la superficie exterior del eje.

(b) El esfuerzo cortante τ_1 en la superficie interior y

(c) La razón de torsión θ (grados por unidad de longitud).

También, trace un diagrama mostrando cómo varía la magnitud de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea radial en la sección transversal.



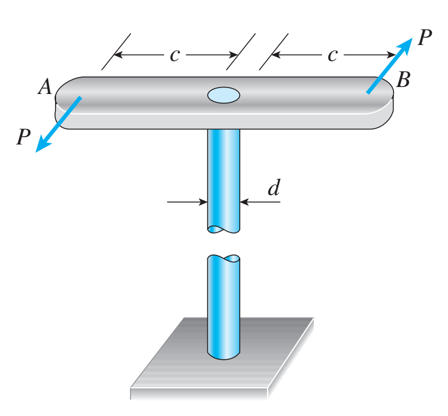


PROBS. 3.3.11 y 3.3.12

3.3.12 Resuelva el problema anterior si el eje tiene diámetro exterior $d_2 = 150$ mm y diámetro interior $d_1 = 100$ mm. Además, el acero tiene un módulo de elasticidad en cortante $G =$ 75 GPa y el par de torsión aplicado es 16 kN·m.

3.3.13 Un poste vertical con sección transversal circular se tuerce por fuerzas horizontales $P = 1100$ lb que actúan en los extremos de un brazo horizontal AB (consulte la figura). La distancia desde el exterior del poste hasta la línea de acción de cada fuerza es $c = 5.0$ in.

Si el esfuerzo cortante permisible en el poste es 4500 psi, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido $d_{mín}$ del poste?



PROBS. 3.3.13 y 3.3.14

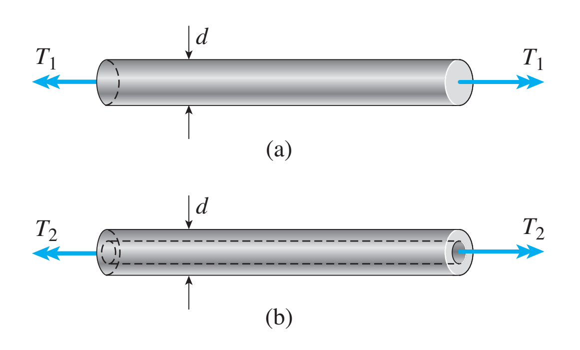
3.3.14 Resuelva el problema anterior si las fuerzas horizontales tienen una magnitud $P = 5.0$ kN, la distancia $c = 125$ mm y el esfuerzo cortante permisible es 30 MPa.

3.3.15 Una barra sólida de latón con diámetro $d = 1.25$ in se somete a pares de torsión T_1, como se muestra en la parte (a) de la figura. El esfuerzo cortante permisible en el latón es 12 ksi.

(a) ¿Cuál es el valor máximo permisible de los pares de torsión T_1?

(b) Si se taladra un agujero con diámetro de 0.625 in longitudinalmente por la barra, como se muestra en la parte (b) de la figura, ¿cuál es el valor máximo permisible de los pares de torsión T_2?

(c) ¿Cuál es el decremento porcentual en el par de torsión y el decremento porcentual en el peso debidos al agujero?



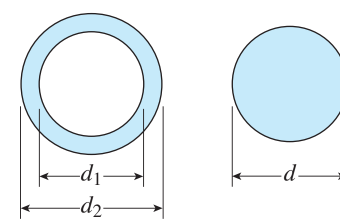
PROB. 3.3.15

3.3.16 Un tubo hueco de aluminio utilizado en una techumbre tiene un diámetro exterior $d_2 = 104$ mm y un diámetro interior $d_1 = 82$ mm (consulte la figura). El tubo tiene una longitud de 2.75 m y el módulo de elasticidad en cortante del aluminio es $G = 28$ GPa.

(a) Si el tubo se tuerce en torsión pura mediante pares de torsión en los extremos, ¿cuál es el ángulo de torsión (en grados) cuando el esfuerzo cortante máximo es 48 MPa?

(b) ¿Qué diámetro d se requiere para un eje sólido (consulte la figura) para resistir el mismo par de torsión con el mismo esfuerzo máximo?

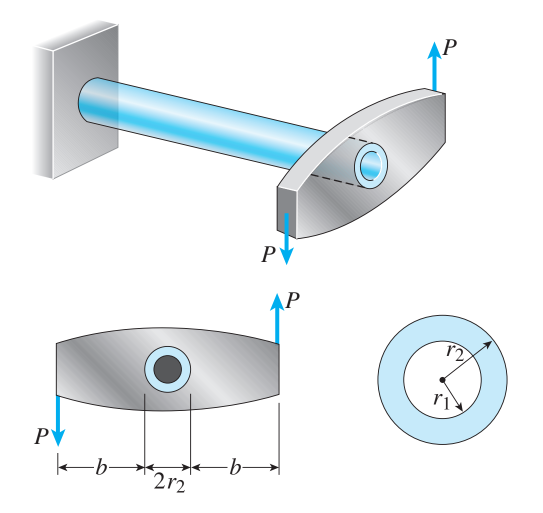
(c) ¿Cuál es la razón entre el peso del tubo hueco y el peso del eje sólido?



PROB. 3.3.17

***3.3.17** Un tubo circular con diámetro interior r_1 y diámetro exterior r_2 se somete a un par de torsión producido por fuerzas $P = 900$ lb (consulte la figura). Las fuerzas tienen sus líneas de acción a una distancia $b = 5.5$ in desde el exterior del tubo.

Si el esfuerzo cortante permisible en el tubo es 6300 psi y el radio interior $r_1 = 1.2$ in, ¿cuál es el radio exterior mínimo permisible r_2?

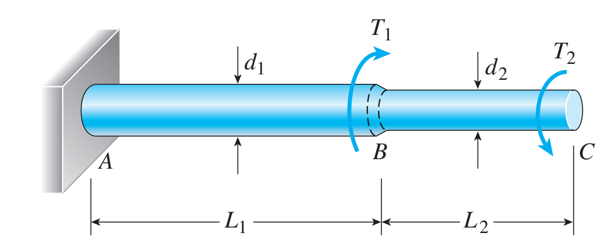


PROB. 3.3.17

Torsión no uniforme

3.4.1 Un eje escalonado ABC que consiste de dos segmentos circulares sólidos se somete a pares de torsión T_1 y T_2 que actúan en sentidos opuestos, como se muestra en la figura. El segmento más largo del eje tiene un diámetro $d_1 = 2.25$ in y una longitud $L_1 = 30$ in; el segmento más corto tiene un diámetro $d_2 = 1.75$ in y una longitud $L_2 = 20$ in. El material es acero con módulo de cortante $G = 11 \times 10^6$ psi y los pares de torsión son $T_1 = 20{,}000$ lb-in y $T_2 = 8000$ lb-in.

Calcule las cantidades siguientes: (a) el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el eje y (b) el ángulo de torsión ϕ_C (en grados) en el extremo C.



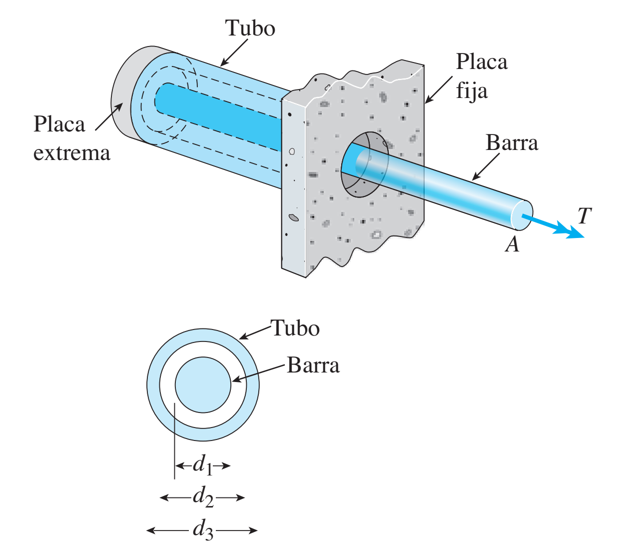
PROB. 3.4.1

3.4.2 Un tubo circular con diámetro exterior $d_3 = 70$ mm y diámetro interior $d_2 = 60$ mm está soldado en el extremo derecho a una placa fija y en el extremo izquierdo a una placa extrema rígida (consulte la figura). Dentro del tubo y concéntrica con el tubo se encuentra una barra circular sólida con diámetro $d_1 = 40$ mm. La barra pasa por un agujero en la placa fija y está soldada a la placa extrema rígida.

La barra tiene una longitud de 1.0 m y la longitud del tubo es igual a la mitad de la barra. Un par de torsión $T = 1000$ N·m actúa en el extremo A de la barra. Además, tanto la barra como el tubo están hechos de una aleación de aluminio con módulo de elasticidad en cortante $G = 27$ GPa.

(a) Determine los esfuerzos cortantes máximos en la barra y el tubo.

(b) Determine el ángulo de torsión (en grados) en el extremo A de la barra.

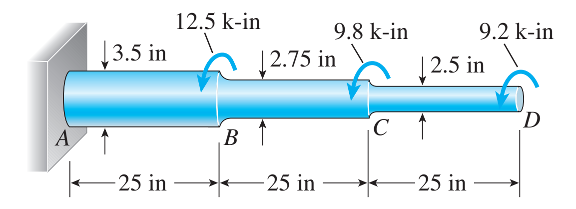


PROB. 3.4.1

3.4.3 Un eje escalonado *ABCD* que consiste en segmentos circulares sólidos se somete a tres pares de torsión, como se muestra en la figura. Los pares de torsión tienen magnitudes de 12.5 k-in, 9.8 k-in y 9.2 k-in. La longitud de cada segmento es 25 in y los diámetros de los segmentos son 3.5 in, 2.75 in y 2.5 in. El material es acero con módulo de elasticidad en cortante $G = 11.6 \times 10^3$ ksi.

(a) Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el eje.

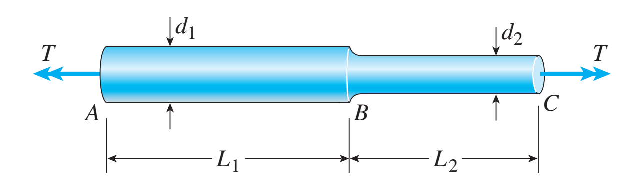
(b) Calcule el ángulo de torsión ϕ_D (en grados) en el extremo *D*.



PROB. 3.4.3

3.4.4 Una barra circular sólida *ABC* consiste de dos segmentos, como se muestra en la figura. Un segmento tiene un diámetro d_1 = 56 mm y una longitud L_1 = 1.45 m; el otro segmento tiene un diámetro d_2 = 48 mm y una longitud L_2 = 1.2 m.

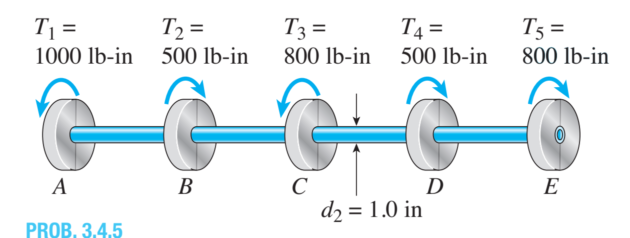
¿Cuál es el par de torsión permisible T_{perm} si el esfuerzo cortante no debe sobrepasar 30 MPa y el ángulo de torsión entre los extremos de la barra no debe exceder 1.25°? (Suponga G = 80 GPa).



PROB. 3.4.4

3.4.5 Un tubo hueco *ABCDE* construido de metal monel está sometido a cinco pares de torsión que actúan en los sentidos que se muestran en la figura. Las magnitudes de los pares de torsión son T_1 = 1000 lb-in, $T_2 = T_4$ = 500 lb-in y $T_3 = T_5$ = 800 lb-in. El tubo tiene un diámetro exterior d_2 = 1.0 in. El esfuerzo cortante permisible es 12,000 psi y la razón de torsión permisible es 2.0°/ft.

Determine el diámetro interior máximo permisible d_1 del tubo.

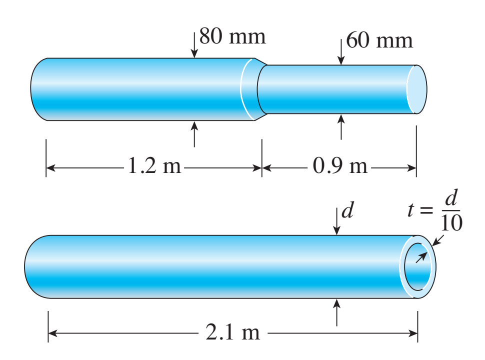


PROB. 3.4.5

3.4.6 Un eje con sección transversal sólida que consiste de dos segmentos se muestra en la primera parte de la figura. El segmento izquierdo tiene un diámetro de 80 mm y una longitud de 1.2 m; el segmento derecho tiene un diámetro de 60 mm y una longitud de 0.9 m.

En la segunda parte de la figura se muestra un eje hueco hecho con el mismo material y con la misma longitud. El espesor *t* del eje hueco es $d/10$, donde *d* es el diámetro exterior. Los dos ejes se someten al mismo par de torsión.

Si el eje hueco debe tener la misma rigidez torsional que el eje sólido, ¿cuál deberá ser su diámetro exterior *d*?

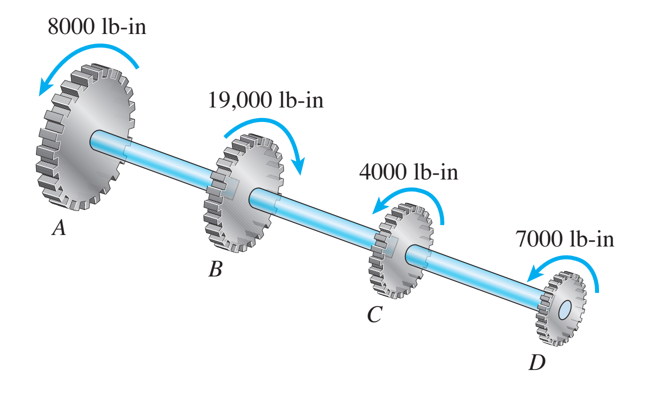


PROB. 3.4.6

3.4.7 Cuatro engranes están conectados a un eje circular y transmiten los pares de torsión que se muestran en la figura. El esfuerzo cortante permisible en el eje es 10,000 psi.

(a) ¿Cuál es el diámetro requerido *d* del eje si tiene una sección transversal sólida?

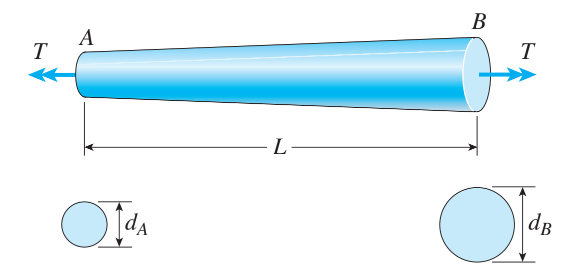
(b) ¿Cuál es el diámetro exterior requerido *d* si el eje es hueco con un diámetro interior de 1.0 in?



PROB. 3.4.7

3.4.8 Una barra ahusada *AB* con sección transversal sólida se tuerce por pares de torsión *T* (consulte la figura). El diámetro de la barra varía linealmente de d_A en el extremo izquierdo a d_B en el extremo derecho.

¿Para qué razón d_B/d_A será el ángulo de torsión de la barra ahusada la mitad del ángulo de torsión de una barra prismática con diámetro d_A? (La barra prismática está hecha con el mismo material, tiene la misma longitud y se somete al mismo par de torsión que la barra ahusada). *Sugerencia:* utilice los resultados del ejemplo 3.5.



PROBS. 3.4.8, 3.4.9 y 3.4.10

3.4.9 Una barra ahusada *AB* con sección transversal sólida se tuerce por pares de torsión $T = 36{,}000$ lb-in (consulte la figura). El diámetro de la barra varía linealmente de d_A en el extremo izquierdo a d_B en el extremo derecho. La barra tiene una longitud $L = 4.0$ ft y está hecha de una aleación de aluminio que tiene un módulo de elasticidad en cortante $G = 3.9 \times 10^6$ psi. El esfuerzo cortante permisible en la barra es 15,000 psi y el ángulo de torsión permisible es 3.0°.

Si el diámetro en el extremo *B* es 1.5 veces el diámetro en el extremo *A*, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido d_A en el extremo *A*? (*Sugerencia:* utilice los resultados del ejemplo 3.5).

3.4.10 La barra que se muestra en la figura está ahusada linealmente del extremo *A* al extremo *B* y tiene una sección transversal sólida. El diámetro en el extremo más pequeño de la barra es $d_A = 25$ mm y la longitud es $L = 300$ mm. La barra está hecha de acero con módulo de elasticidad en cortante $G = 82$ GPa.

Si el par de torsión $T = 180$ N·m y el ángulo de torsión permisible es 0.3°, ¿cuál es el diámetro mínimo permisible d_B en el extremo más grande de la barra? (*Sugerencia:* utilice los resultados del ejemplo 3.5).

3.4.11 La barra circular no prismática en voladizo que se muestra tiene un agujero cilíndrico interno de 0 a *x*, de manera que el momento polar de inercia de la sección transversal para el segmento 1 es $(7/8)I_P$. El par de torsión *T* se aplica en *x* y el par de torsión $T/2$ se aplica en $x = L$. Suponga que *G* es constante.

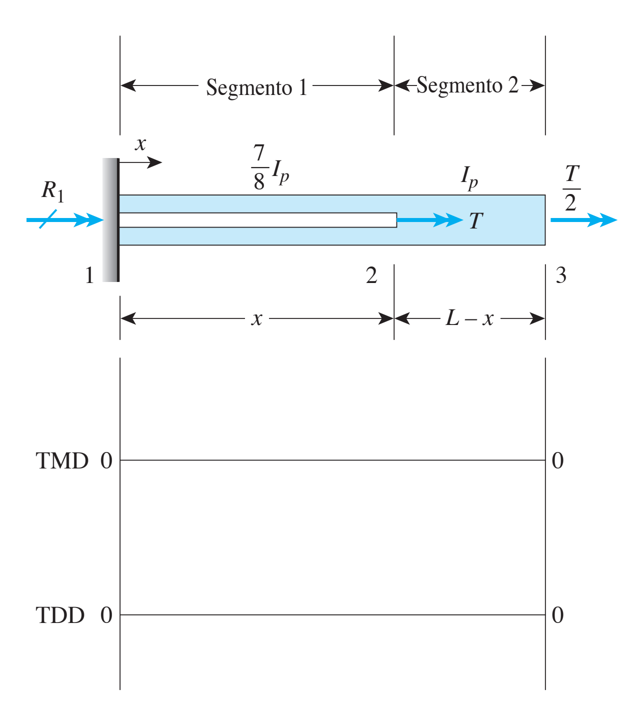
(a) Encuentre el momento de reacción R_1.

(b) Encuentre los momentos torsionales internos T_i en los segmentos 1 y 2.

(c) Encuentre *x* requerida para obtener una torsión en el punto 3 de $\phi_3 = TL/GI_P$.

(d) ¿Cuál es la rotación en el punto 2, ϕ_2?

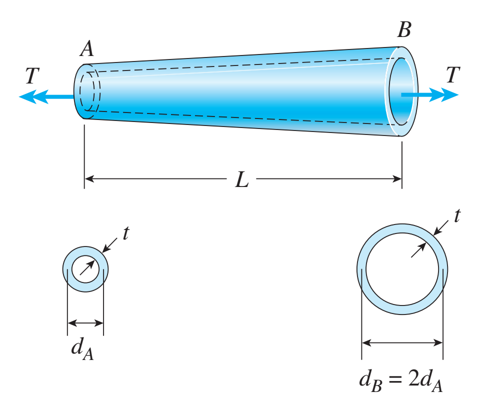
(e) Trace el momento torsional (TMD: $T(x)$, $0 \leq x \leq L$) y los diagramas del desplazamiento (TDD: $\phi(x)$ $0 \leq x \leq L$).



PROB. 3.4.11

3.4.12 Un tubo uniformemente ahusado *AB* con sección transversal circular se muestra en la figura. El tubo tiene espesor de pared constante *t* y longitud *L*. Los diámetros promedio en los extremos son d_A y $d_B = 2d_A$. El momento polar de inercia se puede representar mediante la fórmula aproximada $I_P \approx \pi d^3 t/4$ (consulte la ecuación 3.18).

Deduzca una fórmula para el ángulo de torsión ϕ del tubo cuando se somete a pares de torsión *T* que actúan en los extremos.

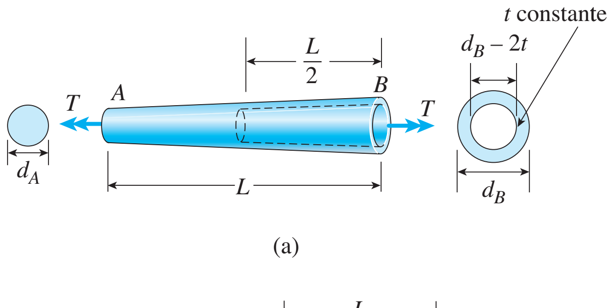


PROB. 3.4.12

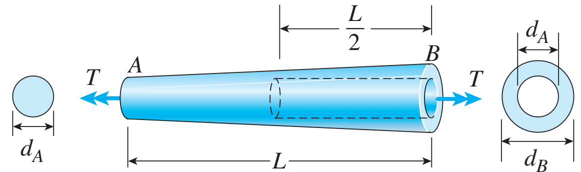
3.4.13 En la figura se muestra un tubo de una aleación de aluminio uniformemente ahusado *AB* con sección transversal circular y longitud *L*. Los diámetros exteriores en los extremos son d_A y $d_B = 2d_A$. Una sección hueca con longitud $L/2$ y espesor constante $t = d_A/10$ está formada en el tubo y se extiende desde *B* hasta la mitad del tubo hacia *A*.

(a) Encuentre el ángulo de torsión ϕ del tubo cuando se somete a pares de torsión *T* que actúan en los extremos. Utilice los valores numéricos siguientes: $d_A = 2.5$ in, $L = 48$ in, $G = 3.9 \times 10^6$ psi y $T = 40{,}000$ in-lb.

(b) Repita el inciso (a) si la sección hueca tiene un diámetro constante d_A. [(Consulte la parte (b) de la figura].



(a)



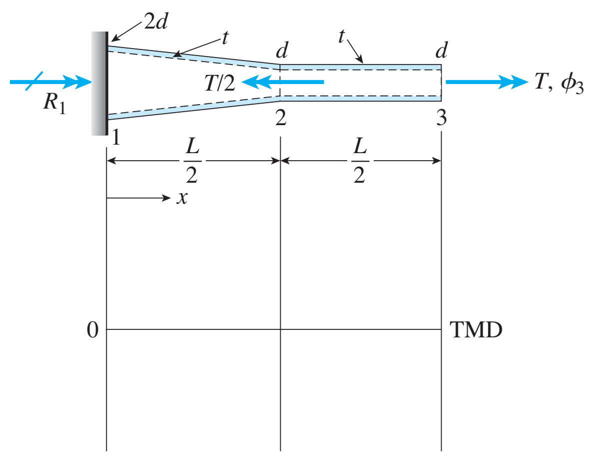
PROB. 3.4.13

3.4.14 Para el tubo *delgado* no prismático de acero con espesor constante *t* y diámetro variable *d* que se muestra con pares de torsión aplicados en los puntos 2 y 3, determine lo siguiente:

(a) Encuentre el momento de la reacción R_1.

(b) Encuentre una expresión para la rotación de torsión ϕ_3 en el punto 3. Suponga que *G* es constante.

(c) Trace el diagrama del momento torsional (TMD: $T(x)$, $0 \leq x \leq L$).

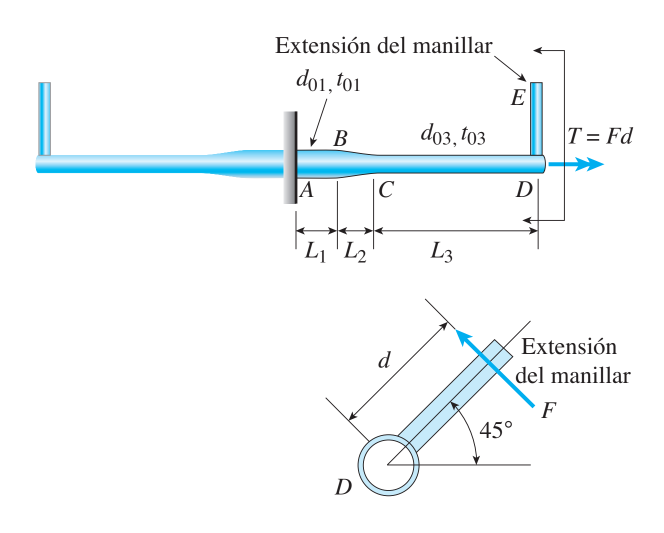


PROB. 3.4.14

3.4.15 Un ciclista que sube por una colina aplica un par de torsión $T = Fd$ ($F = 15$ lb, $d = 4$ in) al extremo de los manillares *ABCD* (empujando sobre sus extensiones *DE*). Considere sólo la mitad derecha del conjunto del manillar (suponga que las barras están fijas en la horquilla en *A*). Los segmentos *AB* y *CD* son prismáticos con longitudes $L_1 = 2$ in y $L_3 = 8.5$ in, y con diámetros exteriores y espesores $d_{01} = 1.25$ in, $t_{01} = 0.125$ in, y $d_{03} = 0.87$ in, $t_{03} = 0.115$ in, respectivamente, como se muestra en la figura. El segmento *BC* tiene una longitud $L_2 = 1.2$ in aunque está ahusado y el diámetro exterior y los espesores varían linealmente entre los puntos *B* y *C*.

Considere sólo los efectos de la torsión. Suponga que $G = 4000$ ksi es constante.

Obtenga una expresión integral para el ángulo de torsión ϕ_D de la mitad del tubo del manillar cuando se somete a un par de torsión $T = Fd$ actuando en el extremo. Evalúe ϕ_D para los valores numéricos dados.



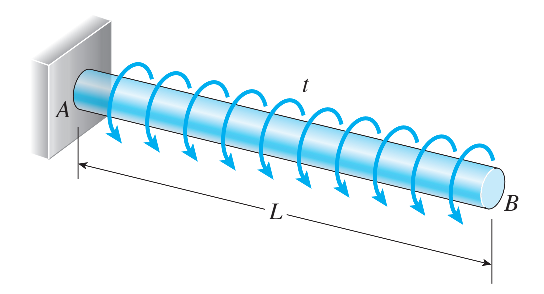


PROB. 3.4.15

3.4.16 Una barra prismática AB con longitud L y sección transversal circular (diámetro d) está cargada por un par de torsión con intensidad constante t por unidad de distancia (consulte la figura).

(a) Determine el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en la barra.

(b) Determine el ángulo de torsión ϕ entre los extremos de la barra.

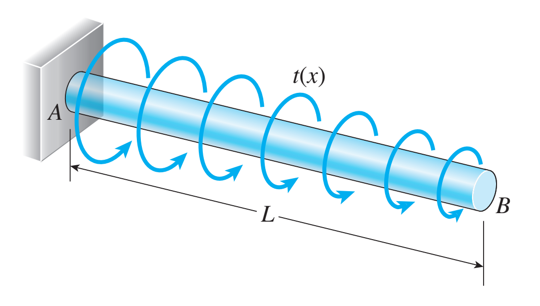


PROB. 3.4.16

***3.4.17** Una barra prismática AB con sección transversal circular sólida (diámetro d) está cargada por un par de torsión distribuido (consulte la figura). La intensidad del par de torsión, es decir, el par de torsión por unidad de distancia, se denota $t(x)$ y varía linealmente de un valor máximo t_A en el extremo A a cero en el extremo B. Además, la longitud de la barra es L y el módulo de elasticidad cortante del material es G.

(a) Determine el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en la barra.

(b) Determine el ángulo de torsión ϕ entre los extremos de la barra.



PROB. 3.4.17

3.4.18 Una barra no prismática ABC con sección transversal circular sólida está cargada por pares de torsión distribuidos (consulte la figura). La intensidad de los pares de torsión, es decir, el par de torsión por unidad de distancia, se denota $t(x)$ y varía linealmente de cero en A a un valor máximo T_0/L en B. El segmento BC tiene un par de torsión linealmente distribuido con intensidad $t(x) = T_0/3L$ de signo opuesto al aplicado a lo largo de AB. Además, el momento polar de inercia de AB es el doble que el de BC y el módulo de elasticidad en cortante del material es G.

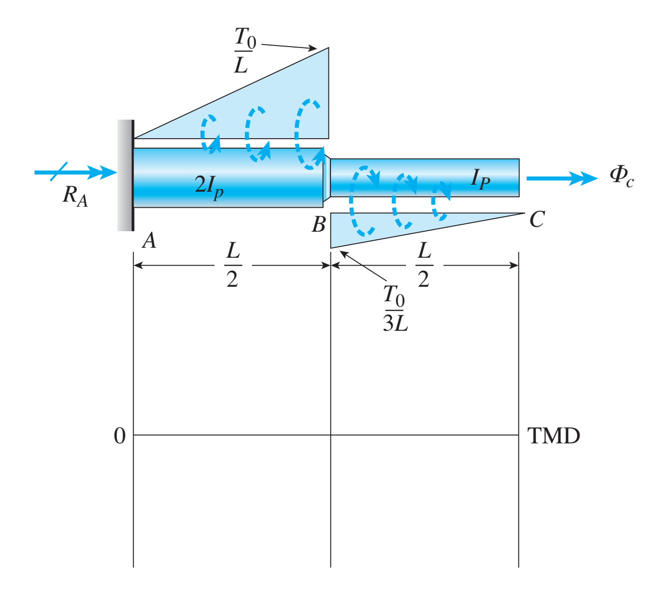
(a) Encuentre el par de torsión de la reacción R_A.

(b) Encuentre los momentos torsionales internos $T(x)$ en los segmentos AB y BC.

(c) Encuentre la rotación ϕ_C.

(d) Encuentre el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ y su ubicación a lo largo de la barra.

(e) Trace el diagrama de momento torsional (TMD: $T(x)$, $0 \leq x \leq L$).



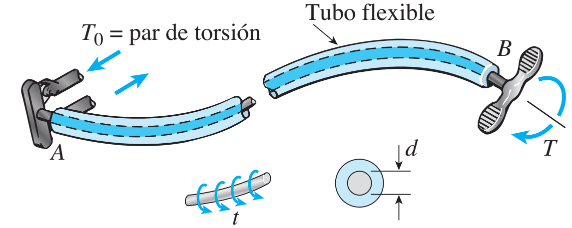
PROB. 3.4.18

****3.4.19** Un alambre de una aleación de magnesio con diámetro $d = 4$ mm y longitud L gira dentro de un tubo flexible a fin de abrir o cerrar un interruptor desde una ubicación remota (consulte la figura). Se aplica un par de torsión manualmente (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o contrario a éste) en B, torciendo así el alambre dentro del tubo. En el otro extremo A, la rotación del alambre opera una manija que abre o cierra el interruptor.

Se requiere un par de torsión $T_0 = 0.2$ N·m para operar el interruptor. La rigidez torsional del tubo, combinada con la fricción entre el tubo y el alambre, induce un par de torsión distribuido con intensidad constante $t = 0.04$ N·m/m (par de torsión por unidad de distancia) que actuá a lo largo de toda la longitud del alambre.

(a) Si el esfuerzo cortante permisible en el alambre es $\tau_{perm} = 30$ MPa, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ del alambre?

(b) Si el alambre tiene una longitud $L = 4.0$ m y el módulo de elasticidad en cortante para el alambre es $G = 15$ GPa, ¿cuál es el ángulo de torsión ϕ (en grados) entre los extremos del alambre?



PROB. 3.4.19

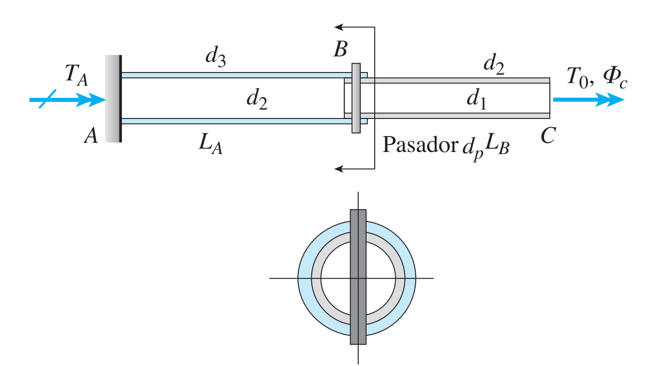
3.4.20 Dos tubos huecos están conectados por un pasador en B, que se inserta en un agujero que pasa por los dos tubos en B (consulte la vista de sección transversal en B). El tubo BC está ajustado firmemente en el tubo AB pero no tome en cuenta ninguna fricción sobre la interfaz. Los diámetros interior y exterior del tubo d_i ($i = 1, 2, 3$) y el diámetro de pasador d_p están identificados en la figura. El par de torsión T_0 se aplica en C. El módulo de elasticidad en cortante del material es G.

Formule expresiones para el par de torsión máximo $T_{0,\text{máx}}$ que se puede aplicar en C para cada una de las condiciones siguientes.

(a) El cortante en el pasador de conexión es menor que algún valor permisible ($\tau_{\text{pasador}} < \tau_{p,\text{perm}}$).

(b) El cortante en el tubo AB o BC es menor que algún valor permisible ($\tau_{\text{tubo}} < \tau_{t,\text{perm}}$).

(c) ¿Cuál es la rotación máxima ϕ_C para cada uno de los casos (a) y (b) anteriores?



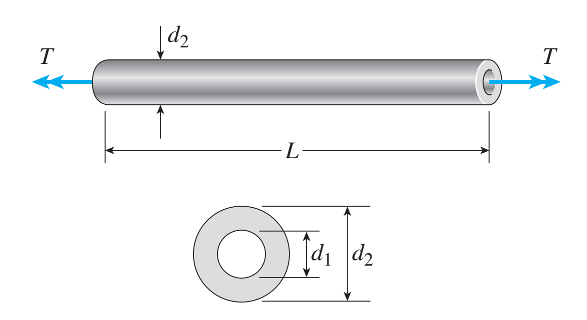
PROB. 3.4.20

Cortante puro

3.5.1 Un eje hueco de aluminio (consulte la figura) tiene un diámetro exterior $d_2 = 4.0$ in y diámetro interior $d_1 = 2.0$ in. Cuando se tuerce por los pares de torsión T, el eje tiene un ángulo de torsión por unidad de distancia igual a 0.54°/ft. El módulo de elasticidad del aluminio es $G = 4.0 \times 10^6$ psi.

(a) Determine el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en el eje.

(b) Determine la magnitud de los pares de torsión aplicados T.



PROBS. 3.5.1, 3.5.2 y 3.5.3

3.5.2 Una barra hueca de acero ($G = 80$ GPa) se somete a pares de torsión T (consulte la figura). La torsión de la barra produce una deformación unitaria máxima $\gamma_{\text{máx}} = 640 \times 10^{-6}$ rad. La barra tiene diámetros exterior e interior de 150 mm y 120 mm, respectivamente.

(a) Determine la deformación unitaria máxima por tensión en la barra.

(b) Determine el esfuerzo de tensión máximo en la barra.

(c) ¿Cuál es la magnitud de los pares de torsión aplicados T?

3.5.3 Una barra tubular con diámetro exterior $d_2 = 4.0$ in se tuerce por pares de torsión $T = 70.0$ k-in (consulte la figura). Ante la acción de estos pares de torsión, se determina que el esfuerzo de tensión máximo en la barra es 6400 psi.

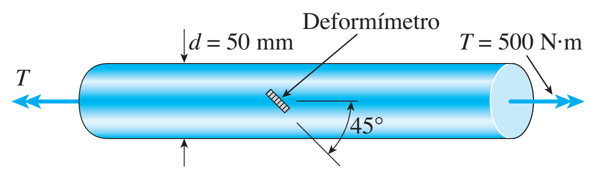
(a) Determine el diámetro interior d_1 de la barra.

(b) Si la barra tiene una longitud $L = 48.0$ in y está hecha de aluminio con módulo en cortante $G = 4.0 \times 10^6$ psi, ¿cuál es el ángulo de torsión ϕ (en grados) entre los extremos de la barra?

(c) Determine la deformación unitaria por cortante máxima $\gamma_{\text{máx}}$ (en radianes)

3.5.4 Una barra circular sólida con diámetro $d = 50$ mm (consulte la figura) se tuerce en una máquina de pruebas hasta que el par de torsión aplicado alcanza el valor $T = 500$ N·m. En este valor del par de torsión, un deformímetro orientado a 45° con respecto al eje de la barra da una lectura $\epsilon = 339 \times 10^{-6}$.

¿Cuál es el módulo de cortante G del material?



PROB. 3.5.4

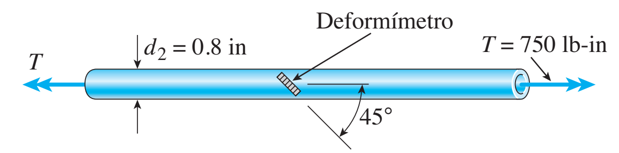
3.5.5 Un tubo de acero ($G = 11.5 \times 10^6$ psi) tiene un diámetro exterior $d_2 = 2.0$ in y un diámetro interior $d_1 = 1.5$ in. Cuando se tuerce por un par de torsión T, el tubo desarrolla una deformación unitaria normal máxima de 170×10^{-6}.

¿Cuál es la magnitud del par de torsión aplicado T?

3.5.6 Una barra circular sólida de acero (G = 78 GPa) transmite una par de torsión T = 360 N·m. Los esfuerzos permisibles en tensión, compresión y cortante son 90 MPa, 70 MPa y 40 MPa, respectivamente. Además, la deformación unitaria permisible en tensión es 220×10^{-6}. Determine el diámetro mínimo requerido d de la barra.

3.5.7 La deformación unitaria normal en la dirección a 45° sobre la superficie de un tubo circular (consulte la figura) es 880×10^{-6} cuando el par de torsión T = 750 lb-in. El tubo está hecho de una aleación de cobre con $G = 6.2 \times 10^6$ psi.

Si el diámetro exterior d_2 del tubo es 0.8 in, ¿cuál es el diámetro interior d_1?



PROB. 3.5.7

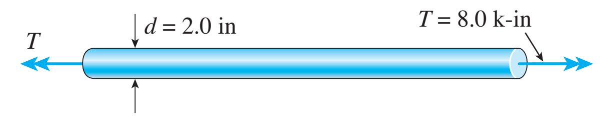
3.5.8 Un tubo de aluminio con diámetro interior d_1 = 50 mm y módulo de elasticidad en cortante G = 27 GPa se somete a un par de torsión T = 4.0 kN·m. El esfuerzo cortante permisible en el aluminio es 50 MPa y la deformación unitaria normal permisible es 900×10^{-6}.

Determine el diámetro exterior d_2 requerido.

3.5.9 Una barra sólida de acero ($G = 11.8 \times 10^6$ psi) con diámetro d = 2.0 in está sometida a pares de torsión T = 8.0 k-in que actúan en los sentidos que se muestran en la figura.

(a) Determine los esfuerzos máximos de cortante, tensión y compresión en la barra y muéstrelos en diagramas de elementos de esfuerzo orientados apropiadamente.

(b) Determine las deformaciones máximas correspondientes (en cortante, tensión y compresión) en la barra y muéstrelas en diagramas de los elementos deformados.

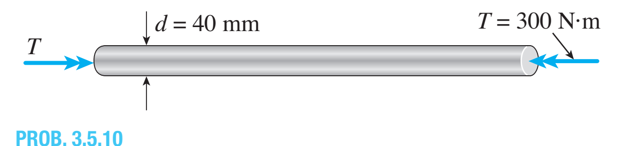


PROB. 3.5.9

3.5.10 Una barra sólida de aluminio (G = 27 GPa) con diámetro d = 40 mm se somete a pares de torsión T = 300 N · m que actúan en los sentidos que se muestran en la figura.

(a) Determine los esfuerzos máximos en cortante, tensión y compresión en la barra y muéstrelos en diagramas de elementos de esfuerzo orientados apropiadamente.

(b) Determine las deformaciones unitarias máximas correspondientes (en cortante, tensión y compresión) en la barra y muéstrelas en diagramas de los elementos deformados.



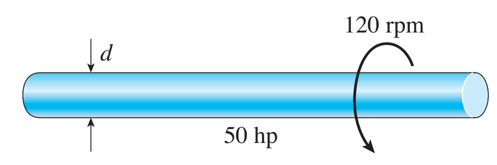
PROB. 3.5.10

Transmisión de potencia

3.7.1 Un eje de un generador en una planta hidroeléctrica pequeña gira a 120 rpm y suministra 50 hp (consulte la figura).

(a) Si el diámetro del eje es d = 3.0 in, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el eje?

(b) Si el esfuerzo cortante está limitado a 4000 psi, ¿cuál es el diámetro mínimo permisible $d_{\text{mín}}$ del eje?

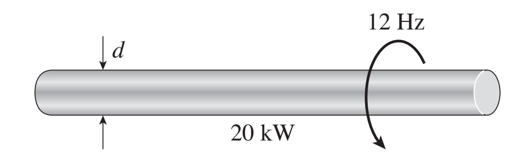


PROB. 3.7.1

3.7.2 Un motor impulsa un eje a 12 Hz y suministra 20 kW de potencia (consulte la figura).

(a) Si el eje tiene un diámetro de 30 mm, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el eje?

(b) Si el esfuerzo cortante máximo permisible es 40 MPa, ¿cuál es el diámetro mínimo permisible $d_{\text{mín}}$ del eje?

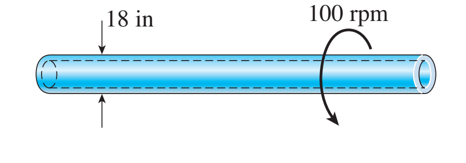


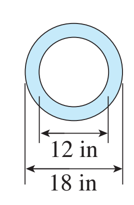
PROB. 3.7.2

3.7.3 El eje de la hélice de un barco grande tiene un diámetro exterior de 18 in y un diámetro interior de 12 in, como se muestra en la figura. El eje está clasificado para un esfuerzo cortante máximo de 4500 psi.

(a) Si el eje gira a 100 rpm, ¿cuál es la potencia máxima, en caballos de potencia, que se puede transmitir sin sobrepasar el esfuerzo permisible?

(b) Si la velocidad rotacional del eje se duplica pero los requerimientos de potencia permanecen iguales, ¿qué pasa con el esfuerzo cortante en el eje?



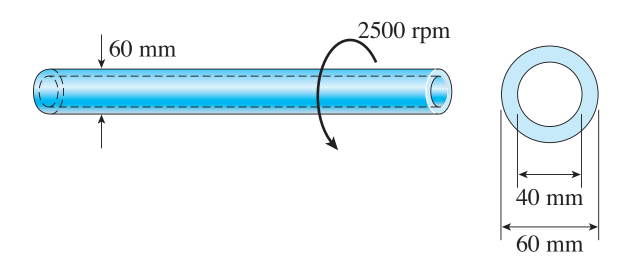


PROB. 3.7.3

3.7.4 El eje motriz de un camión (diámetro exterior de 60 mm y diámetro interior de 40 mm) está girando a 2500 rpm (consulte la figura).

(a) Si el eje transmite 150 kW, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en el eje?

(b) Si el esfuerzo cortante permisible es 30 MPa, ¿cuál es la potencia máxima que se puede transmitir?



PROB. 3.7.4

3.7.5 Un eje circular hueco que va a usarse en una estación de bombeo se está diseñando con un diámetro interior igual a 0.75 veces el diámetro exterior. El eje debe transmitir 400 hp a 400 rpm sin exceder el esfuerzo cortante máximo permisible de 6000 psi.

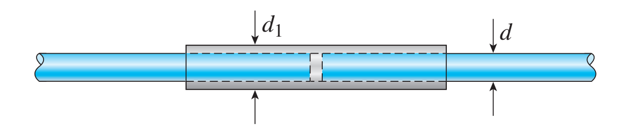
Determine el diámetro exterior *d* mínimo requerido.

3.7.6 Un eje tubular diseñado para utilizarse en un sitio de construcción debe transmitir 120 kW a 1.75 Hz. El diámetro interior del eje tendrá la mitad del diámetro exterior.

Si el esfuerzo cortante permisible en el eje es 45 MPa, ¿cuál es el diámetro exterior *d* mínimo requerido?

3.7.7 Un eje de hélice con sección transversal circular y diámetro *d* esta empalmado mediante un collarín del mismo material (consulte la figura). El collarín está firmemente unido a las dos partes del eje.

¿Cuál debe ser el diámetro exterior mínimo d_1 del collarín a fin de que el empalme pueda transmitir la misma potencia que el eje sólido?

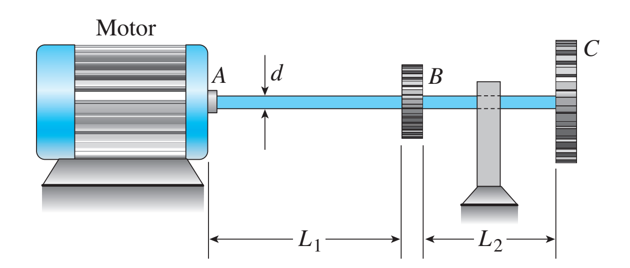


PROB. 3.7.7

3.7.8 ¿Cuál es la potencia máxima que puede suministrar un eje hueco de hélice (diámetro exterior de 50 mm, diámetro interior de 40 mm y módulo de elasticidad en cortante de 80 GPa) que gira a 600 rpm si el esfuerzo cortante permisible es 100 MPa y la razón de torsión permisible es 3.0°/m?

***3.7.9** Un motor suministra 275 hp a 1000 rpm al extremo de un eje (consulte la figura). Los engranes en *B* y *C* toman 125 y 150 hp, respectivamente.

Determine el diámetro *d* requerido del eje si el esfuerzo cortante permisible es 7500 psi y el ángulo de torsión entre el motor y el engrane *C* está limitado a 1.5°. (Suponga $G = 11.5 \times 10^6$ psi, $L_1 = 6$ ft y $L_2 = 4$ ft).



PROBS. 3.7.9 y 3.7.10

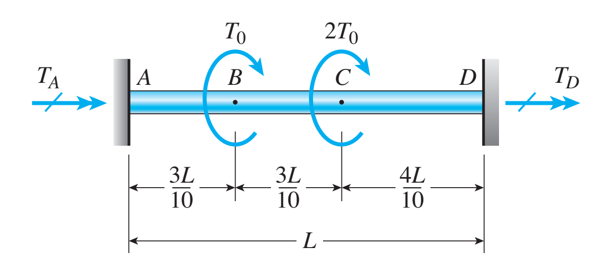
***3.7.10** El eje *ABC* que se muestra en la figura está impulsado por un motor que suministra 300 kW a una velocidad rotacional de 32 Hz. Los engranes en *B* y *C* toman 120 y 180 kW, respectivamente. Las longitudes de las dos partes del eje son $L_1 = 1.5$ m y $L_2 = 0.9$ m.

Determine el diámetro *d* requerido del eje si el esfuerzo cortante permisible es 50 MPa, el ángulo de torsión permisible entre los puntos *A* y *C* es 4.0° y $G = 75$ GPa.

Elementos torsionales estáticamente indeterminados

3.8.1 Una barra circular sólida *ABCD* con soportes fijos está sometida a los pares de torsión T_0 y $2T_0$ en las ubicaciones que se muestran en la figura.

Obtenga una fórmula para el ángulo de torsión máximo $\phi_{máx}$ de la barra. (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.46a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos.)

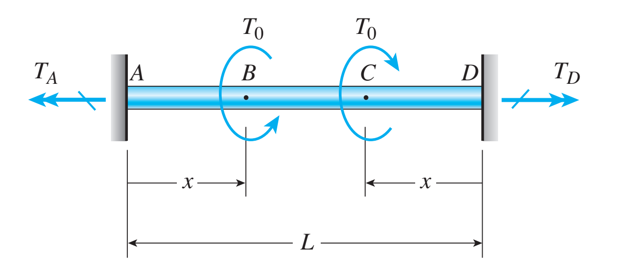


PROB. 3.8.1

3.8.2 Una barra sólida circular *ABCD* con soportes fijos en los extremos *A* y *D* está sometida a dos pares de torsión iguales y con sentidos opuestos T_0 como se muestra en la figura. Los pares de torsión se aplican en los puntos *B* y *C*, cada uno de ellos se ubica a una distancia *x* desde un extremo de la barra. (La distancia *x* puede variar de cero a $L/2$.

(a) ¿Para qué distancia *x* el ángulo de torsión en los puntos *B* y *C* será un máximo?

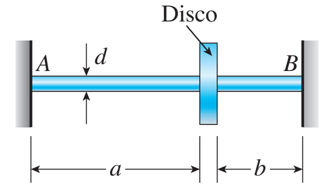
(b) ¿Cuál es el ángulo de torsión $\phi_{máx}$ correspondiente? (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.46a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos.)



PROB. 3.8.2

3.8.3 Un eje circular sólido *AB* con diámetro *d* tiene sus extremos fijos para evitar su rotación (consulte la figura). Un disco circular está conectado al eje en la ubicación mostrada.

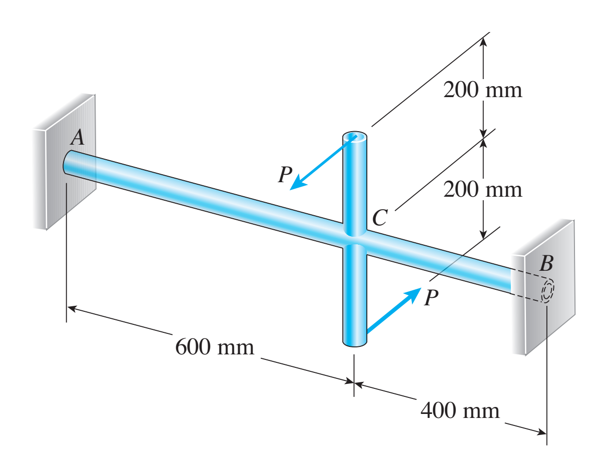
¿Cuál es el ángulo de rotación máximo permisible $\phi_{máx}$ del disco si el esfuerzo cortante permisible en el eje es τ_{perm}? (Suponga que $a > b$. Además, utilice las ecuaciones 3.46a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos.)



PROB. 3.8.3

3.8.4 Un eje hueco de acero *ACB* con diámetro exterior de 50 mm y diámetro interior de 40 mm está fijo en los extremos *A* y *B* (consulte la figura) a fin de evitar su rotación. Las fuerzas horizontales *P* se aplican en los extremos de un brazo vertical que está soldado al eje en el punto *C*.

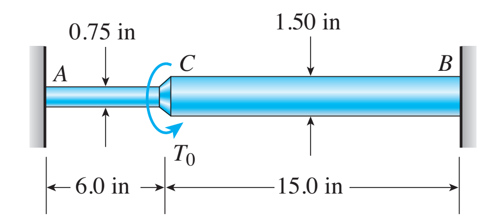
Determine el valor permisible de las fuerzas *P* si el esfuerzo cortante máximo permisible en el eje es 45 MPa. (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.46a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos.)



PROB. 3.8.4

3.8.5 Un eje escalonado *ACB* que tiene secciones transversales circulares sólidas con dos diámetros diferentes se mantiene fijo contra la rotación en los extremos (consulte la figura).

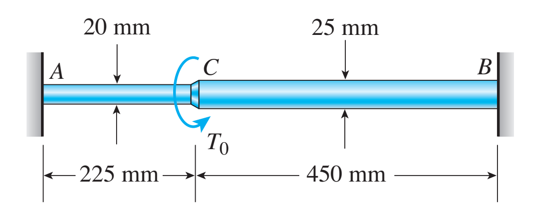
Si el esfuerzo cortante permisible en el eje es 6000 psi, ¿cuál es el par de torsión máximo $(T_0)_{máx}$ que se puede aplicar en la sección *C*? (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.45a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos.)



PROB. 3.8.5

3.8.6 Un eje escalonado *ACB* que tiene secciones transversales circulares sólidas con dos diámetros diferentes se sostiene firmemente para evitar la rotación en sus extremos (consulte la figura).

Si el esfuerzo cortante permisible en el eje es de 43 MPa, ¿cuál es el par de torsión máximo $(T_0)_{máx}$ que se puede aplicar en la sección *C*? (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.45a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos.)

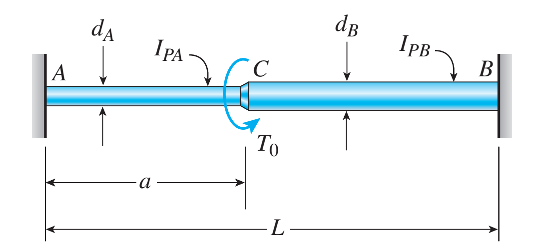


PROB. 3.8.6

3.8.7 Un eje escalonado *ACB* se sostiene firmemente para evitar la rotación en los extremos *A* y *B* y se somete a un par de torsión T_0 que actúa en la sección *C* (consulte la figura). Los dos segmentos del eje (*AC* y *CB*) tienen diámetros d_A y d_B, respectivamente, y momentos polares de inercia I_{PA} e I_{PB}, respectivamente. El eje tiene una longitud *L* y la longitud del segmento *AC* es *a*.

(a) ¿Para qué razón a/L serán iguales los esfuerzos cortantes máximos en los dos segmentos del eje?

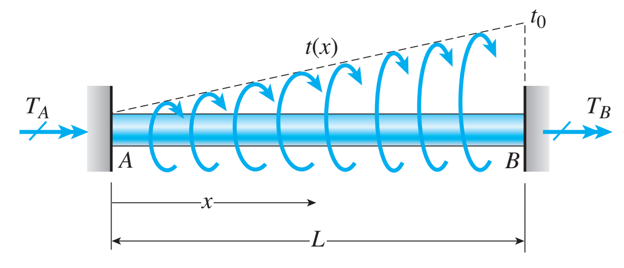
(b) ¿Para qué razón a/L serán iguales los pares de torsión internos en los dos segmentos del eje? (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.45a y b del ejemplo 3.9 para obtener los pares de torsión reactivos).



PROB. 3.8.7

3.8.8 Una barra circular *AB* con longitud *L* está fija en ambos extremos para evitar la rotación y cargada por un par de torsión distribuido $t(x)$ con intensidad que varía linealmente de cero en el extremo *A* a t_0 en el extremo *B* (consulte la figura).

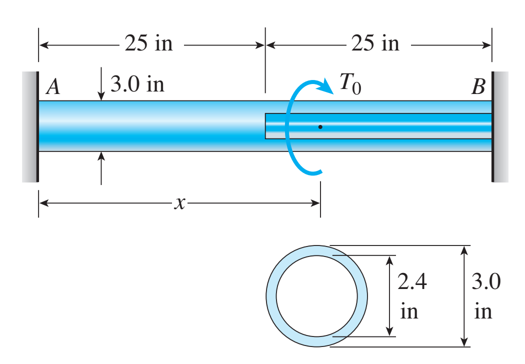
Obtenga fórmulas para los pares de torsión en los extremos fijos T_A y T_B.



PROB. 3.8.8

3.8.9 Una barra circular *AB* con extremos fijos para evitar su rotación tiene un agujero que se extiende hasta la mitad de su longitud (consulte la figura). El diámetro exterior de la barra es d_2 = 3.0 in y el diámetro del agujero es d_1 = 2.4 in. La longitud total de la barra es L = 50 in.

¿A qué distancia *x* desde el extremo izquierdo de la barra se debe aplicar un par de torsión T_0 de manera que los pares de torsión reactivos en los soportes sean iguales?



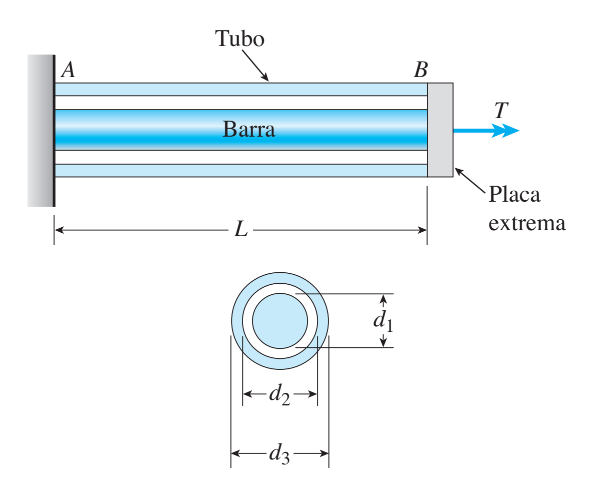
PROB. 3.8.9

3.8.10 Una barra sólida de acero con diámetro d_1 = 25.0 mm está contenida por un tubo de acero con diámetro exterior d_3 = 37.5 mm y diámetro interior d_2 = 30.0 mm (consulte la figura). Tanto la barra como el tubo se mantienen rígidamente mediante un soporte en el extremo *A* y están unidos firmemente a una placa rígida en el extremo *B*. La barra compuesta, que tiene una longitud L = 550 mm, se tuerce por un par de torsión T = 400 N·m que actúa sobre la placa extrema.

(a) Determine los esfuerzos cortantes máximos τ_1 y τ_2 en la barra y el tubo, respectivamente.

(b) Determine el ángulo de rotación ϕ (en grados) de la placa extrema, suponiendo que el módulo de elasticidad en cortante del acero es G = 80 GPa.

(c) Determine la rigidez torsional k_T de la barra compuesta. (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.44a y b para encontrar los pares de torsión en la barra y el tubo).



PROBS. 3.8.10 y 3.8.11

3.8.11 Una barra sólida de acero con diámetro $d_1 = 1.50$ in está contenida por un tubo de acero con diámetro exterior $d_3 = 2.25$ in y diámetro interior $d_2 = 1.75$ in (consulte la figura). Tanto la barra como el tubo se sostienen rígidamente mediante un soporte en el extremo A y están unidos firmemente a una placa rígida en el extremo B. La barra compuesta, que tiene una longitud $L = 30.0$ in, se tuerce por un par de torsión $T = 5000$ lb-in, que actúa sobre la placa extrema.

(a) Determine los esfuerzos cortantes máximos τ_1 y τ_2 en la barra y el tubo, respectivamente.

(b) Determine el ángulo de rotación ϕ (en grados) de la placa extrema, suponiendo que el módulo en cortante del acero es $G = 11.6 \times 10^6$ psi.

(c) Determine la rigidez torsional k_T de la barra compuesta. (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.44a y b para encontrar los pares de torsión en la barra y el tubo.

***3.8.12** El eje compuesto que se muestra en la figura se manufacturó ajustando por contracción un manguito de acero sobre un núcleo de latón de manera que las dos partes actúen como una sola barra sólida en torsión. Los diámetros exteriores de las dos partes son $d_1 = 40$ mm para el núcleo de latón y $d_2 = 50$ mm para el manguito de acero. Los módulos de elasticidad en cortante son $G_b = 36$ GPa para el latón y $G_s = 80$ GPa para el acero.

Suponiendo que los esfuerzos cortantes permisibles en el latón y el acero son $\tau_b = 48$ MPa y $\tau_s = 80$ MPa, respectivamente, determine el par de torsión máximo permisible $T_{máx}$ que se puede aplicar al eje. (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.44a y b para encontrar los pares de torsión).

***3.8.13** El eje compuesto que se muestra en la figura se manufacturó ajustando por contracción un manguito de acero sobre un núcleo de latón de manera que las dos partes actúan como una sola barra sólida en torsión. Los diámetros exteriores de las dos partes son $d_1 = 1.6$ in para el núcleo de latón y $d_2 = 2.0$ in para el manguito de acero. Los módulos de elasticidad en cortante son $G_b = 5400$ ksi para el latón y $G_s = 12{,}000$ ksi para el acero.

Suponiendo que los esfuerzos cortantes permisibles en el latón y el acero son $\tau_b = 4500$ psi y $\tau_s = 7500$ psi, respectivamente, determine el par de torsión máximo permisible $T_{máx}$ que se puede aplicar al eje. (*Sugerencia:* utilice las ecuaciones 3.44a y b para encontrar los pares de torsión).

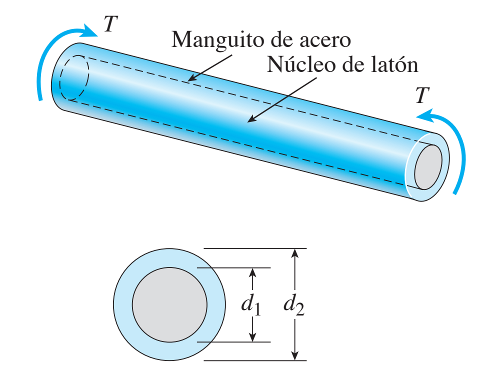
3.8.14 Un eje de acero ($G_s = 80$ GPa) con longitud total $L = 3.0$ m está contenido en un tercio de su longitud por un manguito de latón ($G_b = 40$ GPa) que está firmemente unido al acero (consulte la figura). Los diámetros exteriores del eje y el manguito son $d_1 = 70$ mm y $d_2 = 90$ mm, respectivamente.

(a) Determine el par de torsión permisible T_1 que se puede aplicar a los extremos del eje si el ángulo de torsión entre los extremos está limitado a 8.0°.

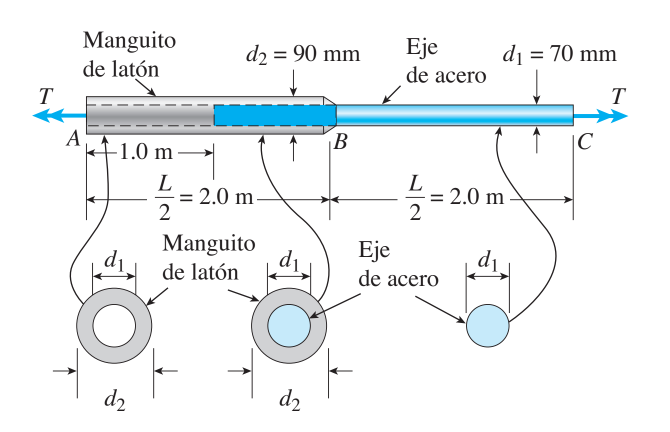
(b) Determine el par de torsión permisible T_2 si el esfuerzo cortante en el latón está limitado a $\tau_b = 70$ MPa.

(c) Determine el par de torsión permisible T_3 si el esfuerzo cortante en el acero está limitado a $\tau_s = 110$ MPa.

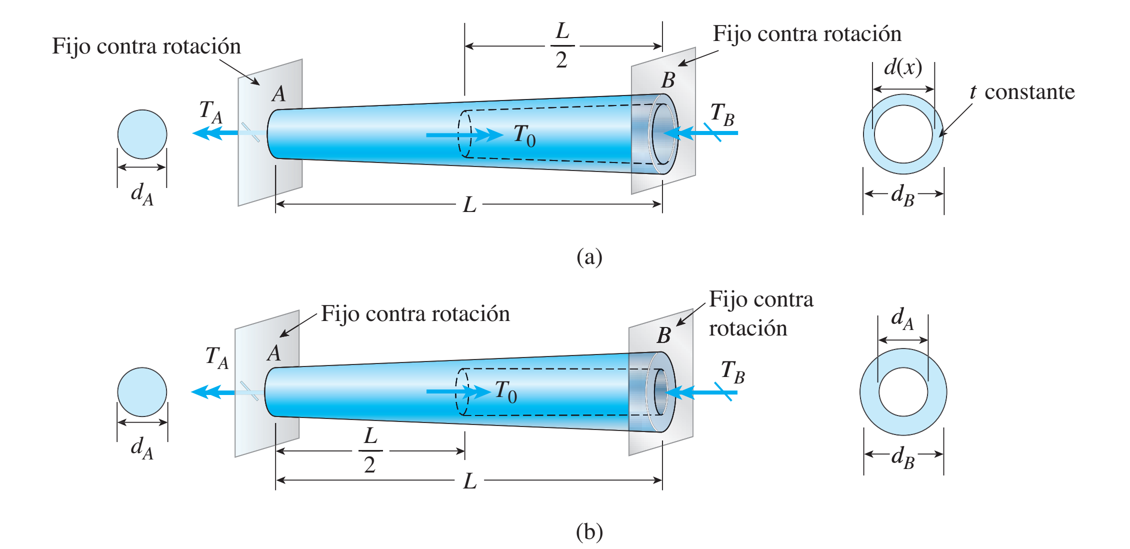
(d) ¿Cuál es el par de torsión máximo permisible $T_{máx}$ si se deben cumplir las tres condiciones anteriores?



PROBS. 3.8.12 y 3.8.13



PROB. 3.8.14

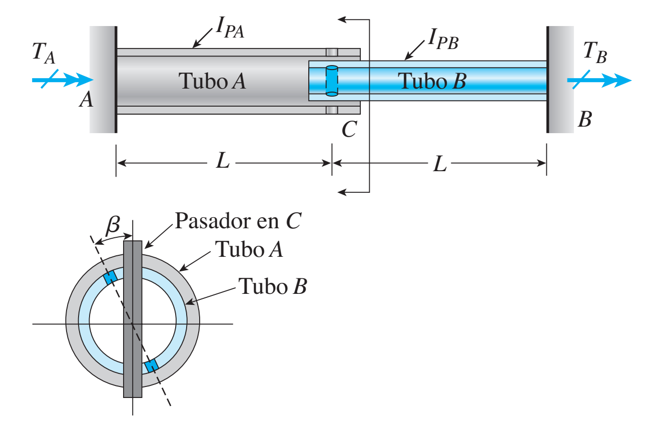


PROB. 3.8.15

3.8.15 Un tubo AB de una aleación de aluminio uniformemente ahusado con sección transversal circular y longitud L está fijo contra la rotación en A y B, como se muestra en la figura. Los diámetros exteriores en los extremos son d_A y $d_B = 2d_A$. Una sección hueca con longitud $L/2$ y espesor constante $t = d_A/10$ está moldeada en el tubo y se extiende desde B hasta la mitad del tubo hacia A. El par de torsión T_0 se aplica en $L/2$.

(a) Encuentre los pares de torsión reactivos en los soportes, T_A y T_B. Utilice los valores numéricos siguientes: $d_A = 2.5$ in, $L = 48$ in, $G = 3.9 \times 10^6$ psi, $T_0 = 40{,}000$ in-lb.

(b) Repita el inciso (a) si la sección hueca tiene un diámetro constante d_A.



Sección transversal en C

PROB. 3.8.16

3.8.16 Un tubo circular hueco A (diámetro exterior d_A, espesor de pared t_A) se ajusta sobre el extremo de un tubo circular B (d_B, t_B), como se muestra en la figura. Los extremos más alejados de los dos tubos están fijos. Al inicio, un agujero que atraviesa el tubo B forma un ángulo β con una línea que pasa por los dos agujeros en el tubo A. Luego el tubo B se tuerce hasta que los agujeros están alineados y se coloca un pasador (diámetro d_p) que pasa por ellos. Cuando el tubo B se libera, el sistema regresa al equilibrio. Suponga que G es constante.

(a) Utilice superposición para encontrar los pares de torsión reactivos T_A y T_B en los soportes.

(b) Formule una expresión para el valor máximo de β si el esfuerzo cortante en el pasador, τ_p, no puede exceder $\tau_{p,\text{perm}}$.

(c) Formule una expresión para el valor máximo de β si el esfuerzo cortante en los tubos, τ_t, no puede exceder $\tau_{t,\text{perm}}$.

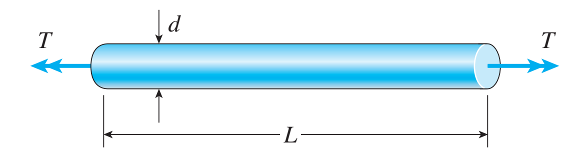
(d) Formule una expresión para el valor máximo de β si el esfuerzo de soporte en el pasador en C no puede sobrepasar $\sigma_{b,\text{perm}}$.

Energía de deformación en torsión

3.9.1 Una barra circular sólida de acero ($G = 11.4 \times 10^6$ psi) con longitud $L = 30$ in y diámetro $d = 1.75$ in se somete a torsión pura por pares de torsión T que actúan en los extremos (consulte la figura).

(a) Calcule la cantidad de energía de deformación U almacenada en la barra cuando el esfuerzo cortante máximo es 4500 psi.

(b) A partir de la energía de deformación, calcule el ángulo de torsión ϕ (en grados).



PROBS. 3.9.1 y 3.9.2

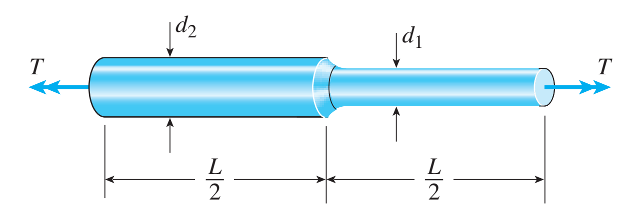
3.9.2 Una barra circular sólida de cobre ($G = 45$ GPa) con longitud $L = 0.75$ m y diámetro $d = 40$ mm se somete a torsión pura por pares de torsión T que actúan en los extremos (consulte la figura).

(a) Calcule la cantidad de energía de deformación U almacenada en la barra cuando el esfuerzo cortante máximo es 32 MPa.

(b) A partir de la energía de deformación, calcule el ángulo de torsión ϕ (en grados).

3.9.3 Un eje escalonado con secciones transversales circulares sólidas (consulte la figura) tiene una longitud $L = 45$ in, diámetro $d_2 = 1.2$ in y diámetro $d_1 = 1.0$ in. El material es latón con $G = 5.6 \times 10^6$ psi.

Determine la energía de deformación U del eje si el ángulo de torsión es 3.0°.



PROBS. 3.9.3 y 3.9.4

3.9.4 Un eje escalonado con secciones transversales circulares sólidas (consulte la figura) tiene una longitud $L = 0.80$ m, diámetro $d_2 = 40$ mm y diámetro $d_1 = 30$ mm. El material es acero con $G = 80$ GPa.

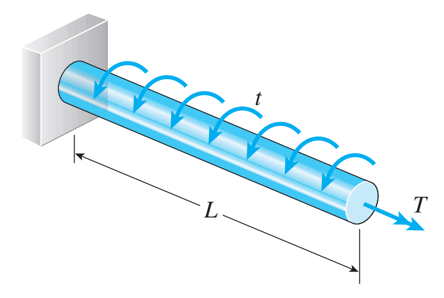
Determine la energía de deformación U del eje si el ángulo de torsión es 1.0°.

3.9.5 Una barra en voladizo con sección transversal circular y longitud L está fija en un extremo y libre en el otro (consulte la figura). La barra está cargada por un par de torsión T en el extremo libre y por un par de torsión con intensidad constante t por unidad de distancia a lo largo de la longitud de la barra.

(a) ¿Cuál es la energía de deformación U_1 de la barra cuando la carga T actúa sola?

(b) ¿Cuál es la energía de deformación U_2 cuando la carga t actúa sola?

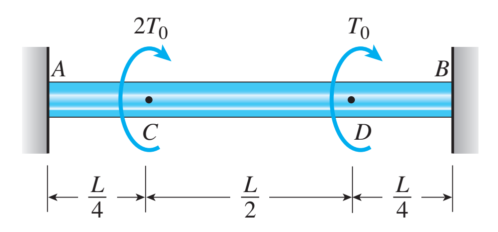
(c) ¿Cuál es la energía de deformación U_3 cuando las dos cargas actúan simultáneamente?



PROB. 3.9.5

3.9.6 Obtenga una fórmula para la energía de deformación U de la barra circular estáticamente indeterminada que se muestra en la figura. La barra tiene soportes fijos en los extremos A y B, y está cargada por pares de torsión $2T_0$ y T_0 en los puntos C y D, respectivamente.

Sugerencia: utilice las ecuaciones 3.46a y b del ejemplo 3.9, sección 3.8, para obtener los pares de torsión reactivos.

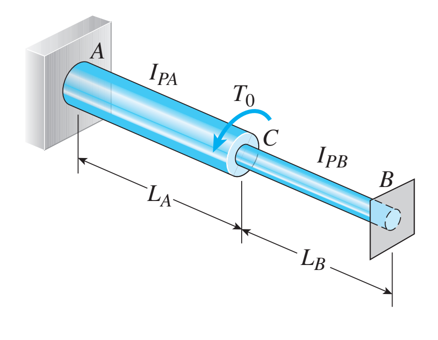


PROB. 3.9.6

3.9.7 Un eje escalonado estáticamente indeterminado ACB está fijo en los extremos A y B, y cargado por un par de torsión T_0 en el punto C (consulte la figura). Los dos segmentos del eje están hechos del mismo material, tienen longitudes L_A y L_B, y tienen momentos polares de inercia I_{PA} e I_{PB}.

Determine el ángulo de rotación ϕ de la sección transversal en C empleando la energía de deformación.

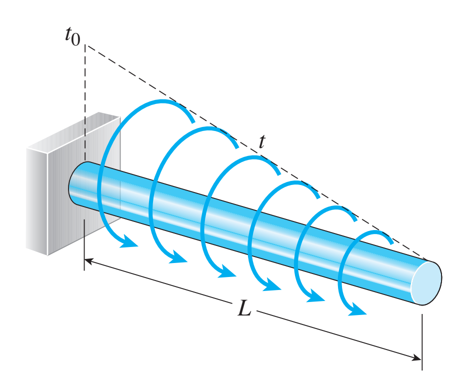
Sugerencia: utilice la ecuación 3.51b para determinar la energía de deformación U en términos del ángulo ϕ. Luego iguale la energía de deformación con el trabajo realizado por el par de torsión T_0. Compare su resultado con la ecuación 3.48 del ejemplo 3.9, sección 3.8.



PROB. 3.9.7

3.9.8 Deduzca una fórmula para la energía de deformación U de la barra en voladizo que se muestra en la figura.

La barra tiene secciones transversales circulares y longitud L. Está sometida a un par de torsión distribuido con intensidad t por unidad de distancia. La intensidad varía linealmente de $t = 0$ en el extremo libre a un valor máximo $t = t_0$ en el soporte.



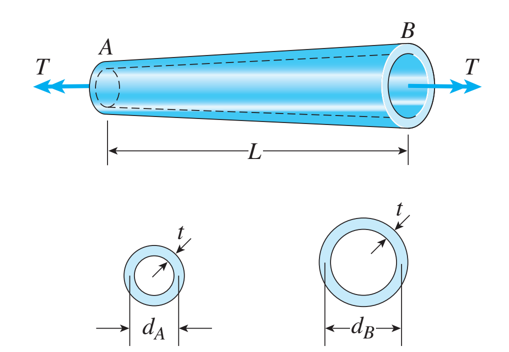
PROB. 3.9.8

***3.9.9** Un tubo hueco de pared delgada AB con forma cónica tiene un espesor constante t y diámetros promedio d_A y d_B en los extremos (consulte la figura).

(a) Determine la energía de deformación U del tubo cuando se somete a torsión pura por pares de torsión T.

(b) Determine el ángulo de torsión ϕ del tubo.

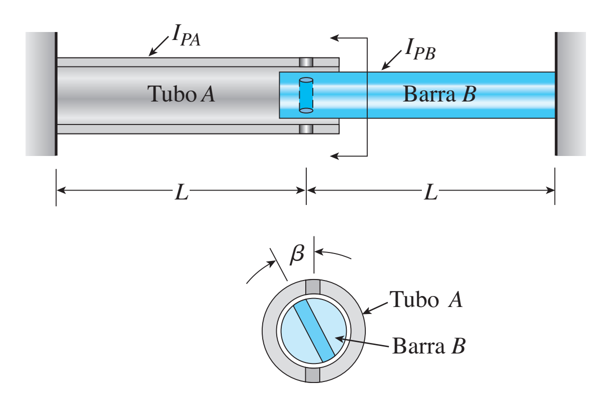
Nota: utilice la fórmula aproximada $I_P \approx \pi d^3 t/4$ para un anillo circular delgado; consulte el caso 22 del apéndice D.



PROB. 3.9.9

***3.9.10** Un tubo circular hueco A se ajusta sobre el extremo de una barra circular sólida B, como se muestra en la figura. Los extremos alejados de las dos barras están fijos. Al inicio, un agujero que atraviesa la barra B forma un ángulo β con una línea que pasa por los dos agujeros en el tubo A. Luego la barra B se tuerce hasta que se alinean los agujeros y se coloca un pasador que pasa por ellos.

Cuando la barra B se libera y el sistema regresa al equilibrio, ¿cuál es la energía de deformación total U de las dos barras? (Sean I_{PA} e I_{PB} los momentos polares de inercia de las barras A y B, respectivamente. La longitud L y el módulo de elasticidad en cortante G son los mismos para las dos barras).

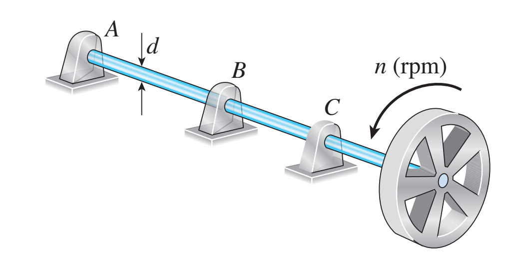


PROB. 3.9.10

****3.9.11** Un volante de inercia pesado que gira a n revoluciones por minuto está conectado rígidamente al extremo de un eje con diámetro d (consulte la figura). Si el cojinete en A se detiene repentinamente, ¿cuál será el ángulo de torsión máximo ϕ del eje? ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo correspondiente en el eje?

(Sea L = longitud del eje, G = módulo de elasticidad en cortante e I_m = momento de inercia de la masa del volante de inercia con respecto al eje longitudinal del eje. No tome en cuenta la fricción en los cojinetes B y C ni la masa del eje).

Sugerencia: iguale la energía cinética del volante de inercia que gira con la energía de deformación del eje.

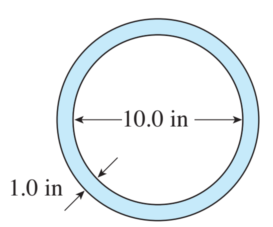


PROB. 3.9.11

Tubos de pared delgada

3.10.1 Un tubo circular hueco con diámetro interior de 10.0 in y espesor de pared de 1.0 in (consulte la figura) está sometido a un par de torsión $T = 1200$ k-in.

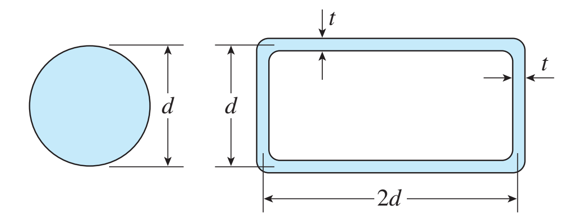
Determine el esfuerzo cortante máximo en el tubo empleando (a) la teoría aproximada para tubos de pared delgada y (b) la teoría exacta de la torsión. ¿La teoría aproximada da resultados conservadores o no conservadores?



PROB. 3.10.1

3.10.2 Una barra circular sólida con diámetro d se reemplazará con un tubo rectangular que tiene una sección transversal rectangular $d \times 2d$ hasta la línea central de la sección transversal (consulte la figura).

Determine el espesor necesario $t_{mín}$ del tubo de manera que el esfuerzo cortante máximo en el tubo no exceda el esfuerzo cortante máximo en la barra sólida.

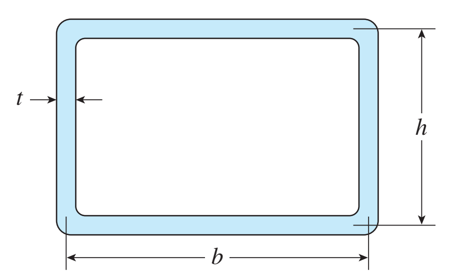


PROB. 3.10.2

3.10.3 Un tubo de aluminio de pared delgada con sección transversal rectangular (consulte la figura) tiene dimensiones hasta su línea central $b = 6.0$ in y $h = 4.0$ in. El espesor de la pared t es constante e igual a 0.25 in.

(a) Determine el esfuerzo cortante en el tubo debido al par de torsión $T = 15$ k-in.

(b) Determine el ángulo de torsión (en grados) si la longitud L del tubo es 50 in y el módulo de elasticidad en cortante G es 4.0×10^6 psi.



PROBS. 3.10.3 y 3.10.4

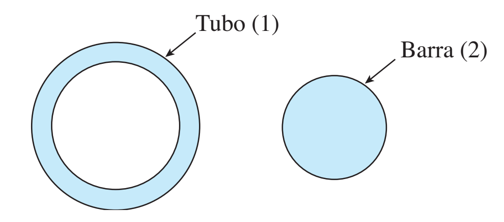
3.10.4 Un tubo de acero de pared delgada con sección transversal rectangular (consulte la figura) tiene dimensiones hasta su línea central $b = 150$ mm y $h = 100$ mm. El espesor de la pared t es constante e igual a 6.0 mm.

(a) Determine el esfuerzo cortante en el tubo debido al par de torsión $T = 1650$ N·m.

(b) Determine el ángulo de torsión (en grados) si la longitud L del tubo es 1.2 m y el módulo de elasticidad en cortante G es 75 GPa.

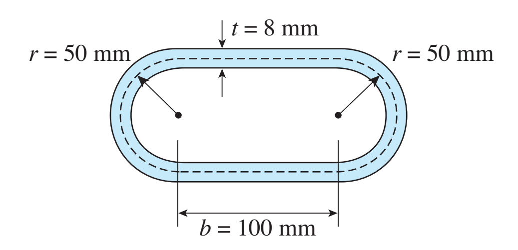
3.10.5 Un tubo circular de pared delgada y una barra sólida del mismo material (consulte la figura) se someten a torsión. El tubo y la barra tienen la misma área de sección transversal e igual longitud.

¿Cuál es la razón entre energía de deformación U_1 en el tubo y la energía deformación U_2 en la barra sólida si los esfuerzos cortantes máximos son iguales en los dos casos? (Para el tubo, utilice la teoría aproximada para barras de pared delgada).



PROB. 3.10.5

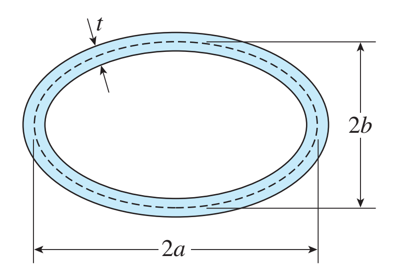
3.10.6 Calcule el esfuerzo cortante τ y el ángulo de torsión ϕ (en grados) para un tubo de acero ($G = 76$ GPa) que tiene la sección transversal que se muestra en la figura. El tubo tiene una longitud $L = 1.5$ m y está sometido a un par de torsión $T = 10$ kN · m.



PROB. 3.10.6

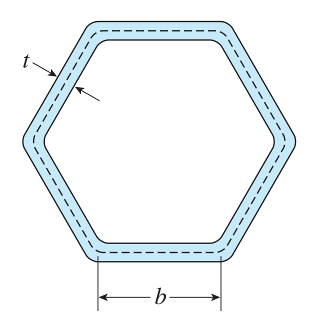
3.10.7 Un tubo de acero de pared delgada que tiene sección transversal elíptica con espesor constante t (consulte la figura) está sometido a un par de torsión $T = 18$ k-in.

Determine el esfuerzo cortante τ y la razón de torsión θ (en grados por pulgada) si $G = 12 \times 10^6$ psi, $t = 0.2$ in, $a = 3$ in y $b = 2$ in. (*Nota:* consulte el apéndice D, caso 16, para obtener las propiedades de una elipse.)



PROB. 3-10.7

3.10.8 Un par de torsión T se aplica a un tubo de pared delgada que tiene una sección transversal hexagonal regular con espesor de pared constante t y longitud b en cada lado (consulte la figura). Obtenga fórmulas para el esfuerzo cortante τ y la razón de torsión θ.

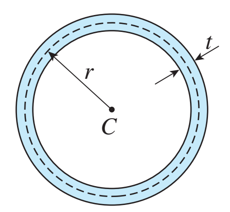


PROB. 3.10.8

3.10.9 Compare el ángulo de torsión ϕ_1 para un tubo circular de pared delgada (consulte la figura) calculado a partir de la teoría aproximada para barras de pared delgada con el ángulo de torsión ϕ_2 calculado con la teoría exacta de la torsión para barras circulares.

(a) Exprese la razón ϕ_1/ϕ_2 en términos de la razón adimensional $\beta = r/t$.

(b) Calcule la razón de los ángulos de torsión $\beta = 5$, 10 y 20. ¿Qué concluye a partir de estos resultados acerca de la precisión de la teoría aproximada?

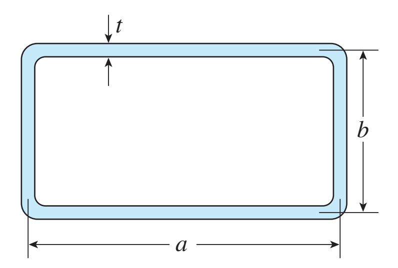


PROB. 3.10.9

***3.10.10** Un tubo rectangular de pared delgada tiene espesor uniforme t y dimensiones $a \times b$ hasta la línea central de la sección transversal (consulte la figura).

¿Cómo varía el esfuerzo cortante en el tubo con la razón $\beta = a/b$ si la longitud total L_m de la línea central de la sección transversal y el par de torsión T permanecen constantes?

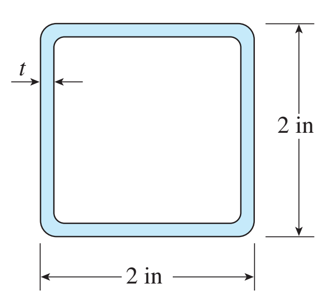
A partir de sus resultados, demuestre que el esfuerzo cortante es mínimo cuando el tubo es cuadrado ($\beta = 1$).



PROB. 3.10.10

***3.10.11** Una barra tubular de aluminio ($G = 4 \times 10^6$ psi) con sección transversal cuadrada (consulte la figura) y dimensiones exteriores de 2 in $\times$ 2 in debe resistir un par de torsión $T = 3000$ lb-in.

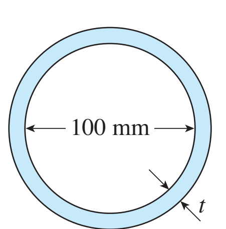
Calcule el espesor de pared mínimo requerido $t_{\text{mín}}$ si el esfuerzo cortante permisible es 4500 psi y la razón de torsión permisible es 0.01 rad/ft.



PROB. 3.10.11

***3.10.12** Un eje tubular delgado con sección transversal circular (consulte la figura) con diámetro interior de 100 mm se somete a un par de torsión de 5000 N·m.

Si el esfuerzo cortante permisible es 42 MPa, determine el espesor de pared requerido t empleando (a) la teoría aproximada para un tubo de pared delgada y (b) la teoría exacta de la torsión para una barra circular.



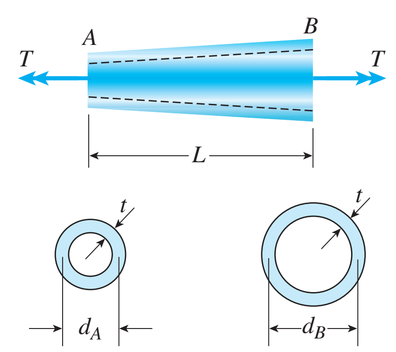
PROB. 3.10.12

****3.10.13** Un tubo ahusado de pared delgada largo *AB* con sección transversal circular (consulte la figura) se somete a un par de torsión *T*. El tubo tiene una longitud *L* y un espesor de pared constante *t*. Los diámetros hasta la línea central de las secciones transversales en los extremos *A* y *B* son d_A y d_B, respectivamente.

Deduzca la fórmula siguiente para el ángulo de torsión del tubo:

$$\phi = \frac{2TL}{\pi G t}\left(\frac{d_A + d_B}{d_A^2 d_B^2}\right)$$

Sugerencia: si el ángulo de ahusamiento es pequeño, podemos obtener resultados aproximados aplicando las fórmulas para un tubo prismático de pared delgada a un elemento diferencial del tubo ahusado y luego integrar a lo largo del eje del tubo.



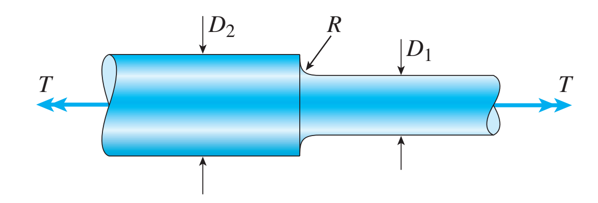
PROB. 3.10.13

Concentraciones de esfuerzos en torsión

Los problemas para la sección 3.11 se deben resolver considerando los factores de concentración de esfuerzos.

3.11.1 Un eje escalonado que consiste de segmentos circulares sólidos con diámetros $D_1 = 2.0$ in y $D_2 = 2.4$ in (consulte la figura) se somete a pares de torsión *T*. El radio del filete es $R = 0.1$ in.

Si el esfuerzo cortante permisible en la concentración de esfuerzo es 6000 psi, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible $T_{máx}$?



PROBS. 3.11.1 A 3.11.5

3.11.2 Un eje escalonado con diámetros $D_1 = 40$ mm y $D_2 = 60$ mm está cargado por pares de torsión $T = 1100$ N·m (consulte la figura).

Si el esfuerzo cortante permisible en la concentración de esfuerzo es 120 MPa, ¿cuál es el radio menor $R_{mín}$ que se puede emplear para el filete?

3.11.3 Un filete de un cuarto de círculo se utiliza en el hombro de un eje escalonado que tiene un diámetro $D_2 = 1.0$ in (consulte la figura). Un par de torsión $T = 500$ lb-in actúa sobre el eje.

Determine el esfuerzo cortante $\tau_{máx}$ en la concentración de esfuerzo para los valores siguientes: $D_1 = 0.7, 0.8$ y 0.9 in. Trace una gráfica que muestre $\tau_{máx}$ contra D_1.

3.11.4 Se requiere que el eje escalonado que se muestra en la figura transmita 600 kW de potencia a 400 rpm. El eje tiene un filete de un cuarto de círculo y el diámetro menor es $D_1 = 100$ mm.

Si el esfuerzo cortante permisible en la concentración de esfuerzo es 100 MPa, ¿a qué diámetro D_2 se alcanzará este esfuerzo? ¿Este diámetro es un límite superior o inferior para el valor de D_2?

3.11.5 Un eje escalonado (consulte la figura) tiene un diámetro $D_2 = 1.5$ in y un filete de un cuarto de círculo. El esfuerzo cortante permisible es de 15,000 psi y la carga $T = 4800$ lb-in.

¿Cuál es el diámetro menor permisible D_1?



Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes gobiernan el diseño de vigas en una variedad de estructuras como marcos de edificios y puentes.

4

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Este capítulo se inicia con un repaso del análisis en dos dimensiones de vigas y marcos que aprendió en su primer curso de mecánica: la estática. Primero, se definen varios tipos de vigas, cargas y condiciones de apoyo para estructuras comunes, como vigas en voladizo y simples. Las cargas aplicadas pueden ser concentradas (ya sea una fuerza o un momento) o distribuidas. Las condiciones de apoyo incluyen los apoyos empotrados, de rodillo, articulados y deslizantes. El número y la configuración de los apoyos deben producir un modelo estable de la estructura que esté estáticamente determinada o bien estáticamente indeterminada. En este capítulo estudiaremos las estructuras de vigas estáticamente determinadas y en el capítulo 10 consideraremos las vigas estáticamente indeterminadas.

El enfoque en este capítulo se centra en los esfuerzos internos resultantes (axial N, cortante V y momento M) en cualquier punto de la estructura. En algunas estructuras se introducen "alivios" internos de la estructura en puntos específicos para controlar la magnitud de N, V o M en algunos elementos y, por tanto, se deben incluir en el modelo analítico. En estos puntos de alivio se puede considerar que N, V o M tienen un valor de cero. En el diseño de vigas y marcos son muy útiles las representaciones gráficas o diagramas que muestren la variación de N, V y M en toda la estructura (como veremos en el capítulo 5), ya que dichos diagramas identifican rápidamente las ubicaciones y los valores de la fuerza axial, del cortante y del momento máximo necesarios para el diseño.

Los temas anteriores sobre vigas y marcos se analizan en este capítulo en el siguiente orden:

4.1 INTRODUCCIÓN

Los elementos estructurales suelen clasificarse de acuerdo con los tipos de cargas que soportan. Por ejemplo, una *barra cargada axialmente* soporta fuerzas con sus vectores dirigidos a lo largo del eje de la barra y una *barra en torsión* soporta pares de torsión (o pares) que tienen sus vectores momento dirigidos a lo largo del eje. En este capítulo, iniciamos nuestro estudio de las **vigas** (figura 4.1), que son elementos estructurales sometidos a cargas laterales, es decir, fuerzas o momentos que tienen sus vectores perpendiculares al eje de la barra.

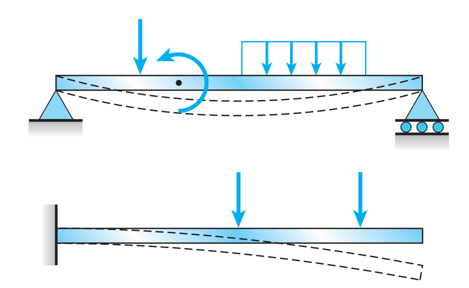


FIGURA 4.1 Ejemplos de vigas sometidas a cargas laterales.

Las vigas que se muestran en la figura 4.1 se clasifican como *estructuras planares* debido a que yacen en un solo plano. Si todas las cargas actúan en ese mismo plano y si todas las deflexiones (indicadas por las líneas discontinuas) también ocurren en ese plano, entonces nos referimos a éste como el **plano de flexión.**

En este capítulo analizamos las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en vigas y mostraremos cómo estas cantidades están relacionadas entre sí y con las cargas. La determinación de las fuerzas cortantes y de los momentos flexionantes es un paso esencial en el diseño de cualquier viga. Por lo general, no sólo necesitamos conocer los valores máximos de estas cantidades, sino también la manera en que varían a lo largo del eje de la viga. Una vez que se conocen las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes podemos determinar los esfuerzos, las deformaciones unitarias y las deflexiones, como se analiza en los capítulos 5, 6 y 9.

4.2 TIPOS DE VIGAS, CARGAS Y REACCIONES

Las vigas se describen por la manera en que están apoyadas. Por ejemplo, una viga con un apoyo articulado en un extremo y un apoyo de rodillo en el otro (figura 4.2a) se denomina **viga simplemente apoyada** o **viga simple**.

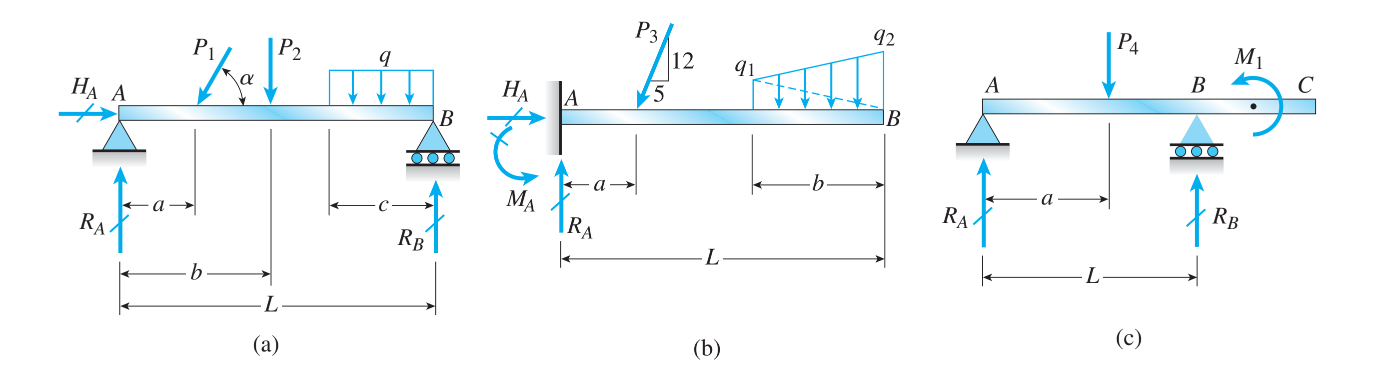


FIGURA 4.2 Tipos de vigas: (a) simple, (b) en voladizo y (c) viga con voladizo.

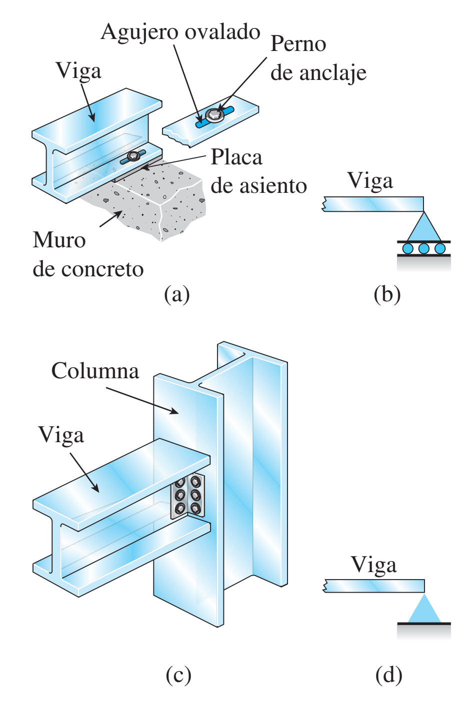


FIGURA 4.3 Viga apoyada sobre un muro: (a) construcción real y (b) representación como un apoyo de rodillo. Conexión de viga a columna: (c) construcción real y (d) representación como un apoyo articulado.

La característica esencial de un **apoyo articulado** es que evita la translación en el extremo de una viga pero no evita su rotación. De esta manera, el extremo *A* de la viga de la figura 4.2a no puede moverse horizontal o verticalmente pero el eje de la viga puede girar en el plano de la figura. En consecuencia, un apoyo articulado es capaz de desarrollar una fuerza de reacción con componentes tanto horizontal como vertical (H_A y R_A), pero no puede desarrollar una reacción de momento.

En el extremo *B* de la viga (figura 4.2a) el **apoyo de rodillo** evita la translación en la dirección vertical pero no en la dirección horizontal; de aquí que este apoyo puede resistir una fuerza vertical (R_B) pero no una fuerza horizontal. Por supuesto, el eje de la viga puede girar en *B* y en *A*. Las reacciones verticales en los apoyos de rodillo y en los apoyos articulados pueden actuar hacia arriba *o* hacia abajo y la reacción horizontal en el apoyo articulado puede actuar hacia la izquierda o hacia la derecha. En las figuras las reacciones se indican por líneas que atraviesan las flechas a fin de distinguirlas de las cargas, como ya se explicó en la sección 1.8.

La viga que se muestra en la figura 4.2b, que está fija en un extremo y libre en el otro, se denomina **viga en voladizo.** En el **apoyo fijo** (o *apoyo empotrado*) la viga no puede trasladarse ni girar, en tanto que en el extremo libre puede hacer ambas cosas. En consecuencia, en el apoyo empotrado pueden existir tanto reacciones de fuerza como de momento.

El tercer ejemplo en la figura es una **viga con un voladizo** (figura 4.2c). Esta viga está simplemente apoyada en los puntos *A* y *B* (es decir, tiene un apoyo articulado en *A* y un apoyo de rodillo en *B*) pero también se proyecta más allá del apoyo en *B*. El segmento *BC* en saliente es similar a una viga en voladizo excepto que el eje de la viga puede girar en el punto *B*.

Al dibujar diagramas de vigas, identificamos los apoyos mediante **símbolos convencionales**, como los que se muestran en la figura 4.2. Estos símbolos indican la forma en que la viga está restringida y, por tanto, también muestran la naturaleza de las fuerzas y los momentos reactivos. Sin embargo, *los símbolos no representan la construcción física real*. Por ejemplo, considere los ejemplos que se muestran en la figura 4.3. En la parte (a) de la figura se muestra un viga de patín ancho apoyada sobre un muro de concreto y sujeta por pernos de anclaje que pasan por agujeros ovalados en el patín inferior de la viga. Esta conexión restringe la viga contra un movimiento vertical (hacia arriba o abajo) pero no evita el movimiento horizontal. Además, cualquier restricción contra la rotación del eje longitudinal de la viga es pequeña y por lo general se puede ignorar. En consecuencia, este tipo de apoyo es usual que se represente por un rodillo, como se muestra en la parte (b) de la figura.

El segundo ejemplo (figura 4.3c) es una conexión de viga a columna en donde la primera está conectada al patín de la segunda mediante ángulos con pernos. (Consulte la fotografía). Este tipo de apoyo usualmente se supone que restringe la viga contra el movimiento horizontal y vertical pero no contra la rotación (la restricción contra la rotación es ligera debido a que tanto los ángulos de conexión, como la columna pueden flexionarse). Por tanto, esta conexión por lo general se representa como un apoyo articulado para la viga (figura 4.3d).



Conexión viga a columna con una viga sujeta al patín de una columna y otra sujeta al alma de una columna

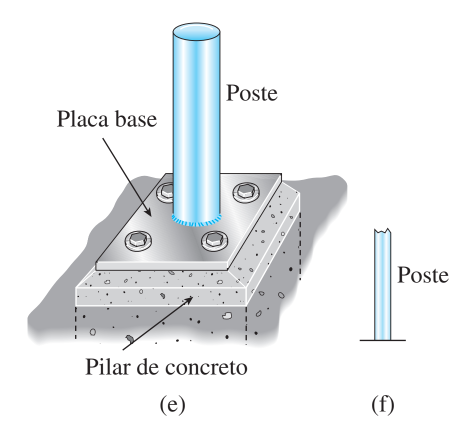


FIGURA 4.3 Poste anclado a un pilar de concreto: (e) construcción real y (f) representación como un apoyo fijo.

El último ejemplo (figura 4.3e) es un poste metálico soldado a una placa base que está anclada a un pilar de concreto empotrado profundo en el suelo. Como la base del poste está completamente restringida contra la traslación y la rotación, se representa como un apoyo fijo (figura 4.3f).

La tarea de representar una estructura real mediante un **modelo idealizado**, como se ilustra por las vigas de la figura 4.2, es un aspecto importante del trabajo en ingeniería. El modelo debe ser lo suficientemente simple para facilitar el análisis matemático y, sin embargo, lo suficientemente complejo para representar el comportamiento real de la estructura con una precisión razonable. Por supuesto, cada modelo es una aproximación del estado natural. Por ejemplo, los apoyos reales de una viga nunca son perfectamente rígidos y, por tanto, siempre habrá una cantidad pequeña de translación en un apoyo articulado y una cantidad pequeña de rotación en un apoyo fijo. Además, los apoyos nunca están completamente libres de fricción y, por consiguiente, siempre habrá una cantidad pequeña de restricción contra la translación en un apoyo de rodillo. En la mayor parte de los casos, en especial para vigas estáticamente indeterminadas, estas desviaciones de las condiciones idealizadas tienen poco efecto en la acción de la viga y se pueden ignorar con seguridad.

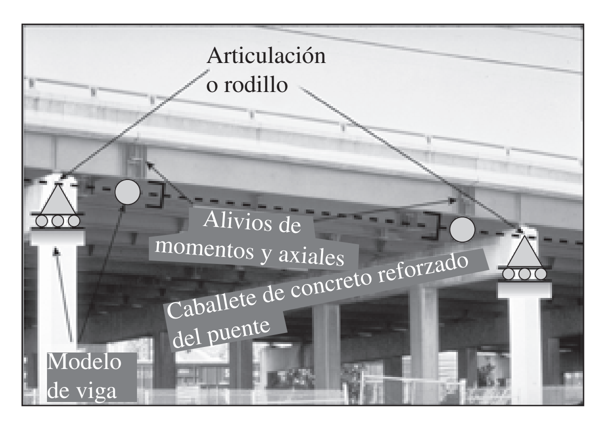
Tipos de cargas

En la figura 4.2 se ilustran varios tipos de cargas que actúan sobre vigas. Cuando una carga se aplica sobre un área muy pequeña se puede idealizar como una **carga concentrada,** que es una fuerza individual. En la figura los ejemplos son las cargas P_1, P_2, P_3 y P_4. Cuando una carga se reparte a lo largo del eje de la viga, se representa como una **carga distribuida,** como la carga q en la parte (a) de la figura. Las cargas distribuidas se miden por su **intensidad**, que se expresa en unidades de fuerza por unidad de distancia (por ejemplo, newtons por metro o libras por pie). Una **carga distribuida uniformemente** o **carga uniforme**, tiene una intensidad constante q por unidad de distancia (figura 4.2a). Una carga variable tiene una intensidad que cambia con la distancia a lo largo del eje de la viga; por ejemplo, la **carga linealmente variable** de la figura 4-2b tiene una intensidad que varía linealmente de q_1 a q_2. Otro tipo de carga es un **par**, ilustrado por el par de momento M_1 que actúa sobre la viga con saliente (figura 4.2c).

Como se mencionó en la sección 4.1, en este estudio suponemos que las cargas actúan en el plano de la figura, lo que significa que todas las fuerzas deben tener sus vectores en dicho plano, y todos los pares deben tener sus vectores momento perpendiculares al plano de la figura. Además, la viga misma debe ser simétrica con respecto a ese plano, lo que significa que cada sección transversal de la viga debe tener un eje de simetría vertical. En estas condiciones, la viga se flexionará sólo en el *plano de flexión* (el plano de la figura).

Reacciones

Por lo general la determinación de las reacciones es el primer paso en el análisis de una viga. Una vez que se conocen las reacciones, se pueden determinar las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, como se describe más adelante en este capítulo. Si una viga está apoyada de una manera estáticamente determinada, todas las reacciones se pueden encontrar a partir de diagramas de cuerpo libre y mediante ecuaciones de equilibrio.



Alivios internos y apoyos extremos en el modelo de una viga de un puente

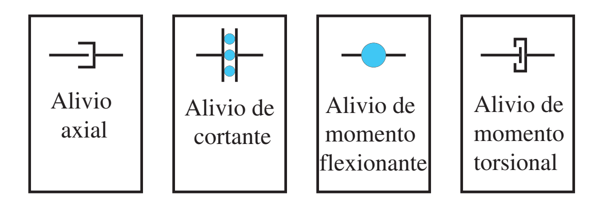


FIGURA 4.4 Tipos de alivios de elementos internos para una viga bidimensional y elementos del marco.

En algunos casos, puede ser necesario agregar alivios internos en el modelo de la viga o marco para representar mejor las condiciones reales de construcción que pueden tener un efecto importante en el comportamiento global de la estructura. Por ejemplo, el claro interior de la viga del puente que se muestra en la figura 4.4 está soportado sobre apoyos de rodillo en ambos extremos, los que a su vez descansan sobre caballetes (o marcos) de concreto reforzado, pero se han insertado detalles de construcción en la viga en los dos extremos para asegurar que la fuerza axial y el momento en estas dos ubicaciones sean cero. Este detalle también permite que la calzada del puente se expanda o contraiga ante cambios de temperatura para evitar inducir esfuerzos térmicos grandes en la estructura. Para representar estos alivios en el modelo de la viga se han incluido una articulación (o alivio de momento interno, mostrado como un círculo sólido en cada extremo) y un alivio de fuerza axial (mostrado como una ménsula en forma de "C") para mostrar que tanto la fuerza axial (N) como el momento flexionante (M), pero no el cortante (V), son cero en estos dos puntos a lo largo de la viga. (Las representaciones de los posibles tipos de alivios para una viga bidimensional y los elementos a torsión se muestran debajo de la fotografía.) Como se muestra en los ejemplos siguientes, si se presentan **alivios** axiales, de cortante o de momento en el modelo de la estructura, ésta se debe descomponer en diagramas de cuerpo libre separables cortando a través del alivio; entonces se dispone de una ecuación adicional de equilibrio para usarse en la solución de las reacciones de apoyo desconocidas incluidas en ese diagrama de cuerpo libre.

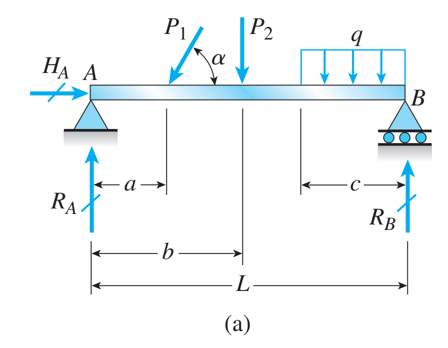


FIGURA 4.2a Viga simple. (Repetida.)

Como ejemplo, determinemos las reacciones de la **viga simple** AB de la figura 4.2a. Esta viga está cargada por una fuerza inclinada P_1, una fuerza vertical P_2 y una carga uniformemente distribuida con intensidad q. Iniciamos observando que la viga tiene tres reacciones desconocidas: una fuerza horizontal H_A en el apoyo articulado, una fuerza vertical R_A en

el apoyo articulado y una fuerza vertical R_B en el apoyo de rodillo. Para una estructura planar, como esta viga, sabemos de la estática que podemos escribir tres ecuaciones independientes de equilibrio. Por tanto, como hay tres reacciones desconocidas y tres ecuaciones, la viga es estáticamente determinada.

La ecuación del equilibrio horizontal es

$$\sum F_{\text{horiz}} = 0 \quad H_A - P_1 \cos \alpha = 0$$

de donde obtenemos

$$H_A = P_1 \cos \alpha$$

Este resultado es tan obvio a partir de una inspección de la viga que por lo general no nos molestaríamos escribiendo la ecuación de equilibrio.

Para encontrar las reacciones verticales R_A y R_B escribimos ecuaciones de equilibrio de momentos con respecto a los puntos B y A, respectivamente, tomando como positivos los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj:

$$\sum M_B = 0 \quad -R_A L + (P_1 \text{ sen } \alpha)(L - a) + P_2(L - b) + qc^2/2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_B L - (P_1 \text{ sen } \alpha)(a) - P_2 b - qc(L - c/2) = 0$$

Despejando R_A y R_B, obtenemos

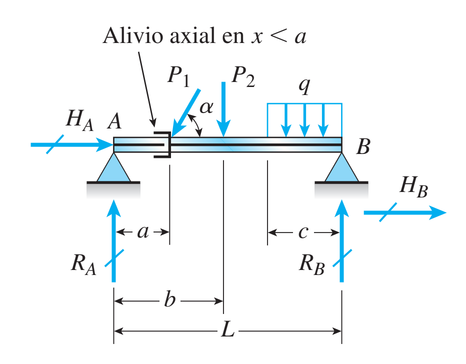


FIGURA 4.5 Viga simple con alivio axial.

$$R_A = \frac{(P_1 \text{ sen } \alpha)(L - a)}{L} + \frac{P_2(L - b)}{L} + \frac{qc^2}{2L}$$

$$R_B = \frac{(P_1 \text{ sen } \alpha)(a)}{L} + \frac{P_2 b}{L} + \frac{qc(L - c/2)}{L}$$

Como verificación de estos resultados podemos escribir una ecuación de equilibrio en la dirección vertical y verificar si se reduce a una identidad.

Si la estructura de la viga en la figura 4.2a se modifica para reemplazar el apoyo de rodillo en B con un apoyo articulado, ahora es una viga estáticamente indeterminada de primer grado. Sin embargo, si se inserta un alivio de fuerza axial en el modelo, como se muestra en la figura 4.5 justo a la izquierda del punto de aplicación de la carga P_1, la viga aún se puede analizar empleando sólo las leyes de la estática debido a que el alivio proporciona una ecuación adicional de equilibrio. La viga se debe cortar en el alivio para exponer las resultantes del esfuerzo interno N, V y M; pero ahora $N = 0$ en el alivio, por tanto las reacciones $H_A = 0$ y $H_B = P_1 \cos \alpha$.

Como segundo ejemplo, considere la **viga en voladizo** de la figura 4.2b. Las cargas consisten en una fuerza inclinada P_3 y una carga variable linealmente distribuida. La última está representada por un diagrama trapezoidal con intensidad de carga que varía de q_1 a q_2. Las reacciones en el apoyo fijo (empotramiento) son una fuerza horizontal H_A, una fuerza vertical R_A y un par M_A. Del equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal se obtiene

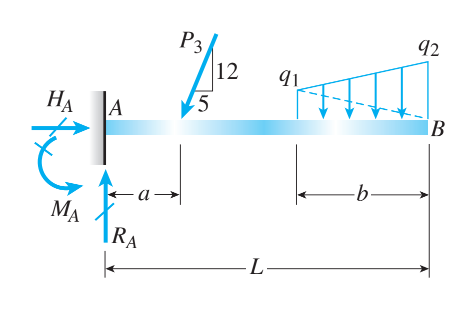


FIGURA 4.2b Viga en voladizo. (Repetida.)

$$H_A = \frac{5P_3}{13}$$

y del equilibrio en la dirección vertical,

$$R_A = \frac{12P_3}{13} + \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) b$$

Al determinar esta reacción partimos del hecho de que la resultante de la carga distribuida es igual al área del diagrama trapezoidal de carga.

La reacción de momento M_A en el apoyo fijo se determina con una ecuación de equilibrio de momentos. En este ejemplo sumaremos momentos con respecto al punto A con la finalidad de eliminar H_A y R_A de la ecuación de momento. Además, con el fin de encontrar el momento de la carga distribuida, dividiremos el trapecio en dos triángulos, como se muestra mediante la línea discontinua en la figura 4.2b. Cada triángulo de carga se puede remplazar con su resultante, que es una fuerza con magnitud igual al área del triángulo y con su línea de acción a través del centroide del triángulo. De esta manera, el momento con respecto al punto A de la parte triangular inferior de la carga es

$$\left(\frac{q_1 b}{2}\right)\left(L - \frac{2b}{3}\right)$$

en donde $q_1b/2$ es la fuerza resultante (igual al área del diagrama triangular de carga) y $L - 2b/3$ es el brazo de momento (respecto al punto A) de la resultante.

El momento de la parte triangular superior de la carga se obtiene mediante un procedimiento similar y la ecuación final del equilibrio de momentos (positivos en sentido contrario al de las manecillas del reloj) es

$$\sum M_A = 0 \qquad M_A - \left(\frac{12P_3}{13}\right)a - \frac{q_1 b}{2}\left(L - \frac{2b}{3}\right) - \frac{q_2 b}{2}\left(L - \frac{b}{3}\right) = 0$$

de donde

$$M_A = \frac{12P_3 a}{13} + \frac{q_1 b}{2}\left(L - \frac{2b}{3}\right) + \frac{q_2 b}{2}\left(L - \frac{b}{3}\right)$$

Como esta ecuación da un resultado positivo, el momento reactivo M_A actúa en el sentido supuesto, es decir, contrario al de las manecillas del reloj. (Las expresiones para R_A y M_A se pueden verificar tomando momentos con respecto al extremo B de la viga y verificando si la ecuación resultante de equilibrio se reduce a una identidad.)

Si la estructura de la viga en voladizo en la figura 4.2b se modifica para agregar un apoyo de rodillo en B, ahora se le refiere como viga en voladizo "apuntalada" estáticamente indeterminada de primer grado. Sin embargo, si se inserta un alivio de momento en el modelo, como se muestra en la figura 4.6, justo a la derecha del punto de aplicación de la carga P_3, la viga aún se puede analizar empleando sólo las leyes de la estática debido a que el alivio proporciona una ecuación adicional de equilibrio. La viga se debe cortar en el alivio para exponer las resultantes del esfuerzo interno N, V y M; ahora $M = 0$ en el alivio, por tanto, la reacción R_B se puede calcular sumando

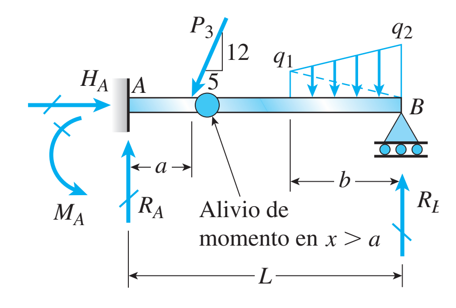


FIGURA 4.6 Viga en voladizo apuntalada con alivio de momento.

momentos en el lado derecho del diagrama de cuerpo libre. Una vez que se conoce R_B, la reacción R_A se puede volver a calcular sumando fuerzas verticales y se puede obtener el momento de reacción M_A sumando momentos con respecto al punto A. Los resultados se resumen en la figura 4.6. Observe que la reacción H_A no ha cambiado de la reportada antes para la estructura de la viga en voladizo original de la figura 4.2b.

$$R_B = \frac{\frac{1}{2} q_1 b\left(L - a - \frac{2}{3} b\right) + \frac{1}{2} q_2 b\left(L - a - \frac{b}{3}\right)}{L - a}$$

$$R_A = \frac{12}{13} P_3 + \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)(b) - R_B$$

$$R_A = \frac{1}{78} \frac{-72 P_3 L + 72 P_3 a - 26 q_1 b^2 - 13 q_2 b^2}{-L + a}$$

$$M_A = \frac{12}{13} P_3 a + q_1 \frac{b}{2}\left(L - \frac{2}{3} b\right) + q_2 \frac{b}{2}\left(L - \frac{b}{3}\right) - R_B L$$

$$M_A = \frac{1}{78} a \frac{-72 P_3 L + 72 P_3 a - 26 q_1 b^2 - 13 q_2 b^2}{-L + a}$$

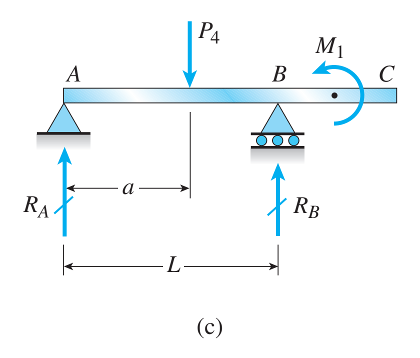


FIGURA 4.2c Viga con un voladizo. (Repetida.)

La **viga con un voladizo** (figura 4.2c) soporta una fuerza vertical P_4 y un par de momento M_1. Como no hay fuerzas horizontales actuando sobre la viga, la reacción horizontal en el apoyo articulado no existe y no necesitamos mostrarla en el diagrama de cuerpo libre. Al llegar a esta conclusión, empleamos la ecuación de equilibrio para fuerzas en la dirección horizontal. En consecuencia, sólo permanecen dos ecuaciones independientes de equilibrio, ya sean dos ecuaciones de momento o una ecuación de momento más la ecuación para el equilibrio vertical.

Decidamos arbitrariamente escribir dos ecuaciones de momento, la primera para momentos con respecto al punto B y la segunda para momentos con respecto al punto A, como sigue (los momentos son positivos en sentido contrario al de las manecillas del reloj):

$$\sum M_B = 0 \qquad -R_A L + P_4(L - a) + M_1 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad -P_4 a + R_B L + M_1 = 0$$

Por tanto, las reacciones son

$$R_A = \frac{P_4(L - a)}{L} + \frac{M_1}{L} \qquad R_B = \frac{P_4 a}{L} - \frac{M_1}{L}$$

Una vez más, la suma de fuerzas en la dirección vertical proporciona una verificación de estos resultados.

Si la estructura de la viga con una saliente en la figura 4.2c se modifica para agregar un apoyo de rodillo en C, ahora es una viga con dos claros estáticamente indeterminada de primer grado. Sin embargo, si se inserta un alivio de cortante en el modelo como se muestra en la figura 4.7, justo a la izquierda del apoyo B, la viga se puede analizar empleando sólo las leyes

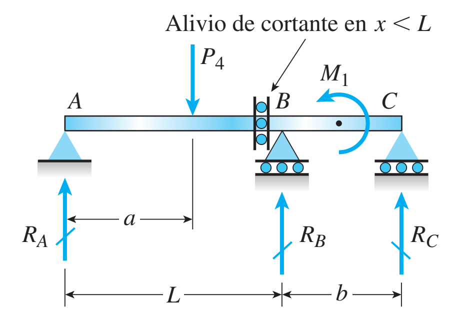


FIGURA 4.7 Viga modificada con saliente, se agrega alivio de cortante.

de la estática debido a que el alivio proporciona una ecuación adicional de equilibrio. La viga se debe cortar en el alivio para exponer las resultantes internas de los esfuerzos N, V y del momento M; ahora, $V = 0$ en el alivio así que la reacción R_A se puede calcular sumando fuerzas en el lado izquierdo del diagrama de cuerpo libre. Se observa de inmediato que R_A es igual que P_4. Una vez que se conoce R_A, la reacción R_C se puede calcular sumando momentos con respecto al nodo B y la reacción R_B se puede obtener sumando todas las fuerzas verticales. Los resultados se resumen a continuación.

$$R_A = P_4$$

$$R_C = \frac{P_4 a - M_1}{b}$$

$$R_B = P_4 - R_A - R_C$$

$$R_B = \frac{M_1 - P_4 a}{b}$$

El análisis anterior ilustra cómo se calculan las reacciones de vigas estáticamente indeterminadas a partir de ecuaciones de equilibrio. Con toda intención utilizamos ejemplos simbólicos en vez de numéricos a fin de mostrar cómo se llevan a cabo los pasos individuales.

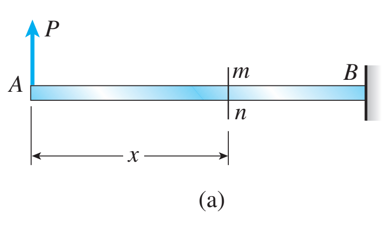
4.3 FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES

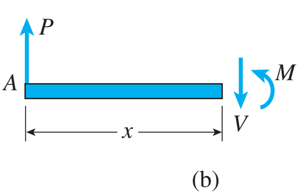
Cuando una viga se carga con fuerzas o pares, se desarrollan esfuerzos y deformaciones unitarias en todo su interior. Para determinarlos, primero debemos encontrar las fuerzas internas y los pares internos que actúan sobre secciones transversales de la viga.

Para ilustrar cómo se determinan estas cantidades internas, considere una viga en voladizo AB cargada por una fuerza P en su extremo libre (figura 4.8a). Cortamos a través de la viga en una sección transversal mn ubicada a una distancia x del extremo libre y aislamos la parte izquierda de la viga como un diagrama de cuerpo libre (figura 4.8b). El diagrama de cuerpo libre se mantiene en equilibrio por la fuerza P y por los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal cortada. Estos esfuerzos representan la acción de la parte derecha de la viga sobre la parte izquierda. En este punto de nuestro análisis no conocemos la distribución de los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal; todo lo que sabemos es que la resultante de dichos esfuerzos debe mantener el equilibrio del cuerpo libre.

De la estática sabemos que la resultante de los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal se puede reducir a una **fuerza cortante** V y a un **momento flexionante** M (figura 4.8b). Como la carga P es transversal al eje de la viga, no existe fuerza axial en la sección transversal. Tanto la fuerza cortante como el momento flexionante actúan en el plano de la viga, es decir, el vector para la fuerza cortante se encuentra en el plano de la figura y el vector para el momento es perpendicular al plano de la figura.

Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, al igual que las fuerzas axiales en barras y los pares de torsión internos en ejes, son las resultantes de esfuerzos distribuidos sobre la sección transversal. Por lo que a estas cantidades se les conoce colectivamente como **resultantes de esfuerzo.**





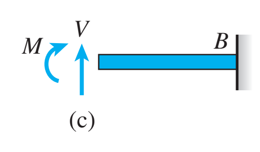
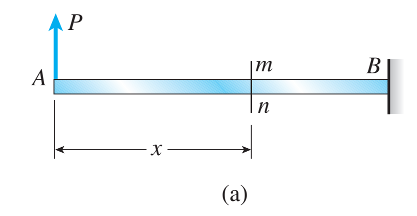
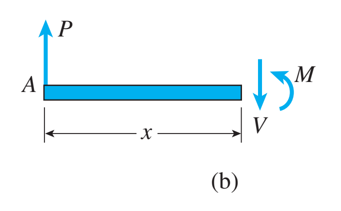


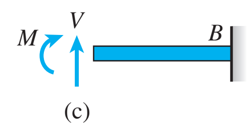
FIGURA 4.8 Fuerza cortante V y momento flexionante M en la viga.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.8 (Repetida.)

Las resultantes de esfuerzo en vigas estáticamente indeterminadas se pueden calcular con ecuaciones de equilibrio. En el caso de la viga en voladizo de la figura 4.8a, utilizamos el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.8b. Sumando fuerzas en la dirección vertical y también tomando momentos con respecto a la sección cortada, obtenemos

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \qquad P - V = 0 \text{ o } V = P$$

$$\sum M = 0 \qquad M - Px = 0 \text{ o } M = Px$$

donde x es la distancia desde el extremo libre de la viga hasta la sección transversal donde se van a determinar V y M. Así, utilizando un diagrama de cuerpo libre y dos ecuaciones de equilibrio, podemos calcular la fuerza cortante y el momento flexionante sin dificultad.

Convenciones de signos

Ahora consideremos las convenciones de signos para las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes. Es costumbre suponer que las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes son positivos cuando actúan en las direcciones y sentidos que se muestran en la figura 4.8b. Observe que la fuerza cortante tiende a hacer girar el material en el sentido de las manecillas del reloj y el momento flexionante tiende a comprimir la parte superior de la viga y a alargar la parte inferior. Además, en este caso, la fuerza cortante actúa hacia abajo y el momento flexionante actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

La acción de estas *mismas* resultantes de esfuerzo contra la parte derecha de la viga se muestra en la figura 4.8c. Los sentidos de las dos cantidades ahora se invierten —la fuerza cortante actúa hacia arriba y el momento flexionante actúa en el sentido de las manecillas del reloj—. Sin embargo, la fuerza cortante aún tiende a girar el material en el sentido de las manecillas del reloj y el momento flexionante aún tiende a comprimir la parte superior de la viga y a alargar la parte inferior.

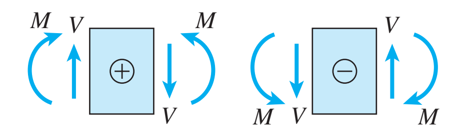
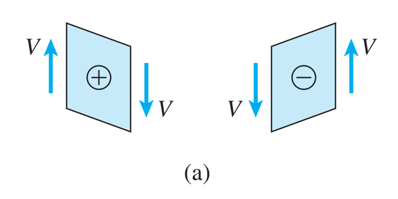


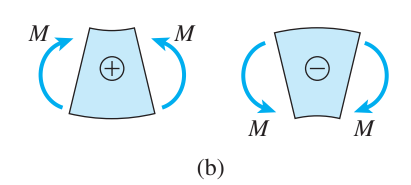
FIGURA 4.9 Convenciones de signos para una fuerza cortante V y un momento flexionante M.

Por tanto, debemos reconocer que el signo algebraico de una resultante de esfuerzo se determina a partir de la manera que deforma el material sobre el que actúa, en lugar de por su dirección en el espacio. En el caso de una viga, *una fuerza cortante positiva actúa en el sentido de las manecillas del reloj contra el material* (figuras 4.8b y c) *y una fuerza cortante negativa actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj contra el material. Además, un momento flexionante positivo comprime la parte superior de la viga* (figuras 4.8b y c) *y un momento flexionante negativo comprime la parte inferior.*

Para aclarar estas convenciones, en la figura 4.9 se muestran las fuerzas cortantes positivas y negativas y los momentos flexionantes. Las fuerzas y los momentos se muestran actuando sobre un elemento de una viga cortada entre dos secciones transversales que están separadas una distancia pequeña.



(a)

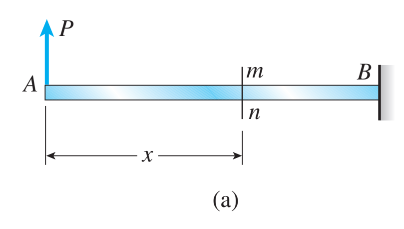


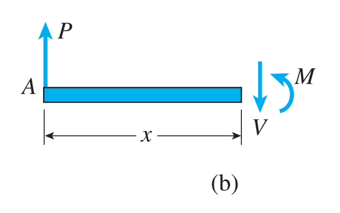
(b)

FIGURA 4.10 Deformaciones (muy exageradas) de un elemento de una viga causadas por (a) fuerzas cortantes y (b) momentos flexionantes.

Las *deformaciones* de un elemento causadas tanto por fuerzas cortantes positivas y negativas como por momentos flexionantes están dibujadas en la figura 4.10, en donde observamos que una fuerza cortante positiva tiende a deformar el elemento causando que la cara derecha se mueva hacia abajo con respecto a la cara izquierda y, como ya se mencionó, un momento flexionante positivo comprime la parte superior de una viga y alarga la parte inferior de la misma.

Las convenciones de signos para resultantes de esfuerzos se denominan **convenciones de signos por deformación** porque se basan en cómo se de-





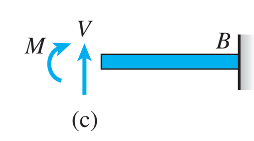


FIGURA 4.8 (Repetida.)

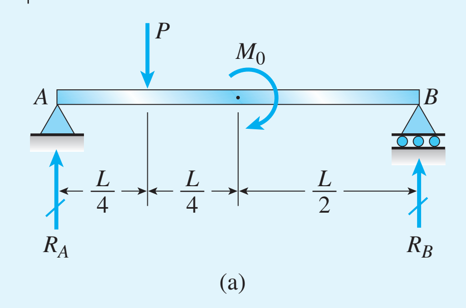
forma el material. Por ejemplo, antes empleamos una convención de signos por deformación al tratar con fuerzas axiales en una barra, donde establecimos que una fuerza axial que produce alargamiento (o tensión) en una barra es positiva y una fuerza axial que produce acortamiento (o compresión) es negativa. Entonces, el signo de una fuerza axial depende de cómo deforma el material, no de su dirección en el espacio.

En contraste, al escribir ecuaciones de equilibrio usamos **convenciones de signos de la estática,** en donde las fuerzas son positivas o negativas de acuerdo con sus direcciones a lo largo de los ejes coordenados. Por ejemplo, si estamos sumando fuerzas en la dirección *y*, las fuerzas que actúan en la dirección positiva del eje *y* se toman positivas y las fuerzas que actúan en sentido negativo se toman negativas.

Por ejemplo, considere la figura 4.8b, que es un diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga en voladizo. Suponga que estamos sumando fuerzas en la dirección vertical y que el eje *y* es positivo hacia arriba. Entonces a la carga *P* se le da un signo positivo en la ecuación de equilibrio debido a que actúa hacia arriba. Sin embargo, la fuerza cortante *V* (que es una fuerza cortante *positiva*) se le da un signo negativo debido a que actúa hacia abajo (es decir, en la dirección negativa del eje *y*). Este ejemplo, muestra la distinción entre la convención de signos por deformación empleada para la fuerza cortante y la convención de signos de la estática utilizada en la ecuación de equilibrio.

Los ejemplos siguientes ilustran las técnicas para manejar las convenciones de signos y determinar las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en vigas. El procedimiento general consiste en la elaboración de diagramas de cuerpo libre y resolución de ecuaciones de equilibrio.

Ejemplo 4.1



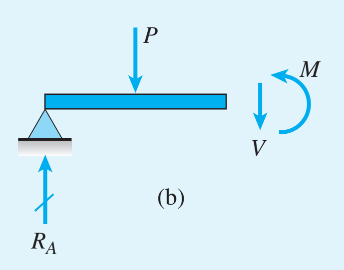


FIGURA 4.11 Ejemplo 4.1. Fuerzas cortantes y momento flexionante en una viga simple.

Una viga simple *AB* soporta dos cargas, una fuerza *P* y un par M_0, que actúan como se muestran en la figura 4.11a.

Encuentre la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M* en la viga en secciones transversales ubicadas como se indica: (a) a una distancia pequeña a la izquierda del punto medio de la viga y (b) a una distancia pequeña a la derecha del punto medio de la viga.

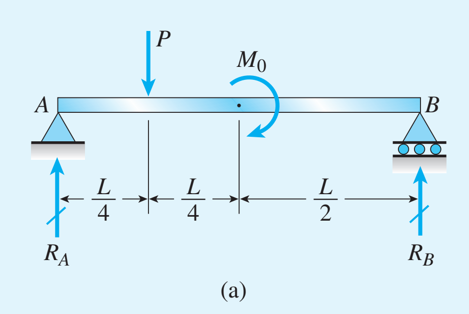
Solución

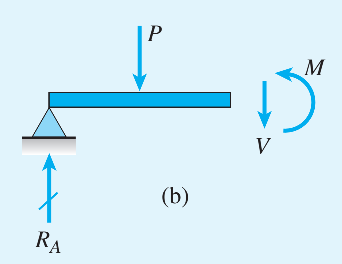
Reacciones. El primer paso en el análisis de esta viga es determinar las reacciones R_A y R_B en los apoyos. Tomando momentos con respecto a los extremos *B* y *A* da dos ecuaciones de equilibrio, de las cuales encontramos, respectivamente,

$$R_A = \frac{3P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad R_B = \frac{P}{4} + \frac{M_0}{L} \tag{a}$$

(a) *Fuerza cortante y momento flexionante a la izquierda del punto medio*. Cortamos la viga en una sección transversal justo a la izquierda del punto medio y dibujamos un diagrama de cuerpo libre de cualquier mitad de la viga. En este ejemplo elegimos la mitad izquierda de la viga como el diagrama de cuerpo libre (figura 4.11b). Este cuerpo libre se mantiene en equilibrio por la carga *P*, la reacción R_A y las dos resultantes desconocidas de esfuerzos —la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M*—, que se muestran en sus direcciones positivas (consulte la figura 4.9). El par M_0 no actúa sobre el cuerpo libre debido a que la viga está cortada a la izquierda de su punto de aplicación.

continúa





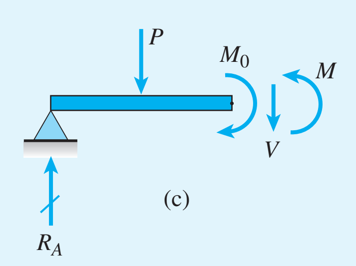


FIGURA 4.11 Ejemplo 4.1. Fuerzas cortantes y momento flexionante en una viga simple [repetidas las partes (a) y (b)].

Sumando fuerzas en la dirección vertical (hacia arriba son positivas), se obtiene

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \qquad R_A - P - V = 0$$

de donde obtenemos la fuerza cortante:

$$V = R_A - P = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad \text{(b)}$$

Este resultado muestra que cuando P y M_0 actúan en las dirección y el sentido que se muestran en la figura 4.11a, la fuerza cortante (en la ubicación seleccionada) es negativa y actúa en la dirección opuesta a la dirección positiva que se supuso en la figura 4.11b.

Tomando momentos con respecto a un eje a lo largo de la sección transversal donde se ha cortado la viga (consulte la figura 4.11b), da

$$\sum M = 0 \qquad -R_A\left(\frac{L}{2}\right) + P\left(\frac{L}{4}\right) + M = 0$$

en donde los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj se toman como positivos. Al despejar el momento flexionante M, obtenemos

$$M = R_A\left(\frac{L}{2}\right) - P\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2} \qquad \text{(c)}$$

El momento flexionante M puede ser positivo o negativo, dependiendo de las magnitudes de las cargas P y M_0. Si es positivo, actúa en el sentido que se muestra en la figura; si es negativo, actúa en el sentido opuesto.

(b) *Fuerza cortante y momento flexionante a la derecha del punto medio*. En este caso cortamos la viga en una sección transversal justo a la derecha del punto medio y de nuevo dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la izquierda de la sección cortada (figura 4.11c). La diferencia entre este diagrama y el anterior es que el par M_0 ahora sí actúa sobre el cuerpo libre.

De las dos ecuaciones de equilibrio, la primera para las fuerzas en la dirección vertical y la segunda para momentos con respecto a un eje a través de la sección cortada, obtenemos

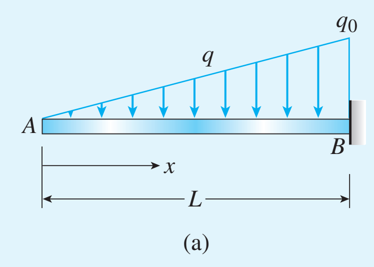
$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2} \qquad \text{(d,e)}$$

Estos resultados muestran que cuando la sección cortada se desplaza de la izquierda a la derecha del par M_0, la fuerza cortante no cambia (debido a que las fuerzas verticales que actúan sobre el cuerpo libre no cambian) pero el momento flexionantes aumenta algebraicamente en una cantidad igual a M_0 (compare las ecuaciones c y e).

Ejemplo 4.2

Una viga en voladizo libre en el extremo A y fija en el extremo B está sometida a una carga distribuida con intensidad linealmente variable q (figura 4.12a). La intensidad máxima de la carga ocurre en el apoyo fijo y es igual a q_0.

Encuentre la fuerza cortante V y el momento flexionante M a una distancia x del extremo libre de la viga.



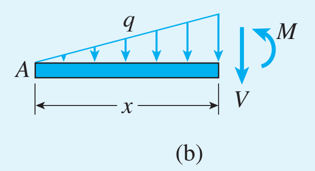


FIGURA 4.12 Ejemplo 4.2. Fuerza cortante y momento flexionante en una viga en voladizo.

Solución

Fuerza cortante. Cortamos la viga a una distancia x del extremo izquierdo y aislamos parte de la viga como un diagrama de cuerpo libre (figura 4.12b). En el cuerpo libre actúan la carga distribuida q, la fuerza cortante V y el momento flexionante M. Las dos cantidades desconocidas (V y M) se suponen positivas.

La intensidad de la carga distribuida a la distancia x del extremo es

$$q = \frac{q_0 x}{L} \tag{4.1}$$

Por tanto, la carga total hacia abajo sobre el diagrama de cuerpo libre, igual al área del diagrama triangular de carga (figura 4.12b), es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q_0 x}{L}\right)(x) = \frac{q_0 x^2}{2L}$$

A partir de una ecuación de equilibrio en la dirección vertical encontramos

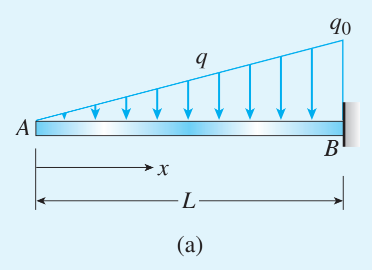
$$V = -\frac{q_0 x^2}{2L} \tag{4.2a}$$

continúa

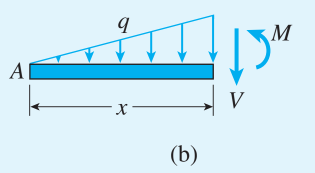
En el extremo libre A ($x = 0$) la fuerza cortante es cero y en el extremo fijo B ($x = L$) la fuerza cortante tiene su valor máximo:

$$V_{\text{máx}} = -\frac{q_0 L}{2} \tag{4.2b}$$

que es numéricamente igual a la carga total hacia abajo sobre la viga. Los signos menos en las ecuaciones (4.2a) y (4.2b) muestran que las fuerzas cortantes actúan en la dirección opuesta a la representada en la figura 4.12b.



(a)



(b)

FIGURA 4.12 (Repetida.)

Momento flexionante. Para encontrar el momento flexionante M en la viga (figura 4.12b), escribimos una ecuación de equilibrio de momentos con respecto a un eje a través de la sección cortada. Al recordar que el momento de una carga triangular es igual al área del diagrama de carga multiplicada por la distancia desde su centroide hasta el eje de los momentos, obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio (momentos positivos en el sentido contrario al de las manecillas del reloj):

$$\sum M = 0 \qquad M + \frac{1}{2}\left(\frac{q_0 x}{L}\right)(x)\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

de donde obtenemos

$$M = -\frac{q_0 x^3}{6L} \tag{4.3a}$$

En el extremo libre de la viga ($x = 0$), el momento flexionantes es cero y en el extremo fijo ($x = L$) el momento tiene su valor máximo:

$$M_{\text{máx}} = -\frac{q_0 L^2}{6} \tag{4.3b}$$

Los signos negativos en las ecuaciones (4.3a) y (4.3b) indican que los momentos flexionantes actúan en el sentido opuesto al que se muestra en la figura 4.12b.

Ejemplo 4.3

Una viga simple con una saliente está apoyada en los puntos A y B (figura 4.13a). Una carga uniforme con intensidad $q = 200$ lb/ft actúa en toda la longitud de la viga y una carga concentrada $P = 14$ k actúa en un punto a 9 ft del apoyo izquierdo. La longitud del claro de la viga es 24 ft y la longitud del voladizo es 6 ft.

Calcule la fuerza cortante V y el momento flexionante M en la sección transversal D ubicada a 15 ft del apoyo izquierdo.

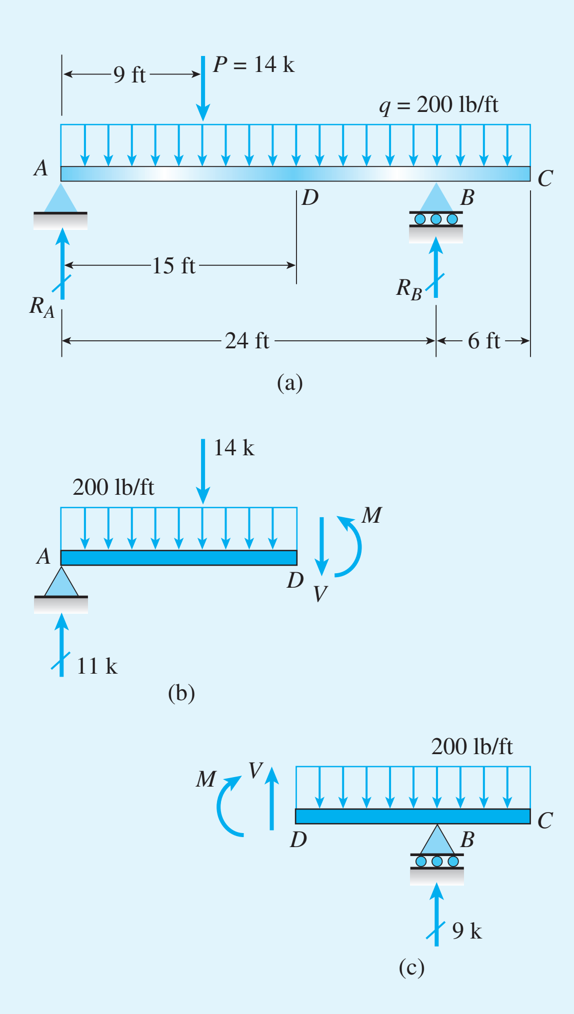


FIGURA 4.13 Ejemplo 4.3. Fuerza cortante y momento flexionante en una viga con una saliente.

Solución

Reacciones. Iniciamos calculando las reacciones R_A y R_B con las ecuaciones de equilibrio para toda la viga considerada como un cuerpo libre. De esta manera, tomando momentos con respecto a los apoyos en B y A, respectivamente, obtenemos

$$R_A = 11 \text{ k} \qquad R_B = 9 \text{ k}$$

continúa

Fuerza cortante y momento flexionante en la sección D. Ahora hacemos un corte en la sección D y dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la viga (figura 4.13b). Al dibujar este diagrama suponemos que las resultantes de esfuerzos desconocidas V y M son positivas.

Las ecuaciones de equilibrio para el diagrama de cuerpo libre son las siguientes:

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \quad 11 \text{ k} - 14 \text{ k} - (0.200 \text{ k/ft})(15 \text{ ft}) - V = 0$$

$$\sum M_D = 0 \quad -(11 \text{ k})(15 \text{ ft}) + (14 \text{ k})(6 \text{ ft}) + (0.200 \text{ k/ft})(15 \text{ ft})(7.5 \text{ ft}) + M = 0$$

en donde las fuerzas hacia arriba se toman como positivas en la primera ecuación y los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj se toman como positivos en la segunda ecuación. Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos

$$V = -6 \text{ k} \qquad M = 58.5 \text{ k-ft}$$

El signo negativo para V significa que la fuerza cortante es negativa, es decir, su dirección es opuesta a la dirección que se muestra en la figura 4.13b. El signo positivo para M significa que el momento flexionante actúa en el sentido que se muestra en la figura.

Diagrama de cuerpo libre alternativo. Otro método de solución es obtener V y M de un diagrama de cuerpo libre de la parte derecha de la viga (figura 4.13c). Al dibujar este diagrama de cuerpo libre, de nuevo suponemos que la fuerza cortante y el momento flexionante desconocidos son positivos. Las dos ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \quad V + 9 \text{ k} - (0.200 \text{ k/ft})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$\sum M_D = 0 \qquad -M + (9 \text{ k})(9 \text{ ft}) - (0.200 \text{ k/ft})(15 \text{ ft})(7.5 \text{ ft}) = 0$$

de donde

$$V = -6 \text{ k} \quad M = 58.5 \text{ k-ft}$$

igual que antes. Como sucede con frecuencia, la elección entre diagramas de cuerpo libre es un asunto de conveniencia y preferencia personal.

4.4 RELACIONES ENTRE CARGAS, FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES

Ahora obtendremos algunas relaciones importantes entre cargas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes en vigas. Estas relaciones son muy útiles al investigar las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en toda la longitud de una viga y son de utilidad especial al dibujar diagramas de fuerza cortante y momento flexionante (sección 4.5).

Con objeto de obtener las relaciones, consideremos un elemento de una viga cortado en dos secciones transversales que están separadas una distancia dx (figura 4.14). La carga que actúa sobre la superficie superior del elemento puede ser una carga distribuida, una carga concentrada o un par, como se muestra en las figuras 4.14a, b y c, respectivamente. Las **convenciones de signos** para estas cargas son las siguientes: *las cargas distribuidas y las concentradas son positivas cuando actúan hacia abajo sobre*

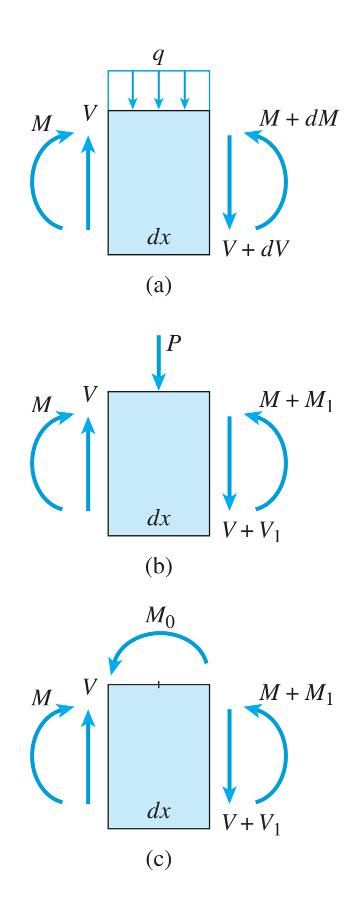


FIGURA 4.14 Elemento de una viga empleado en la deducción de las relaciones entre cargas, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. (Todas las cargas y resultantes de esfuerzos se muestran con sus direcciones positivas.)

la viga y negativas cuando actúan hacia arriba. Un par que actúa como una carga sobre una viga es positivo cuando lo hace en sentido contrario al de las manecillas del reloj y negativo en el sentido de las manecillas del reloj. Si se utilizan otras convenciones de signos, pueden ocurrir cambios en los signos de los términos que aparecen en las ecuaciones deducidas en esta sección.

Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes que actúan sobre los lados del elemento se muestran en sus direcciones y sentidos positivos en la figura 4.10. En general, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes varían a lo largo del eje de la viga. Por tanto, sus valores en la cara derecha del elemento pueden ser diferentes de sus valores en la cara izquierda.

En el caso de una carga distribuida (figura 4.14a), los incrementos de V y M son infinitesimales y los identificamos con dV y dM, respectivamente. Las resultantes de los esfuerzos correspondientes sobre la cara derecha son $V + dV$ y $M + dM$.

En el caso de una carga concentrada (figura 4.14b) o de un par (figura 4.14c) los incrementos pueden ser finitos, y entonces se denotan con V_1 y M_1. Las resultantes de esfuerzos correspondientes sobre la cara derecha son $V + V_1$ y $M + M_1$.

Para cada tipo de carga podemos escribir dos ecuaciones de equilibrio para el elemento —una ecuación para el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical y la otra para el equilibrio de momentos—. La primera de estas ecuaciones da la relación entre la carga y la fuerza cortante y la segunda da la relación entre la fuerza cortante y el momento flexionante.

Cargas distribuidas (figura 4.14a)

El primer tipo de carga es una carga distribuida con intensidad q, como se muestra en la figura 4.14a. Primero consideraremos su relación con la fuerza cortante y luego su relación con el momento flexionante.

Fuerza cortante. El equilibrio de fuerzas en la dirección vertical (las fuerzas hacia arriba son positivas) da

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \quad V - q\,dx - (V + dV) = 0$$

o bien

$$\frac{dV}{dx} = -q \tag{4.4}$$

A partir de esta ecuación observamos que la razón de cambio de la fuerza cortante en cualquier punto sobre el eje de la viga es igual al negativo de la intensidad de la carga distribuida en ese mismo punto. (*Nota:* si la convención de signo para la carga distribuida se invierte, de manera que q sea positiva hacia arriba en vez de hacia abajo, entonces en la ecuación anterior se omite el signo menos).

En la ecuación (4.4) de inmediato se observan algunas relaciones útiles obvias. Por ejemplo, si no hay una carga distribuida sobre un segmento de la viga (es decir, si $q = 0$), entonces $dV/dx = 0$ y la fuerza cortante es cero en esa parte de la viga. Además, si la carga distribuida es uniforme a lo largo de parte de la viga (q = constante), entonces dV/dx también es constante y la fuerza cortante varía linealmente en esa parte de la viga.

Como demostración de la ecuación (4.4), considere la viga en voladizo con una carga linealmente variable que analizamos en el ejemplo 4.2 de la sección anterior (consulte la figura 4.12). La carga sobre la viga (de acuerdo con la ecuación 4.1) es

$$q = \frac{q_0 x}{L}$$

que es positiva ya que actúa hacia abajo. Además, la fuerza cortante (ecuación 4.2a) es

$$V = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

Realizando la derivación *dV*/*dx* se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{q_0 x^2}{2L}\right) = -\frac{q_0 x}{L} = -q$$

que concuerda con la ecuación (4.4).

Se puede obtener una relación útil respecto de las fuerzas cortantes en dos secciones transversales de una viga integrando la ecuación (4.4) a lo largo del eje de la viga. Para obtener esta relación, multiplicamos ambos lados de la ecuación (4.4) por *dx* y luego integramos entre cualesquiera dos puntos *A* y *B* sobre el eje de la viga; por tanto,

$$\int_A^B dV = -\int_A^B q\,dx \qquad \text{(a)}$$

donde suponemos que *x* aumenta conforme nos movemos del punto *A* al punto *B*. El lado izquierdo de esta ecuación es igual a la diferencia ($V_B - V_A$) de las fuerzas cortantes en *B* y *A*. La integral en el lado derecho representa el área del diagrama de carga entre *A* y *B*, que a su vez es igual a la magnitud de la resultante de la carga distribuida que actúa entre los puntos *A* y *B*. Entonces, de la ecuación (a) obtenemos

$$V_B - V_A = -\int_A^B q\,dx$$
$$= -(\text{área del diagrama de carga entre } A \text{ y } B) \qquad (4.5)$$

En otras palabras, el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos a lo largo del eje de la viga es igual al negativo de la carga total hacia abajo entre estos puntos. El área del diagrama de carga puede ser positiva (si *q* actúa hacia abajo) o negativa (si *q* actúa hacia arriba).

Debido a que la ecuación (4.4) se dedujo para un elemento de la viga sometido *sólo* a una carga distribuida (o a ninguna carga), no podemos utilizar la ecuación (4.4) en un punto donde se aplica la carga concentrada (ya que la *intensidad* de carga no está definida para una carga concentrada). Por

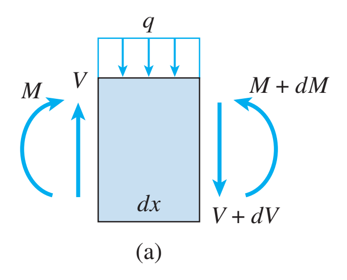


FIGURA 4.14a (Repetida.)

la misma razón, no podemos emplear la ecuación (4.5) si una carga concentrada P actúa sobre la viga entre los puntos A y B.

Momento flexionante. Ahora consideremos el equilibrio de momentos del elemento de la viga que se muestra en la figura 4.14a. Sumando momentos con respecto a un eje en el lado izquierdo del elemento (el eje es perpendicular al plano de la figura) y tomando los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj como positivos, obtenemos

$$\sum M = 0 \qquad -M - q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

Al desechar los productos diferenciales (ya que son despreciables comparados con los otros términos), obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{4.6}$$

Esta ecuación muestra que la razón de cambio del momento flexionante en cualquier punto sobre el eje de una viga es igual a la fuerza cortante en ese mismo punto. Por ejemplo, si la fuerza cortante es cero en una región de la viga, entonces el momento flexionante es constante en esa misma región.

La ecuación (4.6) sólo se aplica en regiones donde actúan cargas distribuidas (o ninguna carga) sobre la viga. En un punto donde actúa una carga concentrada, ocurre un cambio repentino (o discontinuidad) en la fuerza cortante y la derivada dM/dx no está definida en ese punto.

Utilizando de nuevo la viga en voladizo de la figura 4.12 como ejemplo, recordamos que el momento flexionantes (ecuación 4.3a) es

$$M = -\frac{q_0 x^3}{6L}$$

Por tanto, la derivada dM/dx es

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{q_0 x^3}{6L}\right) = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

que es igual a la fuerza cortante en la viga (consulte la ecuación 4.2a).

Integrando la ecuación (4.6) entre dos puntos A y B en el eje de la viga da

$$\int_A^B dM = \int_A^B V\,dx \tag{b}$$

La integral en el lado izquierdo de esta ecuación es igual a la diferencia (M_B – M_A) de los momentos flexionantes en los puntos B y A. Para interpretar la integral en el lado derecho, necesitamos considerar V como una función de x y visualizar un diagrama de fuerza cortante que muestre la variación de V con respecto a x. Luego, observamos que la integral en el lado derecho

representa el área debajo del diagrama de fuerza cortante entre A y B. Por tanto, podemos expresar la ecuación (b) de la manera siguiente:

$$M_B - M_A = \int_A^B V\,dx$$

$$= (\text{área del diagrama de fuerza cortante entre } A \text{ y } B) \quad (4.7)$$

Esta ecuación es válida incluso cuando actúan cargas concentradas sobre la viga entre los puntos A y B. Sin embargo, no es válida si actúa un par entre A y B. Un par produce un cambio repentino en el momento flexionante y el lado izquierdo de la ecuación (b) no se puede integrar a través de esa discontinuidad.

Cargas concentradas (figura 4.14b)

Ahora consideremos una carga concentrada P que actúa sobre el elemento de la viga (figura 4.14b). Del equilibrio de fuerzas en la dirección vertical obtenemos

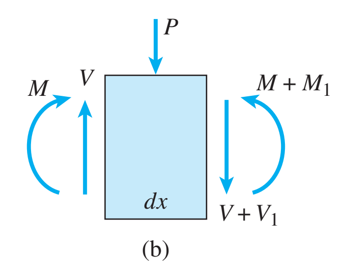


FIGURA 4.14b (Repetida.)

$$V - P - (V + V_1) = 0 \quad \text{o} \quad V_1 = -P \quad (4.8)$$

Este resultado significa que ocurre un cambio abrupto en la fuerza cortante en cualquier punto donde actúa una carga concentrada. Conforme pasamos de izquierda a derecha por el punto de aplicación de la carga, la fuerza cortante disminuye en una cantidad igual a la magnitud de la carga P dirigida hacia abajo.

Del equilibrio de momentos con respecto a la cara izquierda del elemento (figura 4.14b), obtenemos

$$-M - P\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + V_1)dx + M + M_1 = 0$$

o bien

$$M_1 = P\left(\frac{dx}{2}\right) + V\,dx + V_1\,dx \quad (c)$$

Como la longitud dx del elemento es infinitesimalmente pequeña, en esta ecuación observamos que el incremento M_1 en el momento flexionante también es infinitesimalmente pequeño. *Por tanto, el momento flexionante no cambia conforme pasamos por el punto de aplicación de una carga concentrada*.

Aun cuando el momento flexionante M no cambia una carga concentrada, su razón de cambio dM/dx experimenta un cambio abrupto. En el lado izquierdo del elemento (figura 4.14b), la razón de cambio del momento flexionante (consulte la figura 4.14b) es $dM/dx = V$. En el lado derecho, la razón de cambio es $dM/\text{d}x = V + V_1 = V - P$. *Por tanto, en el punto de aplicación de una carga concentrada P, la razón de cambio dM/dx del momento flexionante disminuye abruptamente en una cantidad igual a P.*

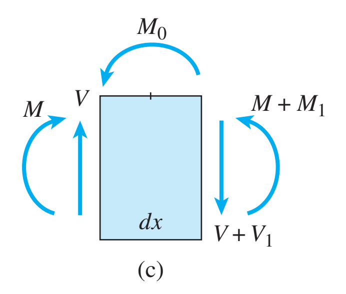


FIGURA 4.14c (Repetida.)

Cargas en forma de pares (figura 4.14c)

El último caso considerado es una carga en la forma de un par M_0 (figura 4.14c). Del equilibrio del elemento en la dirección vertical obtenemos $V_1 = 0$, que muestra que *la fuerza cortante no cambia en el punto de aplicación de un par*.

El equilibrio de momentos con respecto al lado izquierdo del elemento da

$$-M + M_0 - (V + V_1)dx + M + M_1 = 0$$

Si no tomamos en cuenta los términos que contienen diferenciales (ya que son despreciables comparados con los términos finitos), obtenemos

$$M_1 = -M_0 \qquad (4.9)$$

Esta ecuación muestra que el momento flexionante disminuye en M_0 conforme nos movemos de izquierda a derecha por el punto de aplicación de la carga. *Por tanto, el momento flexionante cambia abruptamente en el punto de aplicación de un par*.

Las ecuaciones (4.4) a (4.9) son útiles para realizar una investigación completa de las fuerzas cortantes y de los momentos flexionantes en una viga, como se analiza en la sección siguiente.

4.5 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLEXIONANTE

Al diseñar una viga, por lo general necesitamos saber cómo varían las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en toda su longitud. De importancia especial son los valores máximos y mínimos de estas cantidades. La información de este tipo se suele obtener de gráficas en las que la fuerza cortante y el momento flexionante están trazados como ordenadas, y la distancia x a lo largo del eje de la viga como abscisa. A estas gráficas se les denomina **diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.**

Para tener una idea clara de estos diagramas, explicaremos con detalle cómo se elaboran e interpretan para tres condiciones básicas de carga: una sola carga concentrada, una carga uniforme y varias cargas concentradas. Además, los ejemplos 4.4 y 4.7 al final de la sección proporcionan una ilustración detallada de las técnicas para manejar varios tipos de cargas, se incluye el caso de un par que actúa como una carga sobre una viga.

Carga concentrada

Comencemos con una viga simple AB que soporta una carga concentrada P (figura 4.15a). La carga P actúa a una distancia a del apoyo izquierdo y a una distancia b del apoyo derecho. Considerando toda la viga como un cuerpo libre, con facilidad podemos determinar las reacciones de la viga a partir de su equilibrio; los resultados son:

$$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L} \tag{4.10a,b}$$

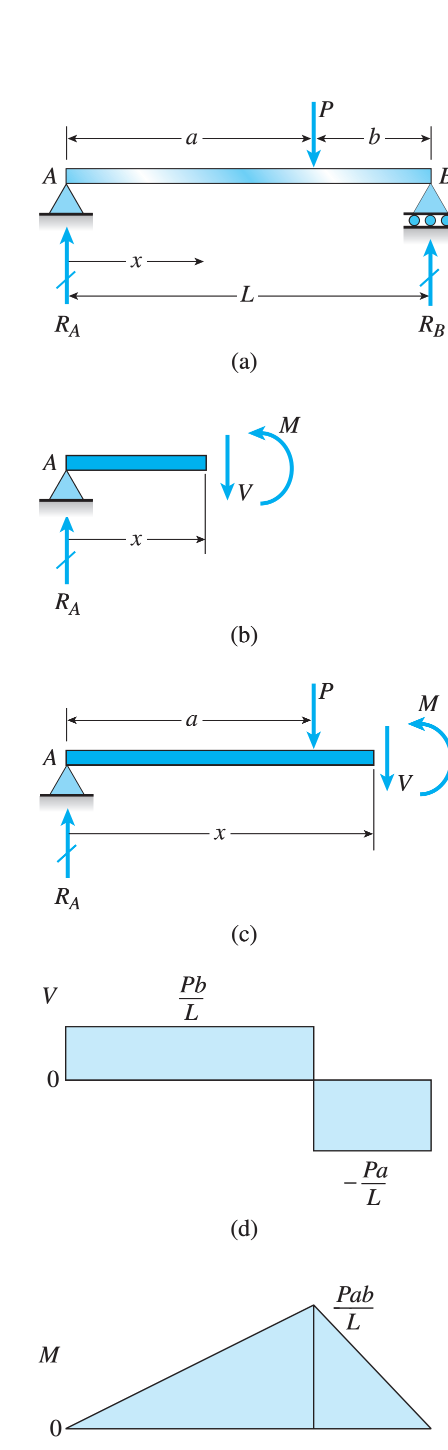


FIGURA 4.15 Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga simple con una carga concentrada.

Ahora cortamos la viga en una sección transversal a la izquierda de la carga P y a una distancia x del apoyo en A. Luego dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la viga (figura 4.15b). De las ecuaciones de equilibrio para este cuerpo libre obtenemos la fuerza cortante V y el momento flexionante M a una distancia x del apoyo:

$$V = R_A = \frac{Pb}{L} \qquad M = R_A x = \frac{Pbx}{L} \qquad (0 < x < a) \tag{4.11a,b}$$

Estas expresiones son válidas sólo para la parte de la viga a la izquierda de la carga P.

Enseguida cortamos a través de la viga a la derecha de la carga P (es decir, en la región $a < x < L$ y de nuevo dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la viga (figura 4.15c). De las ecuaciones de equilibrio para este cuerpo libre obtenemos las siguientes expresiones para la fuerza cortante y el momento flexionante:

$$V = R_A - P = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} \qquad (a < x < L) \tag{4.12a}$$

$$M = R_A x - P(x - a) = \frac{Pbx}{L} - P(x - a)$$

$$= \frac{Pa}{L}(L - x) \qquad (a < x < L) \tag{4.12b}$$

Observe que estas expresiones sólo son válidas para la parte derecha de la viga.

Las ecuaciones para las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes (ecuaciones 4.11 y 4.12) se indican debajo de los dibujos de la viga. La figura 4.15d es el *diagrama de fuerza cortante* y la figura 4.15e es el *diagrama de momento flexionante*.

En el primer diagrama observamos que la fuerza cortante en el extremo A de la viga ($x = 0$) es igual a la reacción R_A. Luego permanece constante hasta el punto de aplicación de la carga P. En ese punto la fuerza cortante disminuye abruptamente en una cantidad igual a la carga P. En la parte derecha de la viga la fuerza cortante de nuevo es constante pero numéricamente igual a la reacción en B.

Como se muestra en el segundo diagrama, el momento flexionante en la parte izquierda de la viga aumenta linealmente desde cero en el apoyo hasta Pab/L en la carga concentrada ($x = a$). En la parte derecha, el momento flexionante de nuevo es una función lineal de x, variando de Pab/L en $x = a$ a cero en el apoyo ($x = L$). Por tanto, el momento flexionante máximo es

$$M_{\text{máx}} = \frac{Pab}{L} \tag{4.13}$$

y ocurre debajo de la carga concentrada.

Al deducir las expresiones para la fuerza cortante y el momento flexionante a la derecha de la carga P (ecuaciones 4.12a y b), consideramos el equilibrio de la parte izquierda de la viga (figura 4.15c). Las fuerzas R_A y P

actúan sobre este cuerpo libre además de V y M. En este ejemplo particular es un poco más simple considerar la parte derecha de la viga como un cuerpo libre, ya que entonces sólo aparece una fuerza (R_B) en las ecuaciones de equilibrio (además de V y M). Por supuesto, los resultados finales no cambian.

Ahora se pueden observar ciertas características de los diagramas de la fuerza cortante y del momento flexionante (figuras 4.15d y e). Primero observamos que la pendiente dV/dx del diagrama de la fuerza cortante es cero en las regiones $0 < x < a$ y $a < x < L$, lo que concuerda con la ecuación $dV/dx = -q$ (ecuación 4.4). Además, en estas mismas regiones la pendiente dM/dx del diagrama del momento flexionante es igual a V (ecuación 4.6). A la izquierda de la carga P, la pendiente del diagrama de momento es igual a Pb/L; a la derecha, es negativa e igual a $-Pa/L$. Por tanto, en el punto de aplicación de la carga P hay un cambio abrupto en el diagrama de la fuerza cortante (igual a la magnitud de la carga P) y un cambio correspondiente en la pendiente del diagrama del momento flexionante.

Ahora considere el *área* del diagrama de la fuerza cortante. Conforme nos movemos de $x = 0$ a $x = a$, el área del diagrama de la fuerza cortante es $(Pb/L)a$, o Pab/L. Esta cantidad representa el incremento en el momento flexionante entre estos mismos dos puntos (consulte la ecuación 4.7). De $x = a$ a $x = L$, el área del diagrama de la fuerza cortante es $-Pab/L$, lo que significa que en esta región el momento flexionante disminuye en esa cantidad. En consecuencia, el momento flexionante es cero en el extremo B de la viga, como se esperaba.

Si los momentos flexionantes en los dos extremos de una viga son cero, como es usual en el caso con una viga simple, entonces el área del diagrama de la fuerza cortante entre los extremos de la viga debe ser cero siempre que no actúen pares sobre la viga (consulte el análisis en la sección 4.4 después de la ecuación 4.7).

Como ya se mencionó, al diseñar vigas se necesitan los valores máximos y mínimos de las fuerzas cortantes y de los momentos flexionantes. Para una viga simple con una sola carga concentrada, la fuerza cortante máxima ocurre en el extremo de la viga más cercano a la carga concentrada y el momento flexionante se tiene bajo la propia carga.

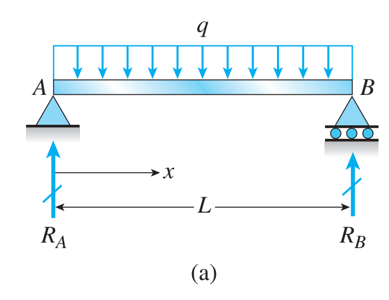
Carga uniforme

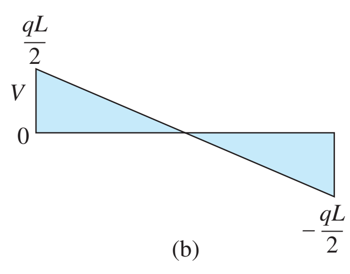
En la figura 4.16a se muestra una viga simple con una carga uniformemente distribuida con intensidad constante q. Como la viga y su carga son simétricas, de inmediato observamos que cada una de las reacciones (R_A y R_B) es igual a $qL/2$. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flexionante a una distancia x del extremo izquierdo son

$$V = R_A - qx = \frac{qL}{2} - qx \tag{4.14a}$$

$$M = R_A x - qx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \tag{4.14b}$$

Estas ecuaciones, que son válidos en toda la longitud de la viga, se trazan como diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante en las figuras 4.16b y c, respectivamente.





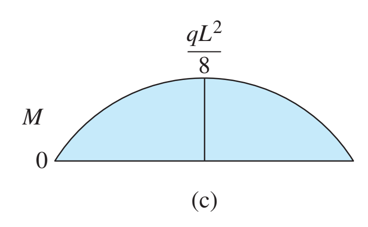


FIGURA 4.16 Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga simple con una carga uniforme.

El diagrama de fuerza cortante consiste de una recta inclinada con ordenadas en $x = 0$ y $x = L$ numéricamente iguales a las reacciones. La pendiente de la recta es $-q$, como se esperaba de la ecuación (4.4). El diagrama de momento flexionante es una curva parabólica que es simétrica con respecto al punto medio de la viga. En cada sección transversal la pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante (consulte la ecuación 4.6):

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right) = \frac{qL}{2} - qx = V$$

El valor máximo del momento flexionante se tiene en el punto medio de la viga donde tanto dM/dx como la fuerza cortante V son iguales a cero. Por lo tanto, sustituimos $x = L/2$ en la expresión para M y obtenemos

$$M_{\text{máx}} = \frac{qL^2}{8} \tag{4.15}$$

como se muestra en el diagrama del momento flexionante.

El diagrama de la intensidad de carga (figura 4.16a) tiene un área qL y de acuerdo con la ecuación (4.5) la fuerza cortante V debe disminuir en esta cantidad conforme nos movemos a lo largo de la viga de A a B. Podemos ver que este es en efecto el caso, debido a que la fuerza disminuye de $qL/2$ a $-qL/2$.

El área del diagrama de la fuerza cortante entre $x = 0$ y $x = L/2$ es $qL^2/8$ y observamos que esta área representa el incremento en el momento flexionante entre estos mismos dos puntos (ecuación 4.7). De una manera similar, el momento flexionante disminuye en $qL^2/8$ en la región de $x = L/2$ a $x = L$.

Varias cargas concentradas

Si en una viga simple (figura 4.17a) actúan varias cargas concentradas, se pueden determinar las expresiones para las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes para cada segmento de la viga entre los puntos de aplicación de las cargas. Empleando de nuevo diagramas de cuerpo libre de la parte izquierda de la viga y midiendo la distancia x desde el extremo A, obtenemos las ecuaciones siguientes para el primer segmento de la viga:

$$V = R_A \qquad M = R_A x \qquad (0 < x < a_1) \tag{4.16a,b}$$

Para el segundo segmento, obtenemos

$$V = R_A - P_1 \qquad M = R_A x - P_1(x - a_1) \qquad (a_1 < x < a_2) \tag{4.17a,b}$$

Para el tercer segmento de la viga conviene considerar la parte derecha de la misma en lugar de la izquierda, ya que actúan menos cargas sobre el cuerpo libre correspondiente. De aquí, obtenemos

$$V = -R_B + P_3 \tag{4.18a}$$

$$M = R_B(L - x) - P_3(L - b_3 - x) \qquad (a_2 < x < a_3) \tag{4.18b}$$

Por último, para el cuarto segmento de la viga, obtenemos

$$V = -R_B \qquad M = R_B(L - x) \qquad (a_3 < x < L) \tag{4.19a,b}$$

Las ecuaciones (4.16) a (4.19) se pueden emplear para elaborar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante (figuras 4.17b y c).

En el diagrama de fuerza cortante observamos que la fuerza cortante no varía en cada segmento de la viga y cambia abruptamente en cada punto de carga, con el valor de cada cambio igual a la carga. Además, el momento flexionante en cada segmento es una función lineal de x y, por tanto, la parte correspondiente del diagrama de momento flexionante es una recta inclinada. Como ayuda para el trazo de estas rectas, obtenemos los momentos flexionantes bajo las cargas concentradas sustituyendo $x = a_1$, $x = a_2$ y $x = a_3$ en las ecuaciones (4-16b), (4.17b) y (4.18b), respectivamente. De esta manera obtenemos los siguientes momentos flexionantes:

$$M_1 = R_A a_1 \quad M_2 = R_A a_2 - P_1(a_2 - a_1) \quad M_3 = R_B b_3 \qquad \text{(4.20a,b,c)}$$

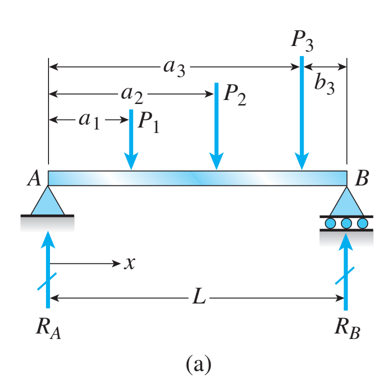
Conociendo estos valores, podemos elaborar fácilmente el diagrama de momento flexionante conectando los puntos con rectas.

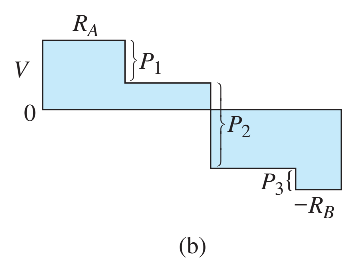
En cada discontinuidad en la fuerza cortante hay un cambio correspondiente en la pendiente dM/dx del diagrama de momento flexionante. Además, el cambio en el momento flexionante entre dos puntos de carga es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre estos mismos dos puntos (consulte la ecuación 4.7). Por ejemplo, el cambio en el momento flexionante entre las cargas P_1 y P_2 es $M_2 - M_1$. Sustituyendo en las ecuaciones (4.20a y b), obtenemos

$$M_2 - M_1 = (R_A - P_1)(a_2 - a_1)$$

que es el área del diagrama rectangular de la fuerza cortante entre $x = a_1$ y $x = a_2$.

El momento flexionante máximo en una viga sólo con cargas concentradas *debe* ocurrir bajo una de las cargas o en una reacción. Para demostrar esto, recuerde que la pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante. Por tanto, cuando el momento flexionante tiene un valor máximo o mínimo, la derivada dM/dx (y por tanto la fuerza cortante) debe cambiar de signo. Sin embargo, en una viga sólo con cargas concentradas la fuerza cortante cambia de signo sólo bajo una carga.





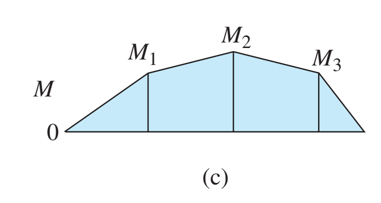


FIGURA 4.17 Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga simple con varias cargas concentradas.

Si, a medida que continuamos a lo largo del eje x, la fuerza cortante cambia de positiva a negativa (como en la figura 4.17b), entonces la pendiente en el diagrama de momento flexionante también cambia de positiva a negativa. Por tanto, debemos tener un momento flexionante máximo en esta sección transversal. A la inversa, un cambio en la fuerza cortante de un valor negativo a uno positivo indica un momento flexionante mínimo. En teoría, el diagrama de fuerza cortante puede intersectar el eje horizontal en varios puntos, aunque esto es muy poco probable. Correspondiendo a cada uno de esos puntos de intersección, hay un máximo o mínimo local en el diagrama de momento flexionante. Los valores de todos los máximos y mínimos locales se deben determinar a fin de encontrar los momentos flexionantes máximos positivos y negativos en una viga.

Comentarios generales

En nuestros análisis con frecuencia utilizamos los términos “máximo” y “mínimo” con sus significados comunes de “el más grande” y “el más pequeño.” En consecuencia, nos referimos al “momento flexionante máximo en una viga” sin importar si el diagrama de momento flexionante es descrito por una función uniforme y continua (como en la figura 4.16c) o por una serie de rectas (como en la figura 4.17c).

Además, a menudo necesitamos distinguir entre cantidades positivas y negativas. Por tanto, utilizamos expresiones como “momento máximo positivo” y “momento máximo negativo.” En los dos casos, la expresión se refiere a la cantidad numérica más grande; es decir, el término “momento negativo máximo” en realidad significa “momento negativo numéricamente más grande.” También se aplican comentarios análogos a otras cantidades de la viga, como fuerzas cortantes y deflexiones.

Los momentos flexionantes máximo positivo y negativo en una viga pueden ocurrir en los siguientes lugares: (1) en una sección transversal donde se aplica una carga concentrada y la fuerza cortante cambia de signo (consulte las figuras 4.15 y 4.17), (2) en una sección transversal donde la fuerza cortante es igual a cero (consulte la figura 4.16), (3) en un punto de apoyo donde está presente una reacción vertical y (4) en una sección transversal donde se aplica un par. Los análisis anteriores y los ejemplos siguientes ilustran todas estas posibilidades.

Cuando actúan varias cargas sobre una viga, los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante se pueden obtener por superposición (o suma) de los diagramas obtenidos para cada una de las cargas actuando por separado. Por ejemplo, el diagrama de fuerza cortante de la figura 4.17b en realidad es la suma de tres diagramas separados, cada uno del tipo mostrado en la figura 4.15d para una sola carga concentrada. Podemos hacer un cometario análogo para el diagrama de momento flexionante de la figura 4.17c. La superposición de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante se permite debido a que las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en vigas estáticamente determinadas son funciones lineales de las cargas aplicadas.

Existen programas de cómputo de fácil adquisición para dibujar diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Después que haya comprendido la naturaleza de los diagramas al elaborarlos manualmente, tendrá seguridad al emplear los programas de cómputo para trazar los diagramas y obtener los resultados numéricos.

Ejemplo 4.4

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga simple con una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre parte del claro (figura 4.18a).

Solución

Reacciones. Comenzamos el análisis determinando las reacciones de la viga a partir de un diagrama de cuerpo libre de toda ella (figura 4.18a). Los resultados son

$$R_A = \frac{qb(b + 2c)}{2L} \qquad R_B = \frac{qb(b + 2a)}{2L} \qquad (4.21a,b)$$

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Para obtener las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes para toda la viga, debemos considerar sus tres segmentos de manera individual. En cada segmento cortamos a través de la viga para exponer la fuerza cortante V y el momento flexionante M. Luego dibujamos un diagrama de cuerpo libre que contenga V y M como cantidades desconocidas. Por último, sumamos fuerzas en la dirección vertical para obtener la fuerza cortante y tomamos momentos con respecto a la sección cortada para obtener el momento flexionante. Los resultados para los tres segmentos son los siguientes:

$$V = R_A \qquad M = R_A x \qquad (0 < x < a) \qquad (4.22a,b)$$

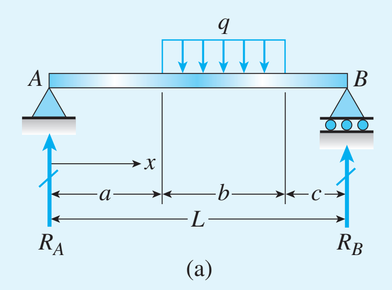
$$V = R_A - q(x - a) \qquad M = R_A x - \frac{q(x - a)^2}{2} \qquad (a < x < a + b) \qquad (4.23a,b)$$

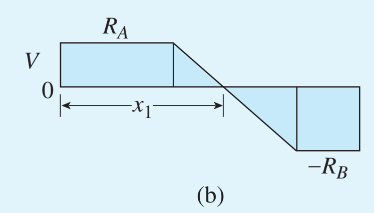
$$V = -R_B \quad M = R_B(L - x) \qquad (a + b < x < L) \qquad (4.24a,b)$$

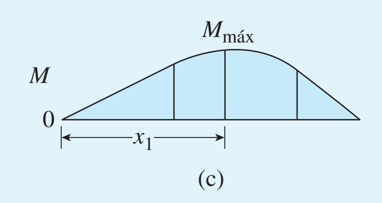
Estas ecuaciones dan la fuerza cortante y el momento flexionante en cada sección transversal de la viga. Como verificación parcial de estos resultados, podemos aplicar la ecuación (4.4) a las fuerzas cortantes y la ecuación (4.6) a los momentos flexionantes y verificar si las ecuaciones se satisfacen.

Ahora elaboramos los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante (figuras 4.18b y c) a partir de las ecuaciones (4.22) a (4.24). El diagrama de fuerza cortante consiste en líneas horizontales en las regiones sin carga de la viga y una línea recta inclinada con pendiente negativa en la región cargada, como se esperaba según la ecuación $dV/dx = -q$.

FIGURA 4.18 Ejemplo 4.4. Viga simple con una carga uniforme sobre parte del claro.



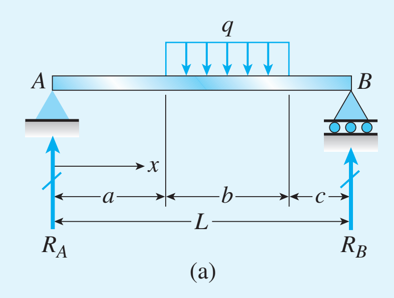


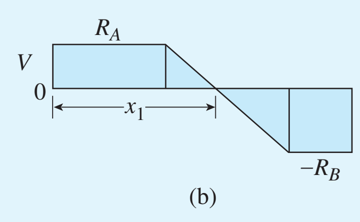


continúa

El diagrama de momento flexionante consiste de dos líneas rectas inclinadas en las partes sin carga de la viga y una curva parabólica en la parte cargada. Las líneas inclinadas tienen pendientes iguales a R_A y $-R_B$, respectivamente, como se esperaba según la ecuación $dM/dx = V$. Además, cada una de estas líneas inclinadas es tangente a la curva parabólica en el punto donde se encuentra con la curva. Esta conclusión se deriva del hecho que no hay cambios abruptos en la magnitud de la fuerza cortante en estos puntos. De aquí, a partir de la ecuación $dM/dx = V$, observamos que la pendiente del diagrama de momento flexionante no cambia abruptamente en estos puntos.

Momento flexionante máximo. El momento flexionante máximo ocurre donde la fuerza cortante es igual a cero. El punto se puede encontrar igualando a cero la fuerza cortante V (de la ecuación 4.23a) y despejando el valor de x, que denotaremos con x_1. El resultado es





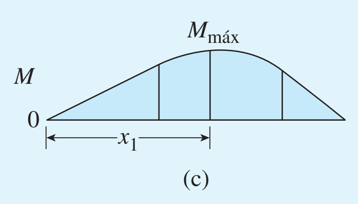


FIGURA 4.18 Ejemplo 4.4. Viga simple con una carga uniforme sobre parte del claro. (Repetida.)

$$x_1 = a + \frac{b}{2L}(b + 2c) \qquad (4.25)$$

Ahora sustituimos x_1 en la expresión para el momento flexionante (ecuación 4.32b) y despejamos el momento flexionante máximo. El resultado es

$$M_{\text{máx}} = \frac{qb}{8L^2}(b + 2c)(4aL + 2bc + b^2) \qquad (4.26)$$

El momento flexionante máximo siempre se tiene dentro de la región con la carga uniforme, como se muestra por la ecuación (4.25).

Casos especiales. Si la carga uniforme está simétricamente ubicada sobre la viga ($a = c$), entonces obtenemos los resultados simplificados siguientes de las ecuaciones (4.25) y (4.26):

$$x_1 = \frac{L}{2} \qquad M_{\text{máx}} = \frac{qb(2L - b)}{8} \qquad (4.27a,b)$$

Si la carga uniforme se extiende sobre todo el claro, entonces $b = L$ y $M_{\text{máx}} = qL^2/8$, lo que concuerda con la figura 4.16 y la ecuación (4.15).

Ejemplo 4.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga en voladizo con dos cargas concentradas (figura 4.19a).

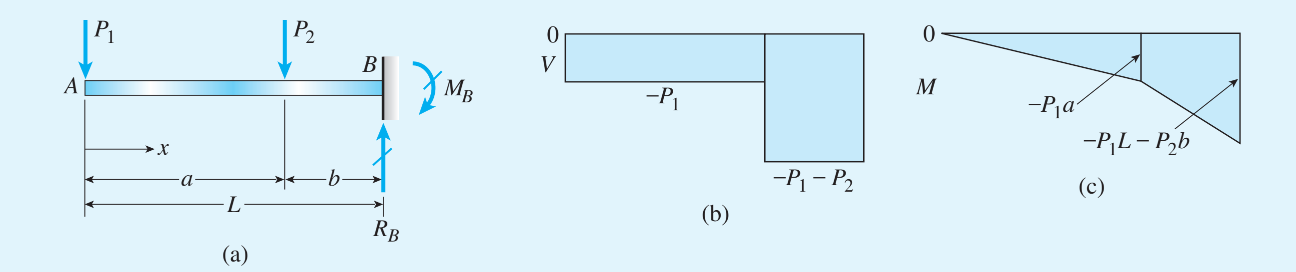


FIGURA 4.19 Ejemplo 4.5. Viga en voladizo con dos cargas concentradas.

Solución

Reacciones. Del diagrama de cuerpo libre de toda la viga encontramos la reacción vertical R_B (positiva cuando sea hacia arriba) y la reacción de momento M_B (positiva cuando vaya en sentido de las manecillas del reloj):

$$R_B = P_1 + P_2 \qquad M_B = P_1L + P_2b \tag{4.28a,b}$$

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Obtenemos las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes cortando a través de la viga en cada uno de los dos segmentos, al dibujar los diagramas de cuerpo libre correspondientes y resolver las ecuaciones de equilibrio. Una vez más midiendo la distancia x desde el extremo izquierdo de la viga, obtenemos

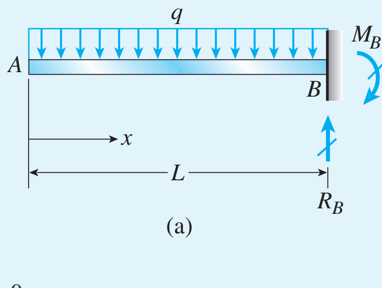
$$V = -P_1 \qquad M = -P_1x \qquad (0 < x < a) \tag{4.29a,b}$$

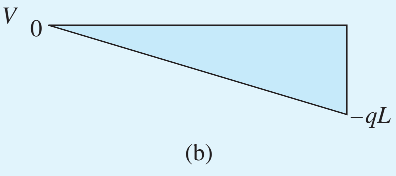
$$V = -P_1 - P_2 \qquad M = -P_1x - P_2(x - a) \qquad (a < x < L) \tag{4.30a,b}$$

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en las figuras 4.19b y c. La fuerza cortante es constante entre las cargas y alcanza su valor numérico máximo en el apoyo, donde es numéricamente igual a la reacción R_B (ecuación 4.28a).

El diagrama de momento flexionante consiste en dos líneas rectas inclinadas, cada una con una pendiente igual a la fuerza cortante en el segmento correspondiente de la viga. El momento flexionante máximo ocurre en el apoyo y es numéricamente igual a la reacción de momento M_B (figura 4.28b). También es igual al área de todo el diagrama de fuerza cortante, como se esperaba según la ecuación (4.7).

Ejemplo 4.6





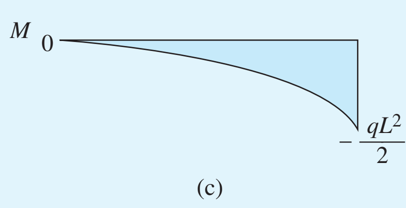


FIGURA 4.20 Ejemplo 4.6. Viga en voladizo con una carga uniforme.

En la figura 4.20a se muestra una viga en voladizo que soporta una carga uniforme con intensidad constante q. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.

Solución

Reacciones. Las reacciones R_B y M_B en el apoyo fijo se obtienen de ecuaciones de equilibrio para toda la viga; por tanto,

$$R_B = qL \qquad M_B = \frac{qL^2}{2} \tag{4.31a,b}$$

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Estas cantidades se determinan cortando a través de la viga a una distancia x del extremo libre, dibujando un diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la viga y despejando las ecuaciones de equilibrio. De esta manera obtenemos

$$V = -qx \qquad M = -\frac{qx^2}{2} \tag{4.32a,b}$$

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante se obtienen al graficar estas ecuaciones (consulte las figuras 4.20b y c). Observe que la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a $-q$ (consulte la ecuación 4.4) y la pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a V (consulte la ecuación 4.6).

Los valores máximos de la fuerza cortante y del momento flexionante ocurren en el apoyo fijo donde $x = L$:

$$V_{\text{máx}} = -ql \qquad M_{\text{máx}} = -\frac{qL^2}{2} \tag{4.33a,b}$$

Estos valores son consistentes con los valores de las reacciones R_B y M_B (ecuaciones 4.31a y b).

Solución alternativa. En vez de emplear diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio podemos determinar las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes integrando las relaciones diferenciales entre carga, fuerza cortante y momento flexionante. La fuerza cortante V a una distancia x del extremo A se obtiene de la carga integrando la ecuación (4.5) de la siguiente manera:

$$V - V_A = V - 0 = V = -\int_0^x q\,dx = -qx \tag{a}$$

que concuerda con el resultado anterior (ecuación 4.32a).

El momento flexionante M a una distancia x del extremo se obtiene de la fuerza cortante integrando la ecuación (4.7):

$$M - M_A = M - 0 = M = \int_0^x V\,dx = \int_0^x -qx\,dx = -\frac{qx^2}{2} \tag{b}$$

que concuerda con la ecuación 4.32b.

Integrar las relaciones diferenciales es muy simple en este ejemplo debido a que el patrón de carga es continuo y no hay cargas concentradas o pares en las regiones de integración. Si estuvieran presentes cargas concentradas o pares, existirían discontinuidades en los diagramas V y M, y no podríamos integrar la ecuación (4.5) a través de una carga concentrada ni podríamos integrar la ecuación (4.7) a través de un par (consulte la sección 4.4).

Ejemplo 4.7

En la figura 4.21a se muestra la viga *ABC* con una saliente en el extremo izquierdo. La viga está sometida a una carga uniforme con intensidad $q = 1.0$ k/ft sobre la saliente *AB* y a un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj $M_0 = 12.0$ k-ft que actúa a la mitad entre los apoyos *B* y *C*.

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.

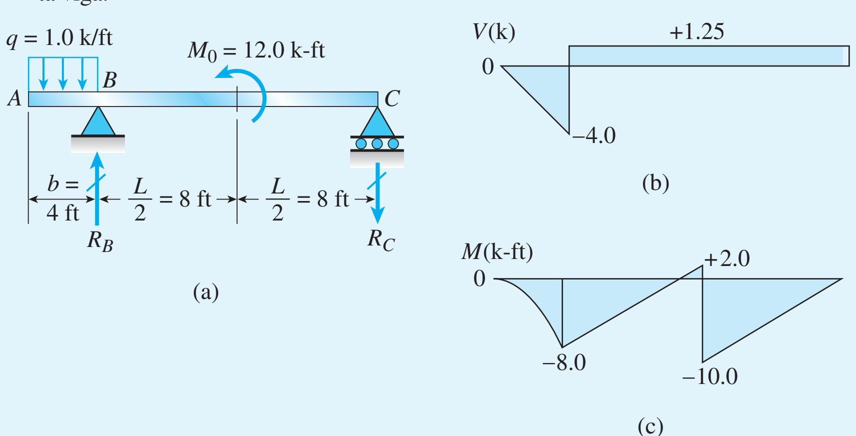


FIGURA 4.21 Ejemplo 4.7. Viga con un voladizo.

Solución

Reacciones. Resulta fácil calcular las reacciones R_B y R_C del diagrama de cuerpo libre de toda la viga (figura 4.21a). Al hacerlo, encontramos que R_B es hacia arriba y R_C es hacia abajo, como se muestra en la figura. Sus valores numéricos son

$$R_B = 5.25 \text{ k} \qquad R_C = 1.25 \text{ k}$$

Fuerzas cortantes. La fuerza cortante es igual a cero en el extremo libre de la viga e igual a $-qb$ (o -4.0 k) justo a la izquierda del apoyo *B*. Dado que la carga está distribuida uniformemente (es decir, q es constante), la pendiente del diagrama de cortante es constante e igual a $-q$ (de la ecuación 4.4). Por tanto, el diagrama de cortante es una línea recta inclinada con pendiente negativa en la región de *A* a *B* (figura 4.21b).

Como no hay cargas concentradas o distribuidas entre los apoyos, el diagrama de fuerza cortante es horizontal en esta región. La fuerza cortante es igual a la reacción R_C, o 1.25 k, como se muestra en la figura. (Observe que la fuerza cortante no cambia en el punto de aplicación del par M_0).

La fuerza cortante numéricamente más grande ocurre justo a la izquierda del apoyo *B* y es igual a -4.0 k.

Momentos flexionantes. El momento flexionante es cero en el extremo libre y disminuye algebraicamente (pero aumenta numéricamente) conforme nos movemos a la derecha hasta que se alcanza el apoyo *B*. La pendiente del diagrama de momento, igual al valor de la fuerza cortante (de la ecuación 4.6), es cero en el extremo libre y -4.0 k justo a la izquierda del apoyo *B*. El diagrama es parabólico (de segundo grado) en esta región, con el vértice en el extremo de la viga. El momento en el punto *B* es

$$M_B = -\frac{qb^2}{2} = -\frac{1}{2}(1.0 \text{ k/ft})(4.0 \text{ ft})^2 = -8.0 \text{ k-ft}$$

que también es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre *A* y *B* (consulte la ecuación 4.7).

continúa

La pendiente del diagrama de momento flexionante de *B* a *C* es igual a la fuerza cortante, o 1.25 k. Por tanto, el momento flexionante justo a la izquierda del par M_0 es

$$-8.0 \text{ k-ft} + (1.25 \text{ k})(8.0 \text{ ft}) = 2.0 \text{ k-ft}$$

como se muestra en el diagrama. Por supuesto, podemos obtener este mismo resultado cortando a través de la viga justo a la izquierda del par, dibujando el diagrama de cuerpo libre y resolviendo la ecuación de equilibrio de momentos.

El momento flexionante cambia abruptamente en el punto de aplicación del par M_0, como se explicó antes en conexión con la ecuación (4.9). Como el par actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el momento disminuye en una cantidad igual a M_0. Por tanto, el momento justo a la derecha del par M_0 es

$$2.0 \text{ k-ft} - 12.0 \text{ k-ft} = -10.0 \text{ k-ft}$$

Desde ese punto hasta el apoyo *C* el diagrama de nuevo es una línea recta con pendiente igual a 1.25 k. Por tanto, el momento flexionante en el apoyo es

$$-10.0 \text{ k-ft} + (1.25 \text{ k})(8.0 \text{ ft}) = 0$$

como se esperaba.

Los valores máximo y mínimo del momento flexionante ocurren donde la fuerza cortante cambia de signo y donde se aplica el par. Comparando los varios puntos altos y bajos en el diagrama de momento observamos que el momento flexionante numéricamente más grande es igual a −10.0 k-ft y ocurre justo a la derecha del par M_0.

Si ahora se agrega un apoyo de rodillo en el nodo *A* y se inserta un alivio de cortante justo a la izquierda del nodo *B* (figura 4.21d), se deben volver a calcular las reacciones de apoyo. La viga se descompone en dos diagramas de cuerpo libre, *AB* y *BC*, cortando a través del alivio de cortante (donde $V = 0$) y la reacción R_A resulta de 4 kips al sumar fuerzas verticales en el diagrama de cuerpo libre izquierdo. Luego sumando momentos y fuerzas en toda la estructura, $R_B = -R_C = 0.25$ kips. Por último, se pueden elaborar diagramas de cortante y momento para la estructura modificada.

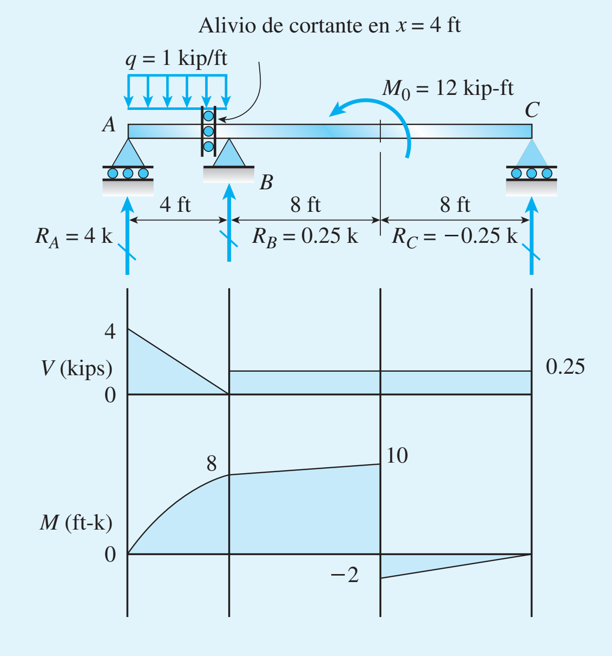


FIGURA 4.21 Ejemplo 4.7. Viga modificada con voladizo, se agrega alivio de cortante.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

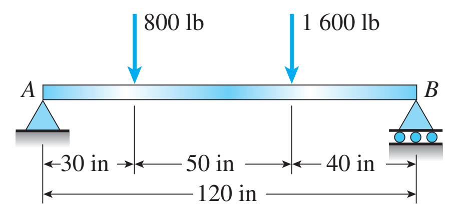
En este capítulo repasamos el análisis de vigas estáticamente determinadas y marcos simples para determinar reacciones de apoyo y resultantes internas de esfuerzos (N, V y M), luego trazamos los diagramas de fuerza axial, cortante y momento flexionante para mostrar la variación de estas cantidades en toda la estructura. Consideramos apoyos empotrados, deslizantes, articulados y de rodillo, y cargas concentradas y distribuidas en modelos de ensamblaje de una variedad de estructuras con diferentes condiciones de apoyo. En algunos casos se incluyeron alivios internos en el modelo para representar ubicaciones conocidas con valores cero de N, V o M. Algunos de los conceptos importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

1. Si la estructura es **estáticamente determinada** y estable, las leyes de la estática son suficientes para resolver todos los valores de las fuerzas y los momentos de reacción de apoyo; también se puede obtener la magnitud de la fuerza interna axial (N), fuerza cortante (V) y momento flexionante (M) en cualquier ubicación en la estructura.
2. Si en el modelo de la estructura se presentan **alivios** axial, de cortante o de momento, la estructura se debe descomponer en diagramas de cuerpo libre separados cortando a través del alivio; entonces, se dispone de una ecuación adicional de equilibrio para emplearla al resolver las reacciones de apoyo desconocidas mostradas en ese diagrama de cuerpo libre.
3. Las representaciones gráficas o **diagramas** que muestran la variación de N, V y M sobre una estructura, son útiles en el diseño debido a que muestran con facilidad la ubicación de los valores máximos de N, V y M necesarios en el **diseño** (que se considerarán para vigas en el capítulo 5).
4. Las **reglas para dibujar diagramas de cortante y momento flexionante** se pueden resumir como sigue:
   a. La ordenada en la curva de carga distribuida (q) es igual al negativo de la pendiente en el diagrama de cortante.
   b. La diferencia en los valores de cortante entre cualesquiera dos puntos en el diagrama de cortante es igual al área (–) bajo la curva de carga distribuida entre estos mismos dos puntos.
   c. La ordenada en el diagrama de cortante (V) es igual a la pendiente en el diagrama de momento flexionante.
   d. La diferencia en los valores entre cualesquiera dos puntos en el diagrama de momento es igual al área bajo el diagrama de cortante entre estos mismos dos puntos.
   e. En esos puntos donde la curva de cortante cruza el eje de referencia (es decir, $V = 0$), el valor del momento en el diagrama de momento es un máximo o mínimo local.
   f. La ordenada en el diagrama de fuerza axial (N) es igual a cero en un alivio de fuerza axial; la ordenada en el diagrama de cortante (V) es cero en un alivio de cortante y la ordenada en el diagrama de momento (M) es cero en un alivio de momento.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 4

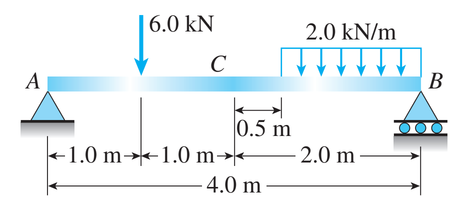
Fuerzas cortantes y momentos flexionantes

4.3.1 Calcule la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección transversal justo a la izquierda de la carga de 1600 lb que actúa sobre la viga simple AB que se muestra en la figura.



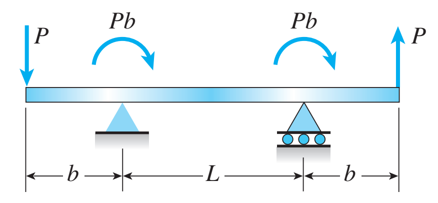
PROB. 4.3.1

4.3.2 Determine la fuerza cortante V y el momento flexionante M en el punto medio C sobre la viga simple AB que se muestra en la figura.



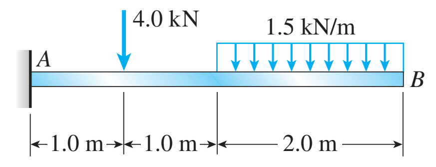
PROB. 4.3.2

4.3.3 Determine la fuerza cortante V y el momento flexionante M en el punto medio de la viga con voladizos (consulte la figura). Observe que una carga actúa hacia abajo y la otra hacia arriba, y se aplican momentos Pb en el sentido de las manecillas del reloj en cada apoyo.



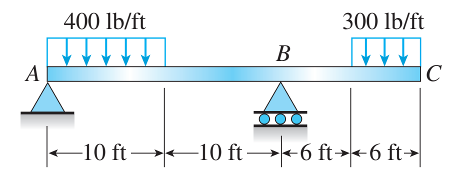
PROB. 4.3.3

4.3.4 Calcule la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección transversal ubicada a 0.5 m del apoyo fijo de la viga en voladizo AB que se muestra en la figura.



PROB. 4.3.4

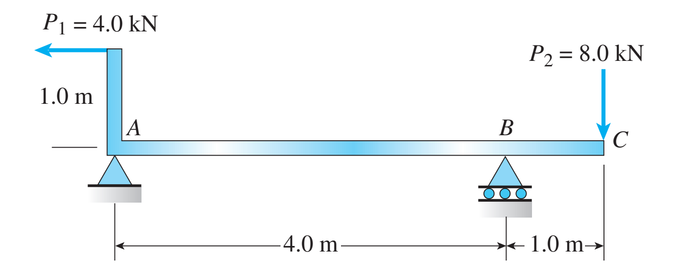
4.3.5 Determine la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección transversal ubicada a 18 ft del extremo izquierdo A de la viga con un voladizo que se muestra en la figura.



PROB. 4.3.5

4.3.6 La viga ABC que se muestra en la figura está simplemente apoyada en A y B y tiene un voladizo de B a C. Las cargas consisten de una fuerza horizontal $P_1 = 4.0$ kN que actúa en el extremo de un brazo vertical y una fuerza vertical $P_2 = 8.0$ kN que actúa en el extremo de la saliente.

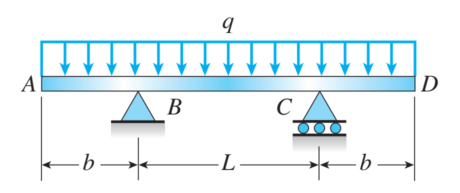
Determine la fuerza cortante V y el momento flexionante M en una sección transversal ubicada a 3.0 m del apoyo izquierdo. (*Nota:* no tome en cuenta los anchos de la viga y el brazo vertical y utilice las dimensiones hasta la línea central al hacer sus cálculos).



PROB. 4.3.6

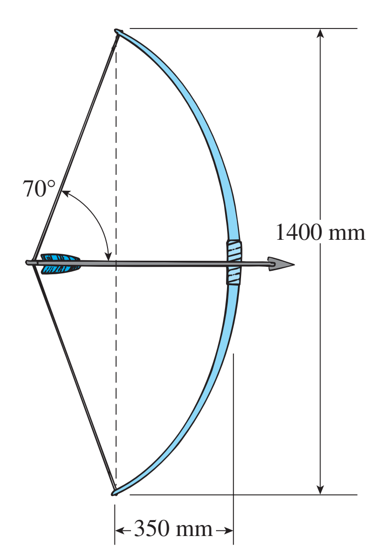
4.3.7 La viga $ABCD$ que se muestra en la figura tiene un voladizo en cada extremo y soporta una carga uniforme con intensidad q.

¿Para qué razón b/L será cero el momento flexionante en el punto medio de la viga?



PROB. 4.3.7

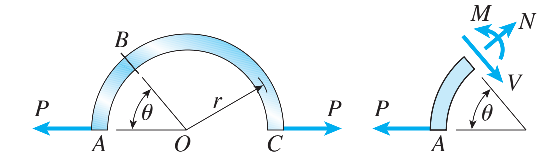
4.3.8 Un arquero aplica una fuerza de tiro de 130 N cuando tensa por completo la cuerda del arco que se muestra en la figura. Determine el momento flexionante en el punto medio del arco.



PROB. 4.3.8

4.3.9 Una barra curva *ABC* está sometida a cargas en la forma de dos fuerzas iguales y opuestas *P*, como se muestra en la figura. El eje de la barra forma un semicírculo de radio *r*.

Determine la fuerza axial *N*, la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M* que actúan en una sección transversal definida por el ángulo θ.



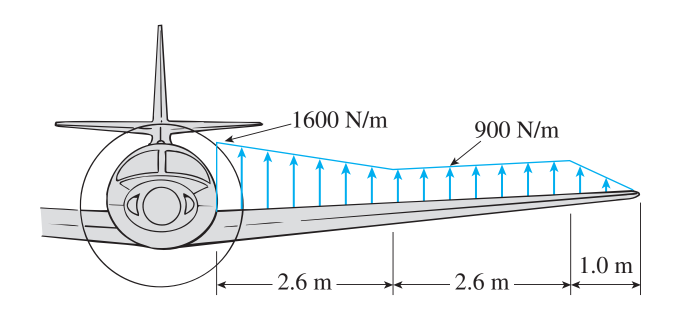
PROB. 4.3.9

4.3.10 En condiciones de crucero la carga distribuida que actúa sobre el ala de un aeroplano pequeño tiene la variación idealizada que se muestra en la figura.

Calcule la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M* en el extremo del ala cercano al fuselaje.



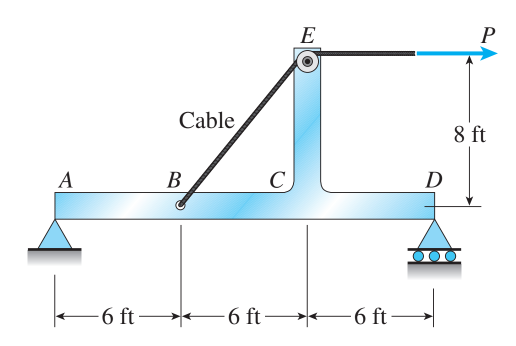
Las alas de un aeroplano pequeño tienen cargas distribuidas hacia arriba



PROB. 4.3.10

4.3.11 Una viga *ABCD* con un brazo vertical *CE* está apoyada como una viga simple en *A* y *D* (consulte la figura). Un cable pasa por una polea pequeña que está sujeta al brazo en *E* y un extremo del cable está sujeto a la viga en el punto *B*.

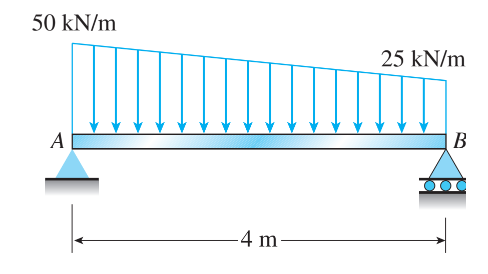
¿Cuál es la fuerza *P* en el cable si el momento flexionante en la viga justo a la izquierda del punto *C* es numéricamente igual a 640 lb-ft? (*Nota:* no tome en cuenta los anchos de la viga y el brazo vertical, y utilice las dimensiones hasta la línea central al hacer sus cálculos.)



PROB. 4.3.11

4.3.12 Una viga simplemente apoyada *AB* soporta una carga trapezoidalmente distribuida (consulte la figura). La intensidad de la carga varía linealmente de 50 kN/m en el apoyo *A* a 25 kN/m en el apoyo *B*.

Calcule la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M* en el punto medio de la viga.

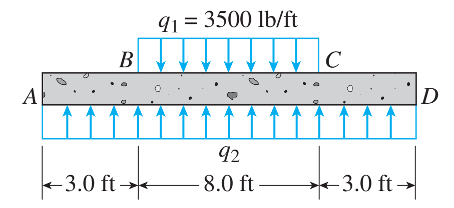


PROB. 4.3.12

4.3.13 Una viga *ABCD* representa un cimiento de concreto reforzado que soporta una carga uniforme con intensidad q_1 = 3500 lb/ft (consulte la figura). Suponga que la presión del suelo sobre el lado inferior de la viga está uniformemente distribuida con intensidad q_2.

(a) Encuentre la fuerza cortante V_B y el momento flexionante M_B en el punto *B*.

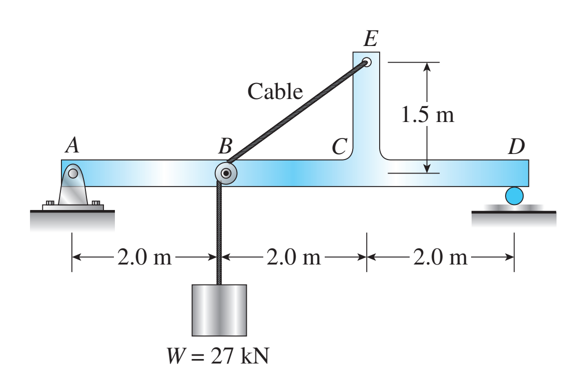
(b) Encuentre la fuerza cortante V_m y el momento flexionante M_m en el punto medio de la viga.



PROB. 4.3.13

4.3.14 La viga simplemente apoyada *ABCD* está cargada por un peso *W* = 27 kN por medio del conjunto que se muestra en la figura. El cable pasa por una polea pequeña sin fricción en *B* y está sujeto en *E* al extremo del brazo vertical.

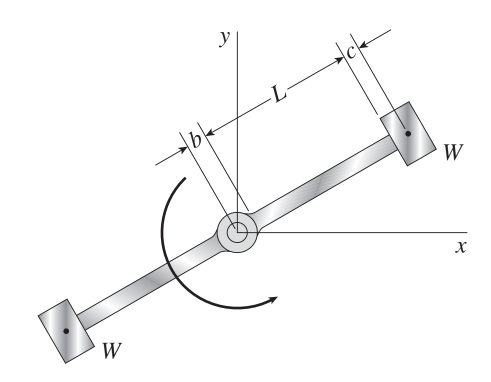
Calcule la fuerza axial *N*, la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M* en la sección *C*, que está justo a la izquierda del brazo vertical. (*Nota:* no tome en cuenta los anchos de la viga y el brazo vertical, y utilice las dimensiones hasta la línea central al hacer sus cálculos.)



PROB. 4.3.14

***4.3.15** La máquina centrífuga que se muestra en la figura gira en un plano horizontal (el plano *xy*) sobre una superficie lisa con respecto al eje *z* (que es vertical) con una aceleración angular α. Cada uno de los dos brazos tiene un peso *w* por unidad de longitud y soporta un peso $W = 2.0wL$ en su extremo.

Deduzca fórmulas para la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo en los brazos, suponiendo $b = L/9$ y $c = L/10$.



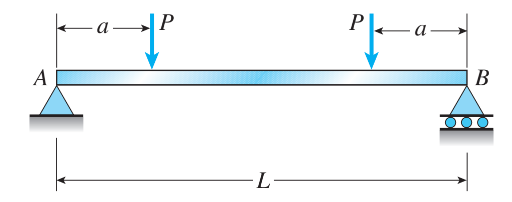
PROB. 4.3.15

Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante

Al resolver los problemas de la sección 4.5, dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante aproximadamente a escala e identifique todas las ordenadas críticas, incluyendo los valores máximos y mínimos.

Los problemas 4.5.1 a 4.5.10 son simbólicos y los problemas 4.5.11 a 4.5.24 son numéricos. Los problemas restantes (4.5.25 a 4.5.30) comprenden temas especializados, como mejoramiento, vigas con articulaciones y cargas móviles.

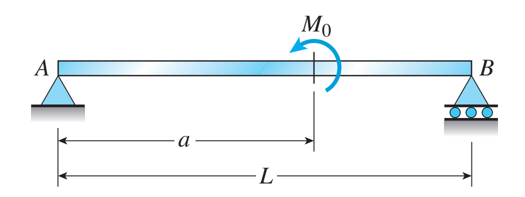
4.5.1 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga simple *AB* que soporta dos cargas concentradas iguales *P* (consulte la figura).



PROB. 4.5.1

4.5.2 Una viga simple *AB* sometida a un par M_0 en sentido contrario al de las manecillas del reloj que actúa a una distancia *a* del apoyo izquierdo (consulte la figura).

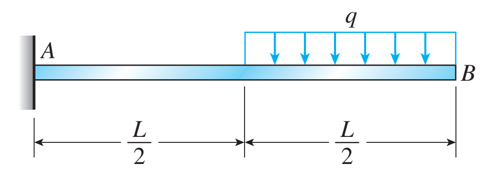
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.2

4.5.3 La viga en voladizo *AB* que se muestra en la figura soporta una carga uniformemente distribuida con intensidad *q* sobre la mitad derecha de su longitud (consulte la figura).

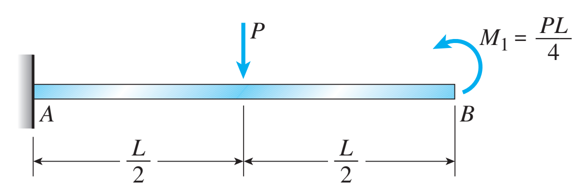
Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.3

4.5.4 La viga en voladizo *AB* que se muestra en la figura está sometida a una carga concentrada *P* en el punto medio y a un momento $M_1 = PL/4$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el extremo libre.

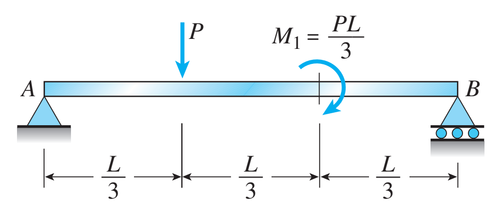
Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.4

4.5.5 La viga simple *AB* que se muestra en la figura está sometida a una carga concentrada *P* y a un par $M_1 = PL/3$ que actúa en el sentido de las manecillas del reloj en los tercios del claro como se muestra en la figura.

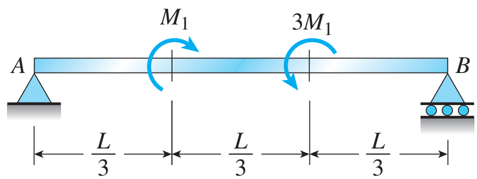
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.5

4.5.6 Una viga simple *AB* está sometida a pares M_1 y $3M_1$ que actúan en los tercios del claro como se muestra en la figura.

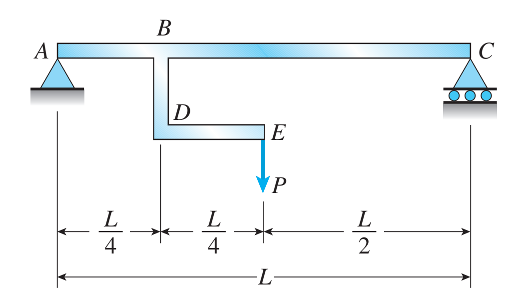
Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.6

4.5.7 Una viga simplemente apoyada *ABC* está sometida a una carga vertical *P* que actúa en el extremo de una ménsula *BDE* (consulte la figura).

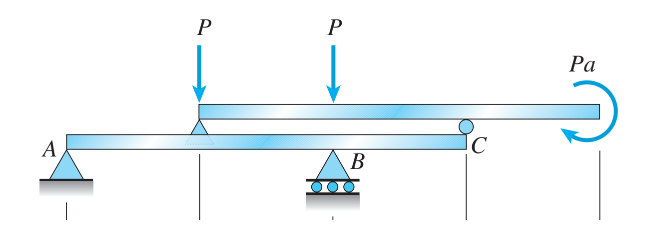
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga *ABC*.



PROB. 4.5.7

4.5.8 Una viga *ABC* está simplemente apoyada en *A* y *B*, y tiene una saliente *BC* (consulte la figura). La viga está cargada por dos fuerzas *P* y un par en el sentido de las manecillas del reloj *Pa* que actúa en el conjunto que se muestra.

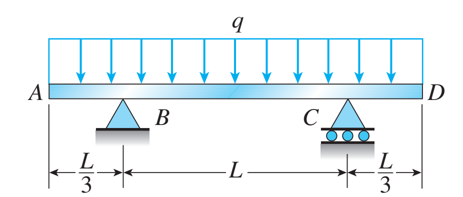
Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga *ABC*.



PROB. 4.5.8

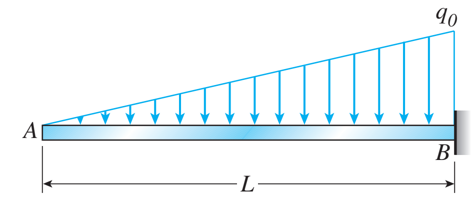
4.5.9 La viga *ABCD* está simplemente apoyada en *B* y *C*, y tiene sus extremos en voladizo (consulte la figura). La longitud del claro es *L* y cada saliente tiene una longitud *L*/3. Una carga uniforme con intensidad *q* actúa a lo largo de toda la longitud de la viga.

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



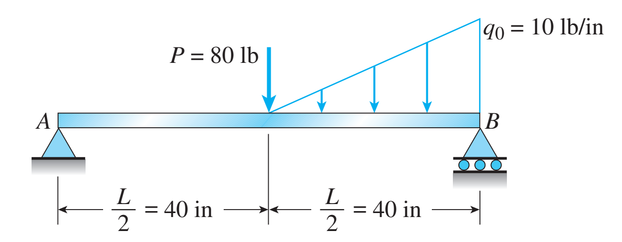
PROB. 4.5.9

4.5.10 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga en voladizo *AB* que soporta una carga linealmente variable con intensidad máxima q_0 (consulte la figura).



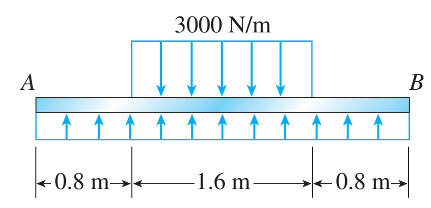
PROB. 4.5.10

4.5.11 La viga simple *AB* soporta una carga triangular con intensidad máxima $q_0 = 10$ lb/in que actúa sobre la mitad del claro, y una carga concentrada $P = 80$ lb que actúa a la mitad del claro (consulte la figura). Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



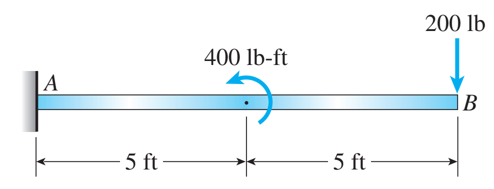
PROB. 4.5.11

4.5.12 La viga *AB* que se muestra en la figura soporta una carga uniforme con una intensidad de 3000 N/m que actúa sobre la mitad de la longitud de la viga, la cual descansa sobre un cimiento que produce una carga uniformemente distribuida sobre toda su longitud. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.12

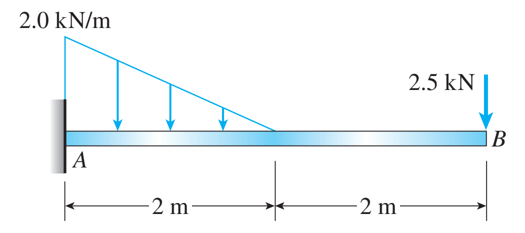
4.5.13 Una viga en voladizo *AB* soporta un par y una carga concentrada, como se muestra en la figura. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.13

4.5.14 La viga en voladizo *AB* que se muestra en la figura está sometida a una carga triangular que actúa en toda la mitad de su longitud y a una carga concentrada que actúa en el extremo libre.

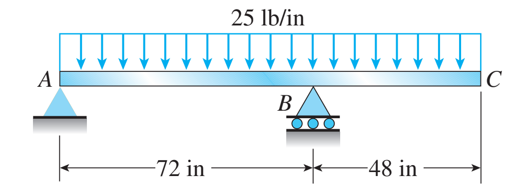
Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.14

4.5.15 La viga *ABC* uniformemente cargada tiene apoyos simples en *A* y *B* y un voladizo *BC* (consulte la figura).

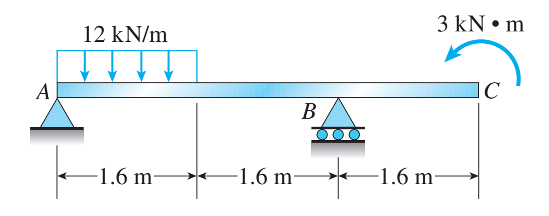
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.15

4.5.16 Una viga *ABC* con un voladizo en un extremo soporta una carga uniforme con intensidad de 12 kN/m y un momento concentrado con magnitud de 3 kN·m en *C* (consulte la figura).

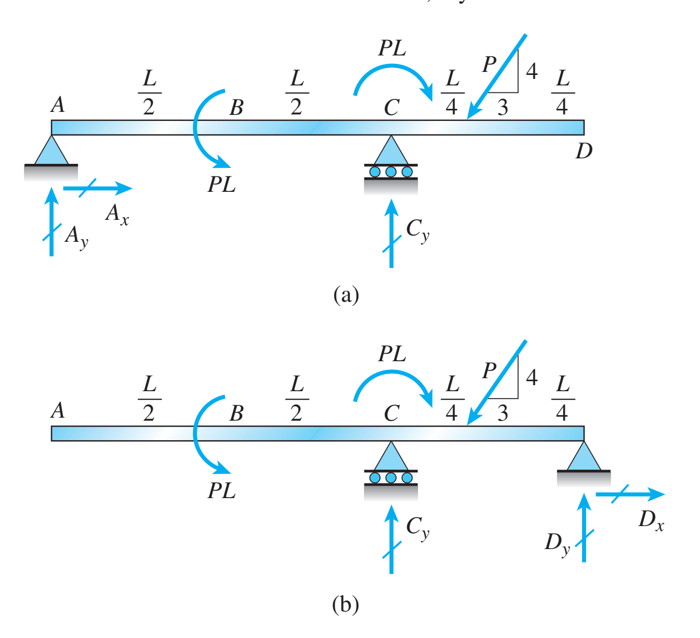
Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.16

4.5.17 Considere dos vigas, que están cargadas de igual manera pero tienen condiciones de apoyo distintas. ¿Qué viga tiene el momento máximo más grande?

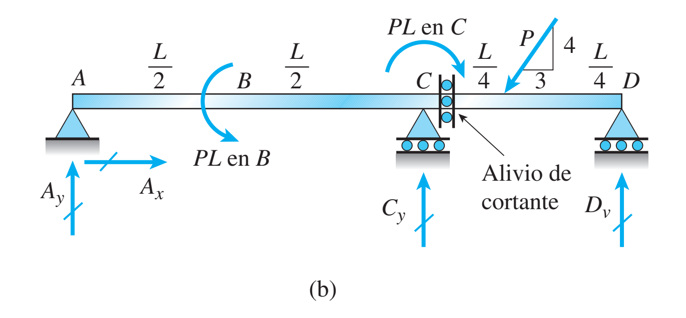
Primero, encuentre las reacciones de los apoyos, luego trace los diagramas de la fuerza axial (N), de cortante (V) y de momento (M) para las dos vigas. *Identifique* todos los valores críticos N, V y M, y también la *distancia* hasta los puntos donde N, V y/o M son cero.



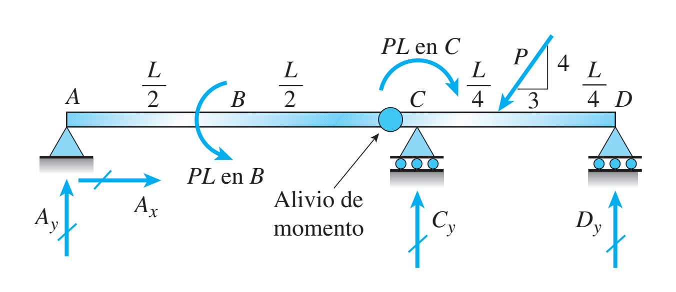
PROB. 4.5.17

4.5.18 Las tres vigas siguientes están cargadas de igual manera y tienen las mismas condiciones de apoyo. Sin embargo, una tiene un *alivio de momento* justo a la izquierda de C, la segunda tiene un *alivio de cortante* justo a la derecha de C y la tercera tiene un *alivio axial* justo a la izquierda de C. ¿Qué viga tiene el momento máximo más grande?

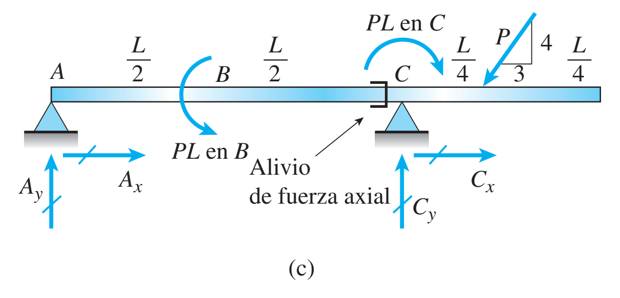
Primero, determine las reacciones de los apoyos, luego trace los diagramas de la fuerza axial (N), de cortante (V) y de momento (M) para las tres vigas. *Identifique* todos los valores críticos N, V y M, y también la *distancia* hasta los puntos donde N, V y/o M son cero.



(b)



(a)

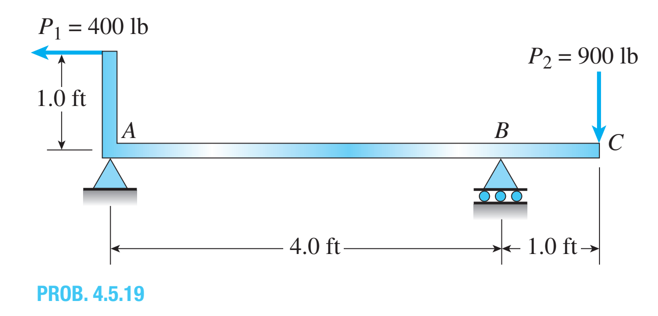


(c)

PROB. 4.5.18

4.5.19 La viga *ABC* que se muestra en la figura está simplemente apoyada en *A* y *B*, y tiene un voladizo de *B* a *C*. La carga consiste en una fuerza horizontal $P_1 = 400$ lb que actúa en el extremo del brazo vertical y una fuerza vertical $P_2 = 900$ lb que actúa en el extremo de la saliente.

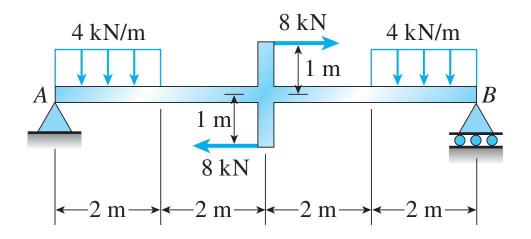
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga. (*Nota:* no tome en cuenta los anchos de la viga y el brazo vertical, y utilice las dimensiones hasta la línea central al hacer sus cálculos.)



PROB. 4.5.19

4.5.20 Una viga simple *AB* está cargada por dos segmentos de carga uniforme y dos fuerzas horizontales que actúan en los extremos de un brazo vertical (consulte la figura).

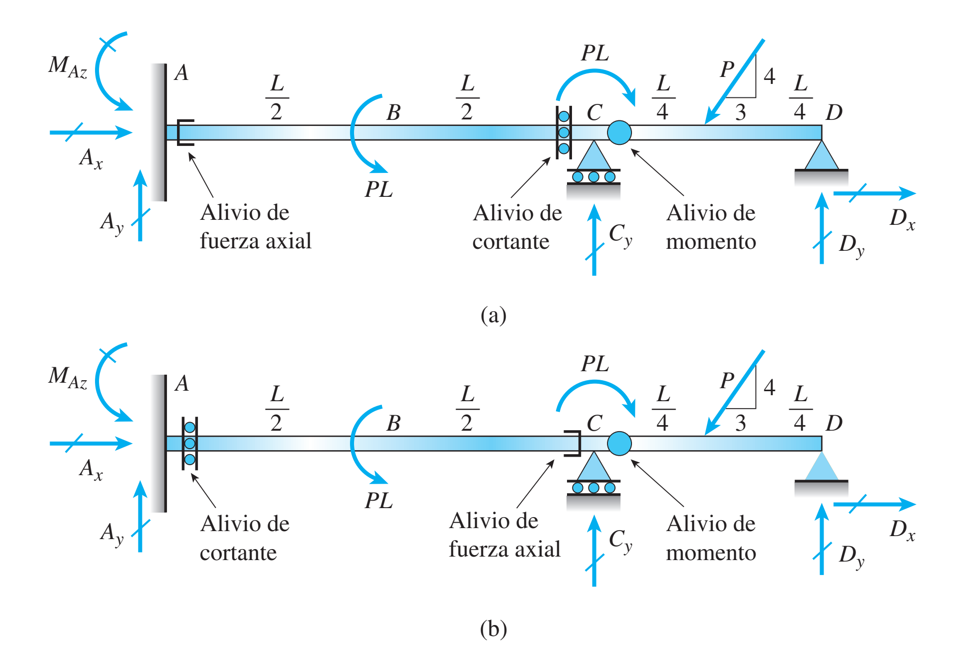
Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.20

4.5.21 Las dos vigas siguientes están cargadas de manera igual y tienen las mismas condiciones de apoyo. Sin embargo, la ubicación de los *alivios axial, de cortante y de momento* es diferente para cada viga (consulte las figuras). ¿Qué viga tiene el momento máximo más grande?

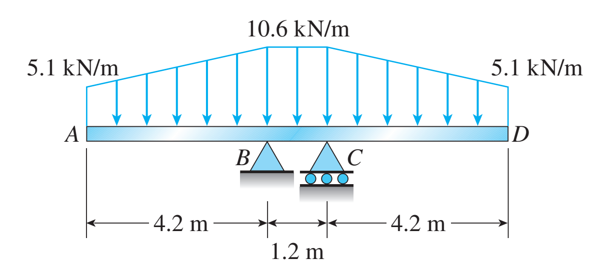
Primero, encuentre las reacciones de los apoyos, luego trace los diagramas de fuerza axial (*N*), de cortante (*V*) y de momento (*M*) para las dos vigas. *Identifique* todos los valores críticos *N*, *V* y *M*, y también la *distancia* hasta los puntos donde *N*, *V* y/o *M* son cero.



PROB. 4.5.21

4.5.22 La viga *ABCD* que se muestra en la figura tiene voladizos que se extienden 4.2 m en ambas direcciones desde los apoyos en *B* y *C*, que están separados 1.2 m.

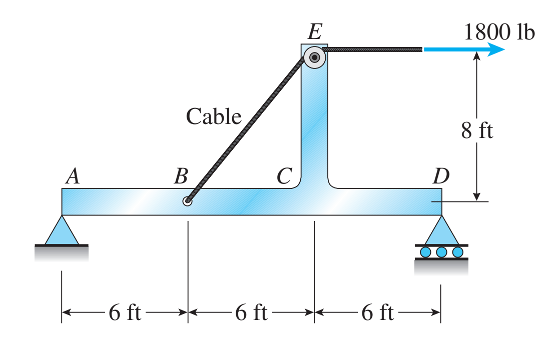
Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga con voladizos.



PROB. 4.5.22

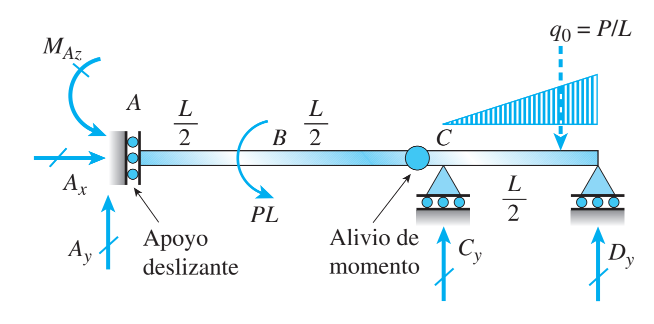
4.5.23 Una viga *ABCD* con un brazo vertical *CE* está apoyada como una viga simple en *A* y *D* (consulte la figura). Un cable pasa por una polea pequeña que está sujeta al brazo en *E* y un extremo del cable está sujeto a la viga en el punto *B*. La fuerza de tensión en el cable es de 1800 lb.

Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga *ABCD*. (*Nota:* no tome en cuenta los anchos de la viga y el brazo vertical, y utilice las dimensiones hasta la línea central al hacer sus cálculos).



PROB. 4.5.23

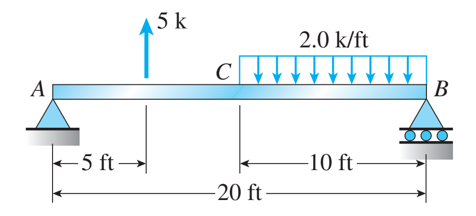
4.5.24 Las vigas *ABC* y *CD* están apoyadas en *A*, *C* y *D*, y unidas por una articulación (o *alivio de momento*) justo a la izquierda de *C*. El apoyo en *A* es deslizante (de aquí que la reacción en $A_y = 0$ para la carga que se muestra en la figura). Determine las reacciones de los apoyos, luego dibuje diagramas de cortante (*V*) y de momento (*M*). ***Identifique*** todos los valores críticos *V* y *M*, y también la ***distancia*** hasta donde *V* y/o *M* son cero.



PROB. 4.5.24

4.5.25 La viga simple *AB* que se muestra en la figura soporta una carga concentrada y un segmento de carga uniforme.

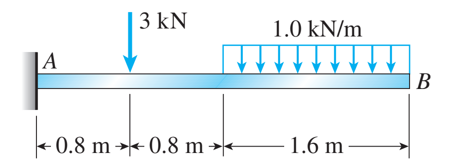
Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.25

4.5.26 La viga en voladizo que se muestra en la figura soporta una carga concentrada y un segmento de carga uniforme.

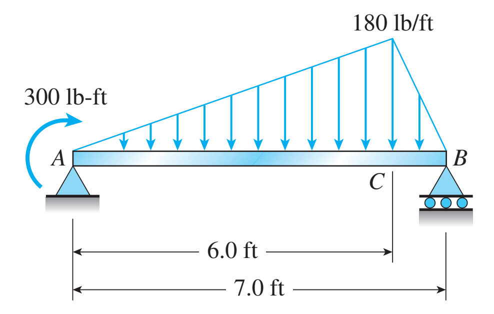
Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga en voladizo.



PROB. 4.5.26

4.5.27 La viga simple *ACB* que se muestra en la figura está sometida a una carga triangular con intensidad máxima de 180 lb/ft y a un momento concentrado de 300 lb-ft en *A*.

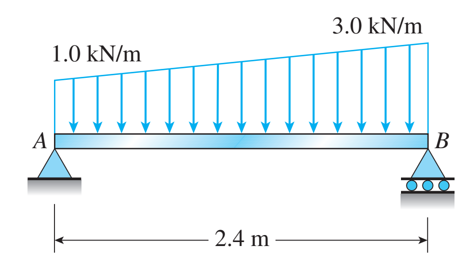
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.27

4.5.28 Una viga con apoyos simples está sometida a una carga distribuida trapezoidal (consulte la figura). La intensidad de la carga varía de 1.0 kN/m en el apoyo *A* a 3.0 kN/m en el apoyo *B*.

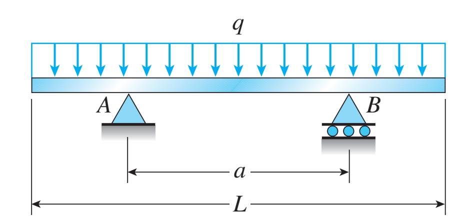
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga.



PROB. 4.5.28

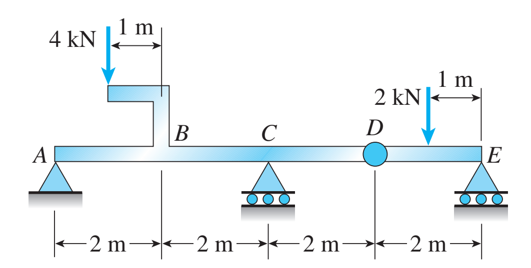
4.5.29 Una viga con longitud *L* se diseña para soportar una carga uniforme con intensidad *q* (consulte la figura). Si los apoyos de la viga se colocan en los extremos, creando una viga simple, el momento flexionante máximo en la viga es $qL^2/8$. Sin embargo, si los apoyos se mueven simétricamente hacia el centro de la viga (como se representa en la figura), se reduce el momento flexionante máximo.

Determine la distancia *a* entre los apoyos de manera que el momento flexionante máximo en la viga tenga el valor numérico más pequeño posible. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta condición.



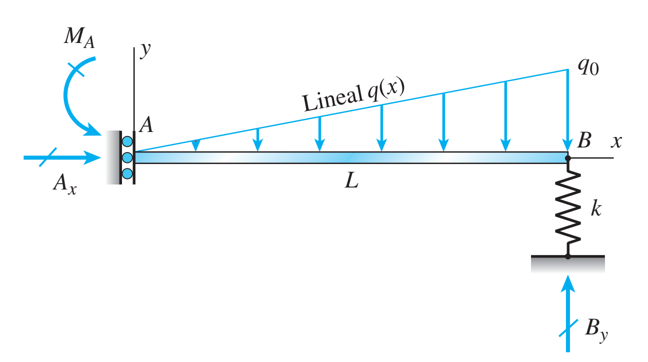
PROB. 4.5.29

4.5.30 La viga compuesta *ABCDE* que se muestra en la figura consiste de dos vigas (*AD* y *DE*) unidas por una conexión articulada en *D*. La articulación puede transmitir una fuerza cortante pero no un momento flexionante. Las cargas sobre la viga consisten en una fuerza de 4 kN en el extremo de una ménsula conectada en el punto *B* y una fuerza de 2 kN en el punto medio de la viga *DE*. Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para esta viga compuesta.



PROB. 4.5.30

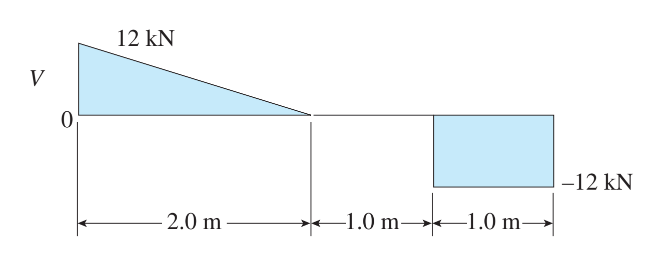
4.5.31 La viga que se muestra en la figura tiene un apoyo deslizante en *A* y un apoyo elástico con constante de resorte *k* en *B*. Se aplica una carga distribuida *q*(*x*) sobre toda la viga. Encuentre todas las reacciones de los apoyos, luego dibuje diagramas de cortante (*V*) y de momento (*M*) para la viga *AB*; *identifique* todos los valores críticos de *V* y *M*, y también la *distancia* a los puntos donde cualquiera de las ordenadas críticas sea cero.



PROB. 4.5.31

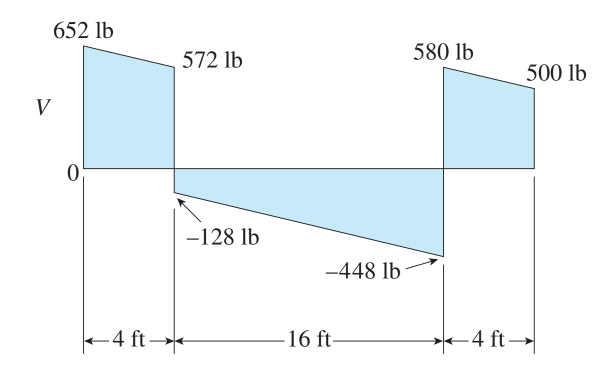
4.5.32 En la figura se muestra el diagrama de fuerza cortante para una viga simple.

Determine la carga sobre la viga y dibuje el diagrama de momento flexionante, suponga que no actúan pares como cargas sobre la viga.



PROB. 4.5.32

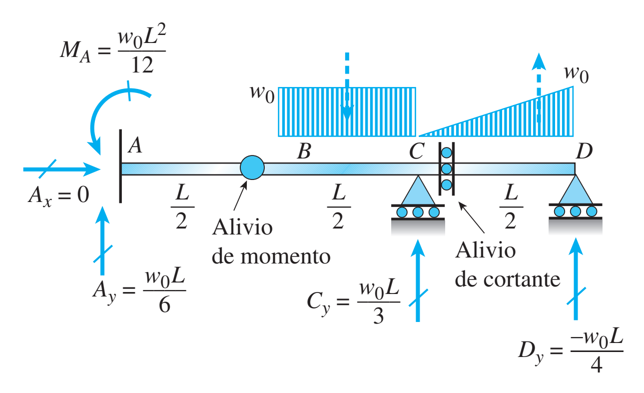
***4.5.33** En la figura se muestra el diagrama de fuerza cortante para una viga. Suponiendo que actúan pares como cargas sobre ella, determine las fuerzas que actúan sobre la viga y elabore el diagrama de momento flexionante.



PROB. 4.5.33

4.5.34 La siguiente viga compuesta tiene un *alivio interno de momento* justo a la izquierda de B y un *alivio de cortante* justo a la derecha de C. El cálculo de las reacciones en A, C y D se muestra en la figura.

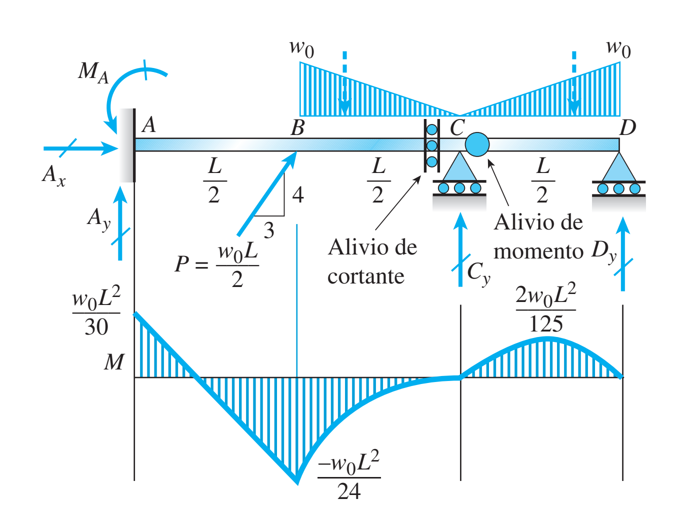
Primero, confirme las expresiones de las reacciones empleando la estática, luego trace diagramas de cortante (V) y de momento (M). *Identifique* todos los valores críticos V y M, y también la *distancia* hasta los puntos donde V y/o M son cero.



PROB. 4.5.34

4.5.35 La viga compuesta siguiente tiene un *alivio de cortante* justo a la izquierda de C y un *alivio de momento* justo a la derecha de C. Se proporciona un diagrama del momento para la carga aplicada P en B y de las cargas triangulares distribuidas $w(x)$ sobre los segmentos BC y CD.

Primero, resuelva las reacciones empleando la estática, luego trace los diagramas de fuerza axial (N) y de cortante (V). Confirme que el diagrama de momento es el que se muestra en la gráfica. *Identifique* todos los valores críticos N, V y M, y también la *distancia* hasta los puntos donde N, V y/o M son cero.

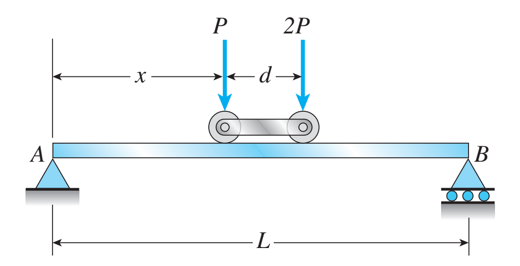


PROB. 4.5.35

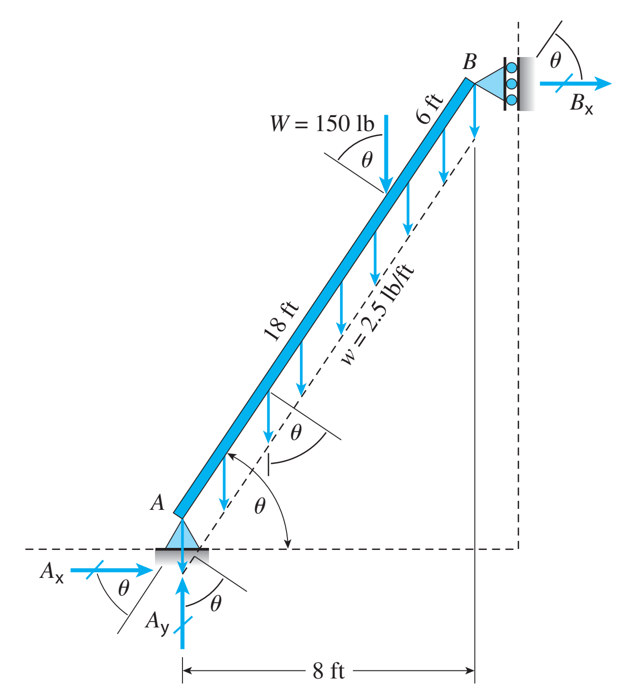
***4.5.36** Una viga simple AB soporta dos cargas P y $2P$ sobre dos ruedas conectadas que están a una distancia d (consulte la figura). La ruedas se pueden colocar a cualquier distancia x desde el apoyo izquierdo de la viga.

(a) Determine la distancia x que producirá la fuerza cortante máxima $V_{máx}$ en la viga y dibuje su diagrama correspondiente.

(b) Determine la distancia x que producirá el momento flexionante máximo en la viga y dibuje su diagrama correspondiente. (Suponga $P = 10$ kN, $d = 2.4$ m y $L = 12$ m.)



PROB. 4.5.36

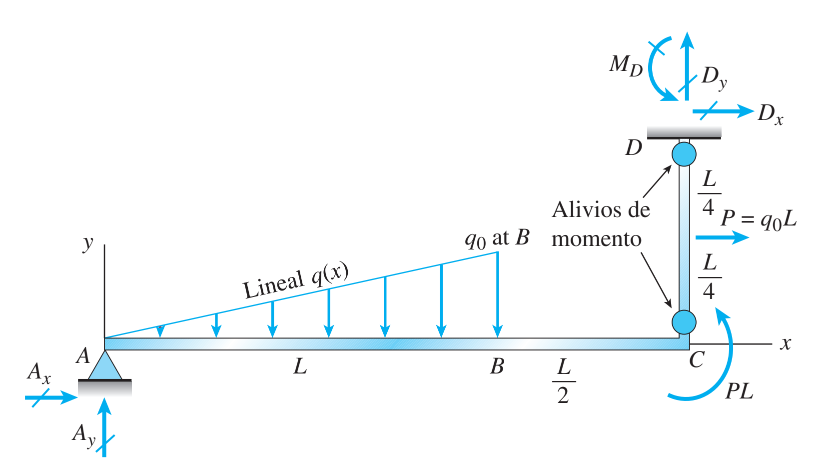


PROB. 4.5.37

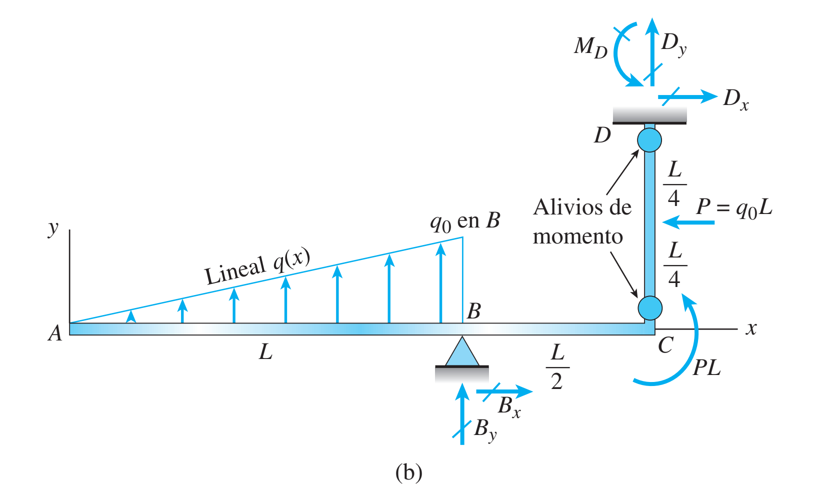
4.5.37 La viga inclinada representa una escalera con las cargas aplicadas siguientes: el peso (W) del pintor de casas y el peso distribuido (w) de la propia escalera. Encuentre las reacciones de los apoyos en A y B, luego trace los diagramas de la fuerza axial (N), del cortante (V) y del momento (M). *Identifique* todos los valores críticos N, V y M, y también la *distancia* hasta los puntos donde cualesquiera ordenadas críticas sea cero. Trace diagramas de N, V y M normales a la escalera inclinada.

4.5.38 La viga ABC está soportada por un tirante CD como se muestra en la figura. Dos configuraciones son posibles: apoyo articulado en A y carga triangular hacia abajo sobre AB o articulado en B y carga hacia arriba sobre AB. ¿Cuál tiene el momento máximo más grande?

Primero, encuentre todas las reacciones de los apoyos, luego dibuje diagramas de fuerza axial (N), de fuerza cortante (V) y de momento (M) sólo para ABC e *identifique* todos los valores críticos N, V y M. Identifique la *distancia* hasta los puntos donde cualquiera de las ordenadas críticas sea cero.



(a)



PROB. 4.5.38

(b)

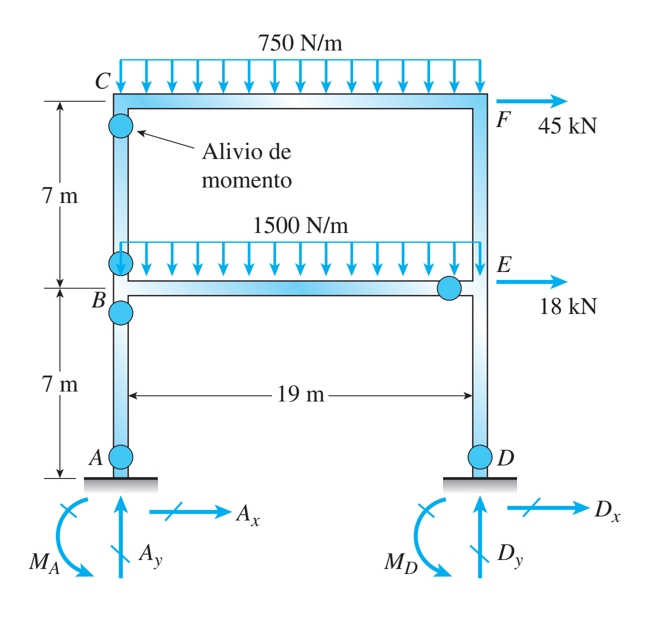
4.5.39 El siguiente marco plano consiste en una columna *AB* y una viga *BC* que soporta una carga distribuida triangular. El apoyo *A* es fijo y en *C* el apoyo es de rodillo. La columna *AB* tiene un *alivio de momento* justo debajo del nodo *B*.

Encuentre las reacciones en *A* y *C*, luego dibuje los diagramas de la fuerza axial (*N*), del cortante (*V*) y del momento (*M*) para los dos elementos. *Identifique* todos los valores críticos *N*, *V* y *M*, y también la *distancia* hasta los puntos donde cualquiera de las ordenadas críticas sea cero.

PROB. 4.5.39

4.5.40 El siguiente marco plano es parte de un sistema de autopista elevada. Los apoyos en *A* y *D* son fijos pero hay *alivios de momento* en la base de las dos columnas (*AB* y *DE*), así como en la columna *BC* y en el extremo de la viga *BE*.

Encuentre todas las reacciones de los apoyos, luego elabore diagramas de la fuerza axial (*N*), del cortante (*V*) y del momento (*M*) para todos los elementos de las columnas y las vigas. *Identifique* todos los puntos críticos *N*, *V* y *M*, y también la *distancia* hasta los puntos donde cualquiera de las ordenadas críticas sea cero.



PROB. 4.5.40



Las vigas son componentes esenciales de soporte de carga en la construcción moderna de edificios y puentes.

5

Esfuerzos en vigas (temas básicos)

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata de los esfuerzos y las deformaciones unitarias en vigas que tienen cargas aplicadas en el plano *xy*, que es un plano de simetría de la sección transversal, esto da como resultado las deflexiones de las vigas en ese mismo plano, lo que se conoce como *plano de flexión*. En la sección 5.2 se analiza la *flexión pura* (flexión de la viga ante un momento flexionante constante) y la *flexión no uniforme* (flexión en presencia de fuerzas cortantes). Veremos que las deformaciones unitarias y los esfuerzos en la viga están directamente relacionados con la *curvatura* κ de la curva de deflexión (sección 5.3). Se desarrollará una *relación deformación unitaria-curvatura* a partir de las consideraciones de las deformaciones unitarias desarrolladas en la viga durante la flexión; estas deformaciones unitarias varían linealmente con la distancia desde la superficie neutra de la viga (sección 5.4). Al combinar la ley de Hooke (que se aplica a materiales linealmente elásticos) con la relación deformación unitaria-curvatura, se determina que el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal. Como resultado, los ejes *x* y *y* son ejes centroidales principales. Al considerar el momento resultante de los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal, se deduce la *relación momento-curvatura* que relaciona la curvatura (κ) con el momento (M) y la rigidez flexional (EI). Esto conduce a la ecuación diferencial de la curva elástica de la viga, un tema de estudio en el capítulo 9 cuando se analicen con detalle las deflexiones en vigas. Sin embargo, de interés inmediato aquí son los esfuerzos en vigas y a continuación se utiliza la relación momento-curvatura para desarrollar la *fórmula de la flexión* (sección 5.5). Esta última muestra que los esfuerzos normales (σ_x) varían linealmente con la distancia (y) desde la superficie neutra y dependen del momento flexionante (M) y del momento de inercia (I) de la sección transversal. Luego, se define el módulo de sección (S) de la sección transversal de la viga y enseguida se emplea en el *diseño* de vigas en la sección 5.6. En el diseño de vigas utilizamos el momento flexionante máximo ($M_{máx}$) (obtenido del diagrama de momento flexionante (sección 4.5)) y el esfuerzo normal permisible para el material (σ_{perm}) para calcular el módulo de sección requerido, luego seleccionamos una viga apropiada de acero o madera de las tablas en los apéndices E y F. Si la viga no es prismática (sección 5.7), la fórmula de la flexión aún se aplica siempre que los cambios en la sección transversal sean graduales. Sin embargo, no podemos suponer que los esfuerzos máximos ocurrirán en la sección transversal con el momento flexionante máximo.

Para vigas en flexión no uniforme, se desarrollan esfuerzos normales y cortantes que se deben considerar en el análisis y el diseño. Los esfuerzos normales se calculan al emplear la *fórmula de la flexión*, como ya se indicó antes, y la *fórmula del cortante* se debe emplear para calcular los esfuerzos cortantes (τ) que varían sobre el peralte de la viga (secciones 5.8 y 5.9). Los esfuerzos normal y cortante máximos no ocurren en la misma ubicación a lo largo de una viga, pero en la mayor parte de los casos, los esfuerzos normales máximos controlan el diseño. Se consideran de manera especial los esfuerzos cortantes en vigas con patines (por ejemplo, perfiles W y C) (sección 5.10). Las *trabes armadas* fabricadas con dos o más piezas de material se deben concebir como si estuvieran hechas de una sola pieza y luego se diseñan las *conexiones* entre las partes (por ejemplo, clavos, pernos, soldaduras y pegamento) para asegurar que éstas sean lo suficientemente fuertes como para transmitir las fuerzas cortantes horizontales que actúan entre las partes de la viga (sección 5.11). Si los elementos estructurales se someten a la acción simultánea de cargas de flexión y axiales, y no son demasiado esbeltos para evitar el pandeo, los esfuerzos combinados se pueden obtener por superposición de los esfuerzos de flexión y de los esfuerzos axiales (sección 5.12). Por último, para las vigas con esfuerzos muy localizados debido a agujeros, ranuras u otros cambios abruptos en sus dimensiones, se deben considerar las *concentraciones de esfuerzos*, en especial para las vigas hechas con materiales frágiles o sometidas a cargas dinámicas (sección 5.13).

El capítulo 5 está organizado como sigue:

**Temas avanzados*

5.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior vimos que las cargas que actúan sobre una viga generan acciones internas (o *resultantes de esfuerzos*) en forma de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. En este capítulo damos un paso adelante e investigamos los *esfuerzos* y las *deformaciones unitarias* relacionadas con esas fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Si conocemos los esfuerzos y las deformaciones unitarias, podremos analizar y diseñar vigas sometidas a una variedad de condiciones de carga.

Las cargas que actúan sobre una viga ocasionan que ésta se curve (o *flexione*) y debido a esto deforman su eje en una curva. Como ejemplo, considere la viga en voladizo AB sometida a una carga P en el extremo libre (figura 5.1a). El eje inicialmente recto se dobla y adopta una forma curva (figura 5.1b), denominada **curva de deflexión** de la viga.

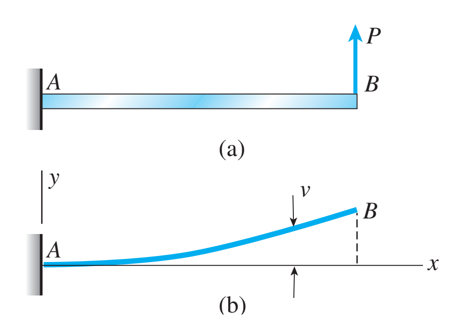


FIGURA 5.1 Flexión de una viga en voladizo: (a) viga con carga y (b) curva de deflexión.

Para fines de referencia, elaboramos un sistema de **ejes coordenados** (figura 5.1b) con el origen ubicado en un punto adecuado en el eje longitudinal de la viga. En esta ilustración, colocamos el origen en el apoyo fijo. El eje x positivo está dirigido hacia la derecha y el eje y positivo está dirigido hacia arriba. El eje z, que no se muestra en la figura, está dirigido hacia fuera (es decir, hacia el lector), de manera que los tres ejes forman un sistema coordenado derecho.

Las vigas consideradas en este capítulo (como las analizadas en el capítulo 4) se suponen simétricas con respecto al plano xy, lo que significa que el eje y es de simetría de la sección transversal. Además, todas las cargas deben actuar en el plano xy. En consecuencia, las deflexiones por flexión ocurren en este mismo plano, conocido como **plano de flexión**. Por tanto, la curva de deflexión que se muestra en la figura 5.1b es una curva plana que se encuentra en el plano de flexión.

La **deflexión** de la viga en cualquier punto a lo largo de su eje es el *desplazamiento* de ese punto desde su posición original, medido en la dirección y. Denotamos la deflexión con la letra v para distinguirla de la coordenada y (consulte la figura 5.1b).*

5.2 FLEXIÓN PURA Y FLEXIÓN NO UNIFORME

Al analizar vigas, con frecuencia es necesario distinguir entre flexión pura y flexión no uniforme. **Flexión pura** se refiere a la flexión de una viga ante un momento flexionante constante. Por tanto, la flexión pura ocurre sólo en regiones de una viga donde la fuerza cortante es cero (ya que $V = dM/dx$; consulte la ecuación 4.6). En contraste, **flexión no uniforme** se refiere a la flexión en presencia de fuerzas cortantes, lo cual significa que el momento flexionante cambia conforme nos movemos a lo largo del eje de la viga.

Como ejemplo de flexión pura considere una viga simple AB cargada por dos pares M_1 que tienen la misma magnitud pero que actúan en sentidos opuestos (figura 5.2a). Estas cargas producen un momento flexionante constante $M = M_1$ en toda la longitud de la viga, como lo muestra el diagrama de momento flexionante en la parte (b) de la figura. Observe

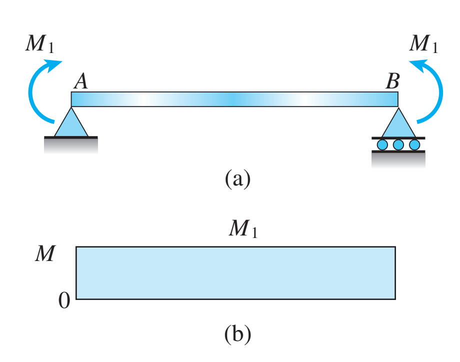


FIGURA 5.2 Viga simple en flexión pura ($M = M_1$).

*En mecánica aplicada, los símbolos tradicionales para los desplazamientos en las direcciones x, y y z son u, v y w, respectivamente.

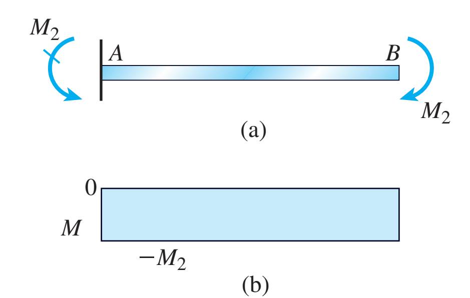


FIGURA 5.3 Viga en voladizo en flexión pura ($M = -M_2$).

que la fuerza cortante V es cero en todas las secciones transversales de la viga.

Otra ilustración de flexión pura se presenta en la figura 5.3a, donde la viga en voladizo AB está sometida a un par M_2 en el sentido de las manecillas del reloj en el extremo libre. No hay fuerzas cortantes en esta viga y el momento flexionante M es constante en toda su longitud. El momento flexionante es negativo ($M = -M_2$), como se muestra en el diagrama de momento flexionante en la parte (b) de la figura 5.3.

La viga simple cargada de manera simétrica de la figura 5.4a es un ejemplo de una viga que está parcialmente en flexión pura y parcialmente en flexión no uniforme, como se puede ver a partir de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante (figuras 5.4 b y c). La región central de la viga está en flexión pura debido a que la fuerza cortante es cero y el momento flexionante es constante. Las partes de la viga cerca de los extremos están en flexión no uniforme debido a la presencia de las fuerzas cortantes y a que los momentos flexionantes varían.

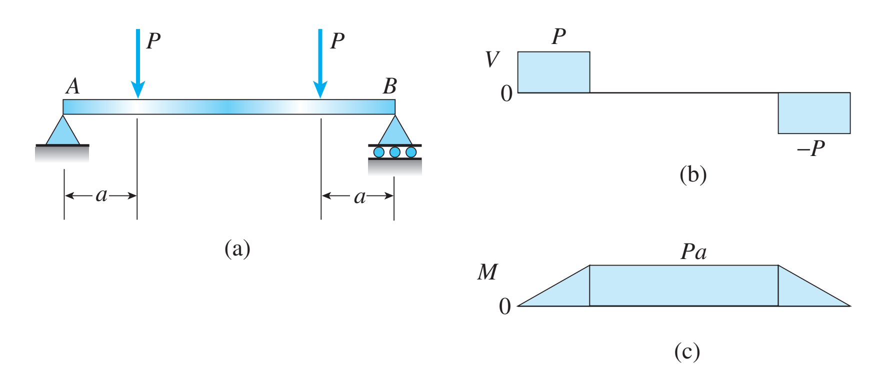


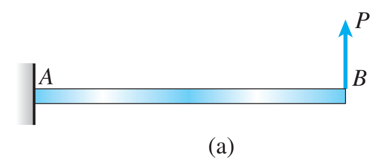
FIGURA 5.4 Viga simple con región central en flexión pura y regiones extremas en flexión no uniforme.

En las dos secciones siguientes investigaremos las deformaciones unitarias y los esfuerzos en vigas sometidas sólo a flexión pura. Por fortuna, a menudo podemos emplear los resultados obtenidos para flexión pura aun cuando estén presentes fuerzas cortantes, como se explica más adelante (consulte el último párrafo en la sección 5.8).

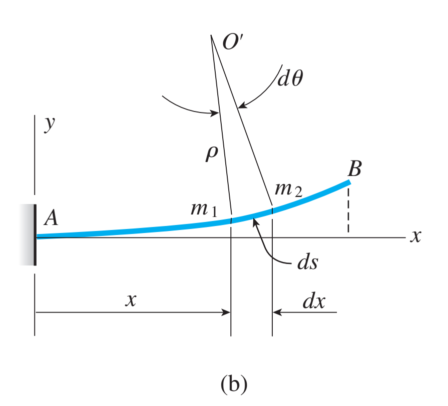
5.3 CURVATURA DE UNA VIGA

Cuando se aplican cargas a una viga, su eje longitudinal se deforma y adopta una forma curva, como se ilustró antes en la figura 5.1. Las deformaciones unitarias y los esfuerzos en la viga están directamente relacionados con la **curvatura** de la curva de deflexión.

Para ilustrar el concepto de curvatura, considere de nuevo una viga en voladizo sometida a una carga P que actúa en el extremo libre (consulte la figura 5.5a). La curva de deflexión de esta viga se muestra en la figura 5.5b. Para fines de análisis, identificamos dos puntos m_1 y m_2 en la curva de deflexión. El punto m_1 se selecciona a una distancia arbitraria x del eje y y el punto m_2 está ubicado a una distancia pequeña ds más alejada a lo largo de la curva. En cada uno de estos puntos trazamos una línea



(a)



(b)

FIGURA 5.5 Curvatura de una viga flexionada: (a) viga con carga y (b) curva de deflexión.

normal a la *tangente* de la curva de deflexión, es decir, normal a la propia curva. Estas normales se intersecan en el punto O', que es el **centro de curvatura** de la curva de deflexión. Como la mayoría de las vigas tienen deflexiones muy pequeñas y curvas de deflexión casi planas, es usual que el punto O' se ubique mucho más alejado de la viga de lo que se indica en la figura.

La distancia m_1O' desde la curva hasta el centro de curvatura se denomina **radio de curvatura** y se denota ρ (letra griega rho), y la **curvatura** se denota κ (letra griega kappa) y se define como el recíproco del radio de curvatura. Por tanto,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{5.1}$$

La curvatura es una medida de qué tan agudamente está flexionada una viga. Si la carga sobre una viga es pequeña, la viga será casi recta, el radio de curvatura será muy grande y la curvatura será muy pequeña. Si la carga se aumenta, la cantidad de flexión aumentará; el radio de curvatura será menor y la curvatura será mayor.

De la geometría del triángulo $O'm_1m_2$ (figura 5.5b) obtenemos

$$\rho \, d\theta = ds \tag{a}$$

en donde $d\theta$ (medido en radianes) es el ángulo infinitesimal entre las normales y ds es la distancia infinitesimal a lo largo de la curva entre los puntos m_1 y m_2. Al combinar la ecuación (a) con la ecuación (5.1), obtenemos

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{5.2}$$

Esta ecuación para la **curvatura** se deduce en libros de texto de cálculo y es válida para cualquier curva, sin importar la cantidad de curvatura; si ésta es *constante* en toda la longitud de una curva, el radio de curvatura también será constante y la curva será un arco de círculo.

Las deflexiones de una viga suelen ser muy pequeñas comparadas con su longitud (considere, por ejemplo, las deflexiones del chasis estructural de un automóvil o las de una viga en un edificio). Deflexiones pequeñas significan que la curva de deflexión es casi plana. En consecuencia, la distancia ds a lo largo de la curva se puede igualar con su proyección horizontal dx (consulte la figura 5.5b). En estas condiciones especiales de **deflexiones pequeñas**, la ecuación para la curvatura se transforma en

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \tag{5.3}$$

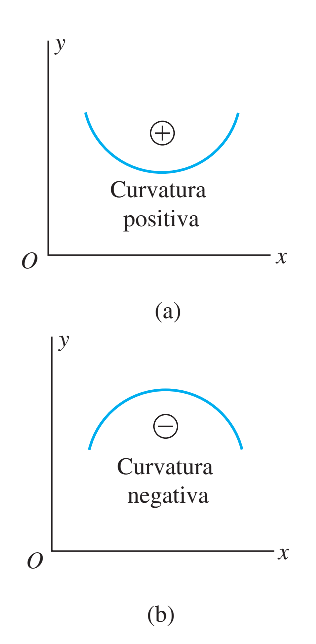


FIGURA 5.6 Convenciones de signos para la curvatura de una viga.

La curvatura y el radio de curvatura son funciones de la distancia *x* medida a lo largo del eje *x* y de aquí se deriva que la posición *O´* del centro de curvatura también depende de la distancia *x*.

En la sección 5.5 veremos que la curvatura en un punto particular en el eje *x* de una viga depende del momento flexionante en ese punto y de las propiedades de la viga (forma de la sección transversal y tipo de material). Por tanto, si la viga es prismática y el material es homogéneo, la curvatura variará sólo con el momento flexionante. En consecuencia, una viga en *flexión pura* tendrá una curvatura constante y una viga en *flexión no uniforme* tendrá una curvatura variable.

La **convención de signos para la curvatura** depende de la orientación de los ejes coordenados. Si el eje *x* es positivo hacia la derecha y el eje *y* es positivo hacia arriba, como se muestra en la figura 5.6, entonces la curvatura es positiva cuando la viga se flexiona cóncava hacia arriba y el centro de curvatura está arriba de la viga. De manera inversa, la curvatura es negativa cuando la viga se flexiona convexa hacia abajo y el centro de curvatura está debajo de la viga.

En la siguiente sección veremos cómo las deformaciones unitarias longitudinales en una viga flexionada se determinan a partir de su curvatura y en el capítulo 9 estudiaremos cómo la curvatura está relacionada con las deflexiones de las vigas.

5.4 DEFORMACIONES UNITARIAS LONGITUDINALES EN VIGAS

Las deformaciones unitarias longitudinales en una viga se pueden determinar analizando la curvatura de la viga y las deformaciones unitarias correspondientes. Para este fin, consideremos una parte *AB* de una viga en flexión pura sometida a momentos flexionantes positivos *M* (figura 5.7a). Suponemos que la viga inicialmente tiene un eje longitudinal recto (el eje *x* en la figura) y que su sección transversal es simétrica con respecto al eje *y*, como se muestra en la figura 5.7b.

Bajo la acción de los momentos flexionantes, la viga se flexiona en el plano *xy* (el plano de flexión) y su eje longitudinal se flexiona en una curva circular (curva *ss* en la figura 5.7c). La viga se flexiona con la concavidad hacia arriba, que es una curvatura positiva (figura 5.6a).

Las **secciones transversales de la viga,** como las secciones *mm* y *pq* en la figura 5.7a, permanecen planas y normales al eje longitudinal (figura 5.7c). El hecho de que las secciones transversales de una viga en flexión pura permanezcan planas es tan fundamental para la teoría de vigas que a menudo se le conoce como suposición. Sin embargo, también la podríamos llamar teorema, debido a que se puede demostrar empleando rigurosamente sólo argumentos racionales basados en simetría (referencia 5.1). El punto básico es que la simetría de la viga y su carga (figuras 5.7a y b) significan que todos los elementos de la viga (como el elemento *mpqn*) deben deformarse de una manera idéntica, lo cual es posible sólo si las secciones transversales permanecen planas durante la flexión (figura 5.7c). Esta conclusión es válida para vigas de cualquier material, sea elástico o inelástico, lineal o no lineal. Por supuesto, las propiedades del material, al igual que las dimensiones, deben ser simétricas con respecto al plano de flexión.

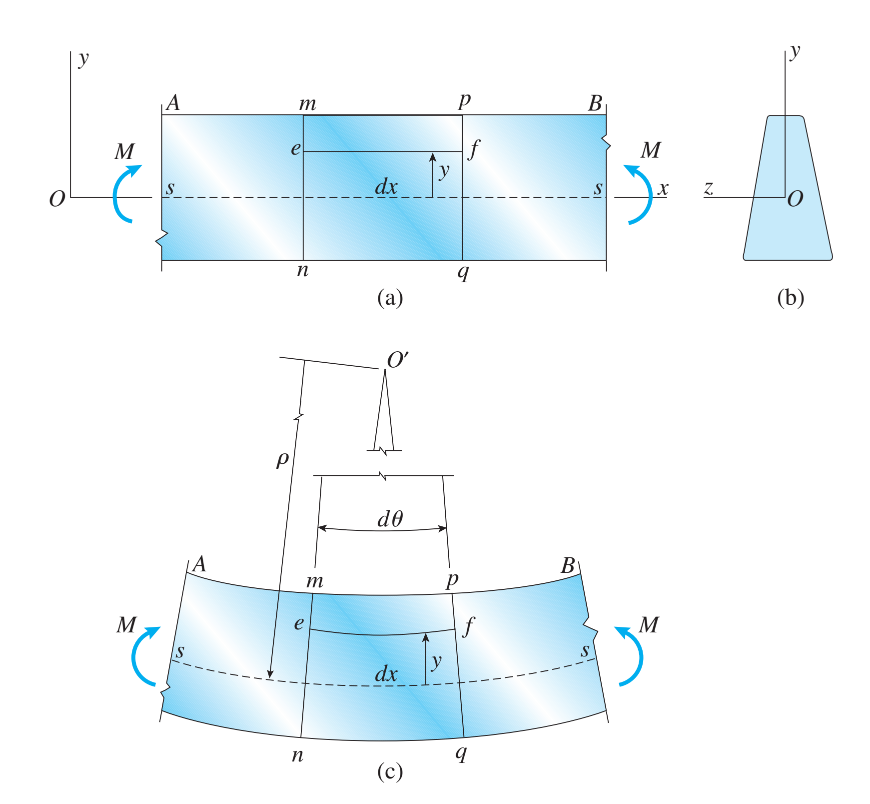


FIGURA 5.7 Deformaciones de una viga en flexión pura: (a) vista lateral de la viga, (b) sección transversal de la viga y (c) viga deformada.

(*Nota:* si bien una sección transversal plana en flexión pura permanece plana, aún puede haber deformaciones en el propio plano. Dichas deformaciones se deben a los efectos de la relación de Poisson, como se explica al final de este análisis).

Debido a las deformaciones por flexión que se muestran en la figura 5.7c, las secciones transversales *mn* y *pq* giran respecto de sí mismas alrededor de ejes perpendiculares al plano *xy*. Las líneas longitudinales en la parte inferior de la viga se alargan, en tanto que las de la parte superior se acortan. Por tanto, la parte inferior de la viga está en tensión y la parte superior está en compresión. En algún punto entre la parte superior y la inferior de la viga está una superficie en donde las líneas longitudinales no cambian su longitud. Esta superficie, indicada con la línea discontinua *ss* en las figuras 5.7a y c, se denomina **superficie neutra** de la viga. Su intersección con cualquier plano de la sección transversal se denomina **eje neutro** de la sección transversal; por ejemplo, el eje z es el eje neutro para la sección transversal de la figura 5.7b.

Los planos que contienen las secciones transversales *mn* y *pq* en la viga deformada (figura 5.7c) se intersecan en una línea que pasa por el centro de curvatura O'. El ángulo entre estos planos se denota $d\theta$ y la distancia desde O' hasta la superficie neutra *ss* es el radio de curvatura ρ. La distancia inicial dx entre los dos planos (figura 5.7a) no cambia en la superficie neutra (figura 5.7c), por tanto $\rho d\theta = dx$. Sin embargo, todas las otras líneas longitudinales entre los dos planos o se alargan o se acortan, y debido a esto desarrollan **deformaciones unitarias normales ϵ_x.**

Para evaluar estas deformaciones unitarias normales, considere una línea longitudinal común *ef* ubicada dentro de la viga entre los planos *mn* y *pq* (figura 5.7a). Identificamos la línea *ef* por su distancia *y* desde la superficie neutra en la viga inicialmente recta. Por tanto, ahora estamos suponiendo que el eje *x* yace a lo largo de la superficie neutra de la viga *sin deformar*. Por supuesto, cuando la viga se flexiona, la superficie neutra se mueve con la viga, pero el eje *x* permanece fijo en posición. No obstante, la línea longitudinal *ef* en la viga flexionada (figura 5.7c) aún está ubicada a la mis-ma distancia *y* desde la superficie neutra. Así, la longitud L_1 de la línea *ef* después que tiene lugar la flexión es

$$L_1 = (\rho - y)\, d\theta = dx - \frac{y}{\rho} dx$$

en donde sustituimos $d\theta = dx/\rho$.

Como la longitud original de la línea *ef* es dx, se deduce que su alargamiento es $L_1 - dx$ o $-ydx/\rho$. La *deformación unitaria longitudinal* correspondiente es igual al alargamiento dividido entre la longitud inicial dx; por tanto, la **relación deformación unitaria-curvatura** es

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \qquad (5.4)$$

donde κ es la curvatura (consulte la ecuación 5.1).

La ecuación anterior muestra que las deformaciones unitarias longitudinales en la viga son proporcionales a la curvatura y varían linealmente con la distancia *y* desde la superficie neutra. Cuando el punto en consideración está arriba de la superficie neutra, la distancia *y* es positiva. Si la curvatura también es positiva (como en la figura 5.7c), entonces ϵ_x será una deformación unitaria negativa, que representa un acortamiento. En contraste, si el punto en consideración está debajo de la superficie neutra, la deformación unitaria ϵ_x también será positiva, representando un alargamiento. Observe que la **convención de signos** para ϵ_x es la misma que se empleó para las deformaciones unitarias normales en capítulos anteriores, a saber, el alargamiento es positivo y el acortamiento es negativo.

La ecuación (5.4) para las deformaciones unitarias normales en una viga se dedujo únicamente a partir de la geometría de la viga deformada, las propiedades del material no se consideraron en el análisis. Por tanto, *las deformaciones unitarias en una viga en flexión pura varían linealmente con la distancia desde la superficie neutra sin importar la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria del material*.

El siguiente paso en nuestro análisis, es determinar los esfuerzos a partir de las deformaciones unitarias, lo cual requiere el uso de la *curva esfuerzo-deformación unitaria*. Este paso se describe en la siguiente sección para materiales linealmente elásticos y en la sección 6.10 para materiales elastoplásticos.

Las deformaciones unitarias longitudinales en una viga van acompañadas por *deformaciones unitarias transversales* (es decir, deformaciones unitarias normales en las direcciones y y z) debido a los efectos de la relación de Poisson. Sin embargo, no hay esfuerzos transversales acompañantes ya que las vigas tienen libertad para deformarse lateralmente. Esta condición de esfuerzo es análoga a la de una barra prismática en tensión o compresión y, por tanto, los *elementos longitudinales en una viga en flexión pura están en un estado de esfuerzo uniaxial*.

Ejemplo 5.1

Una viga de acero simplemente apoyada AB (figura 5.8a) con longitud $L = 8.0$ ft y altura $h = 6.0$ in se flexiona por pares M_0 en un arco circular con una deflexión hacia abajo δ en el centro del claro (figura 5.8b). La deformación unitaria longitudinal (alargamiento) sobre la superficie inferior de la viga es 0.00125 y la distancia desde la superficie neutra hasta la superficie inferior de la viga es 3.0 in.

Determine el radio de curvatura ρ, la curvatura κ y la deflexión δ de la viga.

Nota: esta viga tiene una deflexión relativamente grande debido a que su longitud es grande en comparación con su altura ($L/h = 16$) y la deformación unitaria de 0.00125 también es grande. (Es aproximadamente igual que la deformación de fluencia para el acero estructural ordinario.)

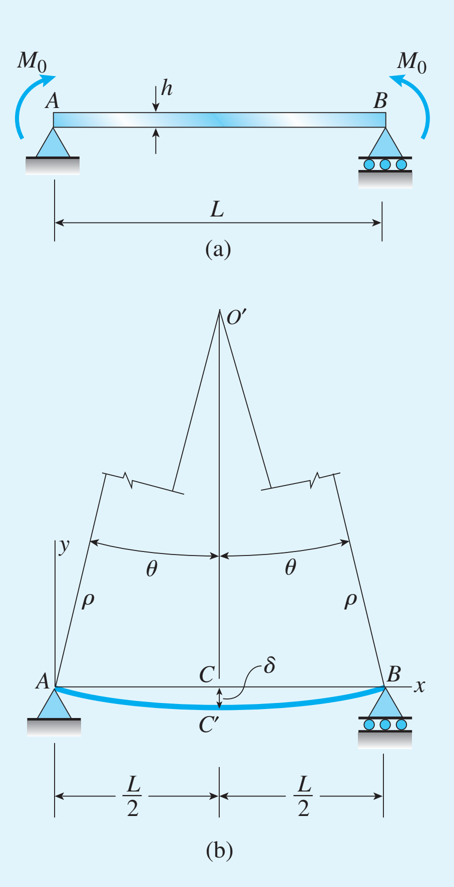


FIGURA 5.8 Ejemplo 5.1. Viga en flexión pura: (a) viga con cargas y (b) curva de deflexión.

continúa

Solución

Curvatura. Como conocemos la deformación unitaria longitudinal en la superficie inferior de la viga (ϵ_x = 0.00125) y puesto que también conocemos la distancia desde la superficie neutra hasta la superficie inferior (y = –3.0 in), podemos utilizar la ecuación (5.4) para calcular el radio de curvatura y la curvatura. Reacomodando la ecuación (5.4) y sustituyendo valores numéricos, obtenemos

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{-3.0 \text{ in}}{0.00125} = 2400 \text{ in} = 200 \text{ ft} \qquad \kappa = \frac{1}{\rho} = 0.0050 \text{ ft}^{-1}$$

Estos resultados muestran que el radio de curvatura es extremadamente grande comparado con la longitud de la viga aun cuando la deformación unitaria en el material es grande. Si, como es usual, la deformación unitaria es menor, el radio de curvatura es incluso mayor.

Deflexión. Como se destacó en la sección 5.3, un momento flexionante constante (flexión pura) produce una curvatura constante en toda la longitud de una viga. Por tanto, la curva de deflexión es un arco circular. En la figura 5.8b observamos que la distancia desde el centro de curvatura O' hasta el punto medio C' de la viga flexionada es el radio de curvatura ρ y la distancia desde O' hasta el punto C en el eje x es $\rho \cos \theta$, donde θ es el ángulo $BO'C$. Esto conduce a la siguiente expresión para la deflexión en el centro del claro de la viga:

$$\delta = \rho(1 - \cos \theta) \tag{5.5}$$

Para una curva casi plana podemos suponer que la distancia entre los apoyos es la misma que la longitud de la propia viga. Por lo tanto, del triángulo $BO'C$ obtenemos

$$\text{sen}\, \theta = \frac{L/2}{\rho} \tag{5.6}$$

Sustituyendo valores numéricos, obtenemos

$$\text{sen}\, \theta = \frac{(8.0 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})}{2(2400 \text{ in})} = 0.0200$$

y

$$\theta = 0.0200 \text{ rad} = 1.146°$$

Observe que para fines prácticos podemos considerar sen θ y θ (radianes) como numéricamente iguales debido a que θ es un ángulo muy pequeño.

Ahora sustituimos los valores numéricos en la ecuación (5.5) para la deflexión y obtenemos

$$\delta = \rho(1 - \cos \theta) = (2400 \text{ in.})(1 - 0.999800) = 0.480 \text{ in}$$

Esta deflexión es muy pequeña comparada con la longitud de la viga, como se muestra por la razón entre la longitud del claro y la deflexión:

$$\frac{L}{\delta} = \frac{(8.0 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})}{0.480 \text{ in}} = 200$$

De esta manera, hemos confirmado que la curva de deflexión es casi plana a pesar de las deformaciones unitarias grandes. Por supuesto, en la figura 5.8b por claridad la deflexión de la viga está muy exagerada.

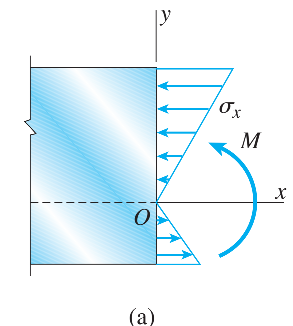
Nota: el objetivo de este ejemplo es mostrar las magnitudes relativas del radio de curvatura, de la longitud de la viga y su deflexión. Sin embargo, el método empleado para determinar la deflexión tiene poco valor práctico debido a que está limitado a flexión pura, lo que produce una forma flexionada circular. En el capítulo 9 se presentan métodos más útiles para determinar deflexiones en vigas.

5.5 ESFUERZOS NORMALES EN VIGAS (MATERIALES LINEALMENTE ELÁSTICOS)

En la sección anterior investigamos las deformaciones unitarias longitudinales ϵ_x en una viga en flexión pura (consulte la ecuación 5.4 y la figura 5.7). Como los elementos longitudinales de una viga están sometidos sólo a tensión o compresión, podemos utilizar la **curva esfuerzo-deformación unitaria** del material para determinar los esfuerzos a partir de las deformaciones unitarias. Los esfuerzos actúan sobre toda la sección transversal de la viga y varían en intensidad dependiendo de la forma del diagrama esfuerzo-deformación unitaria y de las dimensiones de la sección transversal. Como la dirección x es longitudinal (figura 5.7a), empleamos el símbolo σ_x para denotar estos esfuerzos.

La relación esfuerzo-deformación unitaria más común encontrada en la ingeniería es la ecuación para un **material linealmente elástico.** Para esos materiales sustituimos la ley de Hooke para esfuerzo uniaxial ($\sigma = E\epsilon$) en la ecuación (5.4) y obtenemos

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y \qquad (5.7)$$



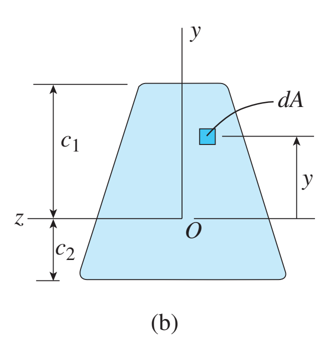


FIGURA 5.9 Esfuerzos normales en una viga de material linealmente elástico: (a) vista lateral de la viga que muestra la distribución de los esfuerzos normales y (b) sección transversal de la viga que muestra el eje z como el eje neutro de la sección transversal.

Esta ecuación demuestra que los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal varían linealmente con la distancia y desde la superficie neutra. Esta distribución del esfuerzo se representa en la figura 5.9a para el caso en que el momento flexionante M es positivo y la viga se flexiona con una curvatura positiva.

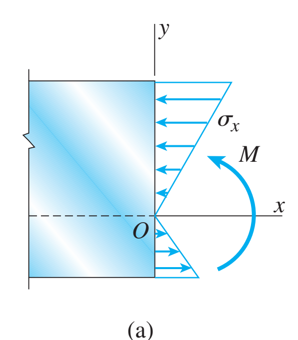
Cuando la curvatura es positiva, los esfuerzos σ_x son negativos (compresión) arriba de la superficie neutra y positivos (tensión) debajo de ella. En la figura los esfuerzos de compresión se indican por flechas que apuntan *hacia* la sección transversal y los esfuerzos de tensión se indican por flechas que apuntan *contrarias* a la sección transversal.

Para que la ecuación (5.7) sea de valor práctico, debemos ubicar el origen de las coordenadas de manera que podamos determinar la distancia y. En otras palabras, debemos localizar el eje neutro de la sección transversal. También necesitamos obtener una relación entre la curvatura y el momento flexionante de modo que podamos sustituirla en la ecuación (5.7) y obtener una ecuación que relacione los esfuerzos con el momento flexionante. Estos dos objetivos se pueden lograr determinando la resultante de los esfuerzos σ_x que actúan sobre la sección transversal.

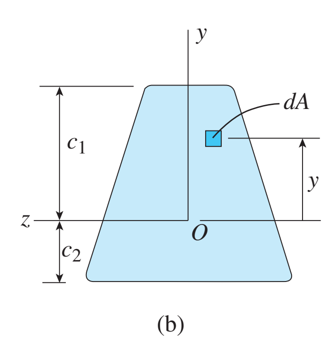
En general, la **resultante de los esfuerzos normales** consiste de dos resultantes de esfuerzo: (1) una fuerza que actúa en la dirección x y (2) un par flexionante que actúa alrededor del eje z. Sin embargo, podemos escribir las ecuaciones siguientes de la estática: (1) la fuerza resultante en la dirección x es igual a cero y (2) el momento resultante es igual al momento flexionante M. La primera ecuación proporciona la ubicación del eje neutro y la segunda da la relación momento-curvatura.

Ubicación del eje neutro

Para obtener la primera ecuación de la estática, consideramos un elemento de área dA en la sección transversal (figura 5.9b). El elemento está ubicado a una distancia y desde el eje neutro y, por lo tanto, el esfuerzo σ_x que actúa



(a)



(b)

FIGURA 5.9 (Repetida.)

sobre el elemento está dado por la ecuación (5.7). La *fuerza* que actúa sobre el elemento es igual a $\sigma_x dA$ y es de compresión cuando y es positiva. Como no hay una fuerza resultante que actúe sobre la sección transversal, la integral de $\sigma_x dA$ sobre el área A de toda la sección transversal debe desaparecer; por tanto, la *primera ecuación de la estática* es

$$\int_A \sigma_x dA = -\int_A E\kappa y\, dA = 0 \qquad \text{(a)}$$

Como la curvatura κ y el módulo de elasticidad E son constantes diferentes de cero en cualquier sección transversal de una viga flexionada, no intervienen en la integración sobre el área de la sección transversal. Por tanto, podemos omitirlos en la ecuación y obtenemos

$$\int_A y\, dA = 0 \qquad (5.8)$$

Esta ecuación establece que el primer momento del área de la sección transversal, evaluado con respecto al eje z, es cero. En otras palabras, el eje z debe pasar por el centroide de la sección transversal.*

Como el eje z también es el eje neutro, hemos llegado a la siguiente conclusión importante: *el eje neutro pasa por el centroide del área de la sección transversal cuando el material obedece la ley de Hooke y no hay una fuerza axial que actúe sobre la sección transversal.* Esta observación hace relativamente simple determinar la posición del eje neutro.

Como se explicó en la sección 5.1, nuestro análisis está limitado a vigas para las cuales el eje y es de simetría. En consecuencia, el eje y también pasa por el centroide. Por lo tanto, llegamos a la siguiente conclusión adicional: *el origen O de las coordenadas* (figura 5.9b) *está ubicado en el centroide del área de la sección transversal*.

Como el eje y es un eje de simetría de la sección transversal, se deduce que es un *eje principal* (consulte el capítulo 12, sección 12.9, para ver un análisis de los ejes principales). Ya que el eje z es perpendicular al eje y, también es un eje principal. Por tanto, cuando una viga de material linealmente elástico se somete a flexión pura, *los ejes* y *y* z *son ejes centroidales principales*.

Relación momento-curvatura

La *segunda ecuación de la estática* expresa el hecho de que el momento resultante de los esfuerzos normales σ_x que actúan sobre la sección transversal es igual al momento flexionante M (figura 5.9a). El elemento de fuerza $\sigma_x dA$ que actúa sobre el elemento de área dA (figura 5.9b) lo hace en la dirección positiva del eje x cuando σ_x es positivo y en la dirección negativa cuando σ_x es negativo. Como el elemento dA está ubicado arriba del eje neutro, un esfuerzo positivo σ_x que actúa sobre ese elemento produce un

*Los centroides y los momentos estáticos de áreas se analizan en el capítulo 12, secciones 12.2 y 12.3.

elemento de momento igual a $\sigma_x ydA$. Este elemento de momento actúa en sentido opuesto al momento flexionante positivo M que se muestra en la figura 5.9a. Por tanto, el momento elemental es

$$dM = -\sigma_x y\, dA$$

La integral de todos estos momentos elementales sobre toda el área de la sección transversal A debe ser igual al momento flexionante:

$$M = -\int_A \sigma_x y\, dA \tag{b}$$

o, al sustituir σ_x en la ecuación (5.7),

$$M = \int_A \kappa E y^2\, dA = \kappa E \int_A y^2\, dA \tag{5.9}$$

Esta ecuación relaciona la curvatura de la viga con el momento flexionante M.

En virtud de que la integral en la ecuación anterior es una propiedad del área de la sección transversal, es conveniente reescribir la ecuación como sigue:

$$M = \kappa EI \tag{5.10}$$

en donde

$$I = \int_A y^2\, dA \tag{5.11}$$

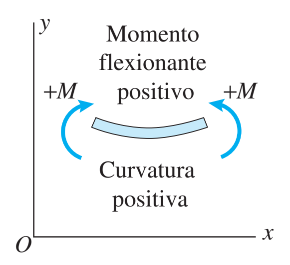
Esta integral es el **momento de inercia** del área de la sección transversal con respecto al eje z (es decir, con respecto al eje neutro). Los momentos de inercia siempre son positivos y tienen dimensiones de longitud a la cuarta potencia; por ejemplo, las unidades inglesas comunes son in^4 y las unidades SI ordinarias son mm^4 cuando se realizan cálculos de vigas.*

Ahora se puede reacomodar la ecuación (5.10) para expresar la *curvatura* en términos del momento flexionante en la viga:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{5.12}$$

Conocida como la **ecuación momento-curvatura,** la ecuación (5.12) muestra que la curvatura es directamente proporcional al momento flexionante M e inversamente proporcional a la cantidad EI, que se denomina **rigidez a la flexión** de la viga. La rigidez a la flexión es una medida de la resistencia de una viga a la flexión, es decir, entre mayor sea la rigidez, menor será la curvatura para un momento flexionante dado.

Al comparar la **convención de signos** para momentos flexionantes (figura 4.5) con la de la curvatura (figura 5.6), observamos que *un momento flexionante positivo produce una curvatura positiva y un momento flexionante negativo produce una curvatura negativa* (consulte la figura 5.10).



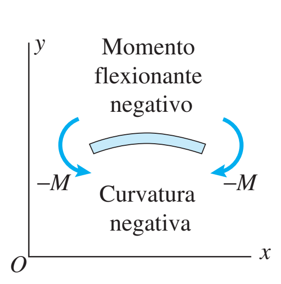


FIGURA 5.10 Relaciones entre signos de momentos flexionantes y signos de curvaturas.

*Los momentos de inercia de áreas se analizan en el capítulo 12, sección 12.4.

Fórmula de la flexión

Ahora que hemos ubicado el eje neutro y deducido la relación momento-curvatura podemos determinar los esfuerzos en términos del momento flexionante. Al sustituir la expresión para la curvatura (ecuación 5.12) en la expresión para el esfuerzo σ_x (ecuación 5.7), obtenemos

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{5.13}$$

Esta ecuación, llamada **fórmula de la flexión**, indica que los esfuerzos son directamente proporcionales al momento flexionante M e inversamente proporcionales al momento de inercia I de la sección transversal. Además, los esfuerzos varían linealmente con la distancia y desde el eje neutro, como se señaló antes. Los esfuerzos calculados con la fórmula de la flexión se denominan **esfuerzos de flexión** o **esfuerzos flexionales.**

Si el momento flexionante en la viga es positivo, los esfuerzos de flexión serán positivos (tensión) sobre la parte de la sección transversal donde y es negativa, es decir, sobre la parte inferior de la viga. Los esfuerzos en la parte superior de la viga serán negativos (compresión). Si el momento flexionante es negativo, los esfuerzos se invertirán. Estas relaciones se muestran en la figura 5.11.

Esfuerzos máximos en una sección transversal

Los esfuerzos flexionantes de tensión y de compresión máximos que actúan en cualquier sección transversal dada ocurren en los puntos más alejados del eje neutro. Denotemos con c_1 y c_2 las distancias desde el eje neutro hasta los elementos extremos en las direcciones y positiva y negativa, respectivamente (consulte las figuras 5.9b y 5.11). Entonces los **esfuerzos normales máximos** σ_1 y σ_2 (de la fórmula de la flexión) son

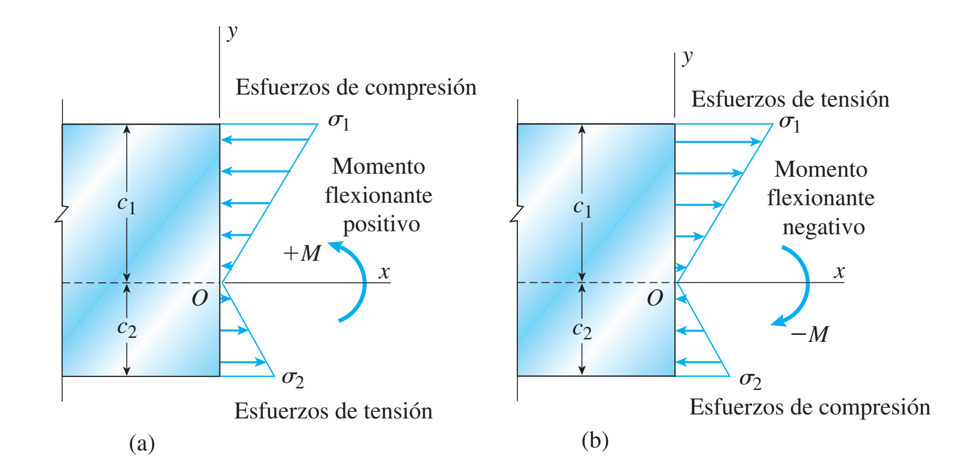


FIGURA 5.11 Relaciones entre los signos de momento flexionante y las direcciones de los esfuerzos normales: (a) momento flexionante positivo y (b) momento flexionante negativo.

$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1} \qquad \sigma_2 = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M}{S_2} \tag{5.14a,b}$$

en donde

$$S_1 = \frac{I}{c_1} \qquad S_2 = \frac{I}{c_2} \tag{5.15a,b}$$

Las cantidades S_1 y S_2 se conocen como **módulos de sección** del área de la sección transversal. De las ecuaciones (5.15a y b) observamos que cada módulo de sección tiene dimensiones de longitud a la tercera potencia (por ejemplo, in^3 o mm^3). Observe que las distancias c_1 y c_2 hasta la parte superior e inferior de la viga siempre se toman como cantidades positivas.

La ventaja de expresar los esfuerzos máximos en términos de los módulos de sección parte del hecho de que cada módulo de sección combina las propiedades relevantes de la sección transversal de la viga en una sola cantidad. Luego esta cantidad se puede listar en tablas y manuales como una propiedad de la viga, lo que es muy conveniente para los diseñadores. (El diseño de vigas empleando módulos de sección se explica en la sección siguiente.)

Secciones doblemente simétricas

Si la sección transversal de una viga es simétrica con respecto al eje z así como al eje y (*sección transversal doblemente simétrica*), entonces $c_1 = c_2 = c$ y los esfuerzos máximos de tensión y compresión son numéricamente iguales:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{Mc}{I} = -\frac{M}{S} \quad \text{o} \quad \sigma_{máx} = \frac{M}{S} \tag{5.16a,b}$$

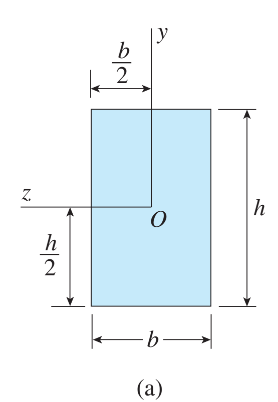
en donde

$$S = \frac{I}{c} \tag{5.17}$$

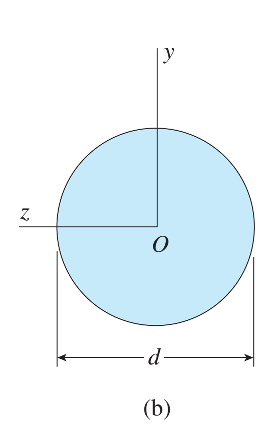
es el único módulo de sección para la sección transversal.

Para una viga con **sección transversal rectangular** con ancho b y peralte h (figura 5.12a), el momento de inercia y el módulo de sección son

$$I = \frac{bh^3}{12} \qquad S = \frac{bh^2}{6} \tag{5.18a,b}$$



(a)



(b)

FIGURA 5.12 Secciones transversales doblemente simétricas.

Para una **sección transversal circular** con diámetro d (figura 5.12b), estas propiedades son

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \qquad S = \frac{\pi d^3}{32} \qquad (5.19a,b)$$

Las propiedades de otras secciones doblemente simétricas, como tubos huecos (rectangulares o bien circulares) y perfiles con patines anchos, se pueden obtener fácilmente a partir de las fórmulas anteriores.

Propiedades de secciones transversales de vigas

Los momentos de inercia de muchas figuras planas se listan en el apéndice D para tener una referencia conveniente. Además, las dimensiones y propiedades de tamaños estándar de vigas de acero y madera se listan en los apéndices E y F, y en muchos manuales de ingeniería, como se explica con más detalle en la sección siguiente.

Para otros perfiles de sección transversal podemos determinar la ubicación del eje neutro, el momento de inercia y los módulos de sección mediante un cálculo directo, utilizando las técnicas que se describen en el capítulo 12. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.4.

Limitaciones

El análisis presentado en esta sección es para flexión pura de vigas prismáticas compuestas de materiales homogéneos linealmente elásticos. Si una viga se somete a flexión no uniforme, las fuerzas cortantes producirán alabeo (o distorsión fuera del plano) de las secciones transversales. Por tanto, una sección transversal que era plana antes de la flexión ya no lo es después de experimentarla. El alabeo debido a deformaciones por cortante complica en gran medida el comportamiento de la viga. Sin embargo, investigaciones detalladas demuestran que los esfuerzos normales calculados con la fórmula de la flexión no se alteran de manera significativa por la presencia de esfuerzos cortantes y del alabeo asociado (referencia 2.1, pp. 42 y 48). Por lo que podemos justificar el uso de la teoría de la flexión pura para calcular los esfuerzos normales en vigas sometidas a flexión no uniforme.[*]

La fórmula de la flexión da resultados que sólo son exactos en regiones de la viga donde la distribución de esfuerzo no se interrumpe por cambios en la forma de la viga o por discontinuidades en la carga. Por ejemplo, la fórmula de la flexión no es aplicable cerca de los apoyos de una viga o cerca de una carga concentrada. Esas irregularidades producen esfuerzos localizados, o *concentraciones de esfuerzos*, que son mucho mayores que los obtenidos con la fórmula de la flexión (consulte la sección 5.13).

---

[*]La teoría de vigas comenzó con Galileo Galilei (1564-1642), quien investigó el comportamiento de varios tipos de vigas. Su trabajo en mecánica de materiales está descrito en su famoso libro *Dos nuevas ciencias*, publicado por primera vez en 1638 (referencia 5.2). Si bien Galileo hizo muchos descubrimientos importantes con respecto a vigas, no obtuvo la distribución de esfuerzo que empleamos en la actualidad. Progresos posteriores en teoría de vigas los hicieron Mariotte, Jacob Bernoulli, Euler, Parent, Saint-Venant y otros (referencia 5.3).

Ejemplo 5.2

Un alambre de acero de alta resistencia con diámetro d se dobla alrededor de un tambor cilíndrico con radio R_0 (figura 5.13).

Determine el momento flexionante M y el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en el alambre, suponiendo $d = 4$ mm y $R_0 = 0.5$ m. (El alambre de acero tiene un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y un límite proporcional $\sigma_{p1} = 1200$ MPa.)

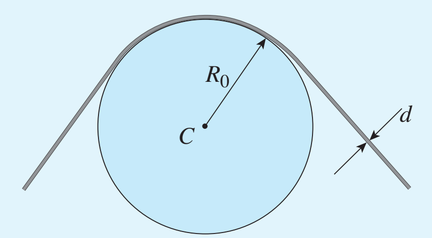


FIGURA 5.13 Ejemplo 5.2. Alambre doblado alrededor de un tambor.

Solución

El primer paso en este ejemplo es determinar el radio de curvatura ρ del alambre doblado. Luego, conociendo ρ, podemos encontrar el momento flexionante y el esfuerzo máximo.

Radio de curvatura. El radio de curvatura del alambre doblado es la distancia desde el centro del tambor hasta el eje neutro de la sección transversal del alambre:

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2} \tag{5.20}$$

Momento flexionante. El momento flexionante en el alambre se puede determinar a partir de la relación momento-curvatura (ecuación 5.12):

$$M = \frac{EI}{\rho} = \frac{2EI}{2R_0 + d} \tag{5.21}$$

en donde I es el momento de inercia del área de la sección transversal del alambre. Al sustituir I en términos del diámetro d del alambre (ecuación 5.19a), obtenemos

$$M = \frac{\pi E d^4}{32(2R_0 + d)} \tag{5.22}$$

continúa

Este resultado se obtuvo sin considerar el *signo* del momento flexionante, ya que la dirección de la flexión es obvia en la figura.

Esfuerzos de flexión máximos. Los esfuerzos máximos de tensión y compresión, que son numéricamente iguales, se obtienen con la fórmula de la flexión según se da por la ecuación (5.16b):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{S}$$

en donde S es el módulo de sección para una sección transversal circular. Al sustituir M de la ecuación (5.22) y S de la ecuación (5.19b), obtenemos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Ed}{2R_0 + d} \tag{5.23}$$

Este mismo resultado se puede obtener de manera directa de la ecuación (5.7) al reemplazar y con $d/2$ y sustituir ρ de la ecuación (5.20).

Al inspeccionar la figura 5.13 observamos que el esfuerzo es de compresión sobre la parte inferior (o interna) del alambre y de tensión en la parte superior (o externa).

Resultados numéricos. Ahora sustituimos los datos numéricos dados en las ecuaciones (5.22) y (5.23) y obtenemos los siguientes resultados:

$$M = \frac{\pi E d^4}{32(2R_0 + d)} = \frac{\pi(200 \text{ GPa})(4 \text{ mm})^4}{32[2(0.5 \text{ m}) + 4 \text{ mm}]} = 5.01 \text{ N·m}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Ed}{2R_0 + d} = \frac{(200 \text{ GPa})(4 \text{ mm})}{2(0.5 \text{ m}) + 4 \text{ mm}} = 797 \text{ MPa}$$

Observe que $\sigma_{\text{máx}}$ es menor que el límite de proporcionalidad del alambre de acero y, por tanto, los cálculos son válidos.

Nota: como el radio del tambor es grande comparado con el diámetro del alambre podemos ignorar con seguridad d en comparación con $2R_0$ en los denominadores de las expresiones para M y $\sigma_{\text{máx}}$. Entonces las ecuaciones (5.22) y (5.23) producen los siguientes resultados:

$$M = 5.03 \text{ N·m} \qquad \sigma_{\text{máx}} = 800 \text{ MPa}$$

Estos resultados están en el lado conservador y difieren en menos de 1 por ciento de los valores más precisos.

Ejemplo 5.3

Una viga simple AB con claro $L = 22$ ft (figura 5.14a) soporta una carga uniforme con intensidad $q = 1.5$ k/ft y una carga concentrada $P = 12$ k. La carga uniforme incluye un margen para el peso propio de la viga. La carga concentrada actúa en un punto a 9.0 ft del extremo izquierdo de la viga, la cual está hecha de madera laminada pegada y tiene una sección transversal con ancho $b = 8.75$ in y altura $h = 27$ in (figura 5.14b).

Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga debidos a la flexión.

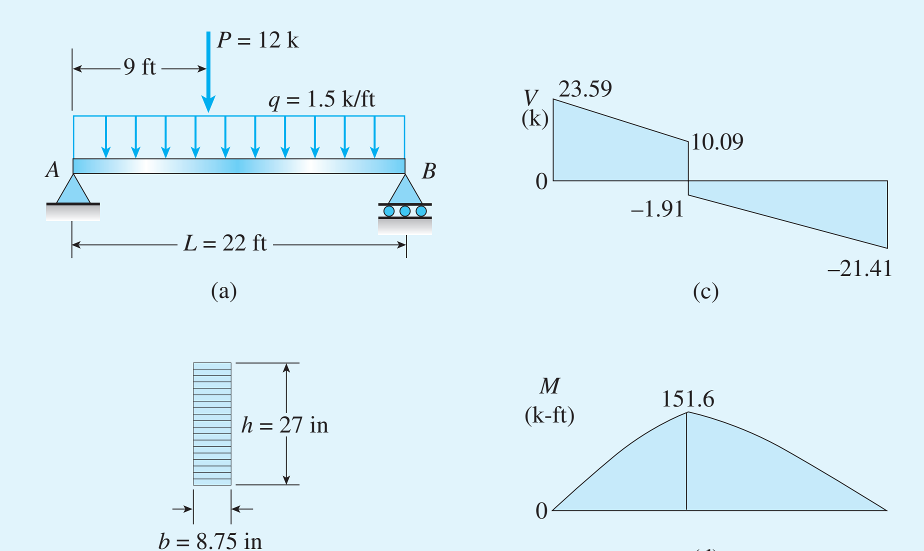


FIGURA 5.14 Ejemplo 5.3. Esfuerzos en una viga simple.

Solución

Reacciones, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Iniciamos el análisis calculando las reacciones en los apoyos A y B, empleando las técnicas descritas en el capítulo 4. Los resultados son

$$R_A = 23.59 \text{ k} \qquad R_B = 21.41 \text{ k}$$

Al conocer las reacciones, podemos elaborar el diagrama de fuerza cortante, como se muestra en la figura 5.14c. Observe que la fuerza cortante cambia de positiva a negativa debajo de la carga concentrada P, que está a una distancia de 9 ft del apoyo izquierdo.

continúa

A continuación dibujamos el diagrama de momento flexionante (figura 5.14d) y determinamos el momento flexionante máximo, que ocurre debajo de la carga concentrada donde la fuerza cortante cambia de signo. El momento máximo es

$$M_{\text{máx}} = 151.6 \text{ k-ft}$$

Los esfuerzos de flexión máximos en la viga se tienen en la sección transversal con momento máximo.

Módulo de sección. El módulo se sección del área de la sección transversal se calcula con la ecuación (5.18b), como sigue:

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6}(8.75 \text{ in})(27 \text{ in})^2 = 1063 \text{ in}^3$$

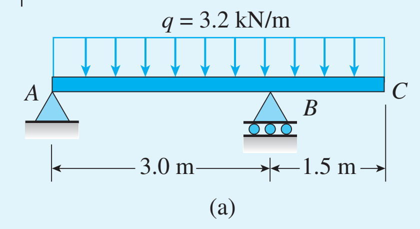
Esfuerzos máximos. Los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, se obtienen con la ecuación (5.16a):

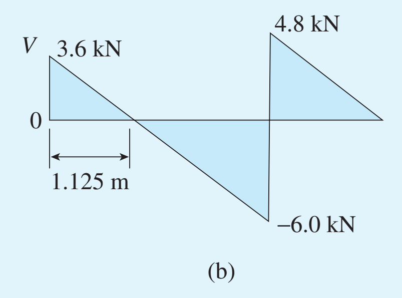
$$\sigma_t = \sigma_2 = \frac{M_{\text{máx}}}{S} = \frac{(151.6 \text{ k-ft})(12 \text{ in./ft})}{1063 \text{ in}^3} = 1710 \text{ psi}$$

$$\sigma_c = \sigma_1 = -\frac{M_{\text{máx}}}{S} = -1710 \text{ psi}$$

Como el momento flexionante es positivo, el esfuerzo máximo de tensión sucede en la parte inferior de la viga y el esfuerzo máximo de compresión se tiene en la parte superior de la viga.

Ejemplo 5.4





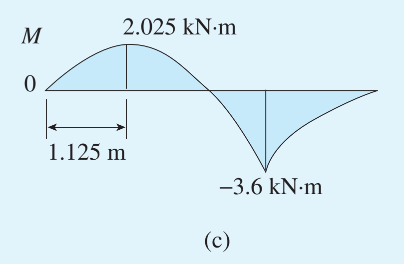


FIGURA 5.15 Ejemplo 5.4. Esfuerzos en una viga con una saliente.

La viga *ABC* que se muestra en la figura 5.15a tiene apoyos simples en *A* y *B*, y un voladizo de *B* a *C*. La longitud del claro es 3.0 m y la longitud del voladizo es 1.5 m. Una carga uniforme con intensidad $q = 3.2$ kN/m actúa en toda la longitud de la viga (4.5 m).

La viga tiene una sección transversal con forma de canal con ancho $b = 300$ mm y altura $h = 80$ mm (figura 5-16a). El espesor del alma es $t = 12$ mm y el espesor promedio de los patines inclinados es el mismo. Con objeto de calcular las propiedades de la sección transversal, suponga que ésta consiste en tres rectángulos, como se muestra en la figura 5.16b.

Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga debidos a la carga uniforme.

Solución

Reacciones, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Comenzamos el análisis de esta viga calculando las reacciones en los apoyos *A* y *B*, utilizando las técnicas descritas en el capítulo 4. Los resultados son

$$R_A = 3.6 \text{ kN} \qquad R_B = 10.8 \text{ kN}$$

A partir de estos valores, dibujamos el diagrama de fuerza cortante (figura 5.15b). Observe que la fuerza cortante cambia de signo y es igual a cero en dos ubicaciones: (1) a una distancia de 1.125 m desde el apoyo izquierdo y (2) en la reacción derecha.

Enseguida dibujamos el diagrama de momento flexionante, como se muestra en la figura 5.15c. Los dos momentos flexionantes máximos positivo y negativo se presentan en las secciones transversales donde la fuerza cortante cambia de signo. Estos momentos máximos son

$$M_{\text{pos}} = 2.025 \text{ kN·m} \qquad M_{\text{neg}} = -3.6 \text{ kN·m}$$

respectivamente.

Eje neutro de la sección transversal (figura 5.16b). El origen *O* de las coordenadas *yz* está ubicado en el centroide del área de la sección transversal y, por tanto, el eje *x* se convierte en el eje neutro de la sección transversal. El centroide se determina empleando las técnicas descritas en el capítulo 12, sección 12.3, como sigue.

Primero, dividimos el área en tres rectángulos (A_1, A_2 y A_3). Segundo, establecemos un eje de referencia *Z-Z* a través del borde superior de la sección transversal y designamos y_1 y y_2 como las distancias desde el eje *Z-Z* hasta los centroides de

continúa

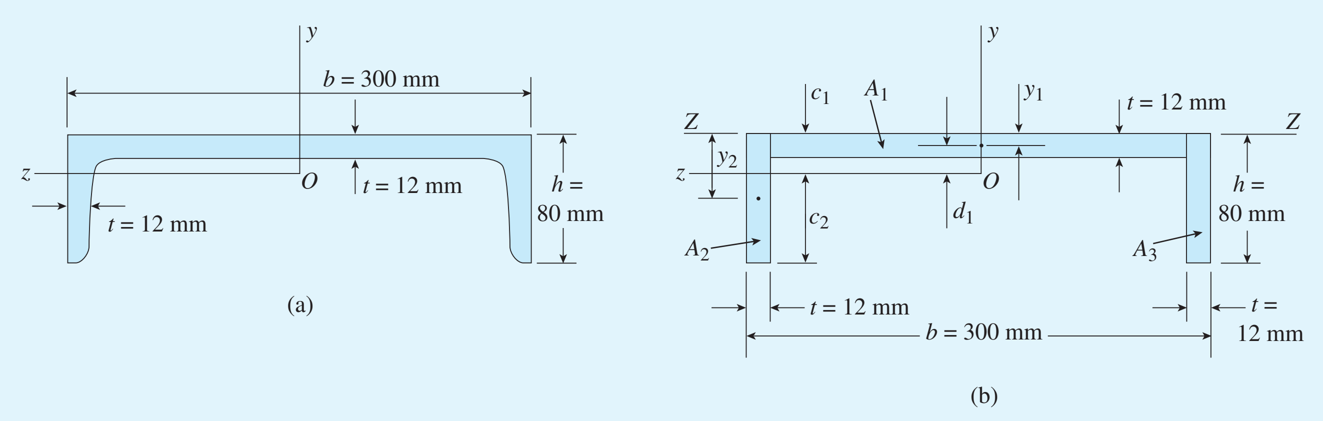


FIGURA 5.16 Sección transversal de la viga analizada en el ejemplo 5.4. (a) Perfil real y (b) perfil idealizado para uso en el análisis (el espesor de la viga está exagerado por claridad).

las áreas A_1 y A_2, respectivamente. Entonces los cálculos para ubicar el centroide de todo el canal (distancias c_1 y c_2) son los siguientes:

Área 1: $y_1 = t/2 = 6 \text{ mm}$
$A_1 = (b - 2t)(t) = (276 \text{ mm})(12 \text{ mm}) = 3312 \text{ mm}^2$

Área 2: $y_2 = h/2 = 40 \text{ mm}$
$A_2 = ht = (80 \text{ mm})(12 \text{ mm}) = 960 \text{ mm}^2$

Área 3: $y_3 = y_2 \qquad A_3 = A_2$

$$c_1 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + 2y_2 A_2}{A_1 + 2A_2}$$

$$= \frac{(6 \text{ mm})(3312 \text{ mm}^2) + 2(40 \text{ mm})(960 \text{ mm}^2)}{3312 \text{ mm}^2 + 2(960 \text{ mm}^2)} = 18.48 \text{ mm}$$

$$c_2 = h - c_1 = 80 \text{ mm} - 18.48 \text{ mm} = 61.52 \text{ mm}$$

De esta manera se determina la posición del eje neutro (el eje z).

Momento de inercia. A fin de calcular los esfuerzos a partir de la fórmula de la flexión, debemos determinar el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje neutro. Estos cálculos requieren el uso del teorema del eje paralelo (consulte el capítulo 12, sección 12.5).

Iniciando con el área A_1, obtenemos su momento de inercia (I_z) con respecto al eje z con la ecuación

$$(I_z)_1 = (I_c)_1 + A_1 d_1^2 \qquad \text{(c)}$$

En esta ecuación, $(I_c)_1$ es el momento de inercia del área A_1 con respecto a su propio eje centroidal:

$$(I_c)_1 = \frac{1}{12}(b-2t)(t)^3 = \frac{1}{12}(276 \text{ mm})(12 \text{ mm})^3 = 39{,}744 \text{ mm}^4$$

y d_1 es la distancia desde el eje centroidal del área A_1 hasta el eje z:

$$d_1 = c_1 - t/2 = 18.48 \text{ mm} - 6 \text{ mm} = 12.48 \text{ mm}$$

Por tanto, el momento de inercia del área A_1 con respecto al eje z (según la ecuación c) es

$$(I_z)_1 = 39{,}744 \text{ mm}^4 + (3312 \text{ mm}^2)(12.48 \text{ mm}^2) = 555{,}600 \text{ mm}^4$$

Continuando de la misma manera para las áreas A_2 y A_3, obtenemos

$$(I_z)_2 = (I_z)_3 = 956{,}600 \text{ mm}^4$$

Por tanto, el momento de inercia centroidal I_z de toda el área de la sección transversal es

$$I_z = (I_z)_1 + (I_z)_2 + (I_z)_3 = 2.469 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Módulos de sección. Los módulos de sección para la parte superior e inferior de la viga, respectivamente, son

$$S_1 = \frac{I_z}{c_1} = 133{,}600 \text{ mm}^3 \qquad S_2 = \frac{I_z}{c_2} = 40{,}100 \text{ mm}^3$$

(consulte las ecuaciones 5.15a y b). Determinadas las propiedades de la sección transversal, ahora podemos calcular los esfuerzos máximos con las ecuaciones (5.14a y b).

Esfuerzos máximos. En la sección transversal con momento flexionante máximo positivo, el esfuerzo de tensión máximo ocurre en la parte inferior de la viga (σ_2) y el esfuerzo de compresión máximo se tiene en la parte superior de la viga (σ_1). Entonces, de las ecuaciones (5.14b) y (5.14a), respectivamente, obtenemos

$$\sigma_t = \sigma_2 = \frac{M_{\text{pos}}}{S_2} = \frac{2.025 \text{ kN·m}}{40{,}100 \text{ mm}^3} = 50.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_1 = -\frac{M_{\text{pos}}}{S_1} = -\frac{2.025 \text{ kN·m}}{133{,}600 \text{ mm}^3} = -15.2 \text{ MPa}$$

De manera similar, los esfuerzos máximos en la sección con momento negativo máximo son

$$\sigma_t = \sigma_1 = -\frac{M_{\text{neg}}}{S_1} = -\frac{-3.6 \text{ kN·m}}{133{,}600 \text{ mm}^3} = 26.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_2 = \frac{M_{\text{neg}}}{S_2} = \frac{-3.6 \text{ kN·m}}{40{,}100 \text{ mm}^3} = -89.8 \text{ MPa}$$

Al comparar estos cuatro esfuerzos se ve que el esfuerzo de tensión máximo en la viga es 50.5 MPa y ocurre en la parte inferior de la viga en la sección transversal con momento flexionante máximo positivo; por tanto,

$$(\sigma_t)_{\text{máx}} = 50.5 \text{ MPa}$$

El esfuerzo de compresión máximo es –89.8 MPa y ocurre en la parte inferior de la viga en la sección transversal con momento máximo negativo:

$$(\sigma_c)_{\text{máx}} = -89.8 \text{ MPa}$$

De esta manera hemos determinado los esfuerzos de flexión máximos debidos a la carga uniforme que actúa sobre la viga.

5.6 DISEÑO DE VIGAS PARA ESFUERZOS DE FLEXIÓN



FIGURA 5.17 Un soldador fabrica una viga de acero grande con un patín ancho. (Cortesía de AISC.)

El proceso de diseño de una viga requiere que se consideren muchos factores, incluyendo el tipo de estructura (aeroplano, automóvil, puente, edificio, etcétera), los materiales que se emplearán, las cargas que se soportarán, las condiciones ambientales que se tendrán y los costos por pagar. Sin embargo, desde el punto de vista de la resistencia, al final la tarea se reduce a seleccionar la forma y el tamaño de la viga de manera que los esfuerzos reales en ésta no excedan los esfuerzos permisibles para el material. En esta sección sólo consideraremos los esfuerzos de flexión (es decir, los que se obtienen con la fórmula de la flexión, ecuación 5.13). Más adelante consideraremos los efectos de los esfuerzos cortantes (secciones 5.8, 5.9 y 5.10) y las concentraciones de esfuerzos (sección 5.13).

Al diseñar una viga para resistir esfuerzos cortantes, es usual iniciar calculando el **módulo de sección requerido**. Por ejemplo, si la viga tiene una sección transversal doblemente simétrica y los esfuerzos permisibles son iguales tanto en tensión como en compresión, podemos calcular el módulo requerido dividiendo el momento flexionante máximo entre el esfuerzo de flexión permisible para el material (consulte la ecuación 5.16):

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.24}$$

El esfuerzo permisible se basa en las propiedades del material y en el factor de seguridad deseado. Para tener seguridad que no se sobrepasa este esfuerzo, debemos elegir una viga que proporcione un módulo de sección al menos tan grande como el obtenido con la ecuación (5.24).

Si la sección transversal no es doblemente simétrica, o si los esfuerzos permisibles son diferentes para tensión y compresión, es usual que se necesite determinar dos módulos de sección requeridos; uno basado en tensión y el otro en compresión. Luego debemos proporcionar una viga que satisfaga ambos criterios.

Para minimizar peso y ahorrar material, es común seleccionar una viga que tenga la menor área de sección transversal pero que aún proporcione los módulos de sección necesarios (y también que cumpla con otros requisitos de diseño que se puedan imponer).

Las vigas se construyen con una gran variedad de formas y tamaños para satisfacer una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, las vigas de acero muy grandes se fabrican mediante la unión por soldadura de varias piezas (figura 5.17), las vigas de aluminio se extruyen como tubos redondos o rectangulares, las vigas de madera se pegan para adecuarlas a requisitos especiales y las vigas de concreto reforzado se cuelan con cualquier forma deseada mediante la construcción apropiada de la cimbra.

Además, las vigas de acero, aluminio, plástico y madera se pueden ordenar en **formas y tamaños estándar** de catálogos suministrados por vendedores y fabricantes. Entre los perfiles estructurales de amplia disponibilidad se incluyen las vigas de patín ancho, las vigas I, los ángulos, las vigas rectangulares y los tubos.

Vigas con perfiles y tamaños estandarizados

Las dimensiones y propiedades de muchos tipos de vigas aparecen en los manuales de ingeniería. Por ejemplo, en Estados Unidos los perfiles y tamaños de vigas de acero estructural están estandarizados por el American Institute of Steel Construction (AISC), que publica manuales con las propiedades en unidades inglesas y SI (referencia 5.4). Las tablas en estos manuales incluyen dimensiones de la sección transversal y propiedades como peso, área de la sección transversal, momento de inercia y módulo de sección.

Las propiedades de las vigas de aluminio y madera se presentan de una manera similar y se encuentran en publicaciones de la Aluminum Association (referencia 5.5) y de la American Forest and Paper Association (referencia 5. 6).

En los apéndices E y F se dan tablas condensadas de vigas de acero y vigas de madera para su uso en la solución de problemas con unidades inglesas y del SI.

Los **perfiles de acero estructural** reciben una designación como W 30 $\times$ 211 en unidades inglesas, que significa que el perfil tiene forma W (también se denominado perfil con patín ancho) con profundidad nominal de 30 in y un peso de 211 lb por ft de longitud (consulte la tabla E-1(a), apéndice E). Las propiedades correspondientes para cada perfil W también se dan en unidades SI en la tabla E.1(b). Por ejemplo, en unidades SI, el perfil W 30 $\times$ 211 se lista como W 760 $\times$ 314 con profundidad nominal de 760 milímetros y masa de 314 kilogramos por metro de longitud.

Se utilizan designaciones similares para los perfiles S (también denominados vigas I) y perfiles C (también denominados canales), como se muestra en las tablas E.2(a) y E.3(a) en unidades inglesas y en las tablas E.2(b) y E.3(b) en unidades SI. Los perfiles en ángulo, o perfiles L, se designan por las longitudes de las dos lados y el espesor (consulte las tablas E.4 y E.5). Por ejemplo, L 8 $\times$ 6 $\times$ 1 (consulte la tabla E.5(a)) denota un ángulo con lados desiguales, uno con longitud de 8 in y el otro con longitud de 6 in, con un espesor de 1 in. La identificación correspondiente en unidades SI para este ángulo con lados desiguales es L 203 $\times$ 152 $\times$ 25.4 (consulte la tabla E.5(b)).

Las secciones de acero estandarizadas descritas antes se fabrican mediante el proceso de *laminado*, un proceso en que una palanquilla de acero caliente se pasa una y otra vez entre rodillos hasta que adquiere la forma deseada.

Los **perfiles de aluminio estructural** usualmente se hacen mediante el proceso de *extrusión*, en el que una palanquilla caliente se empuja, o extruye, a través de un dado conformador. Como los dados son relativamente fáciles de hacer y el material es trabajable, las vigas de aluminio se pueden extruir casi con cualquier forma deseada. Los perfiles estándar de vigas con patín ancho, vigas I, canales, ángulos, tubos y otras secciones se listan en el *Aluminum Design Manual* (referencia 5.5). Además, se pueden ordenar perfiles fabricados a la medida.

La mayor parte de las **vigas de madera** tienen sección transversal rectangular y se designan por sus dimensiones nominales, como 4 $\times$ 8 pulg. Estas dimensiones representan el tamaño aserrado sin desbastar de la madera. Las dimensiones netas (o reales) de una viga de madera son menores que las dimensiones nominales si los lados de la madera aserrada se *cepillan* para darles una apariencia lisa. Por tanto, una viga de madera de 4 $\times$ 8 tiene

dimensiones reales de 3.5 × 7.25 in después de cepillarla. Por supuesto, es obvio que se deben emplear las dimensiones netas de la madera cepillada en todos los cálculos ingenieriles. Por tanto, las dimensiones netas y las propiedades correspondientes (en unidades inglesas) se dan en el apéndice E, donde también se presentan tablas similares en unidades SI.

Eficiencia relativa de varias formas de vigas

Uno de los objetivos al diseñar una viga es usar el material de la manera más eficiente posible dentro de las restricciones impuestas por la función, la apariencia, los costos de manufactura y similares. Desde el punto de vista sólo de la resistencia, la eficiencia en flexión depende principalmente de la forma de la sección transversal. En particular, la viga más eficiente es aquella en la que el material se ubica tan lejos como sea práctico del eje neutro. Entre más alejada del eje neutro esté una cantidad dada de material, mayor será el módulo de sección, y entre más grande sea el módulo de sección, mayor será el momento flexionante que se puede resistir (para un esfuerzo permisible dado).

Como ejemplo, considere una sección transversal en forma de **rectángulo** con ancho b y altura h (figura 5.18a). El módulo de sección (de la ecuación 5.18b) es

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0.167Ah \qquad (5.25)$$

donde A denota el área de la sección transversal. Esta ecuación muestra que una sección transversal rectangular con área dada se hace más eficiente conforme la altura h aumenta (y el ancho b se disminuye para mantener constante el área). Por supuesto, hay un límite práctico para el aumento en la altura, porque la viga se hace lateralmente inestable cuando la razón entre la altura y el ancho se hace demasiado grande. Por tanto, una viga con una sección transversal muy angosta fallará debido a pandeo lateral (en sus lados) en vez de por resistencia insuficiente del material.

A continuación comparemos una **sección transversal circular sólida** de diámetro d (figura 5.18b) con una sección transversal cuadrada con la misma área. El lado h de un cuadrado con la misma área que el círculo es $h = (d/2)\sqrt{\pi}$. Los módulos de sección correspondientes (de las ecuaciones 5.18b y 5.19b) son

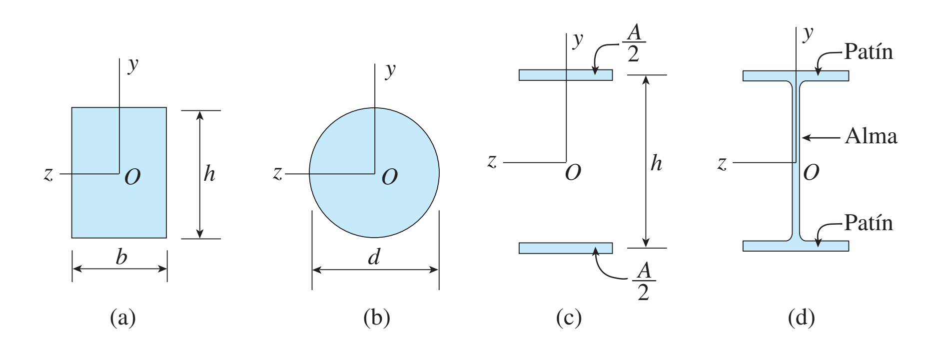


FIGURA 5.18 Formas de secciones transversales para vigas.

$$S_{\text{cuadrado}} = \frac{h^3}{6} = \frac{\pi\sqrt{\pi}d^3}{48} = 0.1160d^3 \tag{5.26a}$$

$$S_{\text{círcular}} = \frac{\pi d^3}{32} = 0.0982d^3 \tag{5.26b}$$

de donde obtenemos

$$\frac{S_{\text{cuadrada}}}{S_{\text{círcular}}} = 1.18 \tag{5.27}$$

Este resultado muestra que una viga con sección transversal cuadrada es más eficiente para resistir la flexión que una viga circular con la misma área. La razón, por supuesto, es que el círculo tiene una cantidad relativamente mayor de material ubicada cerca del eje neutro. Este material se esfuerza menos, y por tanto no contribuye mucho a la resistencia de la viga.

La **forma ideal de la sección transversal** para una viga con área A transversal dada y altura h se obtendría colocando la mitad del área a una distancia $h/2$ arriba del eje neutro y la otra mitad a una distancia $h/2$ abajo del eje neutro, como se muestra en la figura 5.18c. Para esta forma ideal obtenemos

$$I = 2\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ah^2}{4} \qquad S = \frac{I}{h/2} = 0.5Ah \tag{5.28a,b}$$

Estos límites teóricos son aproximados en la práctica por secciones de patín ancho y secciones I, que tienen la mayoría de su material en los patines (figura 5.18d). Para vigas estándar de patín ancho, el módulo de sección es aproximadamente

$$S \approx 0.35Ah \tag{5.29}$$

que es menor que el ideal pero mucho mayor que el módulo de sección para una sección transversal rectangular con la misma área y altura (consulte la ecuación 5.25).

Otra característica deseable de una viga de patín ancho es su mayor anchura, y por ende mayor estabilidad con respecto al pandeo lateral, cuando se compara con una viga rectangular con la misma altura y módulo de sección. Por otro lado, hay límites prácticos de la esbeltez del alma de una viga de patín ancho. Si el alma es demasiado delgada, será susceptible al pandeo localizado o puede estar sobreesforzada en cortante, un tema que se analiza en la sección 5.10.

Los cuatro ejemplos siguientes ilustran el proceso de selección de una viga con base en los esfuerzos permisibles. En estos ejemplos sólo se consideran los efectos de los esfuerzos de flexión (obtenidos con la fórmula de la flexión).

Nota: al resolver ejemplos y problemas que requieren seleccionar una viga de acero o madera de las tablas en el apéndice, utilizamos la regla siguiente: *si hay varias opciones en una tabla, seleccione la viga más ligera que proporcione el módulo de sección requerido*.

Ejemplo 5.5

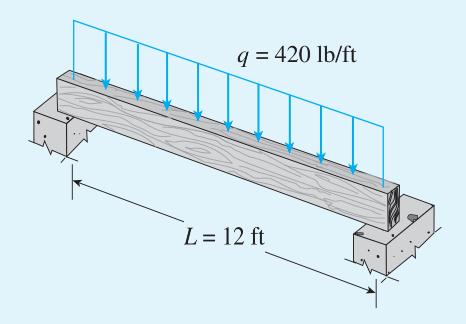


FIGURA 5.19 Ejemplo 5.5. Diseño de una viga de madera simplemente apoyada.

Una viga de madera simplemente apoyada con un claro $L = 12$ ft soporta una carga uniforme $q = 420$ lb/ft (figura 5.19). El esfuerzo de flexión permisible es 1800 psi, la madera tiene peso específico de 35 lb/ft^3 y la viga está soportada lateralmente contra pandeo lateral y volteo.

Seleccione un tamaño adecuado para la viga de la tabla en el apéndice F.

Solución

Como no sabemos de antemano cuánto pesa la viga, procederemos mediante ensayo y error como sigue: (1) calculamos el módulo de sección requerido con base en la carga uniforme dada, (2) seleccionamos un tamaño de prueba para la viga, (3) sumamos el peso de la viga a la carga uniforme y calculamos un nuevo módulo de sección requerido y (4) verificamos si la viga seleccionada aún es satisfactoria. Si no lo es, seleccionamos una más grande y repetimos el proceso.

(1) El momento flexionante máximo en la viga ocurre a la mitad del claro (consulte la ecuación 4.15):

$$M_{\text{máx}} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(420 \text{ lb/ft})(12 \text{ ft})^2 (12 \text{ in/ft})}{8} = 90{,}720 \text{ lb-in}$$

El módulo de sección requerido (ecuación 5-24) es

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{90{,}720 \text{ lb-in}}{1800 \text{ psi}} = 50.40 \text{ in}^3$$

(2) De la tabla en el apéndice F vemos que la viga más ligera que proporciona un módulo de sección de al menos 50.40 in^3 con respecto al eje 1-1 es una de 3×12 in (dimensiones nominales). Esta viga tiene un módulo de sección igual a 52.73 in^3 y pesa 6.8 lb/ft. (Observe que en el apéndice F se dan los pesos de vigas con base en un peso específico de 35 lb/ft^3).

(3) La carga uniforme sobre la viga ahora es de 426.8 lb/ft y el módulo de sección correspondiente es

$$S = (50.40 \text{ in}^3)\left(\frac{426.8 \text{ lb/ft}}{420 \text{ lb/ft}}\right) = 51.22 \text{ in}^3$$

(4) La viga seleccionada anteriormente tiene un módulo de sección de 52.73 in^3, que es mayor que el módulo requerido de 51.22 in^3.

Por lo tanto, una viga de 3×12 in es adecuada. 

Nota: si el peso específico de la madera es diferente a 35 lb/ft^3, podemos obtener el peso de la viga por pie lineal multiplicando el valor en la última columna en el apéndice F por la razón entre el peso específico real y 35 lb/ft^3.

Ejemplo 5.6

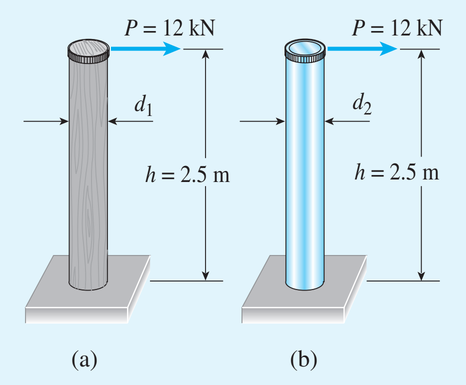


FIGURA 5.20 Ejemplo 5.6. (a) Poste sólido de madera y (b) tubo de aluminio.

Un poste vertical con altura de 2.5 metros soporta una carga lateral $P = 12$ kN en su extremo superior (figura 5.20). Se proponen dos diseños, un poste sólido de madera y un tubo hueco de aluminio.

(a) ¿Cuál es el diámetro mínimo requerido d_1 del poste de madera si el esfuerzo de flexión permisible en la madera es 15 MPa?

(b) ¿Cuál es el diámetro exterior mínimo requerido d_2 del tubo de aluminio si su espesor de pared será un octavo del diámetro exterior y el esfuerzo de flexión permisible en el aluminio es 50 MPa?

Solución

Momento flexionante máximo. El momento máximo ocurre en la base del poste y es igual a la carga P multiplicada por la altura h; por tanto,

$$M_{\text{máx}} = Ph = (12 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) = 30 \text{ kN·m}$$

(a) *Poste de madera*. El módulo de sección requerido S_1 para el poste de madera (consulte las ecuaciones 5.19b y 5.24) es

$$S_1 = \frac{\pi d_1^3}{32} = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{30 \text{ kN·m}}{15 \text{ MPa}} = 0.0020 \text{ m}^3 = 2 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Despejando el diámetro, obtenemos

$$d_1 = 273 \text{ mm}$$

El diámetro seleccionado para el poste de madera debe ser igual a o mayor que 273 mm para no exceder el esfuerzo permisible.

(b) *Tubo de aluminio*. Para determinar el módulo de sección S_2 para el tubo, primero debemos encontrar el momento de inercia I_2 de la sección transversal. El espesor de la pared del tubo es $d_2/8$ y, por tanto, el diámetro interno es $d_2 - d_2/4$, o $0.75d_2$. Por tanto, el momento de inercia (consulte la ecuación 5.19a) es

$$I_2 = \frac{\pi}{64}\left[d_2^4 - (0.75d_2)^4\right] = 0.03356d_2^4$$

Ahora obtenemos el módulo de sección del tubo de la ecuación (5.17) como sigue:

$$S_2 = \frac{I_2}{c} = \frac{0.03356d_2^4}{d_2/2} = 0.06712d_2^3$$

El módulo de sección requerido se obtiene con la ecuación (5.24):

$$S_2 = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{30 \text{ kN·m}}{50 \text{ MPa}} = 0.0006 \text{ m}^3 = 600 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Igualando las dos expresiones anteriores para el módulo de sección, podemos despejar el diámetro exterior requerido:

$$d_2 = \left(\frac{600 \times 10^3 \text{ mm}^3}{0.06712}\right)^{1/3} = 208 \text{ mm}$$

El diámetro interior correspondiente es 0.75(208 mm), o 156 mm.

Ejemplo 5.7

Una viga simple AB con un claro de 21 ft debe soportar una carga uniforme q = 2000 lb/ft distribuida a lo largo de la viga de la manera que se muestra en la figura 5.21a.

Considerando la carga uniforme y el peso de la viga, y utilizando también un esfuerzo de flexión permisible de 18,000 psi, seleccionamos una viga de acero estructural con un perfil de patín ancho para soportar las cargas.

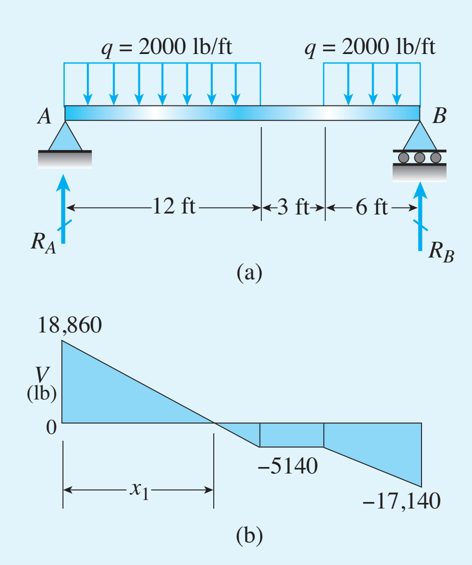


FIGURA 5.21 Ejemplo 5.7. Diseño de una viga simple con cargas uniformes parciales.

Solución

En este ejemplo, procederemos de la manera siguiente: (1) encontraremos el momento flexionante máximo en la viga debido a la carga uniforme, (2) conociendo el momento máximo, determinamos el módulo de sección requerido, (3) seleccionamos una viga de patín ancho de prueba de la tabla E.1 en el apéndice E y obtenemos el peso de la viga, (4) conociendo el peso, calculamos un valor nuevo del momento flexionante y un valor nuevo del módulo de sección y (5) determinamos si la viga seleccionada aún es satisfactoria. Si no lo es, seleccionamos un tamaño nuevo de la viga y repetimos el proceso hasta que determinemos un tamaño satisfactorio.

Momento flexionante máximo. Como ayuda para ubicar la sección transversal con momento flexionante máximo, elaboramos el diagrama de fuerza cortante (figura 5.21b) empleando los métodos descritos en el capítulo 4. Como parte del proceso, determinamos las reacciones en los apoyos:

$$R_A = 18{,}860 \text{ lb} \qquad R_B = 17{,}140 \text{ lb}$$

La distancia x_1 desde el apoyo izquierdo hasta la sección transversal con cero fuerza cortante se obtiene con la ecuación

$$V = R_A - qx_1 = 0$$

que es válida en el intervalo $0 \leq x \leq 12$ ft. Despejamos x_1 y obtenemos

$$x_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{18{,}860 \text{ lb}}{2000 \text{ lb/ft}} = 9.430 \text{ ft}$$

que es menor que 12 ft, y por lo tanto el cálculo es válido.

El momento flexionante máximo se tiene en la sección transversal donde la fuerza cortante es cero; por tanto,

$$M_{\text{máx}} = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = 88{,}920 \text{ lb-ft}$$

Módulo de sección requerido. El módulo de sección requerido (con base sólo en la carga q) se obtiene con la ecuación (5.24):

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(88\,920 \text{ lb-ft})(12 \text{ in/ft})}{18{,}000 \text{ psi}} = 59.3 \text{ in}^3$$

Viga de prueba. Ahora consultamos la tabla E.1 y seleccionamos la viga de patín ancho más ligera que tenga un módulo de sección mayor que 59.3 in^3. La viga más ligera que proporciona este módulo de sección es W 12 $\times$ 50 con $S = 64.7$ in^3. Esta viga pesa 50 lb/ft. (Recuerde que las tablas en el apéndice E están condensadas, y por tanto es posible que esté disponible una viga más ligera).

Ahora volvemos a calcular las reacciones, el momento flexionante máximo y el módulo de sección requerido con la viga sometida a la carga uniforme q y a su propio peso propio. Ante estas cargas combinadas las reacciones son

$$R_A = 19{,}380 \text{ lb} \qquad R_B = 17{,}670 \text{ lb}$$

y la distancia hasta la sección transversal con fuerza cortante cero se convierte en

$$x_1 = \frac{19{,}380 \text{ lb}}{2050 \text{ lb/ft}} = 9.454 \text{ ft}$$

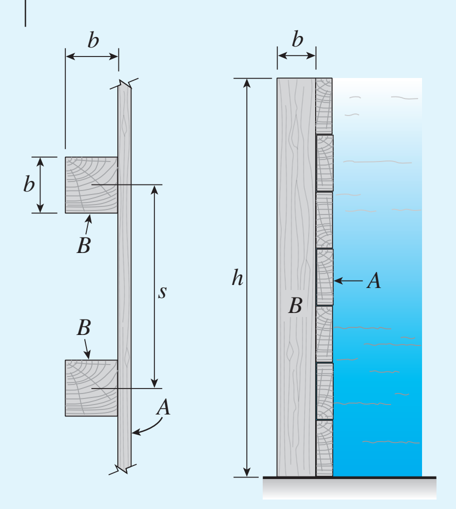
El momento flexionante máximo aumenta a 91 610 lb-ft y el nuevo módulo de sección requerido es

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(91{,}610 \text{ lb-ft})(12 \text{ in/ft})}{18{,}000 \text{ psi}} = 61.1 \text{ in}^3$$

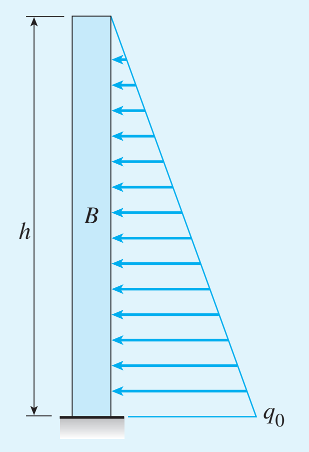
Por tanto, observamos que la viga W 12 $\times$ 50 con módulo de sección $S = 64.7$ in^3 aún es satisfactoria.

Nota: si el nuevo módulo de sección requerido sobrepasa al de la viga W 12 $\times$ 50, se selecciona una viga más grande y se repite el proceso.

Ejemplo 5.8



(a) Vista superior (b) Vista lateral



(c) Diagrama de carga

FIGURA 5.22 Ejemplo 5.8. Represa de madera con tablones horizontales *A* soportados por postes verticales *B*.

Una represa temporal de madera está construida con tablones horizontales *A* soportados en postes verticales de madera *B* empotrados en el suelo de manera que actúan como vigas en voladizo (figura 5.22). Los postes tienen una sección transversal cuadrada (dimensiones $b \times b$) y están espaciados a una distancia $s = 0.8$ m, centro a centro. Suponga que el nivel máximo del agua detrás de la represa $h = 2.0$ m.

Determine la dimensión mínima requerida *b* de los postes si el esfuerzo de flexión permisible en la madera es $\sigma_{\text{perm}} = 8.0$ MPa.

Solución

Diagrama de carga. Cada poste está sometido a una carga con distribución triangular producida por la presión del agua que actúa contra los tablones. En consecuencia, el diagrama de carga para cada poste es triangular (figura 5.22c). La intensidad máxima q_0 de la carga sobre los postes es igual a la presión del agua a una profundidad *h* multiplicada por el espaciamiento *s* de los postes:

$$q_0 = \gamma h s \qquad \text{(a)}$$

en donde γ es el peso específico del agua. Observe que q_0 tiene unidades de fuerza por unidad de distancia, γ tiene unidades de fuerza por unidad de volumen y *h* y *s* tienen unidades de longitud.

Módulo de sección. Como cada poste es una viga en voladizo, el momento flexionante máximo en la base está dado por la siguiente expresión:

$$M_{\text{máx}} = \frac{q_0 h}{2}\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{\gamma h^3 s}{6} \qquad \text{(b)}$$

Por tanto, el módulo de sección requerido (ecuación 5.24) es

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{\gamma h^3 s}{6\sigma_{\text{perm}}} \qquad \text{(c)}$$

Para una viga con sección transversal cuadrada, el módulo de sección es $S = b^3/6$ (consulte la ecuación 5.18b). Al sustituir esta expresión para *S* en la ecuación (c), obtenemos una fórmula para el cubo de la dimensión mínima *b* de los postes:

$$b^3 = \frac{\gamma h^3 s}{\sigma_{\text{perm}}} \qquad \text{(d)}$$

Valores numéricos. Ahora sustituimos los valores numéricos en la ecuación (d) y obtenemos

$$b^3 = \frac{(9.81 \text{ kN/m}^3)(2.0 \text{ m})^3(0.8 \text{ m})}{8.0 \text{ MPa}} = 0.007848 \text{ m}^3 = 7.848 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

de donde

$$b = 199 \text{ mm}$$

Por tanto, la dimensión mínima requerida *b* para los postes es 199 mm. Cualquier dimensión mayor, digamos 200 mm, asegurará que el esfuerzo de flexión real sea menor que el esfuerzo permisible.

5.7 VIGAS NO PRISMÁTICAS

Las teorías de vigas descritas en este capítulo se dedujeron para vigas prismáticas, es decir, vigas rectas con la misma sección transversal en toda su longitud. Sin embargo, las vigas no prismáticas son de uso común para reducir peso y mejorar la apariencia. Este tipo de vigas se encuentra en automóviles, aeroplanos, edificios, herramientas y en muchas otras aplicaciones (figura 5.23). Por fortuna, la fórmula de la flexión (ecuación 5.13) proporciona valores razonablemente precisos para los esfuerzos de flexión en vigas no prismáticas cuando los cambios en las dimensiones de la sección transversal son graduales, como en los ejemplos que se muestran en la figura 5.23.

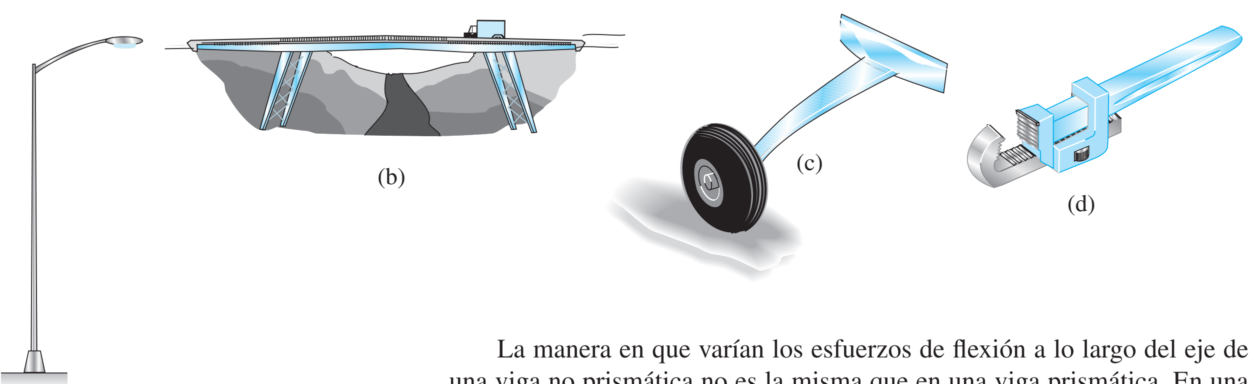


FIGURA 5.23 Ejemplos de vigas no prismáticas: (a) poste de alumbrado, (b) puente con trabes y estribos ahusados, (c) puntal de la rueda de un aeroplano pequeño y (d) manija de una llave.

La manera en que varían los esfuerzos de flexión a lo largo del eje de una viga no prismática no es la misma que en una viga prismática. En una viga prismática el módulo de sección S es constante, y por tanto, los esfuerzos varían en proporción directa con el momento flexionante (debido a que $\sigma = M/S$). Sin embargo, en una viga no prismática el módulo de sección varía a lo largo del eje. En consecuencia, no podemos suponer que el esfuerzo máximo ocurre en la sección transversal con el momento flexionante mayor; algunas veces los esfuerzos máximos se tienen en otros lugares, como se ilustra en el ejemplo 5.9.

Vigas totalmente esforzadas

Para minimizar la cantidad de material y por tanto tener la viga más ligera posible, podemos variar las dimensiones de las secciones transversales para tener el esfuerzo de flexión máximo permisible en cada sección. Una viga en esta condición se denomina **viga totalmente esforzada**, o *viga con resistencia constante*.

Por supuesto, estas condiciones ideales pocas veces se cumplen debido a problemas prácticos en su construcción y a la posibilidad de que las cargas sean diferentes de las consideradas en el diseño. No obstante, conocer las propiedades de una viga totalmente esforzada puede ser una ayuda importante para el ingeniero al diseñar estructuras para peso mínimo. Ejemplos comunes de estructuras diseñadas para mantener un esfuerzo máximo casi constante son los resortes de hojas en automóviles, las trabes ahusadas de puentes y algunas de las estructuras mostradas en la figura 5.23.

La determinación de la forma de una viga totalmente esforzada se ilustra en el ejemplo 5.10.

Ejemplo 5.9

Una viga ahusada en voladizo *AB* con sección transversal circular soporta una carga *P* en el extremo libre (figura 5.24). El diámetro d_B en el extremo mayor es el doble del diámetro d_A en el extremo menor:

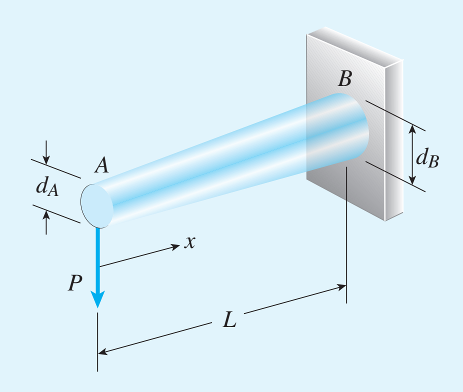


FIGURA 5.24 Ejemplo 5.9. Viga ahusada en voladizo con sección transversal circular.

$$\frac{d_B}{d_A} = 2$$

Determine el esfuerzo de flexión σ_B en el soporte fijo y el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$.

Solución

Si el ángulo de ahusamiento de la viga es pequeño, los esfuerzos de flexión obtenidos con la fórmula de la flexión diferirán muy poco de los valores exactos. Como una directriz con respecto a la exactitud, observamos que el ángulo entre la línea *AB* (figura 5.24) y el eje longitudinal de la viga es aproximadamente 20°, el error al calcular los esfuerzos normales a partir de la fórmula de la flexión es aproximadamente 10%. Por supuesto, conforme disminuye el ángulo de ahusamiento, el error es menor.

Módulo de sección. El módulo de sección en cualquier sección transversal de la viga se puede expresar como una función de la distancia *x* medida a lo largo del eje de la viga. Como el módulo de sección depende del diámetro, primero debemos expresar el diámetro en términos de *x*, como se muestra:

$$d_x = d_A + (d_B - d_A)\frac{x}{L} \tag{5.30}$$

en donde d_x es el diámetro a una distancia *x* desde el extremo libre. Por tanto, el módulo de sección a una distancia *x* del extremo (ecuación 5-19b) es

$$S_x = \frac{\pi d_x^3}{32} = \frac{\pi}{32}\left[d_A + (d_B - d_A)\frac{x}{L}\right]^3 \tag{5.31}$$

Esfuerzos de flexión. Como el momento flexionante es igual a P_x, el esfuerzo normal máximo en cualquier sección transversal está dado por la ecuación

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{S_x} = \frac{32Px}{\pi[d_A + (d_B - d_A)(x/L)]^3} \tag{5.32}$$

Por inspección de la viga observamos que el esfuerzo σ_1 es de tensión en la parte superior de la viga y de compresión en la parte inferior.

Observe que las ecuaciones (5.30), (5.31) y (5.32) son válidas para cualesquiera valores de d_A y d_B, siempre que el ángulo de ahusamiento sea pequeño. En el siguiente análisis consideramos sólo el caso en que $d_B = 2d_A$.

Esfuerzo máximo en el soporte fijo. El esfuerzo máximo en la sección con momento flexionante máximo (extremo B de la viga) se puede determinar a partir de la ecuación (5.32) Al sustituir $x = L$ y $d_B = 2d_A$; el resultado es

$$\sigma_B = \frac{4PL}{\pi d_A^3} \qquad \text{(a)}$$

Esfuerzo máximo en la viga. El esfuerzo máximo en una sección transversal a una distancia x desde el extremo (ecuación 5.32) para el caso donde $d_B = 2d_A$ es

$$\sigma_1 = \frac{32Px}{\pi d_A^3(1 + x/L)^3} \qquad \text{(b)}$$

Para determinar la ubicación de la sección transversal con el esfuerzo de flexión máximo en la viga, necesitamos encontrar el valor de x que haga σ_1 un máximo. Derivamos $d\sigma_1/dx$ e y la igualamos a cero, podemos despejar el valor de x que haga σ_1 un máximo; el resultado es

$$x = \frac{L}{2} \qquad \text{(c)}$$

El esfuerzo máximo correspondiente, obtenido sustituyendo $x = L/2$ en la ecuación (b), es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{128PL}{27\pi d_A^3} = \frac{4.741PL}{\pi d_A^3} \qquad \text{(d)}$$

En este ejemplo particular, el esfuerzo máximo ocurre en el punto medio de la viga y es 19 por ciento mayor que el esfuerzo σ_B en el extremo empotrado.

Nota: si se reduce el ahusamiento de la viga, la sección transversal con esfuerzo normal máximo se desplaza del punto medio hacia el soporte fijo. Para ángulos de ahusamiento pequeños, el esfuerzo máximo se tiene en el extremo B.

Ejemplo 5.10

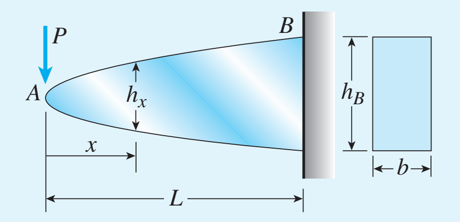


FIGURA 5.25 Ejemplo 5.10. Viga totalmente esforzada con esfuerzo normal máximo constante (forma teórica que ignora los esfuerzos cortantes).

Se va a diseñar una viga en voladizo AB con longitud L para soportar una carga concentrada P en el extremo libre (figura 5.25). Las secciones transversales de la viga son rectangulares con ancho constante b y altura variable h. Como ayuda para el diseño de esta viga, los diseñadores quisieran saber cómo debe variar la altura de una viga idealizada a fin de que el esfuerzo normal máximo en cada sección transversal sea igual al esfuerzo permisible σ_{perm}.

Considerando sólo los esfuerzos de flexión obtenidos con la fórmula de la flexión, determine la altura de la viga totalmente esforzada.

Solución

El momento flexionante y el módulo de sección a una distancia x desde el extremo libre de la viga son

$$M = Px \qquad S = \frac{bh_x^2}{6}$$

donde h_x es la altura de la viga a una distancia x. Al sustituir en la fórmula de la flexión, obtenemos

$$\sigma_{perm} = \frac{M}{S} = \frac{Px}{bh_x^2/6} = \frac{6Px}{bh_x^2} \tag{e}$$

Despejando la altura de la viga, se tiene

$$h_x = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_{perm}}} \tag{f}$$

En el extremo fijo de la viga ($x = L$), la altura h_B es

$$h_B = \sqrt{\frac{6PL}{b\sigma_{perm}}} \tag{g}$$

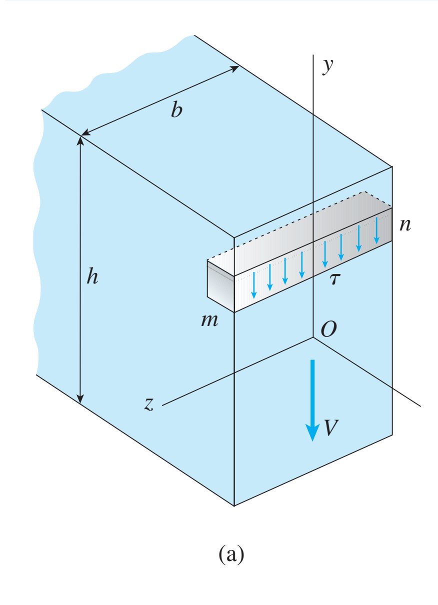
y, por tanto, podemos expresar la altura h_x en la forma siguiente:

$$h_x = h_B\sqrt{\frac{x}{L}} \tag{h}$$

Esta última ecuación muestra que la altura de la viga totalmente esforzada varía con la raíz cuadrada de x. En consecuencia, la viga idealizada tiene la forma parabólica que se muestra en la figura 5.25.

Nota: en el extremo cargado de la viga ($x = 0$) el peralte teórico es cero, debido a que no hay momento flexionante en ese punto. Por supuesto, una viga con esta forma no es práctica ya que no es capaz de soportar los esfuerzos cortantes cerca del extremo de la viga. No obstante, la forma idealizada proporciona un punto de partida útil para un diseño realista en el que se consideren los esfuerzos cortantes y otros efectos.

5.8 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS CON SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR



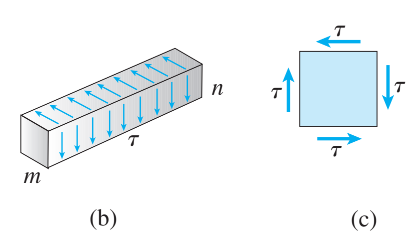


FIGURA 5.26 Esfuerzos cortantes en una viga con sección transversal rectangular.

Cuando una viga se somete a *flexión pura*, los únicos esfuerzos resultantes son los momentos flexionantes y los únicos esfuerzos son los normales que actúan sobre las secciones transversales. Sin embargo, la mayor parte de las vigas se someten tanto a cargas que producen momentos flexionantes como a fuerzas cortantes (*flexión no uniforme*). En estos casos, en la viga se desarrollan esfuerzos normales y cortantes (consulte la sección 5.5), siempre que la viga esté construida con un material linealmente elástico. Los esfuerzos cortantes se analizan en esta y en las siguientes dos secciones.

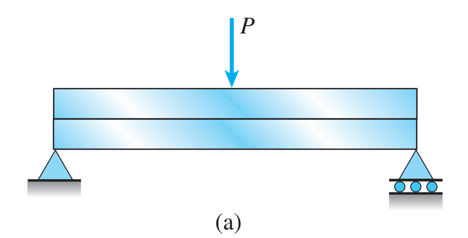
Esfuerzos cortantes verticales y horizontales

Considere una viga con sección transversal rectangular (ancho b y altura h) sometida una fuerza cortante positiva V (figura 5.26a). Es razonable suponer que los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre la sección transversal son paralelos a la fuerza cortante, es decir, paralelos a los lados verticales de la sección transversal. También cabe suponer que los esfuerzos cortantes están distribuidos uniformemente a través del ancho de la viga, aunque pueden variar sobre la altura. Con estas dos suposiciones podemos determinar la intensidad del esfuerzo cortante en cualquier punto sobre la sección transversal.

Para fines de análisis, aislamos un elemento pequeño mn de la viga (figura 5.26a) cortando entre dos secciones transversales adyacentes y entre dos planos horizontales. De acuerdo con nuestras suposiciones, los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre la cara anterior de este elemento son verticales y están distribuidos de manera uniforme de un lado de la viga al otro. Además, del análisis sobre esfuerzos cortantes en la sección 1.6, sabemos que los que actúan sobre un lado de un elemento van acompañados por esfuerzos cortantes con igual magnitud que actúan sobre las caras perpendiculares del elemento (consulte las figuras 5.26b y c). Por tanto, hay esfuerzos cortantes horizontales que actúan entre capas horizontales de la viga así como esfuerzos cortantes verticales que actúan sobre las secciones transversales. En cualquier punto en la viga estos esfuerzos cortantes complementarios tienen magnitudes iguales.

La igualdad de los esfuerzos cortantes horizontales y verticales que actúan sobre un elemento conduce a una conclusión importante con respecto a los esfuerzos cortantes en la parte superior e inferior de la viga. Si imaginamos que el elemento mn (figura 5.26a) está ubicado en la parte superior o bien en la inferior, vemos que los esfuerzos cortantes horizontales deben ser cero, debido a que no hay esfuerzos sobre las superficies exteriores de la viga. Entonces se deduce que los esfuerzos cortantes verticales también deben ser cero en estas ubicaciones; en otras palabras, $\tau = 0$ donde $y = \pm h/2$.

La existencia de esfuerzos cortantes horizontales en una viga se puede demostrar mediante un experimento simple, coloque dos vigas rectangulares idénticas sobre apoyos simples y sométalas a una fuerza P, como se muestra en la figura 5.27a. Si la fricción entre las vigas es pequeña, éstas se flexionarán de manera independiente (figura 5.27b). Cada una de ellas estará en compresión arriba de su propio eje neutro y en tensión debajo de éste, y por tanto la superficie inferior de la viga superior se deslizará con respecto a la superficie superior de la viga inferior.



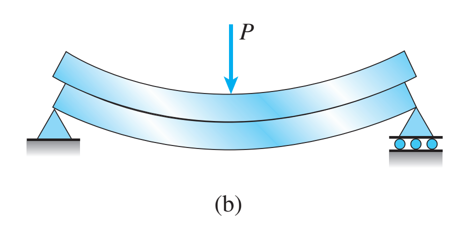


FIGURA 5.27 Flexión de dos vigas separadas.

Ahora suponga que las dos vigas se pegan a lo largo de la superficie de contacto, de manera que se convierten en una sola viga sólida. Cuando ésta se carga, se deben desarrollar esfuerzos cortantes horizontales a lo largo de la superficie pegada a fin de evitar el deslizamiento que se muestra en la figura 5.27b. Debido a la presencia de estos esfuerzos cortantes, la viga sólida individual es mucho más rígida y más fuerte que las dos vigas separadas.

Deducción de la fórmula del esfuerzo cortante

Ahora estamos en condiciones de deducir una fórmula para los esfuerzos cortantes τ en una viga rectangular. Sin embargo, en vez de evaluar los esfuerzos cortantes verticales que actúan sobre una sección transversal, es más fácil determinar los esfuerzos cortantes horizontales entre capas de la viga. Por supuesto, los esfuerzos cortantes verticales tienen las mismas magnitudes que los esfuerzos cortantes horizontales.

Con este procedimiento en mente, consideremos una viga en flexión no uniforme (figura 5.28a). Tomamos dos secciones transversales adyacentes mn y m_1n_1, separadas una distancia dx y consideramos el **elemento** mm_1n_1n. El momento flexionante y la fuerza cortante que actúan sobre la cara izquierda de este elemento se denotan M y V, respectivamente. Como el momento flexionante y la fuerza cortante pueden cambiar conforme nos movemos a lo largo del eje de la viga, las cantidades correspondientes sobre la cara derecha (figura 5.28a) se denotan $M + dM$ y $V + dV$.

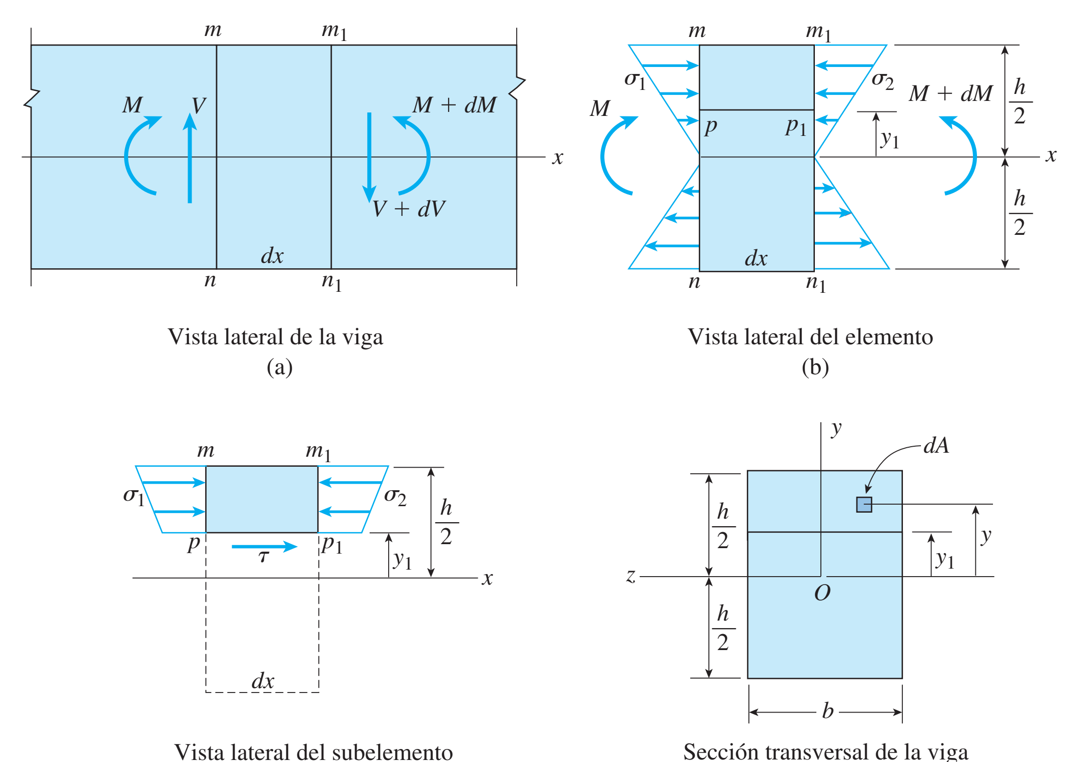


FIGURA 5.28 Esfuerzos cortantes en una viga con sección transversal rectangular.

Debido a la presencia de los momentos flexionantes y de las fuerzas cortantes, el elemento que se muestra en la figura 5.28a está sometido a esfuerzos normales y cortantes sobre las dos caras de la sección transversal. Sin embargo, en la siguiente deducción sólo se necesitan los esfuerzos normales y por tanto en la figura 5.28b sólo se muestran éstos. Sobre las secciones transversales *mn* y m_1n_1 los esfuerzos normales son, respectivamente,

$$\sigma_1 = -\frac{My}{I} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = -\frac{(M+dM)y}{I} \qquad \text{(a,b)}$$

como se dan por la fórmula de la flexión (ecuación 5.13). En estas expresiones, *y* es la distancia desde el eje neutro e *I* es el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje neutro.

A continuación aislamos un **subelemento** mm_1p_1p pasando un plano horizontal pp_1 por el elemento mm_1n_1n (figura 5.28b). El plano pp_1 está a una distancia y_1 de la superficie neutra de la viga. El subelemento se muestra por separado en la figura 5.28c. Observamos que su cara superior es parte de la superficie superior de la viga y, por tanto, está libre de esfuerzos. Su cara inferior (que es paralela a la superficie neutra y se halla a una distancia y_1 de ésta) está sometida al esfuerzo cortante horizontal τ que existe en este nivel en la viga. Sus caras transversales *mp* y m_1p_1 están sometidas a los esfuerzos de flexión σ_1 y σ_2, respectivamente, producidos por los momentos flexionantes. También actúan esfuerzos cortantes verticales sobre las caras transversales; sin embargo, dichos esfuerzos no afectan el equilibrio del subelemento en la dirección horizontal (la dirección *x*), por lo que no se muestran en la figura 5.28c.

Si los momentos flexionantes en las secciones transversales *mm* y m_1n_1 (figura 5.28b) son iguales (es decir, si la viga está en flexión pura), los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 que actúan sobre los lados *mp* y m_1p_1 del subelemento (figura 5.28c) también serán iguales. En estas condiciones el subelemento estará en equilibrio ante la acción sólo de los esfuerzos normales y, por tanto, los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre la cara inferior pp_1 desaparecerán. Esta conclusión es obvia ya que una viga en flexión pura no tiene fuerza cortante y tampoco esfuerzos cortantes.

Si los momentos flexionantes varían a lo largo del eje *x* (flexión no uniforme) podemos determinar el esfuerzo cortante τ que actúa sobre la cara inferior del subelemento (figura 5.28c) al considerar el equilibrio del subelemento en la dirección *x*.

Iniciamos identificando un elemento de área *dA* en la *sección transversal* a una distancia *y* del eje neutro (figura 5.28d). La fuerza que actúa sobre este elemento es σdA, en donde σ es el esfuerzo normal obtenido con la fórmula de la flexión. Si el elemento de área está ubicado en la cara izquierda *mp* del subelemento (donde el momento flexionante es *M*), el esfuerzo normal está dado por la ecuación (a) y, por tanto, el elemento de fuerza es

$$\sigma_1 dA = \frac{My}{I} dA$$

Observe que estamos empleando sólo valores absolutos en esta ecuación debido a que las direcciones de los esfuerzos son obvias en la figura. La suma

de estos elementos de fuerza sobre el área de la cara *mp* del subelemento (figura 5.28c) da la fuerza horizontal total F_1 que actúa sobre esa cara:

$$F_1 = \int \sigma_1 \, dA = \int \frac{My}{I} dA \qquad \text{(c)}$$

Observe que esta integración se realiza sobre el área de la parte sombreada de la sección transversal que se muestra en la figura 5.28d, es decir, sobre el área de la sección transversal desde $y = y_1$ hasta $y = h/2$.

La fuerza F_1 se muestra en la figura 5.29 en un diagrama parcial de cuerpo libre del subelemento (las fuerzas verticales se omitieron).

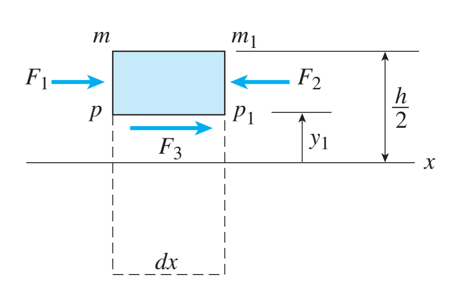


FIGURA 5.29 Diagrama parcial de cuerpo libre del subelemento que muestra todas las fuerzas horizontales (compare con la figura 5.28c).

De manera similar, determinamos que la fuerza F_2 que actúa sobre la cara derecha m_1p_1 del subelemento (figura 5.29 y figura 5.28c) es

$$F_2 = \int \sigma_2 dA = \int \frac{(M+dM)y}{I} dA \qquad \text{(d)}$$

Al conocer las fuerzas F_1 y F_2, ahora podemos determinar la fuerza horizontal F_3 que actúa sobre la cara inferior del subelemento.

Como el subelemento está en equilibrio, podemos sumar fuerzas en la dirección *x* y obtener

$$F_3 = F_2 - F_1 \qquad \text{(e)}$$

o

$$F_3 = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int \frac{My}{I} dA = \int \frac{(dM)y}{I} dA$$

Las cantidades *dM* e *I* en el último término se pueden mover fuera del signo de integración ya que son constantes en cualquier sección transversal dada y no se implican en la integración. Por tanto, la expresión para la fuerza F_3 se convierte en

$$F_3 = \frac{dM}{I} \int y dA \qquad (5.33)$$

Si el esfuerzo cortante τ está distribuido uniformemente a través del acho *b* de la viga, la fuerza F_3 también es igual a la expresión siguiente:

$$F_3 = \tau b \, dx \qquad (5.34)$$

en donde *b dx* es el área de la cara inferior del subelemento.

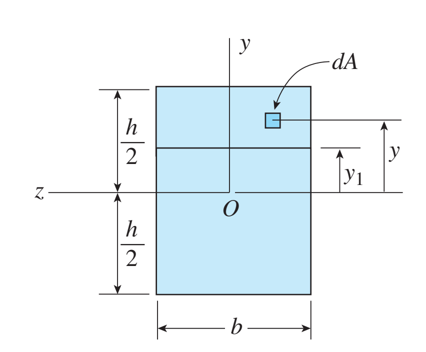
Al combinar las ecuaciones (5.33) y (5.34) y despejar el esfuerzo cortante τ, obtenemos

$$\tau = \frac{dM}{dx}\left(\frac{1}{Ib}\right)\int y \, dA \qquad (5.35)$$

La cantidad dM/dx es igual a la fuerza cortante V (consulte la ecuación 4.6), y por tanto la expresión anterior se transforma en

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int y\,dA \tag{5.36}$$

La integral en esta expresión se evalúa sobre la parte sombreada de la sección transversal (figura 5.28d), como ya se explicó. Por tanto, la integral es el momento estático del área sombreada con respecto al eje neutro (el eje z). En otras palabras, *la integral es el momento estático del área de la sección transversal arriba del nivel en el cual se está evaluando el esfuerzo cortante* τ. Este momento estático usualmente se denota con el símbolo Q:



Sección transversal de la viga en el subelemento.
(d)

FIGURA 5.28d (Repetida.)

$$Q = \int y\,dA \tag{5.37}$$

Con esta notación, la ecuación para el esfuerzo cortante se convierte en

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \tag{5.38}$$

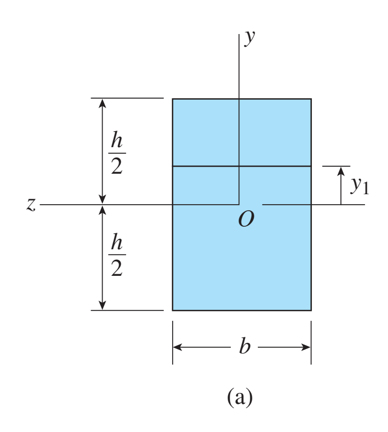
Esta ecuación, conocida como **fórmula del cortante**, puede utilizarse para determinar el esfuerzo cortante τ en cualquier punto en la sección transversal de una viga rectangular. Observe que para una sección transversal específica, la fuerza cortante V, el momento de inercia I y el ancho b son constantes. Sin embargo, el momento estático Q (y de aquí el esfuerzo cortante τ) varían con la distancia y_1 desde el eje neutro.

Cálculo del momento estático Q

Si el nivel en el cual se va a determinar el esfuerzo está arriba del eje neutro, como se muestra en la figura 5.28d, es normal obtener Q calculando el momento estático del área de la sección transversal *arriba* de ese nivel (el área sombreada en la figura). Sin embargo, como una alternativa, podríamos calcular el momento estático del área de la sección transversal restante, es decir, el área *debajo* del área sombreada. Su momento estático es igual al negativo de Q.

La explicación estriba en el hecho de que el momento estático de toda el área de la sección transversal con respecto al eje neutro es igual a cero (porque el eje neutro pasa por el centroide). Por tanto, el valor de Q para el área debajo del nivel y_1 es el negativo de Q para el área arriba de ese nivel. Por conveniencia, solemos emplear el área arriba del nivel y_1 cuando el punto donde estamos determinando el esfuerzo cortante está en la parte superior de la viga y utilizamos el área abajo del nivel y_1 cuando el punto está en la parte inferior de la viga.

Además, por lo general no nos molestamos con convenciones de signos para V y Q; más bien, tratamos todos los términos en la fórmula del cortante como cantidades positivas y determinamos la dirección de los esfuerzos cortantes mediante su inspección, ya que los esfuerzos actúan en la misma dirección que la propia fuerza cortante V. Este procedimiento para determinar los esfuerzos cortantes se ilustra más adelante en el ejemplo 5.11.



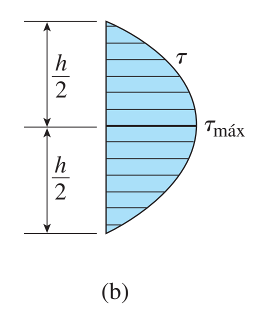


FIGURA 5.30 Distribución de los esfuerzos cortantes en una viga con sección transversal rectangular: (a) sección transversal y (b) diagrama que muestra la distribución parabólica de los esfuerzos cortantes sobre la altura de la viga.

Distribución de esfuerzos cortantes en una viga rectangular

Ahora estamos en condiciones de determinar la distribución de los esfuerzos cortantes en una viga con sección transversal rectangular (figura 5.30a). El momento estático Q de la parte sombreada del área de la sección transversal se obtiene multiplicando el área por la distancia desde su propio centroide hasta el eje neutro:

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \qquad \text{(f)}$$

Por supuesto, se puede obtener el mismo resultado por integración empleando la ecuación (5.37):

$$Q = \int y\, dA = \int_{y_1}^{h/2} yb\, dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \qquad \text{(g)}$$

Sustituyendo la expresión para Q en la fórmula del cortante (ecuación 5.38), obtenemos

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \qquad (5.39)$$

Esta ecuación muestra que los esfuerzos cortantes en una viga rectangular varían de manera cuadrática con la distancia y_1 desde el eje neutro. Por tanto, cuando se diagrama a lo largo de la altura la viga, τ varía como se muestra en la figura 5.30b. Observe que el esfuerzo cortante es cero cuando $y_1 = \pm h/2$.

El valor máximo del esfuerzo cortante se tiene en el eje neutro ($y_1 = 0$) donde el momento estático Q tiene su valor máximo. Al sustituir $y_1 = 0$ en la ecuación (5.39), obtenemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A} \qquad (5.40)$$

en donde $A = bh$ es el área de la sección transversal. Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en una viga con sección transversal rectangular es 50% mayor que el esfuerzo cortante promedio V/A.

Observe de nuevo que las ecuaciones anteriores para los esfuerzos cortantes se pueden emplear para calcular los esfuerzos cortantes verticales que actúan sobre las secciones transversales o bien los esfuerzos cortantes horizontales que actúan entre capas horizontales de la viga:*

*El análisis de los esfuerzos cortantes presentado en esta sección lo desarrolló el ingeniero ruso D. J. Jourawski; consulte las referencias 5.7 y 5.8.

Limitaciones

Las fórmulas para los esfuerzos cortantes presentadas en esta sección están sometidas a las mismas restricciones que la fórmula de la flexión de la cual se dedujeron, por lo que sólo son válidas para vigas de materiales linealmente elásticos con deflexiones pequeñas.

En el caso de vigas rectangulares, la exactitud de la fórmula del cortante depende de la razón entre altura y ancho de la sección transversal. La fórmula se puede considerar exacta para vigas muy angostas (altura h mucho mayor que el ancho b). Sin embargo, es menos precisa conforme b aumenta con respecto a h. Por ejemplo, cuando la viga es cuadrada ($b = h$), el esfuerzo cortante máximo real es aproximadamente 13 por ciento mayor que el valor dado por la ecuación (5.40). (Para un análisis más completo de las limitaciones de la fórmula del cortante, consulte la referencia 5.9.)

Un error común es aplicar la fórmula del cortante (5.38) a secciones transversales para las cuales no es aplicable. Por ejemplo, no es aplicable a secciones con forma triangular o semicircular. Para evitar el mal uso de la fórmula debemos tener en cuenta las siguientes suposiciones que subyacen en su deducción: (1) los bordes de la sección transversal deben ser paralelos al eje y (de manera que los esfuerzos cortantes actúen paralelos a dicho eje) y (2) los esfuerzos cortantes deben ser uniformes a través del ancho de la sección transversal. Estas suposiciones se cumplen sólo en ciertos casos, como los analizados en esta y en las dos siguientes secciones.

Por último, la fórmula del cortante se aplica sólo a barras prismáticas. Si una viga no es prismática (por ejemplo, si la viga es ahusada), los esfuerzos cortantes son muy diferentes de los anticipados con las fórmulas dadas aquí (consulte las referencias 5.9 y 5.10).

Efectos de las deformaciones unitarias por esfuerzo cortante

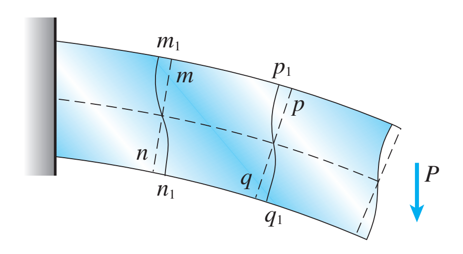
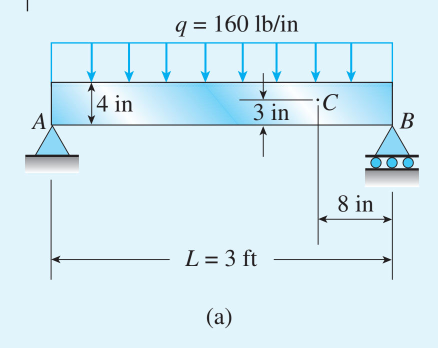


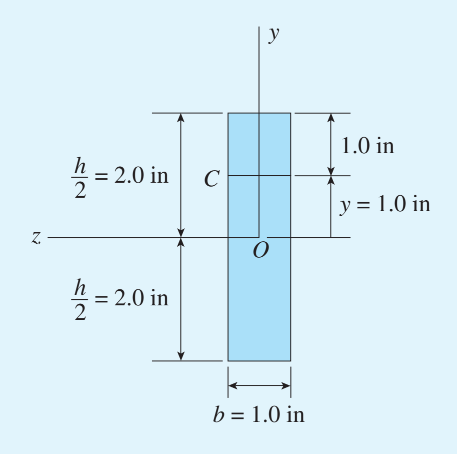
FIGURA 5.31 Alabeo de las secciones transversales de una viga debido a deformaciones unitarias por cortante.

Como el esfuerzo cortante τ varía parabólicamente sobre la altura de una viga rectangular, se infiere que la deformación unitaria por cortante $\lambda = \tau/G$ también varía de esta manera. Como resultado de estas deformaciones unitarias por cortante, las secciones transversales de la viga que originalmente eran superficies planas se alabean. Este alabeo se muestra en la figura 5.31, donde las secciones transversales mn y pq, originalmente planas, se han convertido en superficies curvas m_1n_1 y p_1q_1, con la deformación unitaria máxima por cortante que se presenta en la superficie neutra. En los puntos m_1, p_1, n_1 y q_1 la deformación unitaria por cortante es cero y, por tanto, las curvas m_1n_1 y p_1q_1 son perpendiculares a las superficies superior e inferior de la viga.

Si la fuerza cortante V es constante a lo largo del eje de la viga, el alabeo es el mismo en cada sección transversal. Por tanto, el alargamiento y el acortamiento de elementos longitudinales debidos a momentos flexionantes no se ven afectadas por las deformaciones unitarias por cortante, y la distribución de los esfuerzos normales en la misma que en flexión pura. Además, investigaciones minuciosas que emplean métodos avanzados de análisis demuestran que el alabeo de secciones transversales debido a deformaciones unitarias por cortante no afecta de manera significativa las deformaciones unitarias longitudinales aun cuando la fuerza cortante varíe continuamente a lo largo de la longitud. Por tanto, en la mayor parte de las condiciones se justifica utilizar la fórmula de la flexión (ecuación 5.13) para flexión no uniforme, si bien la fórmula se dedujo para flexión pura.

Ejemplo 5.11





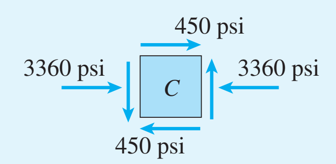


FIGURA 5.32 Ejemplo 5.11. (a) Viga simple con carga uniforme, (b) sección transversal de la viga y (c) elemento de esfuerzo que muestra los esfuerzos normales y cortantes en el punto C.

Una viga metálica con claro $L = 3$ ft está simplemente apoyada en los puntos A y B (figura 5.32a). La carga uniforme sobre la viga (incluyendo su propio peso) es $q = 160$ lb/in. La sección transversal de la viga es rectangular (figura 5.32b) con ancho $b = 1$ in y altura $h = 4$ in. La viga está apoyada de manera adecuada contra el pandeo lateral.

Determine el esfuerzo normal σ_C y el esfuerzo cortante τ_C en el punto C, que está ubicado a 1 in debajo de la superficie superior de la viga y a 8 in del apoyo derecho. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento de esfuerzo en el punto C.

Solución

Fuerza cortante y momento flexionante. La fuerza cortante V_C y el momento flexionante M_C en la sección transversal que pasa por el punto C se determinan mediante los métodos descritos en el capítulo 4. Los resultados son

$$M_C = 17{,}920 \text{ lb-in} \qquad V_C = -1600 \text{ lb}$$

Los signos de estas cantidades se basan en las convenciones de signos estándar para momentos flexionantes y fuerzas cortantes (consulte la figura 4.5).

Momento de inercia. El momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje neutro (el eje z en la figura 5.32b) es

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(1.0 \text{ in})(4.0 \text{ in})^3 = 5.333 \text{ in}^4$$

Esfuerzo normal en el punto C. El esfuerzo normal en el punto C se encuentra con la fórmula de la flexión (ecuación 5.13) con la distancia y desde el eje neutro igual a 1.0 in; entonces

$$\sigma_C = -\frac{My}{I} = -\frac{(17{,}920 \text{ lb-in})(1.0 \text{ in})}{5.333 \text{ in}^4} = -3360 \text{ psi}$$

El signo negativo indica que el esfuerzo es de compresión, como se esperaba.

Esfuerzo cortante en el punto C. Para obtener el esfuerzo cortante en el punto C necesitamos evaluar el momento estático Q_C del área de la sección transversal arriba del punto C (figura 5.32b). Este momento estático es igual al producto del área por su distancia centroidal (denotada y_C) desde el eje z; por tanto

$$A_C = (1.0 \text{ in})(1.0 \text{ in}) = 1.0 \text{ in}^2 \qquad y_C = 1.5 \text{ in} \qquad Q_C = A_C y_C = 1.5 \text{ in}^3$$

Ahora sustituimos los valores numéricos en la fórmula del cortante (ecuación 5.38) y obtenemos la magnitud del esfuerzo cortante:

$$\tau_C = \frac{V_C Q_C}{Ib} = \frac{(1600 \text{ lb})(1.5 \text{ in}^3)}{(5.333 \text{ in}^4)(1.0 \text{ in})} = 450 \text{ psi}$$

La dirección de este esfuerzo se puede establecer por inspección, debido a que actúa en el mismo sentido que la fuerza cortante. En este ejemplo, la fuerza cortante actúa hacia arriba sobre la parte de la viga a la izquierda del punto C y hacia abajo sobre la parte de la viga a la derecha del punto C. La mejor forma de mostrar las direcciones de los esfuerzos normal y cortante es dibujar un elemento de esfuerzo como sigue.

Elemento de esfuerzo en el punto C. El elemento de esfuerzo en la figura 5.32c se corta desde el lado de la viga en el punto C (figura 5.32a). Los esfuerzos de compresión $\sigma_C = 3360$ psi actúan sobre las caras transversales del elemento y los esfuerzos cortantes $\tau_C = 450$ psi actúan sobe las caras superior e inferior así como en las caras transversales.

Ejemplo 5.12

Una viga de madera *AB* que soporta dos cargas concentradas *P* (figura 5.33a) tiene una sección transversal rectangular con ancho $b = 100$ y altura $h = 150$ mm (figura 5.33b). La distancia desde cada extremo de la viga hasta la carga más cercana es $a = 0.5$ m.

Determine el valor máximo permisible $P_{\text{máx}}$ de las cargas si el esfuerzo permisible en flexión es $\sigma_{\text{perm}} = 11$ MPa (para tensión y compresión) y el esfuerzo permisible en cortante horizontal es $\tau_{\text{perm}} = 1.2$ MPa. (Ignore el peso de la viga).

Nota: las vigas de madera son mucho más débiles en *cortante horizontal* (cortante paralelo a las fibras horizontales en la madera) que en *cortante transversal al grano* (cortante sobre las secciones transversales). En consecuencia, es usual que en el diseño se considere el esfuerzo permisible en cortante horizontal.

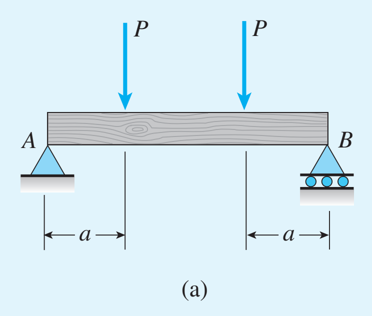
Solución

La fuerza cortante máxima ocurre en los apoyos y el momento flexionante máximo se tiene en toda la región entre las cargas. Sus valores son

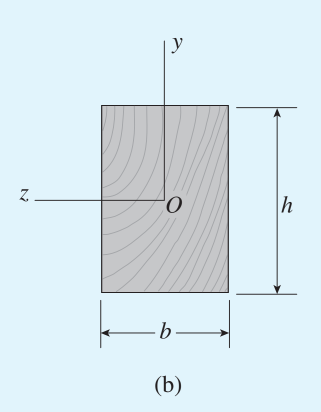
$$V_{\text{máx}} = P \qquad M_{\text{máx}} = Pa$$

Además, el módulo de sección *S* y el área de la sección transversal *A* son

$$S = \frac{bh^2}{6} \qquad A = bh$$



(a)



(b)

FIGURA 5.33 Ejemplo 5.12. Viga de madera con cargas concentradas.

continúa

Los esfuerzos máximos normal y cortante en la viga se obtienen con las fórmulas de la flexión y del cortante (ecuaciones 5.16 y 5.40):

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{S} = \frac{6Pa}{bh^2} \qquad \tau_{\text{máx}} = \frac{3V_{\text{máx}}}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$

Por tanto, los valores máximos permisibles de la carga P en flexión y cortante, respectivamente, son

$$P_{\text{flexión}} = \frac{\sigma_{\text{perm}}\,bh^2}{6a} \qquad P_{\text{cortante}} = \frac{2\tau_{\text{perm}}\,bh}{3}$$

Al sustituir los valores numéricos en estas fórmulas, obtenemos

$$P_{\text{flexión}} = \frac{(11\text{ MPa})(100\text{ mm})(150\text{ mm})^2}{6(0.5\text{ m})} = 8.25\text{ kN}$$

$$P_{\text{cortante}} = \frac{2(1.2\text{ MPa})(100\text{ mm})(150\text{ mm})}{3} = 12.0\text{ kN}$$

Por tanto, el esfuerzo de flexión gobierna el diseño y la carga máxima permisible es

$$P_{\text{máx}} = 8.25\text{ kN}$$

Un análisis más completo de esta viga requeriría que se tomara en cuenta el peso propio de la viga, reduciendo de esta manera la carga permisible.

Notas:

(1) En este ejemplo los esfuerzos normales máximos y los esfuerzos cortantes máximos no ocurren en las mismas ubicaciones en la viga; el esfuerzo normal es máximo en la región media de la viga en la parte superior e inferior de la sección transversal, y el esfuerzo cortante es máximo cerca de los apoyos en el eje neutro de la sección transversal.

(2) Para la mayor parte de las vigas, los esfuerzos de flexión (no los esfuerzos cortantes) controlan la carga permisible, como en este ejemplo.

(3) Aunque la madera no es un material homogéneo y con frecuencia se aleja de un comportamiento linealmente elástico, aún podemos obtener resultados aproximados a partir de las fórmulas de la flexión y del cortante. Estos resultados aproximados por lo general son adecuados para el diseño de vigas.

5.9 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS CON SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

Cuando una viga tiene una **sección transversal circular** (figura 5.34), ya no podemos suponer que los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje y. Por ejemplo, es fácil demostrar que en el punto m (en el borde de la sección transversal) el esfuerzo cortante τ debe actuar *tangente* al borde. Esta observación se deriva del hecho de que la superficie exterior de la viga está libre de esfuerzo y, por tanto, el esfuerzo cortante que actúa sobre la sección transversal no puede tener una componente en la dirección radial.

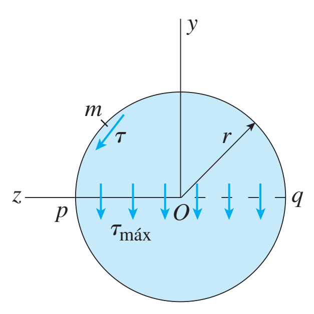


FIGURA 5.34 Esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal de una viga circular.

Si bien no hay una forma simple para encontrar los esfuerzos cortantes que actúan sobre toda la sección transversal, es fácil determinar los esfuerzos cortantes en el eje neutro (donde los esfuerzos son máximos) haciendo algunas suposiciones razonables acerca de la distribución de los esfuerzos. Suponemos que los esfuerzos actúan paralelos al eje y y que tienen una intensidad constante a través del ancho de la viga (del punto p al punto q en la figura 5.34). Como estas suposiciones son las mismas que se hicieron al deducir la fórmula del cortante $\tau = VQ/Ib$ (ecuación 5.38), podemos emplear la fórmula del cortante para calcular los esfuerzos en el eje neutro.

Para emplearlas en la fórmula del cortante, necesitamos las siguientes propiedades con respecto a una sección transversal circular con radio r.

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \qquad Q = A\bar{y} = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3} \qquad b = 2r \qquad (5.41a,b)$$

La expresión para el momento de inercia I se toma del caso 9 del apéndice D, y la expresión para el momento estático Q se basa en las fórmulas para un semicírculo (caso 10, apéndice D). Al sustituir estas expresiones en la fórmula del cortante, obtenemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V(2r^3/3)}{(\pi r^4/4)(2r)} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A} \qquad (5.42)$$

en donde $A = \pi r^2$ es el área de la sección transversal. Esta ecuación muestra que el esfuerzo cortante máximo en una viga circular es igual a 4/3 por el esfuerzo cortante vertical promedio V/A.

Si una viga tiene una **sección transversal circular hueca** (figura 5.35), de nuevo podemos suponer con precisión razonable que los esfuerzos cortantes en el eje neutro son paralelos al eje y y que están uniformemente distribuidos a través de la sección. En consecuencia, de nuevo podemos emplear la fórmula del cortante para encontrar los esfuerzos máximos. Las propiedades requeridas para una sección circular hueca son

$$I = \frac{\pi}{4}\left(r_2^4 - r_1^4\right) \qquad Q = \frac{2}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right) \qquad b = 2(r_2 - r_1) \qquad (5.43a,b,c)$$

en donde r_1 y r_2 son los radios interior y exterior de la sección transversal, respectivamente. Por tanto, el esfuerzo máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A}\left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right) \qquad (5.44)$$

en donde

$$A = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

es el área de la sección transversal. Observe que si $r_1 = 0$, la ecuación (5.44) se reduce a la ecuación (5.42) para una viga circular sólida.

Aunque la teoría anterior para esfuerzos cortantes en vigas con sección transversal circular es aproximada, proporciona resultados que sólo difieren en algunos puntos porcentuales de los que se obtienen utilizando la teoría exacta de la elasticidad (referencia 5.9). En consecuencia, las ecuaciones (5.42) y (5.44) se pueden usar para determinar los esfuerzos cortantes máximos en vigas circulares en circunstancias ordinarias.

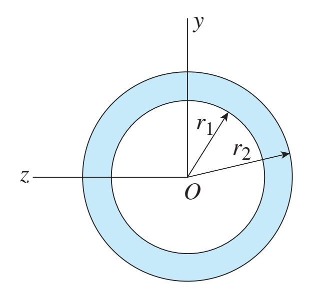


FIGURA 5.35 Sección transversal circular hueca.

Ejemplo 5.13

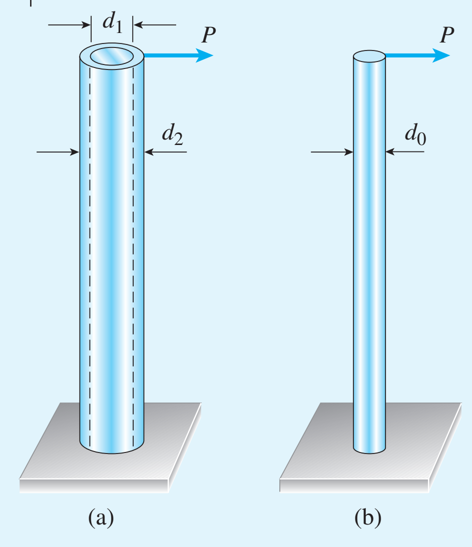


FIGURA 5.36 Ejemplo 5.13. Esfuerzos cortantes en vigas con sección transversal circular.

Un poste vertical que consiste de un tubo circular con diámetro exterior $d_2 = 4.0$ in y diámetro interior $d_1 = 3.2$ in está sometido a una fuerza horizontal $P = 1500$ lb (figura 5.36a).

(a) Determine el esfuerzo cortante máximo en el poste.

(b) Para la misma carga P y el mismo esfuerzo cortante máximo, ¿cuál es el diámetro d_0 de un poste circular sólido (figura 5.36b)?

Solución

(a) *Esfuerzo cortante máximo*. Para el poste con sección transversal circular hueca (figura 5.36a), empleamos la ecuación (5.44) con la fuerza cortante V sustituida por la carga P y el área de la sección transversal A sustituida por la expresión $\pi(r_2^2 - r_1^2)$; por tanto,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4P}{3\pi}\left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^4 - r_1^4}\right) \tag{a}$$

A continuación sustituimos los valores numéricos, que son,

$$P = 1500 \text{ lb} \qquad r_2 = d_2/2 = 2.0 \text{ in} \qquad r_1 = d_1/2 = 1.6 \text{ in}$$

y obtenemos

$$\tau_{\text{máx}} = 658 \text{ psi}$$

que es el esfuerzo cortante máximo en el poste.

(b) *Diámetro de un poste circular sólido*. Para el poste con sección transversal circular sólida (figura 5.36b), utilizamos la ecuación (5.42) con V reemplazada por P y r sustituida por $d_0/2$:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4P}{3\pi(d_0/2)^2} \tag{b}$$

Despejando d_0, obtenemos

$$d_0^2 = \frac{16P}{3\pi\tau_{\text{máx}}} = \frac{16(1500 \text{ lb})}{3\pi(658 \text{ psi})} = 3.87 \text{ in}^2$$

de donde el resultado es

$$d_0 = 1.97 \text{ in}$$

En este ejemplo particular, el poste circular sólido tiene un diámetro aproximadamente de la mitad del correspondiente al poste tubular.

Nota: es muy poco común que los esfuerzos cortantes gobiernen el diseño de vigas circulares o rectangulares hechas de metales como el acero y el aluminio. En estos tipos de materiales el esfuerzo cortante permisible por lo general se encuentra en el rango de 25 a 50 por ciento del esfuerzo de tensión permisible. En el caso del poste tubular en este ejemplo, el esfuerzo cortante máximo sólo es 658 psi. En contraste, el esfuerzo de flexión máximo obtenido con la fórmula de la flexión es 9700 psi para un poste relativamente corto con longitud de 24 in. Por tanto, conforme aumenta la carga, el esfuerzo de tensión permisible se alcanzará mucho antes que el esfuerzo cortante permisible.

La situación es muy diferente para materiales que son débiles en cortante, como la madera. Para una viga ordinaria de madera, el esfuerzo permisible en cortante horizontal está en el rango de 4 a 10 por ciento del esfuerzo de flexión permisible. En consecuencia, aunque el esfuerzo cortante máximo tenga un valor relativamente bajo, algunas veces gobierna el diseño.

5.10 ESFUERZOS CORTANTES EN LAS ALMAS DE VIGAS CON PATINES

Cuando una viga de patín ancho (figura 5.37a) se somete a fuerzas cortantes así como a momentos flexionantes (flexión no uniforme), los esfuerzos normales y cortantes se desarrollan sobre las secciones transversales. La distribución de los esfuerzos cortantes en una viga de patín ancho es más complicada que en una viga rectangular. Por ejemplo, los esfuerzos cortantes en los patines de la viga actúan en las direcciones vertical y horizontal (las direcciones y y z), como se muestra por las flechas pequeñas en la figura 5.37b. Los esfuerzos cortantes horizontales, que son mucho mayores que los esfuerzos cortantes verticales en los patines, se analizan en la sección 6.7.

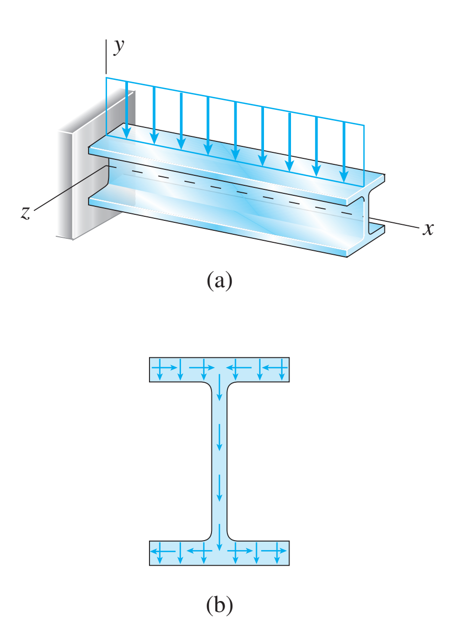


FIGURA 5.37 (a) Viga de patín ancho y (b) direcciones de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal.

Los esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho actúan sólo en la dirección vertical y son mayores que los esfuerzos en los patines. Estos esfuerzos se pueden determinar mediante las mismas técnicas que usamos para encontrar los esfuerzos cortantes en vigas rectangulares.

Esfuerzos cortantes en el alma

Iniciemos el análisis determinando los esfuerzos cortantes en la línea *ef* en el alma de una viga de patín ancho (figura 5.38a). Haremos las mismas suposiciones que se plantearon para una viga rectangular; es decir, que los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje y y que están distribuidos uniformemente a través del espesor del alma. Entonces aún se puede aplicar la fórmula del cortante $\tau = VQ/Ib$. Sin embargo, el ancho b ahora es el espesor t del alma y el área utilizada al calcular el momento estático Q es el área entre la línea *ef* y el borde superior de la sección transversal (indicada por el área sombreada de la figura 5.38a).

FIGURA 5.38 Esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho. (a) Sección transversal de la viga y (b) distribución de los esfuerzos cortantes verticales en el alma.

Al determinar el momento estático Q del área sombreada, ignoraremos los efectos de los filetes pequeños en la unión del alma y los patines (puntos b y c en la figura 5.38a). El error al ignorar las áreas de estos filetes es muy pequeño. Después dividiremos el área sombreada en dos rectángulos. El primero es el propio patín superior, que tiene un área igual a

$$A_1 = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right) \tag{a}$$

en donde b es el ancho del patín, h es el peralte total de la viga y h_1 es la distancia entre los paños interiores de los patines. El segundo rectángulo es la parte del alma entre ef y el patín, es decir, el rectángulo $efcb$, que tiene un área

$$A_2 = t\left(\frac{h_1}{2} - y_1\right) \tag{b}$$

en donde t es el espesor del alma y y_1 es la distancia desde el eje neutro hasta la línea ef.

Los momentos estáticos de las áreas A_1 y A_2, evaluados con respecto al eje neutro, se obtienen multiplicando estas áreas por las distancias desde sus centroides respectivos hasta el eje z. La suma de estos momentos estáticos da el momento estático Q del área combinada:

$$Q = A_1\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2}\right) + A_2\left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2}\right)$$

Al sustituir A_1 y A_2 de las ecuaciones (a) y (b) y luego simplificando, obtenemos

$$Q = \frac{b}{8}(h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8}(h_1^2 - 4y_1^2) \tag{5.45}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante τ en el alma de la viga a una distancia y_1 del eje neutro es

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It}\left[b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)\right] \qquad (5.46)$$

en donde el momento de inercia de la sección transversal es

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - t)h_1^3}{12} = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3) \qquad (5.47)$$

Como todas las cantidades en la ecuación (5.46) son constantes, excepto y_1, vemos de inmediato que τ varía cuadráticamente en toda la altura del alma, como se muestra por la gráfica en la figura 5.38b. Observe que la gráfica se trazó sólo para el alma y no incluye los patines; la razón es suficientemente simple, la ecuación (5.46) no se puede utilizar para determinar los esfuerzos cortantes verticales en los patines de la viga (consulte el análisis titulado “Limitaciones” más adelante en esta sección).

Esfuerzos cortantes máximo y mínimo

El esfuerzo cortante máximo en el alma de una viga de patín ancho ocurre en el eje neutro, donde $y_1 = 0$. El esfuerzo cortante mínimo se tiene donde el alma se une a los patines ($y_1 = \pm h_1/2$). Estos esfuerzos, determinados con la ecuación (5.46), son

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{8It}(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2) \qquad \tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It}(h^2 - h_1^2) \qquad (5.48\text{a,b})$$

y se indican en la gráfica de la figura 5.38b con $\tau_{\text{máx}}$ y $\tau_{\text{mín}}$. Para vigas ordinarias de patín ancho, el esfuerzo máximo en el alma es de 10 a 60 por ciento mayor que el esfuerzo mínimo.

Si bien quizá no sea evidente en el análisis anterior, el esfuerzo $\tau_{\text{máx}}$ dado por la ecuación (5.48a) no sólo es el esfuerzo cortante máximo en el alma, sino también en cualquier parte en la sección transversal.

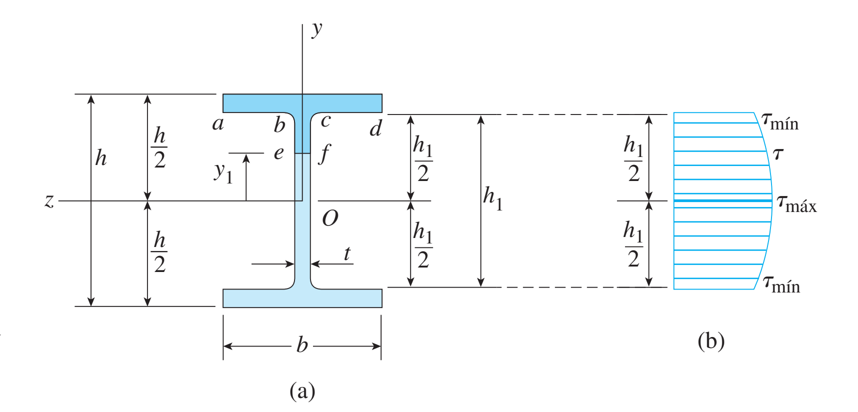


FIGURA 5.38 (Repetida.) Esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho, (a) Sección transversal de la viga y (b) distribución de los esfuerzos cortantes verticales en el alma.

Fuerza cortante en el alma

La fuerza cortante vertical soportada sólo por el alma se puede determinar multiplicando el área del diagrama de fuerza cortante (figura 5.38b) por el espesor t del alma. El diagrama de fuerza cortante consiste de dos partes, un área rectangular $h_1\tau_{\text{mín}}$ y un segmento parabólico con área

$$\frac{2}{3}(h_1)(\tau_{\text{máx}} - \tau_{\text{mín}})$$

Sumando estas dos áreas, multiplicando por el espesor t del alma y luego combinado términos, obtenemos la fuerza cortante total en el alma:

$$V_{\text{alma}} = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}}) \tag{5.49}$$

Para vigas con proporciones comunes, la fuerza cortante en el alma es 90 a 98 por ciento de la fuerza total V que actúa sobre la sección transversal; el resto se soporta por cortante en los patines.

Como el alma resiste la mayoría de la fuerza cortante, a menudo los diseñadores calculan un valor aproximado del esfuerzo cortante máximo dividiendo la fuerza cortante total entre el área del alma. El resultado es el esfuerzo cortante promedio en el alma, suponiendo que ésta soporta *toda* la fuerza cortante:

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{V}{th_1} \tag{5.50}$$

Para vigas ordinarias de patín ancho, el esfuerzo promedio calculado de esta manera está dentro de 10 por ciento (más o menos) del esfuerzo cortante máximo calculado con la ecuación (5.48a). Por tanto, la ecuación (5.50) proporciona una manera simple para estimar el esfuerzo cortante máximo.

Limitaciones

La teoría elemental del cortante presentada en esta sección es adecuada para determinar los esfuerzos cortantes verticales en el alma de una viga de patín ancho. Sin embargo, al investigar los esfuerzos cortantes verticales en los patines ya no podemos suponer que los esfuerzos cortantes son constantes a través del ancho de la sección, es decir, a través del ancho b de los patines (figura 5.38a). De aquí que no podemos utilizar la fórmula del cortante para determinar estos esfuerzos.

Para enfatizar este punto, considere la unión del alma y el patín superior ($y_1 = h_1/2$), donde el ancho de la sección cambia abruptamente de t a b. Los esfuerzos cortantes sobre las superficies libres *ab* y *cd* (figura 5.38a) deben ser cero, en tanto que el esfuerzo cortante a través del alma en la línea *bc* es $\tau_{mín}$. Estas observaciones indican que la distribución de los esfuerzos cortantes en la unión del alma con el patín es muy compleja y no se puede investigar mediante métodos elementales. El análisis de esfuerzo se complica aún más por el uso de filetes en las esquinas reentrantes (esquinas b y c). Los filetes son necesarios para evitar que los esfuerzos se vuelvan peligrosamente grandes, pero también modifican la distribución de los esfuerzos a través del alma.

Por tanto, concluimos que la fórmula del cortante no se puede emplear para determinar los esfuerzos cortantes verticales en los patines. Sin embargo, la fórmula del cortante da buenos resultados para los esfuerzos cortantes que actúan *horizontalmente* en los patines (figura 5.37b), como se analiza en la sección 6.8.

El método descrito antes para determinar los esfuerzos cortantes en las almas de vigas con patines anchos también se puede utilizar para otros perfiles con almas delgadas. Como ilustración, en el ejemplo 5.15 se describe el procedimiento para una viga T.

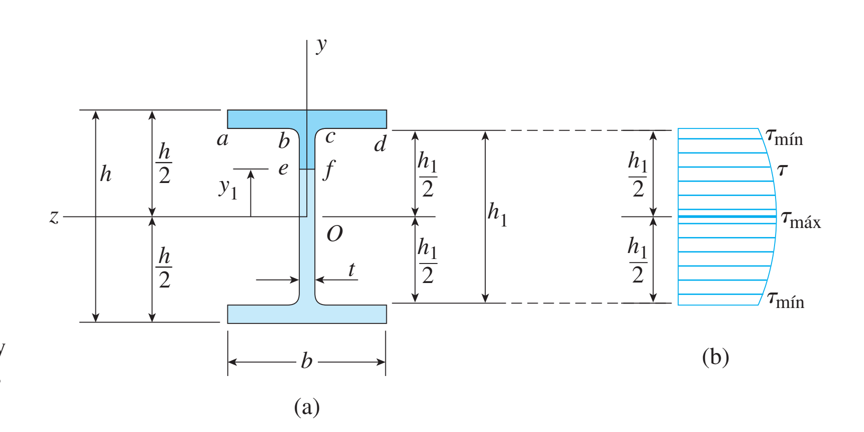


FIGURA 5.38 (Repetida.) Esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho. (a) Sección transversal de la viga y (b) distribución de los esfuerzos cortantes verticales en el alma.

Ejemplo 5.14

Una viga de patín ancho (figura 5.39a) se somete a una fuerza cortante vertical V = 45 kN. Las dimensiones de la sección transversal de la viga son b = 165 mm, t = 7.5 mm, h = 320 mm y h_1 = 290 mm.

Determine el esfuerzo cortante máximo, el esfuerzo cortante mínimo y la fuerza cortante total en el alma. (No tome en cuenta las áreas de los filetes al hacer sus cálculos.)

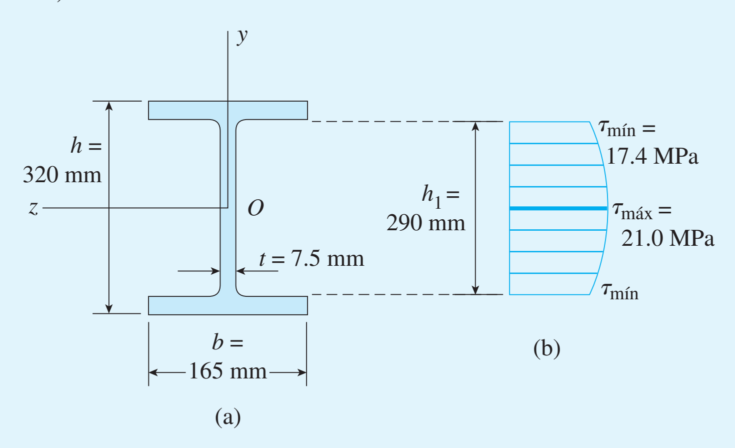


FIGURA 5.39 Ejemplo 5.14. Esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho.

Solución

Esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Los esfuerzos cortantes máximo y mínimo en el alma de la viga están dados por las ecuaciones (5.48a) y (5.48b). Antes de hacer sustituciones en ellas, calculamos el momento de inercia del área de la sección transversal con la ecuación (5.47):

$$I = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3) = 130.45 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Ahora sustituimos este valor de I, así como los valores numéricos para la fuerza cortante V y las dimensiones de la sección transversal en las ecuaciones (5.48a) y (5.48b):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{8It}(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2) = 21.0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It}(h^2 - h_1^2) = 17.4 \text{ MPa}$$

En este caso, la razón entre $\tau_{\text{máx}}$ y $\tau_{\text{mín}}$ es 1.21, es decir, el esfuerzo máximo en el alma es 21 por ciento mayor que el esfuerzo mínimo. La variación de los esfuerzos cortantes sobre la altura h_1 del alma se muestra en la figura 5.39b.

Fuerza cortante total. La fuerza cortante en el alma se calcula con la ecuación (5.49) como se muestra:

$$V_{\text{alma}} = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}}) = 43.0 \text{ kN}$$

A partir de este resultado vemos que el alma de esta viga particular resiste 96 por ciento de la fuerza cortante total.

Nota: el esfuerzo cortante promedio en el alma de la viga (de la ecuación 5.50) es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{th_1} = 20.7 \text{ MPa}$$

que sólo es 1% menor que el esfuerzo máximo.

Ejemplo 5.15

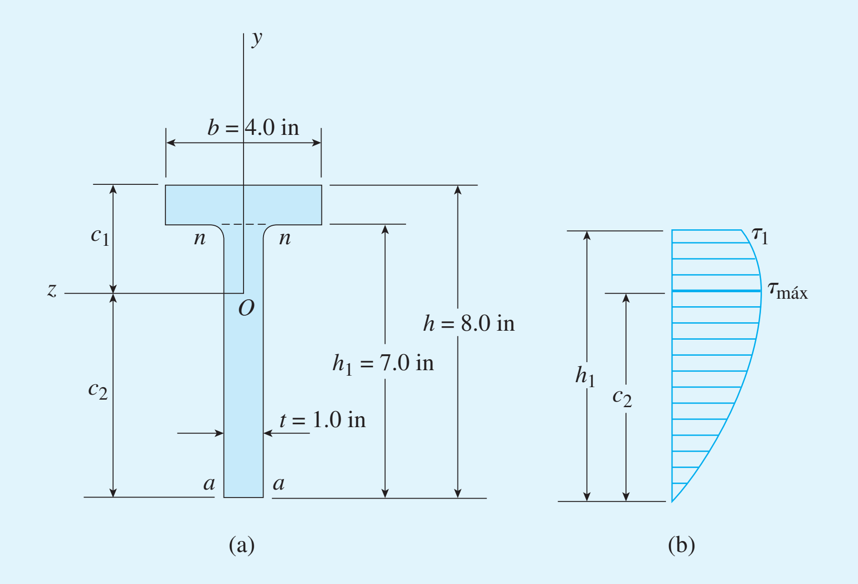
Una viga con sección transversal en T (figura 5.40a) está sometida a una fuerza cortante vertical $V = 10{,}000$ lb. Las dimensiones de la sección transversal son $b = 4$ in, $t = 1.0$ in, $h = 8.0$ in y $h_1 = 7.0$ in.

Determine el esfuerzo cortante τ_1 en la parte superior del alma (nivel *mn*) y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$. (No tome en cuenta las áreas de los filetes.)

Solución

Ubicación del eje neutro. El eje neutro de la viga T se ubica calculando las distancias c_1 y c_2 desde la parte superior e inferior de la viga hasta el centroide de la sección transversal (figura 5.40a). Primero, dividimos la sección transversal en dos rectángulos, el patín y el alma (observe la línea discontinua en la figura 5.40a). Luego calculamos el momento estático Q_{aa} de estos dos rectángulos con respecto a la línea *aa* en la parte inferior de la viga. La distancia c_2 es igual a Q_{aa} dividida entre el área A de toda la sección transversal (consulte el capitulo 12, sección 12.3, para ver los métodos para ubicar centroides de áreas compuestas). Los cálculos son los siguientes:

$$A = \sum A_i = b(h - h_1) + th_1 = 11.0 \text{ in}^2$$



$$Q_{aa} = \sum y_i A_i = \left(\frac{h + h_1}{2}\right)(b)(h - h_1) + \frac{h_1}{2}(th_1) = 54.5 \text{ in}^3$$

$$c_2 = \frac{Q_{aa}}{A} = \frac{54.5 \text{ in}^3}{11.0 \text{ in}^2} = 4.955 \text{ in} \qquad c_1 = h - c_2 = 3.045 \text{ in}$$

Momento de inercia. El momento de inercia I de toda el área de la sección transversal (con respecto al eje neutro) se puede encontrar determinando el momento de inercia I_{aa} en la parte inferior de la viga y luego empleando el teorema de los ejes paralelos (consulte la sección 12.5):

$$I = I_{aa} - Ac_2^2$$

Los cálculos son los siguientes:

$$I_{aa} = \frac{bh^3}{3} - \frac{(b-t)h_1^3}{3} = 339.67 \text{ in}^4 \qquad Ac_2^2 = 270.02 \text{ in}^4 \qquad I = 69.65 \text{ in}^4$$

Esfuerzo cortante en la parte superior del alma. Para encontrar el esfuerzo cortante τ_1 en la parte superior del alma (a lo largo de la línea *nn*) necesitamos calcular el momento estático Q_1 del área arriba del nivel *nn*. El momento estático es igual al área del patín multiplicada por la distancia desde el eje neutro hasta el centroide del patín:

$$Q_1 = b(h - h_1)\left(c_1 - \frac{h - h_1}{2}\right)$$

$$= (4 \text{ in})(1 \text{ in})(3.045 \text{ in} - 0.5 \text{ in}) = 10.18 \text{ in}^3$$

Por supuesto, obtenemos el mismo resultado si calculamos el momento estático del área *debajo* del nivel *nn*:

$$Q_1 = th_1\left(c_2 - \frac{h_1}{2}\right) = (1 \text{ in})(7 \text{ in})(4.955 \text{ in} - 3.5 \text{ in}) = 10.18 \text{ in}^3$$

Al sustituir en la fórmula del cortante, obtenemos

$$\tau_1 = \frac{VQ_1}{It} = \frac{(10{,}000 \text{ lb})(10.18 \text{ in}^3)}{(69.65 \text{ in}^4)(1 \text{ in})} = 1460 \text{ psi}$$

El esfuerzo existe como un esfuerzo cortante vertical que actúa sobre la sección transversal y como un esfuerzo cortante horizontal que actúa sobre el plano horizontal entre el patín y el alma.

Esfuerzo cortante máximo. El esfuerzo cortante máximo ocurre en el alma en el eje neutro. Por tanto, calculamos el momento estático $Q_{\text{máx}}$ del área de la sección transversal debajo del eje neutro:

$$Q_{\text{máx}} = tc_2\left(\frac{c_2}{2}\right) = (1 \text{ in})(4.955 \text{ in})\left(\frac{4.955 \text{ in}}{2}\right) = 12.28 \text{ in}^3$$

Como ya se indicó, obtendríamos el mismo resultado si calculamos el momento estático del área arriba del eje neutro, pero estos cálculos serían ligeramente más largos.

Sustituyendo en la fórmula del cortante, obtenemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ_{\text{máx}}}{It} = \frac{(10{,}000 \text{ lb})(12.28 \text{ in}^3)}{(69.65 \text{ in}^4)(1 \text{ in})} = 1760 \text{ psi}$$

que es el esfuerzo cortante máximo en la viga.

La distribución parabólica de los esfuerzos cortantes en el alma se muestra en la figura 5.40b.

*5.11 TRABES ARMADAS Y FLUJO CORTANTE

Las **trabes armadas** se fabrican con dos o más piezas de material unidas entre sí para formar una trabe individual. Este tipo de trabe se puede construir en una gran variedad de formas para cumplir con necesidades especiales arquitectónicas o estructurales y para proporcionar secciones transversales mayores que las comúnmente disponibles.

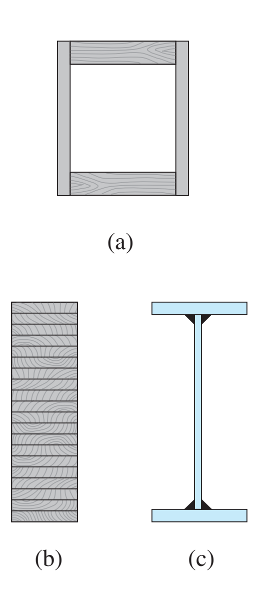


FIGURA 5.41 Secciones transversales comunes de trabes armadas: (a) trabe de caja de madera, (b) trabe encolada y (c) trabe de placas.

En la figura 5.41 se muestran algunas secciones transversales de trabes armadas. La parte (a) de la figura muestra una **trabe de caja** de madera construida con dos tablones que sirven como patines y dos almas de madera contrachapada. Las piezas se unen con clavos, tornillos o pegamento de tal manera que toda la viga actúe como una unidad individual. Las trabes de caja también se construyen con otros materiales, incluyendo acero, plásticos y materiales compuestos.

El segundo ejemplo es una trabe laminada pegada (llamada **trabe encolada**) hecha de tablones pegados para formar una trabe mucho mayor que se podría aserrar de un árbol como un elemento individual. Las trabes encoladas se usan comúnmente en la construcción de edificios pequeños.

El tercer ejemplo es una **trabe de placas** de acero del tipo ordinariamente empleado en puentes y edificios grandes. Estas trabes, que consisten en tres placas de acero unidas por soldadura, se pueden fabricar en tamaños mucho más grandes que los disponibles en vigas ordinarias de patín ancho o I.

Las trabes armadas se deben diseñar de manera que se comporten como un solo elemento, los cálculos de diseño comprenden dos fases. En la primera, la trabe se diseña como si estuviera hecha con una sola pieza, tomando en cuenta los esfuerzos de flexión y cortante. En la segunda, se diseñan las *conexiones* entre las partes (como clavos, pernos, soldaduras y pegamento) para asegurar que la viga en efecto se comporte como un entidad individual. En particular, las conexiones deben ser lo suficientemente fuertes para transmitir las fuerzas cortantes horizontales que actúen entre las partes de la trabe. Para obtener estas fuerzas utilizamos el concepto de *flujo cortante*.

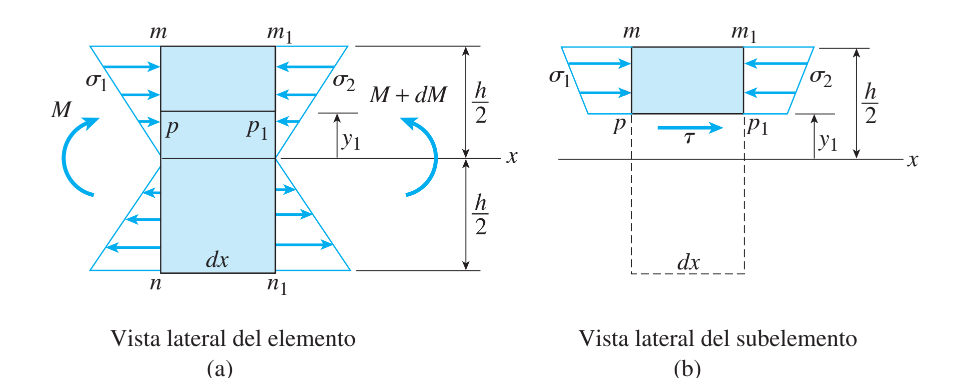
Flujo cortante

Para obtener una fórmula para las fuerzas cortantes horizontales que actúan entre las partes de una trabe, regresemos a la deducción de la fórmula del cortante (consulte las figuras 5.28 y 5.29 de la sección 5.8). En esa deducción cortamos un elemento mm_1n_1n de una viga (figura 5.42a) e investigamos el equilibrio horizontal de un subelemento mm_1p_1p (figura 5.42b). A partir del equilibrio horizontal del subelemento, determinamos la fuerza F_3 (figura 5.42c) que actúa sobre su superficie inferior:

$$F_3 = \frac{dM}{I} \int y \, dA \tag{5.51}$$

Esta ecuación es igual a la ecuación (5.33) de la sección 5.8.

Ahora definamos una cantidad nueva denominada **flujo cortante** f. El flujo cortante es la *fuerza cortante horizontal por unidad de distancia a lo largo del eje longitudinal de la viga*. Como la fuerza F_3 actúa a lo largo de la



Vista lateral del elemento
(a)

Vista lateral del subelemento
(b)

Vista lateral del subelemento
(c)

FIGURA 5.42 Esfuerzos cortantes horizontales en una viga. (*Nota:* estas figuras son repeticiones de las figuras 5.28 y 5.29.)

distancia dx, la fuerza cortante por unidad de distancia es igual a F_3 dividida entre dx; por tanto,

$$f = \frac{F_3}{dx} = \frac{dM}{dx}\left(\frac{1}{I}\right)\int y\,dA$$

Reemplazando dM/dx por la fuerza cortante V y denotando la integral con Q, obtenemos la **fórmula del flujo cortante** siguiente:

$$f = \frac{VQ}{I} \qquad (5.52)$$

Esta ecuación proporciona el flujo cortante que actúa sobre el plano horizontal pp_1 que se muestra en la figura 5.42a. Los términos V, Q e I tienen los mismos significados que en la fórmula del cortante (ecuación 5.38).

Si los esfuerzos cortantes sobre el plano pp_1 están distribuidos uniformemente, como supusimos para vigas rectangulares y vigas de patín ancho, el flujo cortante f es igual a τb. En ese caso, la fórmula del flujo cortante se reduce a la fórmula del cortante. Sin embargo, la deducción de la ecuación (5.51) para la fuerza F_3 no involucra ninguna suposición acerca la distribución de los esfuerzos cortantes en la viga. En cambio, la fuerza F_3 se encuentra únicamente a partir del equilibrio horizontal del subelemento (fi-

gura 5.42c). Por tanto, ahora podemos interpretar el subelemento y la fuerza F_3 en términos más generales que antes.

El subelemento puede ser *cualquier* bloque prismático de material entre las secciones transversales *mn* y m_1n_1 (figura 5.42a). No tiene que obtenerse haciendo un solo corte horizontal (como pp_1) a través de la viga. Además, como F_3 es la fuerza cortante horizontal total que actúa entre el subelemento y el resto de la viga, puede estar distribuida en cualquier parte sobre los lados del subelemento, no sólo sobre su superficie inferior. Estos mismos comentarios se aplican al flujo cortante *f*, ya que es únicamente la fuerza F_3 por unidad de distancia.

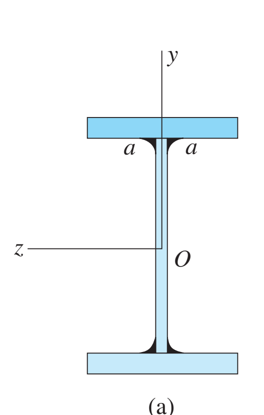
Ahora regresemos a la fórmula del flujo cortante $f = VQ/I$ (ecuación 5.52). Los términos *V* e *I* tienen sus significados usuales y no se ven afectados por la elección del subelemento. Sin embargo, el momento estático *Q* es una propiedad de la cara de la sección transversal del subelemento. Para ilustrar cómo se determina *Q*, consideraremos tres ejemplos específicos de trabes armadas (figura 5.43).

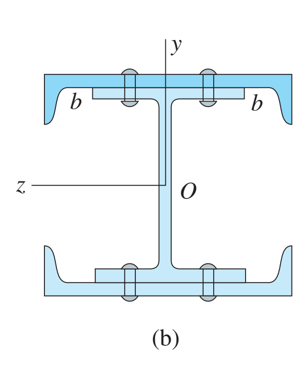
Áreas empleadas al calcular el momento estático Q

El primer ejemplo de una trabe armada es una **trabe con placas** de acero soldadas (figura 5.43a). Las soldaduras deben transmitir las fuerzas cortantes horizontales que actúan entre los patines y el alma. En el patín superior, la fuerza cortante horizontal (por unidad de distancia a lo largo del eje de la viga) es el flujo cortante a lo largo de la superficie de contacto *aa*. Este flujo cortante se debe calcular tomando *Q* como el momento estático del área de la sección transversal arriba de la superficie de contacto *aa*. En otras palabras, *Q* es el momento estático del área del patín (área sombreada en la figura 5.43a), calculado con respecto al eje neutro. Después de calcular el flujo cortante, es fácil determinar la cantidad de soldadura necesaria para resistir la fuerza cortante, ya que la resistencia de una soldadura por lo general se específica en términos de fuerza por unidad de distancia a lo largo de la soldadura.

El segundo ejemplo es una **trabe de patín ancho** que se refuerza remachando una sección en canal en cada patín (figura 5.43b). La fuerza cortante horizontal entre cada canal y la viga principal debe ser transmitida por los remaches. Esta fuerza se calcula con la fórmula del flujo cortante empleando *Q* como el momento estático del área de todo el canal (se muestra sombreada en la figura). El flujo cortante resultante es la fuerza longitudinal por unidad de distancia que actúa a lo largo de la superficie de contacto *bb*, y los remaches deben tener un tamaño y espaciamiento longitudinal adecuados para resistir esta fuerza.

El último ejemplo es una **trabe de caja de madera** con dos patines y dos almas que están conectadas por clavos o tornillos (figura 5.43c). La fuerza cortante horizontal total entre el patín superior y las almas es la fuerza cortante que actúa a lo largo de las *dos* superficies de contacto *cc* y *dd* y, por tanto, el momento estático *Q* se calcula para el patín superior (el área sombreada). En otras palabras, el flujo cortante calculado con la fórmula $f = VQ/I$ es el flujo cortante total a lo largo de todas las superficies de contacto que rodean el área para la cual se calcula *Q*. En este caso, el flujo cortante *f* es resistido por la acción combinada en los *dos* lados de la trabe, es decir, tanto en *cc* como en *dd*, como se ilustra en el siguiente ejemplo.





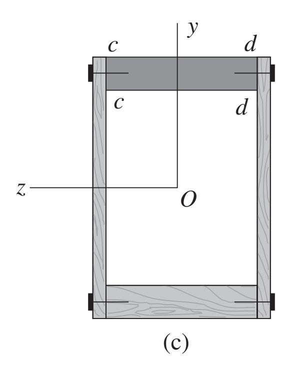
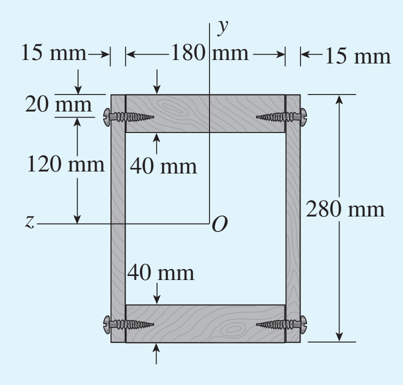
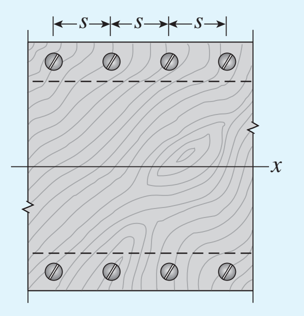


FIGURA 5.43 Áreas empleadas al calcular el momento estático *Q*.

Ejemplo 5.16



(a) Sección transversal



(b) Vista lateral

FIGURA 5.44 Ejemplo 5.16. Trabe de caja de madera.

Una trabe de caja de madera (figura 5.44) se construye con dos tablones, cada uno de 40 × 180 mm de sección transversal, que sirven como patines y dos almas de madera contrachapada, cada una de 15 mm de espesor. La altura total de la trabe es 280 mm. La madera contrachapada esta sujeta a los patines con tornillos para madera que tienen una carga permisible en cortante de $F = 800$ N cada uno.

Si la fuerza cortante V que actúa sobre la sección transversal es 10.5 kN, determine el espaciamiento longitudinal máximo permisible s de los tornillos (figura 5.44b).

Solución

Flujo cortante. La fuerza cortante horizontal trasmitida entre el patín superior y las dos almas se puede encontrar con la fórmula del flujo cortante $f = VQ/I$, en donde Q es el momento estático del área de la sección transversal del patín. Para determinar este momento estático, multiplicamos el área A_f del patín por la distancia d_f desde su centroide hasta el eje neutro:

$$A_f = 40 \text{ mm} \times 180 \text{ mm} = 7200 \text{ mm}^2 \qquad d_f = 120 \text{ mm}$$

$$Q = A_f d_f = (7200 \text{ mm}^2)(120 \text{ mm}) = 864 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

El momento de inercia de toda el área de la sección transversal con respecto al eje neutro es igual al momento de inercia del rectángulo exterior menos el momento de inercia del "agujero" (el rectángulo interior):

$$I = \frac{1}{12}(210 \text{ mm})(280 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12}(180 \text{ mm})(200 \text{ mm})^3 = 264.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Al sustituir V, Q e I en la fórmula del flujo cortante (ecuación 5.52), obtenemos

$$f = \frac{VQ}{I} = \frac{(10{,}500 \text{ N})(864 \times 10^3 \text{ mm}^3)}{264.2 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 34.3 \text{ N/mm}$$

que es la fuerza cortante horizontal por milímetro de longitud que se debe transmitir entre el patín y la dos almas.

Espaciamiento de los tornillos. Como el espaciamiento de los tornillos es s, y puesto que hay dos líneas de ellos (una a cada lado del patín), se deduce que la capacidad de carga de los tornillos es $2F$ por la distancia s a lo largo de la trabe. Por tanto, la capacidad de los tornillos por unidad de distancia a lo largo de la trabe es $2F/s$. Al igualar $2F/s$ con el flujo cortante f y despejando el espaciamiento s, obtenemos

$$s = \frac{2F}{f} = \frac{2(800 \text{ N})}{34.3 \text{ N/mm}} = 46.6 \text{ mm}$$

Este valor de s es el espaciamiento máximo permisible de los tornillos, basado en la carga permisible por tornillo. Cualquier espaciamiento mayor que 46.6 mm sobrecarga los tornillos. Por conveniencia de fabricación, y para estar en el lado seguro, seleccionaríamos un espaciamiento $s = 45$ mm.

*5.12 VIGAS CON CARGAS AXIALES

Los elementos estructurales a menudo se someten a la acción simultánea de cargas de flexión y cargas axiales. Esto sucede, por ejemplo, en marcos de aeronaves, columnas en edificios, maquinaria, partes de barcos y aeronaves. Si los elementos no son demasiado esbeltos, los esfuerzos combinados se pueden obtener por superposición de los esfuerzos de flexión y de los esfuerzos axiales.

Para ver cómo se lleva a cabo esto, considere la viga en voladizo que se muestra en la figura 5.45a. La única carga sobre la viga es una fuerza inclinada P que actúa en el centroide de la sección transversal extrema. Esta carga puede resolverse en dos componentes, una carga lateral Q y una carga axial S. Estas cargas producen **resultantes de esfuerzos** en la forma de momentos flexionantes M, fuerzas cortantes V y fuerzas axiales N en toda la viga (figura 5.45b). En una sección transversal ordinaria, a una distancia x desde el apoyo, las resultantes de esfuerzos son

$$M = Q(L - x) \qquad V = -Q \qquad N = S$$

en donde L es la longitud de la viga. Los esfuerzos asociados con cada una de estas resultantes de esfuerzos se pueden determinar en cualquier punto en la sección transversal por medio de la fórmula apropiada ($\sigma = -My/I$, $\tau = VQ/Ib$ y $\sigma = N/A$).

Como la fuerza axial N y el momento flexionante M producen esfuerzos normales, necesitamos combinarlos para obtener la distribución final de esfuerzos. La **fuerza axial** (cuando actúa sola) produce una distribución uniforme de esfuerzos $\sigma = N/A$ sobre toda la sección transversal, como se muestra en el diagrama de esfuerzos en la figura 5.45c. En este ejemplo particular, el esfuerzo σ es de tensión, como se indica por los signos de más en el diagrama.

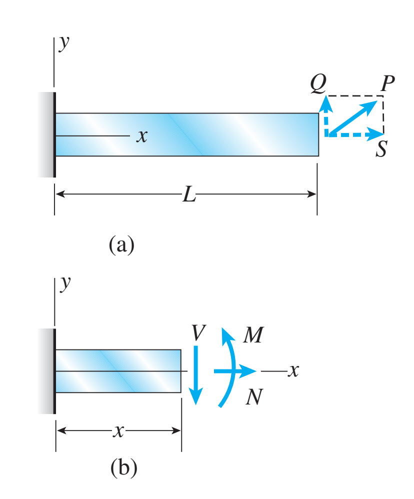
El **momento flexionante** produce un esfuerzo linealmente variable $\sigma = -My/I$ (figura 5.45d) con compresión en la parte superior de la viga y tensión en la parte inferior. La distancia y se mide desde el eje z, que pasa por el centroide de la sección transversal.

La distribución final de los esfuerzos normales se obtiene superponiendo los esfuerzos producidos por la fuerza axial y el momento flexionante. Por tanto, la ecuación para los **esfuerzos combinados** es

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} \qquad (5.53)$$

Observe que N es positiva cuando produce tensión y M es positivo de acuerdo con la convención de signos del momento flexionante (un momento flexionante positivo produce compresión en la parte superior de la viga y tensión en la parte inferior). Además, el eje y es positivo hacia arriba. Siempre que utilicemos estas convenciones de signos en la ecuación (5.53), los esfuerzos normales σ serán positivos para tensión y negativos para compresión.

La distribución final de esfuerzos depende de los valores algebraicos relativos de los términos en la ecuación (5.35). Para nuestro ejemplo, las



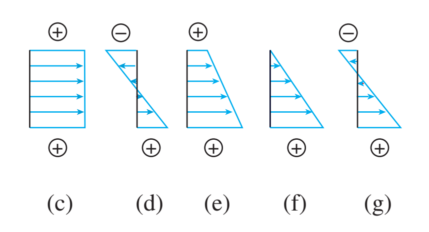
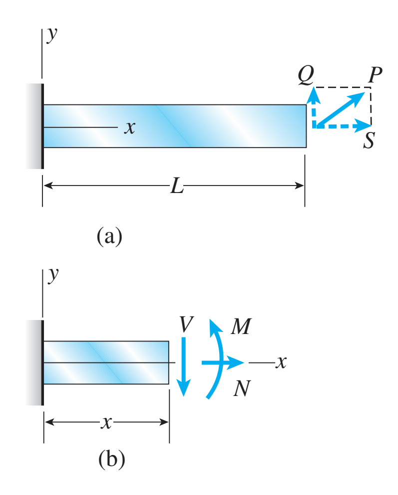


FIGURA 5.45 Esfuerzos normales en una viga en voladizo sometida a cargas de flexión y axial: (a) viga con carga P que actúa en el extremo libre, (b) resultantes de esfuerzos N, V y M que actúan sobre una sección transversal a una distancia x desde el apoyo, (c) esfuerzos de tensión debidos a la fuerza axial N que actúa sola, (d) esfuerzos de tensión y compresión debidos al momento flexionante M que actúa solo y (e), (f) y (g) distribuciones posibles de esfuerzos debidas a los efectos combinados de N y M.



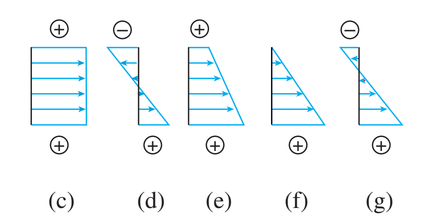


FIGURA 5.45 (Repetida.)

tres posibilidades se muestran en las figuras 5.45e, f y g. Si el esfuerzo de flexión en la parte superior de la viga (figura 5.45d) es numéricamente menor que el esfuerzo axial (figura 5.45c), toda la sección transversal estará en tensión, como se muestra en la figura 5.45e. Si el esfuerzo de flexión en la parte superior es igual al esfuerzo axial, la distribución será triangular (figura 5.45f) y si el esfuerzo de flexión es numéricamente mayor que el esfuerzo axial, la sección transversal estará parcialmente en compresión y parcialmente en tensión (figura 5.45g). Por supuesto, si la fuerza axial es de compresión o si se invierte el sentido del momento flexionante, las distribuciones de esfuerzos cambiarán de manera correspondiente.

Cuando las cargas de flexión y axial actúan de manera simultánea, el eje neutro (es decir, la línea en la sección transversal donde el esfuerzo normal es cero) ya no pasa por el centroide de la sección transversal. Como se muestra en las figuras 5.45e, f y g, respectivamente, el eje neutro puede estar fuera de la sección transversal, en el borde la sección o dentro de la misma.

El uso de la ecuación (5.53) para determinar los esfuerzos en una viga con cargas axiales se ilustra en el ejemplo 5.17.

Cargas axiales excéntricas

Una **carga axial excéntrica** es una fuerza axial que *no* actúa en el centroide de la sección transversal. Un ejemplo se muestra en la figura 5.46a, donde la viga en voladizo AB está sometida a una carga de tensión P que actúa a una distancia e desde el eje x (el eje x pasa por los centroides de las secciones transversales). La distancia e, llamada *excentricidad* de la carga, es positiva en la dirección positiva del eje y.

La carga excéntrica P es estáticamente equivalente a una fuerza axial P que actúa a lo largo del eje x y a un momento flexionante Pe que actúa con respecto al eje z (figura 5.46b). Observe que el momento Pe es un momento flexionante negativo.

Una vista transversal de la viga (figura 5.46c) muestra los ejes y y z pasando por el centroide C de la sección transversal. La carga excéntrica P corta el eje y, que es un eje de simetría.

Dado que la fuerza axial N en cualquier sección transversal es igual a P y puesto que el momento flexionante M es igual a $-Pe$, el **esfuerzo normal** en cualquier punto en la sección transversal (de la ecuación 5.53) es

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pey}{I} \qquad (5.54)$$

en donde A es el área de la sección transversal e I es el momento de inercia con respecto al eje z. La distribución de esfuerzos obtenida con la ecuación (5.54) para el caso en que P y e son positivas, se muestra en la figura 5.46d.



Flexión debida al peso de la viga y compresión axial debida a la componente horizontal de la fuerza de izado del cable

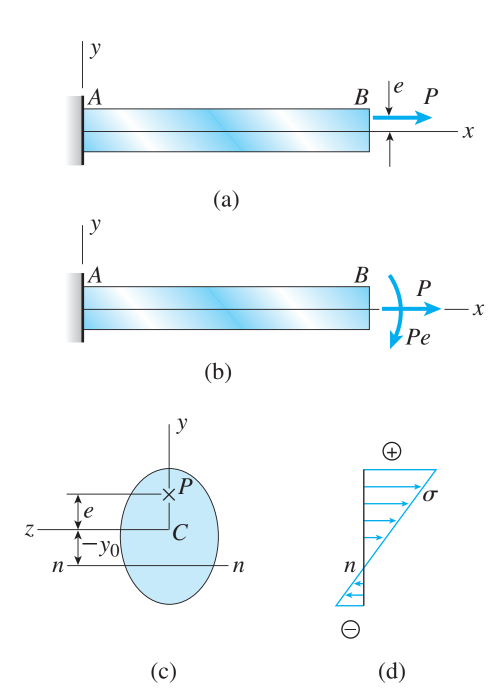


FIGURA 5.46 (a) Viga en voladizo con una carga axial excéntrica *P*, (b) cargas equivalentes *p* y *pe*, (c) sección transversal de la viga y (d) distribución de los esfuerzos normales sobre la sección transversal.

La posición del **eje neutro** *nn* (figura 5.46c) puede obtenerse con la ecuación (5.54) igualando el esfuerzo σ a cero y despejando la coordenada *y*, que ahora denotamos y_0. El resultado es

$$y_0 = -\frac{I}{Ae} \tag{5.55}$$

La coordenada y_0 se mide desde el eje *z* (que es el eje neutro sometido a flexión pura) hasta la línea *nn* de esfuerzo cero (el eje neutro ante flexión combinada con carga axial). Dado que y_0 es positiva en la dirección del eje *y* (hacia arriba en la figura 5.46c), se identifica $-y_0$ cuando se muestra hacia abajo en la figura.

De la ecuación (5.55) vemos que el eje neutro se encuentra debajo del eje *z* cuando *e* es positiva y está arriba del eje *z* cuando *e* es negativa. Si se reduce la excentricidad, la distancia y_0 aumenta y el eje neutro se aleja del centroide. En el límite, cuando *e* tiende a cero, la carga actúa en el centroide, el eje neutro está a una distancia infinita y la distribución de esfuerzos es uniforme. Si la excentricidad aumenta, la distancia y_0 disminuye y el eje neutro se acerca al centroide. En el límite, cuando *e* se vuelve extremadamente grande, la carga actúa a una distancia infinita, el eje neutro pasa por el centroide y la distribución de esfuerzos es la misma que en flexión pura.

Las cargas excéntricas se analizan en algunos de los problemas al final de este capítulo, iniciando con el problema 5.12.12.

Limitaciones

El análisis anterior de las vigas con cargas axiales se basa en la suposición de que los momentos flexionantes se pueden calcular sin considerar las deflexiones de las vigas. En otras palabras, al determinar el momento flexionante M para emplearlo en la ecuación (5.53), debemos ser capaces de utilizar las dimensiones originales de la viga, es decir, *antes* de que ocurran deformaciones o deflexiones. El uso de las dimensiones originales es válido siempre que las vigas sean relativamente rígidas en flexión, de manera que las deflexiones sean muy pequeñas.

Por tanto, al analizar una viga con cargas axiales, es importante distinguir entre una **viga robusta,** que es relativamente corta y, por tanto, muy resistente a la flexión y una **viga esbelta,** que es relativamente larga y, por ello, muy flexible. En el caso de una viga robusta, las deflexiones laterales son tan pequeñas que no tienen un efecto significativo sobre la línea de acción de las fuerzas axiales. Como consecuencia, los momentos flexionantes no dependerán de las deflexiones y los esfuerzos se pueden determinar con la ecuación (5.52).

En el caso de una viga esbelta, las deflexiones laterales (si bien pequeñas en magnitud) son suficientemente grandes como para modificar de manera significativa la línea de acción de las fuerzas axiales. Cuando eso sucede, se crea un momento flexionante adicional igual al producto de la fuerza axial por la deflexión lateral en cada sección transversal. En otras palabras, existe una interacción, o acoplamiento, entre los efectos axiales y los efectos flexionantes. Este tipo de comportamiento se analiza en el capítulo 11 sobre **columnas.**

La distinción entre una viga robusta y una viga esbelta es obvio que no es muy precisa. En general, la única manera para saber si los efectos de interacción son importantes es analizar la viga con y sin la interacción y observar si los resultados difieren de manera significativa. Sin embargo, este procedimiento puede requerir un esfuerzo de cálculo considerable. Por tanto, como una directriz para uso práctico, es usual considerar una viga con una razón entre longitud y altura de 10 o menor como una viga robusta. En los problemas de esta sección sólo se consideran vigas robustas.

Ejemplo 5.17

Una viga tubular *ACB* con longitud $L = 60$ in está soportada en sus extremos con pasadores y cargada por una fuerza inclinada *P* en su punto medio (figura 5.47a). La distancia desde el punto de aplicación de la carga *P* hasta el eje longitudinal del tubo es $d = 5.5$ in. La sección transversal del tubo es cuadrada (figura 5.47b) con dimensiones exteriores $b = 6.0$ in, área $A = 20.0$ in^2 y momento de inercia $I = 86.67$ in^4.

Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga debidos a la carga $P = 1000$ lb.

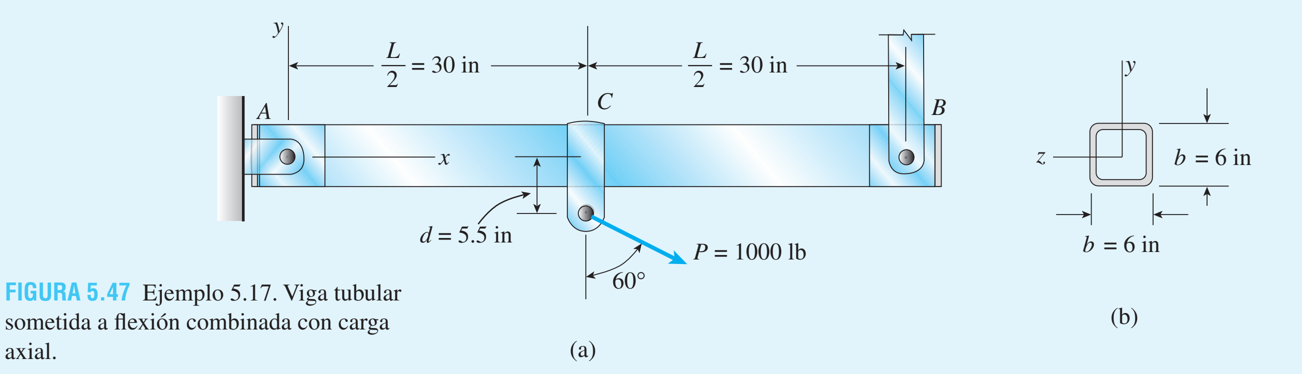


FIGURA 5.47 Ejemplo 5.17. Viga tubular sometida a flexión combinada con carga axial.

Solución

Viga y carga. Para fines de análisis iniciamos representado la viga y su carga en forma idealizada (figura 5.48a). Como el apoyo en el extremo *A* resiste desplazamientos horizontal y vertical, está representado como un soporte de pasador. El soporte en *B* evita el desplazamiento vertical pero no presenta resistencia al desplazamiento horizontal, por lo que se muestra como un apoyo de rodillo.

La carga inclinada *P* se resuelve en componentes horizontal y vertical P_H y P_V, respectivamente:

$$P_H = P \text{ sen } 60° = (1000 \text{ lb})(\text{sen } 60°) = 866 \text{ lb}$$

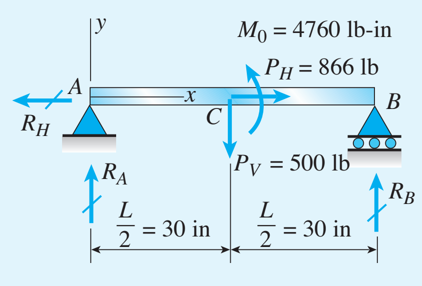
$$P_V = P \cos 60° = (1000 \text{ lb})(\cos 60°) = 500 \text{ lb}$$

La componente horizontal P_H se desplaza hacia el eje de la viga por la adición de un momento M_0 (figura 5.48a):

$$M_0 = P_H d = (866.0 \text{ lb})(5.5 \text{ in}) = 4760 \text{ lb-in}$$

Observe que las cargas P_H, P_V y el momento M_0 que actúan en el punto medio *C* de la viga son estáticamente equivalentes a la carga original *P*.

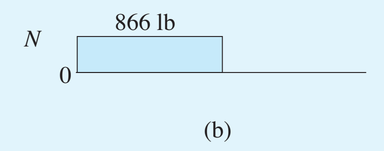
Reacciones y resultantes de esfuerzos. Las reacciones de la viga (R_H, R_A y R_B) se muestran en la figura 5.48a. Además, los diagramas de la fuerza axial *N*, la fuerza cortante *V* y el momento flexionante *M* se muestran en las figuras 5.48b, c y d, respectivamente. Todas estas cantidades se encuentran a partir de diagramas de cuerpo libre y de ecuaciones de equilibrio mediante las técnicas descritas en el capítulo 4.



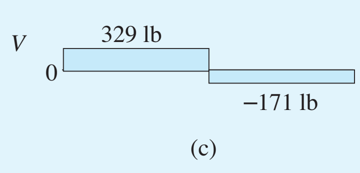
R_H = 866 lb

R_A = 329 lb R_B = 171 lb

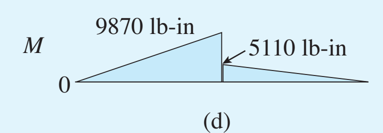
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 5.48 Solución del ejemplo 5.17. (a) Viga y carga idealizada, (b) diagrama de fuerza axial, (c) diagrama de fuerza cortante y (d) diagrama de momento flexionante.

Esfuerzos en la viga. El esfuerzo de tensión máximo en la viga ocurre en su parte inferior (y = –3.0 in) justo a la izquierda del punto medio C. Llegamos a esta conclusión al observar que en este punto en la viga el esfuerzo de tensión debido a la fuerza axial se *suma* al esfuerzo de tensión producido por el momento flexionante máximo. Por tanto, de la ecuación (5.53) obtenemos

$$(\sigma_t)_{\text{máx}} = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} = \frac{866 \text{ lb}}{20.0 \text{ in}^2} - \frac{(9870 \text{ lb-in})(-3.0 \text{ in})}{86.67 \text{ in}^4}$$
$$= 43 \text{ psi} + 342 \text{ psi} = 385 \text{ psi}$$

El esfuerzo de compresión máximo ocurre en la parte superior de la viga (y = 3.0 in) a la izquierda del punto C o bien en la parte superior de la viga a la derecha del punto C. Estos dos esfuerzos se calculan como sigue:

$$(\sigma_c)_{\text{izquierda}} = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} = \frac{866 \text{ lb}}{20.0 \text{ in}^2} - \frac{(9870 \text{ lb-in})(3.0 \text{ in})}{86.67 \text{ in}^4}$$
$$= 43 \text{ psi} - 342 \text{ psi} = -299 \text{ psi}$$

$$(\sigma_c)_{\text{derecha}} = \frac{N}{A} - \frac{My}{I} = 0 - \frac{(5110 \text{ lb-in})(3.0 \text{ in})}{86.67 \text{ in}^4} = -177 \text{ psi}$$

Por tanto, el esfuerzo de compresión máximo es

$$(\sigma_c)_{\text{máx}} = -299 \text{ psi}$$

y ocurre en la parte superior de la viga a la izquierda del punto C.

Nota: este ejemplo muestra cómo se pueden determinar los esfuerzos normales en una viga debidos a la combinación de flexión y carga axial. Los esfuerzos cortantes que actúan sobre secciones transversales de la viga (debidos a las fuerzas cortantes V) se pueden determinar independientemente de los esfuerzos normales, como se describió antes en este capítulo. Más adelante, en el capítulo 7, veremos cómo determinar los esfuerzos sobre planos inclinados cuando conocemos los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre planos transversales.

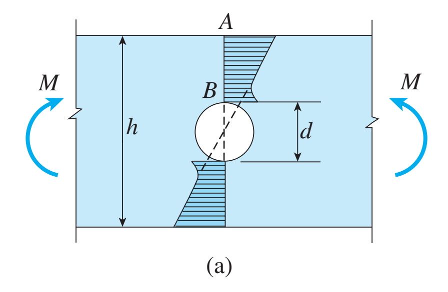
*5.13 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS EN FLEXIÓN

Las fórmulas de la flexión y del cortante analizadas en secciones anteriores de este capítulo son válidas para vigas sin agujeros, muescas u otros cambios abruptos en sus dimensiones. Cuando existe ese tipo de discontinuidades se producen esfuerzos muy localizados. Estas **concentraciones de esfuerzos** pueden ser muy importantes cuando un elemento está hecho de un material frágil o sometido a cargas dinámicas. (Consulte el capítulo 2, sección 2.10, para ver un análisis de las condiciones en las cuales las concentraciones de esfuerzos son importantes.)

Para fines ilustrativos, en esta sección se describen dos casos de concentraciones de esfuerzos en vigas. El primer caso es una viga con sección transversal rectangular con un **agujero en el eje neutro** (figura 5.49). La viga tiene altura h y espesor b (perpendicular al plano de la figura) y está en flexión pura ante la acción de momentos flexionantes M.

Cuando el diámetro del agujero es pequeño en comparación con la altura h, la distribución de esfuerzos sobre la sección transversal a través de un agujero es aproximadamente como se muestra en el diagrama de la figura 5.49a. En el punto B en el borde del agujero el esfuerzo es mucho mayor que el que existiría en ese punto si no estuviera presente el agujero. (La línea discontinua en la figura muestra la distribución de esfuerzos sin agujero.) Sin embargo, conforme avanzamos hacia los bordes exteriores de la viga (hacia el punto A), la distribución de esfuerzos varía linealmente con la distancia desde el eje neutro y sólo ve se afectada ligeramente por la presencia del agujero.

Cuando el agujero es relativamente grande, el patrón de esfuerzos es aproximadamente como se muestra en la figura 5.49b. Existe un gran aumento en el esfuerzo en el punto B y sólo un cambio pequeño en el esfuer-



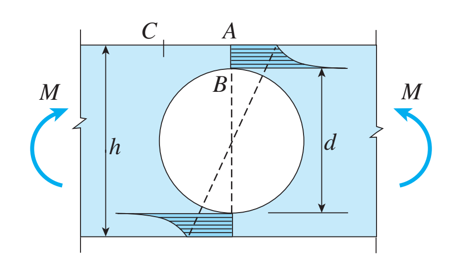


FIGURA 5.49 Distribuciones de esfuerzos en una viga en flexión pura con un agujero circular en el eje neutro. (La viga tiene una sección transversal con altura h y espesor b.)

zo en el punto A en comparación con la distribución de esfuerzos en la viga sin un agujero (de nuevo se muestra por la línea discontinua). El esfuerzo en el punto C es mayor que el que existe en A pero menor que el presente en B.

Investigaciones extensivas han demostrado que el esfuerzo en el borde del agujero (punto B) es aproximadamente el doble del *esfuerzo nominal* en ese punto. El esfuerzo nominal se calcula con la fórmula de la flexión de la manera estándar, es decir, $\sigma = My/I$, en donde y es la distancia $d/2$ desde el eje neutro hasta el punto B e I es el momento de inercia de la sección transversal neta en el agujero. Por tanto, tenemos la fórmula aproximada siguiente para el esfuerzo en el punto B:

$$\sigma_B \approx 2\,\frac{My}{I} = 1\frac{2Md}{b(h^3 - d^3)} \tag{5.56}$$

En el borde exterior de la viga (en el punto C), el esfuerzo es aproximadamente igual al esfuerzo *nominal* (no al esfuerzo real) en el punto A (donde $y = h/2$):

$$\sigma_C \approx \frac{My}{I} = \frac{6Mh}{b(h^3 - d^3)} \tag{5.57}$$

De las dos últimas ecuaciones vemos que la razón σ_B/σ_C es aproximadamente $2d/h$. De aquí concluimos que cuando la razón d/h del diámetro del agujero y la altura de la viga excede 1/2, el esfuerzo máximo ocurre en el punto B. Cuando d/h es menor que 1/2, el esfuerzo máximo esta en el punto C.

El segundo caso que estudiaremos es una **viga rectangular con muescas** (figura 5.50). La viga que se muestra en la figura está sometida a flexión pura y tiene altura h y espesor b (perpendicular al plano de la figura). Ade-

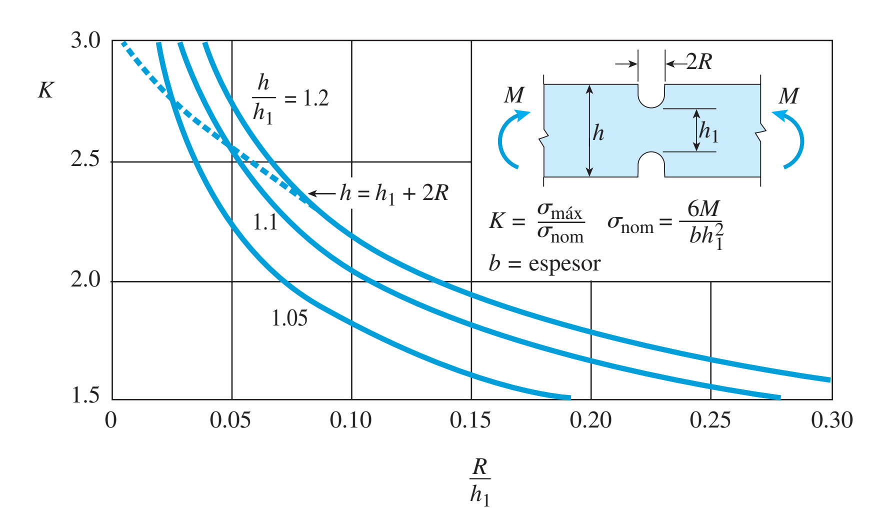


FIGURA 5.50 Factor de concentración de esfuerzos K para una viga con muescas con sección transversal rectangular en flexión pura (h = altura de la viga; b = espesor de la viga, perpendicular al plano de la figura). La línea discontinua es para muescas semicirculares ($h = h_1 + 2R$).

más, la altura neta de la viga (es decir, la distancia entre las bases de las muescas) es h_1 y el radio en la base de cada muesca es R. El esfuerzo máximo en esta viga ocurre en la base de las muescas y puede ser mucho mayor que el esfuerzo nominal en ese mismo punto. El esfuerzo nominal se calcula con la fórmula de la flexión con $y = h_1/2$ e $I = bh_1^3/12$; por tanto

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{My}{I} = \frac{6M}{bh_1^2} \tag{5.58}$$

El esfuerzo máximo es igual al factor de concentración de esfuerzos K multiplicado por el esfuerzo nominal:

$$\sigma_{\text{máx}} = K\sigma_{\text{nom}} \tag{5.59}$$

El factor de concentración de esfuerzos K está trazado en la figura 5.50 para algunos valores de la razón h/h_1. Observe que cuando la muesca se vuelve "más aguda," es decir, la razón R/h_1 se reduce, el factor de concentración de esfuerzos aumenta. (La figura 5.50 está trazada con las fórmulas dadas en la referencia 2.9.)

Los efectos de las concentraciones de esfuerzos se limitan a regiones pequeñas alrededor de los agujeros y las muescas, como se explica en el análisis del principio de Saint-Venant en la sección 2.10. A una distancia igual a h o mayor desde el agujero o la muesca, el efecto de la concentración de esfuerzos es despreciable y se pueden emplear las fórmulas ordinarias para esfuerzos.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo se investigó el comportamiento de vigas con cargas aplicadas y la flexión que ocurre en el plano *x-y*: un plano de simetría en la sección transversal de la viga. Se consideró flexión pura y flexión no uniforme. Se vio que los esfuerzos normales varían linealmente desde la superficie neutra de acuerdo con la *fórmula de la flexión*, que mostró que los esfuerzos son directamente proporcionales al momento flexionante *M* e inversamente proporcionales al momento de inercia *I* de la sección transversal. Luego se combinaron las propiedades relevantes de la sección transversal de la viga en una sola cantidad conocida como *módulo de sección S* de la viga; una propiedad útil en el *diseño de vigas* una vez que se conocen el momento máximo ($M_{máx}$) y el esfuerzo normal permisible (σ_{perm}). Se demostró que la fórmula de la flexión proporciona valores con una precisión razonable para los esfuerzos de flexión en vigas no prismáticas siempre que los cambios en las dimensiones de la sección transversal sean graduales. A continuación se calcularon esfuerzos cortantes (τ) horizontales y verticales empleando la *fórmula del cortante* para el caso de flexión no uniforme de vigas con secciones transversales rectangulares o circulares. También se estudiaron los casos especiales de cortante en vigas con patines y en trabes armadas. Por último, se analizaron las vigas robustas con cargas axiales y transversales, seguido de una evaluación de esfuerzos localizados en vigas con cambios abruptos en la sección transversal alrededor de muescas o agujeros.

Algunos de los conceptos y determinaciones importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

1. Si el plano *xy* es un plano de simetría de una sección transversal de una viga y en éste actúan cargas, las deflexiones por flexión ocurren en este mismo plano, conocido como *plano de flexión*.

2. Una viga en flexión pura tiene una curvatura constante y una viga en flexión no uniforme tiene una curvatura variable. Las deformaciones unitarias longitudinales en una viga flexionada son proporcionales a su curvatura y las deformaciones unitarias en una viga en flexión pura varían linealmente con la distancia desde la superficie neutra, sin importar la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria del material.

3. El eje neutro pasa por el centroide del área de la sección transversal cuando el material sigue la ley de Hooke y no hay fuerza axial que actúe sobre la sección transversal. Cuando una viga de material linealmente elástico se somete a flexión pura, los ejes *y* y *z* son ejes centroidales principales.

4. Si el material de una viga es linealmente elástico y sigue la ley de Hooke, la *ecuación momento-curvatura* [ecuación (5.12)] demuestra que la curvatura es directamente proporcional al momento flexionante *M* e inversamente proporcional a la cantidad *EI*, que se conoce como *rigidez a la flexión* de la viga.

5. La *fórmula de la flexión* demuestra que los esfuerzos normales son directamente proporcionales al momento flexionante *M* e inversamente proporcionales al momento de inercia *I* de la sección transversal. Los esfuerzos máximos de tensión y compresión que actúan en cualquier sección transversal ocurren en los puntos más alejados del eje neutro.

6. Los esfuerzos normales calculados con la fórmula de la flexión no se alteran de manera significativa por la presencia de esfuerzos cortantes y del alabeo asociado de la sección transversal para el caso de flexión no uniforme. Sin embargo, la fórmula de la flexión no es aplicable cerca de los apoyos de una viga o cerca de una carga concentrada porque esas irregularidades producen *concentraciones de esfuerzos* que son mucho mayores que los esfuerzos obtenidos con la fórmula de la flexión.

continúa

7. Para *diseñar* una viga que resista esfuerzos de flexión, calculamos el *módulo de sección* requerido a partir del momento máximo y del esfuerzo normal permisible. Para minimizar peso y ahorrar material, es usual seleccionar una viga de un manual de diseño del material (por ejemplo, consulte las tablas de muestra en los apéndices E y F para acero y madera) que tiene la sección transversal menor al tiempo que aún proporciona el módulo de sección requerido; las secciones de patín ancho y las vigas I tienen la mayor parte de su material en los patines y el ancho de éstos ayuda a reducir la posibilidad de alabeo lateral.

8. Las vigas no prismáticas (empleadas en automóviles, aeroplanos, maquinaría, puentes, edificios, herramientas y en muchas otras aplicaciones) son de uso común para reducir peso y mejorar la apariencia. La fórmula de la flexión da valores razonablemente precisos de los esfuerzos de flexión en vigas no prismáticas a condición de que los cambios en las dimensiones de la sección transversal sean graduales. Sin embargo, en una viga no prismática, el módulo de sección también varía a lo largo del eje, por lo que no podemos suponer que los esfuerzos máximos ocurren en la sección transversal con el momento flexionante máximo.

9. Las vigas sometidas a cargas que producen momentos flexionantes y fuerzas cortantes (*flexión no uniforme*) desarrollan esfuerzos normales y cortantes en la viga. Los primeros se calculan con la fórmula de la flexión (siempre que la viga esté construida con material linealmente elástico) y los segundos se determinan empleando la *fórmula del cortante*. El esfuerzo cortante varía parabólicamente sobre la altura de una viga rectangular y la deformación unitaria por cortante también varía parabólicamente; estas deformaciones unitarias por cortante causan que las secciones transversales de la viga que eran originalmente superficies planas se curven. Los valores máximos del esfuerzo cortante y de la deformación unitaria por cortante ocurren en el eje neutro y son cero en las superficies superior e inferior de la viga.

10. La fórmula del cortante se aplica sólo a vigas prismáticas y es válida nada más para vigas de materiales linealmente elásticos con deflexiones pequeñas; además, los bordes de la sección transversal deben ser *paralelos* al eje y. Para vigas rectangulares, la precisión de la fórmula del cortante depende de la razón entre altura y ancho de la sección transversal: la fórmula se puede considerar exacta para vigas muy angostas pero es menos precisa conforme el ancho b aumenta con respecto la altura h. Observe que podemos utilizar la fórmula del cortante para calcular los esfuerzos cortantes sólo en el eje neutro de una viga con sección transversal *circular*.

11. Es poco común que los esfuerzos cortantes gobiernen el diseño de vigas circulares o rectangulares hechas de metales como el acero o el aluminio para los cuales el esfuerzo cortante permisible suele encontrarse en el rango de 25 a 50 por ciento del esfuerzo de tensión permisible. Sin embargo, para *materiales que son débiles en cortante*, como la madera, el esfuerzo permisible en cortante horizontal está en el rango de 4 a 10 por ciento del esfuerzo de flexión permisible y por tanto puede gobernar el diseño.

12. Los esfuerzos cortantes en los patines de *vigas de patín ancho* actúan en las direcciones vertical y horizontal. Los esfuerzos cortantes horizontales son mucho mayores que los esfuerzos cortantes verticales en los patines y se analizan en la sección 6.7. Los esfuerzos cortantes en el *alma de una viga de patín ancho* actúan sólo en la dirección vertical, son mayores que los esfuerzos en los patines y se pueden calcular utilizando la fórmula del cortante. El esfuerzo cortante máximo en el alma de una viga de patín ancho ocurre en el eje neutro y el esfuerzo cortante mínimo ocurre en donde el alma se une a los patines. Para vigas con proporciones comunes, la fuerza cortante en el alma es 90 a 98 por ciento de la fuerza cortante total V que actúa sobre la sección transversal; el resto es soportada por cortante en los patines.

13. Las conexiones entre las partes en *trabes armadas* (por ejemplo, clavos, pernos, soldaduras y pegamento) deben ser suficientemente fuertes para transmitir las fuerzas cortantes horizontales que actúan entre las partes de la viga. Las conexiones se diseñan empleando la *fórmula del flujo de cortante* para asegurar que la viga se

comporte como una sola entidad. El *flujo cortante* se define como la fuerza horizontal por unidad de distancia a lo largo del eje longitudinal de la viga.

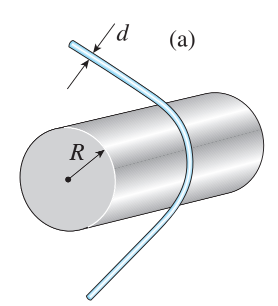
14. Los esfuerzos normales en vigas con cargas axiales se obtienen superponiendo los esfuerzos producidos por la fuerza axial y el momento flexionante. Cuando actúan simultáneamente cargas de flexión y axiales, el eje neutro ya no pasa por el centroide de la sección transversal y podría estar fuera de la sección transversal, en el borde de la sección, o dentro de la misma. El análisis en la sección 5.12 se aplica sólo a *vigas robustas* para las cuales las deflexiones laterales son tan pequeñas que no tener un efecto significativo sobre la línea de acción de las fuerzas axiales. Si hay interacción o acoplamiento entre los efectos axiales y los flexionantes, este tipo de comportamiento se estudia en el capítulo 11 sobre *columnas*.

15. Las distribuciones de esfuerzos en vigas se alteran por agujeros, muescas u otros cambios abruptos en las dimensiones que conducen a esfuerzos muy localizados o *concentraciones de esfuerzos*. A éstas se les debe dar una importancia especial cuando el material es frágil o si el elemento está sometido a cargas dinámicas. Los valores máximos del esfuerzo pueden ser varias veces mayores que los esfuerzos nominales.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5

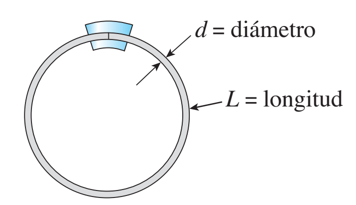
Deformaciones unitarias longitudinales en vigas

5.4.1 Determine la deformación unitaria máxima $\epsilon_{máx}$ producida en un alambre de acero con diámetro $d = 1/16$ in cuando se dobla alrededor de un tambor cilíndrico con radio $R = 24$ in (consulte la figura).



PROB. 5.4.1

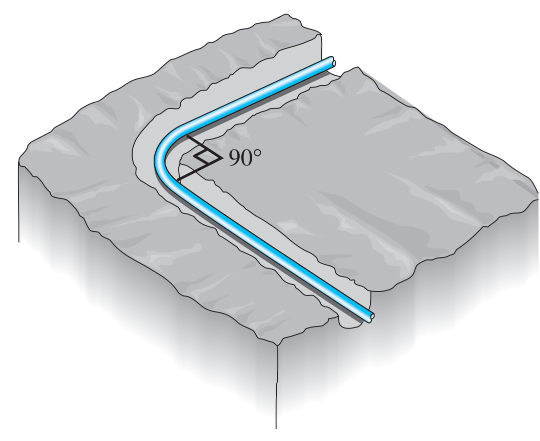
5.4.2 Un alambre de cobre con diámetro $d = 3$ mm se dobla para formar un círculo y se mantiene con sus extremos apenas tocándose (consulte la figura). Si la deformación unitaria máxima permisible en el cobre es $\epsilon_{máx} = 0.0024$, ¿cuál es la longitud menor L del alambre que se puede emplear?



PROB. 5.4.2

5.4.3 Un tubo de polietileno con diámetro exterior de 4.5 in diseñado para transportar desechos químicos se coloca en una zanja y se dobla alrededor de una curva de un cuarto de círculo a 90° (consulte la figura). La sección curva del tubo tiene una longitud de 46 ft.

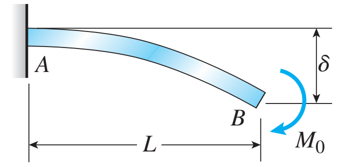
Determine la deformación unitaria máxima en compresión $\epsilon_{máx}$ en el tubo.



PROB. 5.4.3

5.4.4 Una viga en voladizo *AB está* cargada por un par M_0 en su extremo libre (consulte la figura). La longitud de la viga es $L = 2.0$ m y la deformación unitaria normal longitudinal en la superficie superior es 0.0012. La distancia desde la superficie superior de la viga hasta la superficie neutra es 82.5 mm.

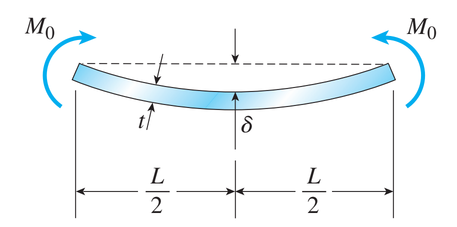
Calcule el radio de curvatura ρ, la curvatura κ y la deflexión vertical δ en el extremo de la viga.



PROB. 5.4.4

5.4.5 Una lamina de acero con longitud $L = 28$ in y espesor $t = 0.25$ in se flexiona por pares M_0 (consulte la figura). La deflexión en el punto medio de la lámina (medida desde una línea que une sus puntos extremos) es 0.20 in.

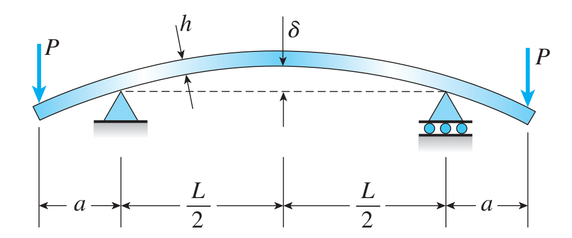
Determine la deformación unitaria longitudinal ϵ en la superficie superior de la lámina.



PROB. 5.4.5

5.4.6 Una barra con sección transversal rectangular está cargada y apoyada como se muestra en la figura. La distancia entre apoyos es $L = 1.5$ m y la altura de la viga es $h = 120$ mm. La deflexión en el punto medio es 3.0 mm.

¿Cuál es la deformación unitaria normal máxima ϵ en la parte superior e inferior de la viga?



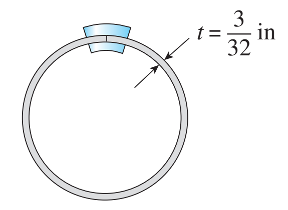
PROB. 5.4.6

Esfuerzos normales en vigas

5.5.1 Una tira delgada de cobre ($E = 16{,}000$ ksi) con longitud $L = 90$ in y espesor $t = 3/32$ in se dobla para formar un círculo y se mantiene con sus extremos apenas tocándose (consulte la figura).

(a) Calcule el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en la tira.

(b) ¿En qué porcentaje aumenta o disminuye el esfuerzo si el espesor de la tira aumenta en 1/32 in?

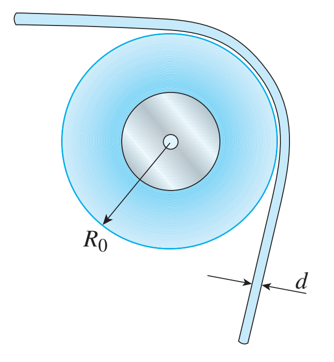


PROB. 5.5.1

5.5.2 Un alambre de acero ($E = 200$ GPa) con diámetro $d = 1.25$ mm se dobla alrededor de una polea con radio $R_0 = 500$ mm (consulte la figura).

(a) ¿Cuál es el esfuerzo máximo $\sigma_{máx}$ en el alambre?

(b) ¿En qué porcentaje aumenta o disminuye el esfuerzo si el radio de la polea se aumenta en 25 por ciento?

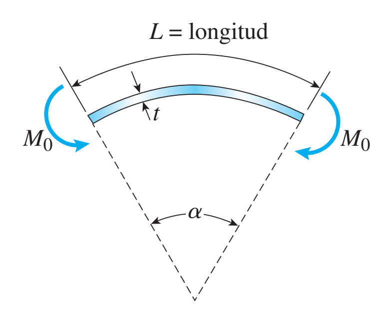


PROB. 5.5.2

5.5.3 Una regleta delgada de acero de alta resistencia ($E = 30 \times 10^6$ psi) con espesor $t = 0.175$ in y longitud $L = 48$ in es flexionada por pares M_0 hasta formar un arco circular que subtiende un ángulo central $\alpha = 40°$ (consulte la figura).

(a) ¿Cuál es el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en la regleta?

(b) ¿En qué porcentaje aumenta o disminuye el esfuerzo si el ángulo central aumenta en 10 por ciento?

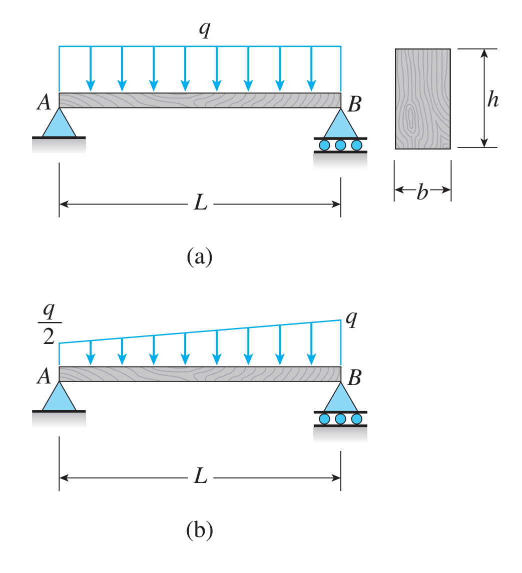


PROB. 5.5.3

5.5.4 Una viga de madera simplemente apoyada AB con longitud del claro $L = 4$ m soporta una carga uniforme con intensidad $q = 5.8$ kN/m (consulte la figura).

(a) Calcule el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ debido a la carga q si la viga tiene una sección transversal rectangular con ancho $b = 140$ mm y altura $h = 240$ mm.

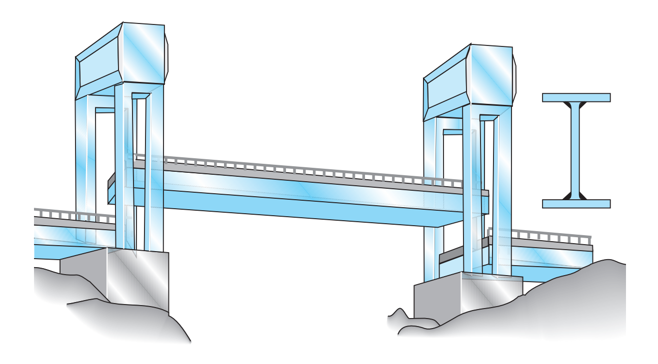
(b) Repita el inciso (a) pero utilice la carga con distribución trapezoidal que se muestra en la parte (b) de la figura.



PROB. 5.5.4

5.5.5 Cada trabe del puente levadizo (consulte la figura) tiene 180 ft de longitud y está simplemente apoyada en sus extremos. La carga de diseño para cada trabe es uniforme con una intensidad de 1.6 k/ft. Las trabes están fabricadas con tres placas de acero soldadas para formar una sección transversal I (consulte la figura) con módulo de sección $S = 3600 \text{ in}^3$.

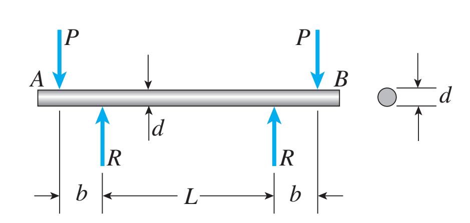
¿Cuál es el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en una trabe debido a la carga uniforme?



PROB. 5.5.5

5.5.6 El eje de un vagón de carga *AB* está cargado aproximadamente como se muestra en la figura, con las fuerzas *P* representando las cargas del vagón (transmitidas al eje a través de las cajas del eje) y las fuerzas *R* representan las cargas de los rieles (transmitidas al eje a través de las ruedas). El diámetro del eje es $d = 82$ mm, la distancia entre los centros de los rieles es *L* y la distancia entre las fuerzas *P* y *R* es $b = 220$ mm.

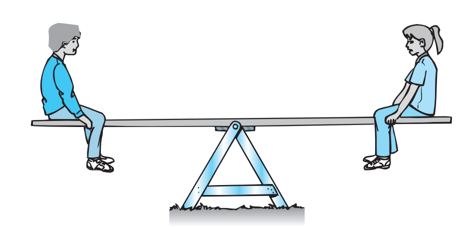
Calcule el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en el eje si $P = 50$ kN.



PROB. 5.5.6

5.5.7 Dos niños que pesan 90 lb cado uno juegan en un sube y baja que pesa 3 lb/ft (consulte la figura). El centro de gravedad de cada niño está a 8 ft del fulcro. El tablón del sube y baja tiene una longitud de 19 ft, un ancho de 8 in y un espesor de 1.5 in.

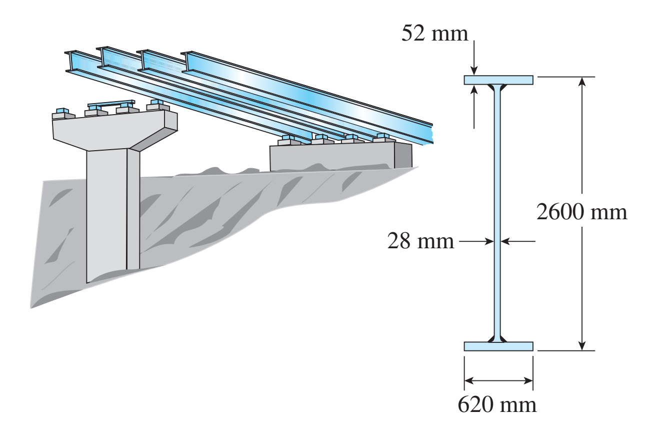
¿Cuál es el esfuerzo de flexión máximo en el tablón?



PROB. 5.5.7

5.5.8 Durante la construcción de un puente carretero, las trabes principales se proyectan en voladizo desde un pilar hacia el siguiente (consulte la figura). Cada trabe tiene una longitud en voladizo de 48 m y una sección transversal I con las dimensiones que se muestran en la figura. La carga sobre cada trabe (durante la construcción) se supone de 9.5 kN/m, que incluye el peso de la trabe.

Determine el esfuerzo de flexión máximo en una trabe debido a esta carga.

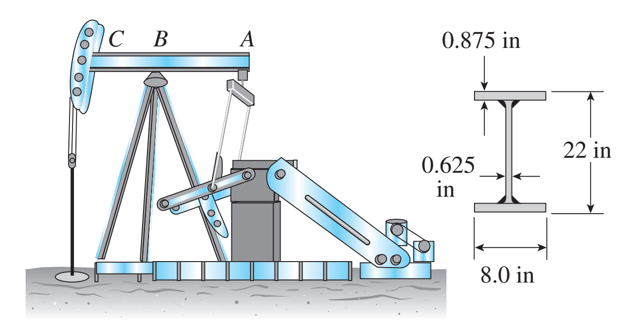


PROB. 5.5.8

5.5.9 La viga horizontal *ABC* de una bomba para extracción de petróleo tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si la fuerza vertical de bombeo en el extremo *C* es 9 k y si la distancia desde la línea de acción de esa fuerza hasta el punto *B* es 16 ft, ¿cuál es el esfuerzo de flexión máximo en la viga debido a la fuerza de bombeo?



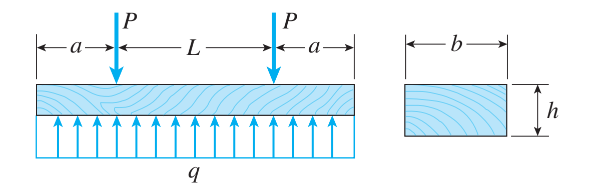
Las vigas horizontales transfieren cargas como parte de una bomba en un pozo petrolero



PROB. 5.5.9

5.5.10 Un sujetador de una vía férrea (o *durmiente*) está sometido a dos cargas de los rieles (concentradas), cada una con magnitud $P = 175$ kN, que actúan como se muestra en la figura. La reacción q del balasto se supone que está distribuida uniformemente sobre la longitud del durmiente, que tiene dimensiones transversales $b = 300$ mm y $h = 250$ mm.

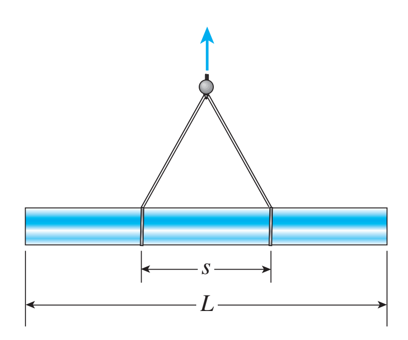
Calcule el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en el durmiente debido a las cargas P, suponiendo que la distancia $L = 150$ mm y la longitud en voladizo $a = 500$ mm.



PROB. 5.5.10

5.5.11 Un tubo de fibra de vidrio se iza mediante una eslinga, como se muestra en la figura. El diámetro exterior del tubo es 6.0 in, su espesor es 0.25 in y su peso específico es 0.053 lb/in^3. La longitud del tubo es $L = 36$ ft y la distancia entre los puntos de izado es $s = 11$ ft.

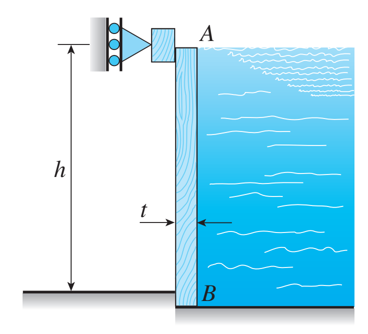
Determine el esfuerzo de flexión máximo en el tubo debido a su propio peso.



PROB. 5.5.11

5.5.12 Una represa pequeña con altura $h = 2.0$ m está construida con vigas verticales de madera AB con espesor $t = 120$ mm, como se muestra en la figura. Considere que las vigas están simplemente apoyadas en su parte superior e inferior.

Determine el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en las vigas suponiendo que el peso específico del agua es $\gamma = 9.81$ kN/m^3.



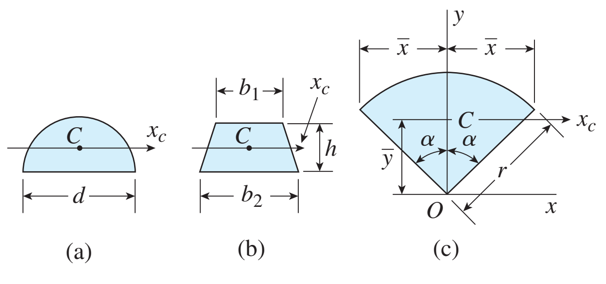
PROB. 5.5.12

5.5.13 Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_t (debido a flexión pura con respecto al eje horizontal a través de C por momentos flexionantes positivos M) para las vigas que tienen las secciones transversales siguientes (consulte la figura).

(a) Un semicírculo con diámetro d.

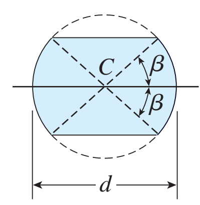
(b) Un trapezoide isósceles con bases $b_1 = b$, $b_2 = 4b/3$ y altura h.

(c) Un sector circular con $\alpha = \pi/3$ y $r = d/2$.



PROB. 5.5.13

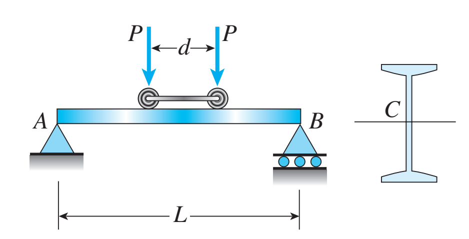
5.5.14 Determine el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ (debido a flexión pura por un momento M) para una viga con sección transversal en la forma de un núcleo circular (consulte la figura). El círculo tiene diámetro d y el ángulo $\beta = 60°$. (*Sugerencia:* utilice las fórmulas del apéndice D, casos 9 y 15.)



PROB. 5.5.14

5.5.15 Una viga simple AB con longitud del claro $L = 24$ ft sometida a dos cargas sobre ruedas que actúan a una separación $d = 5$ ft (consulte la figura). Cada rueda transmite una carga $P = 3.0$ k y el conjunto puede ocupar cualquier posición sobre la viga.

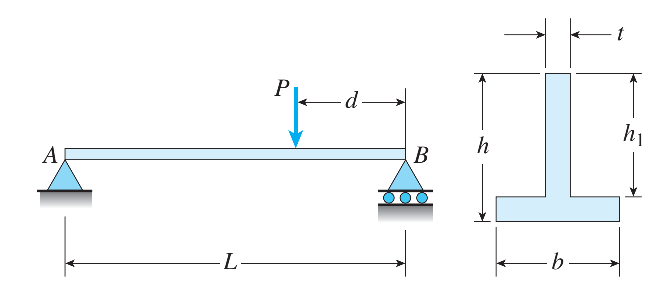
Determine el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ debido a las cargas sobre ruedas si se trata de una viga I con módulo de sección $S = 16.2$ in^3.



PROB. 5.5.15

5.5.16 Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c debidos a la carga P que actúa sobre la viga simple AB (consulte la figura).

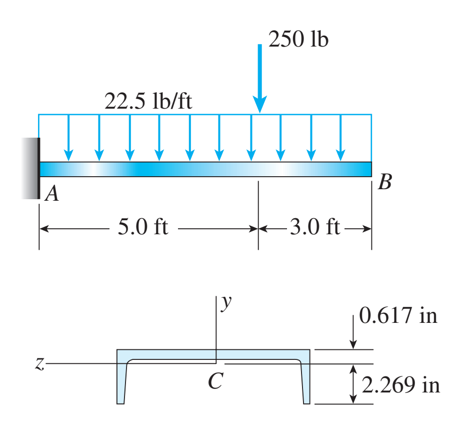
Los datos son los siguientes: $P = 6.2$ kN, $L = 3.2$ m, $d = 1.25$ m, $b = 80$ mm, $t = 25$ mm, $h = 120$ mm y $h_1 = 90$ mm.



PROB. 5.5.16

5.5.17 Una viga en voladizo AB, sometida a una carga uniforme y a una carga concentrada (consulte la figura), está hecha de una sección en canal.

Encuentre el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c si la sección transversal tiene las dimensiones indicadas en la figura y el momento de inercia con respecto al eje z (el eje neutro) es $I = 3.36$ in^4. (*Nota:* la carga uniforme representa el peso de la viga.)



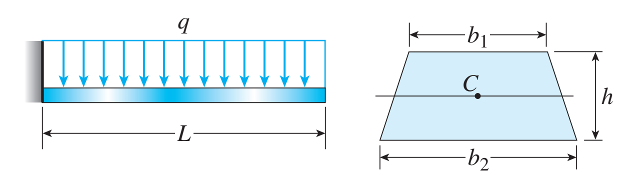
PROB. 5.5.17

5.5.18 Una viga en voladizo AB con sección transversal en forma de trapecio isósceles tiene longitud $L = 0.8$ m, dimensiones $b_1 = 80$ mm, $b_2 = 90$ mm y altura $h = 110$ mm (consulte la figura). La viga está hecha de latón que pesa 85 kN/m^3.

(a) Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c debido al peso de la viga.

(b) Si el ancho b_1 se duplica, ¿qué sucede con los esfuerzos?

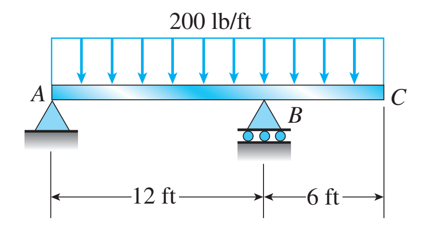
(c) Si la altura h se duplica, ¿qué sucede con los esfuerzos?

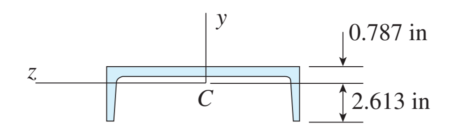


PROB. 5.5.18

5.5.19 Una viga *ABC* con un voladizo de *B* a *C* soporta una carga uniforme de 200 lb/ft en toda su longitud (consulte la figura). La viga es una sección en canal con las dimensiones que se muestran en la figura. El momento de inercia con respecto al eje z (el eje neutro) es igual a 8.13 in^4.

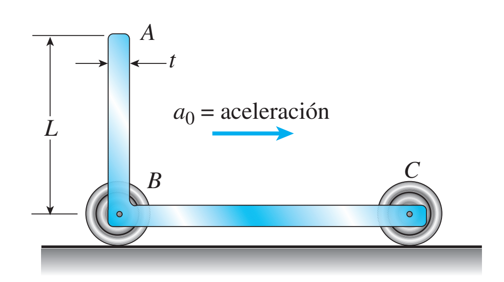
Calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c debidos a la carga uniforme.





PROB. 5.5.19

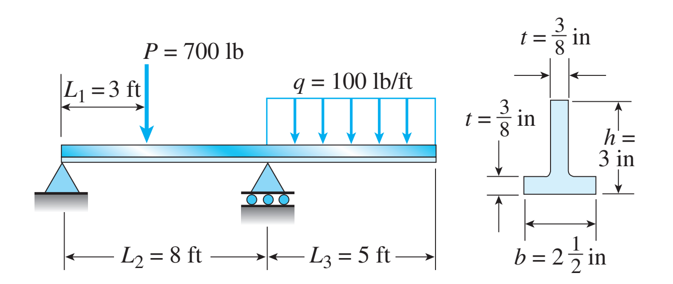
5.5.20 Un marco *ABC* se desplaza horizontalmente con una aceleración a_0 (consulte la figura). Obtenga una fórmula para el esfuerzo máximo $\sigma_{máx}$ en el brazo vertical *AB*, que tiene una longitud *L*, espesor *t* y densidad de masa ρ.



PROB. 5.5.20

5.5.21 Una viga con sección T está apoyada y cargada como se muestra en la figura. La sección transversal tiene ancho b = 2 1/2 in, altura h = 3 in y espesor t = 3/8 in.

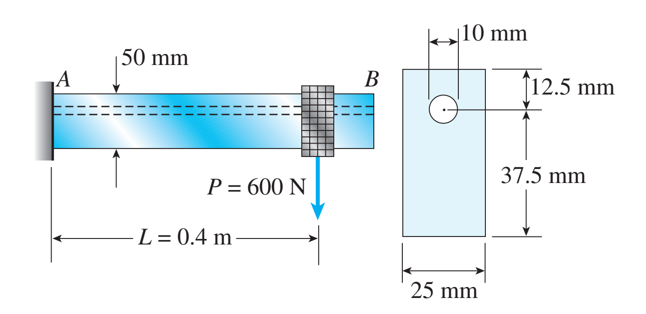
Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga.



PROB. 5.5.21

***5.5.22** Una viga en voladizo *AB* con sección transversal rectangular tiene un agujero a lo largo de toda su longitud (consulte la figura). La viga soporta una carga P = 600 N. La sección transversal tiene un ancho de 25 mm, una altura de 50 mm y el agujero tiene un diámetro de 10 mm.

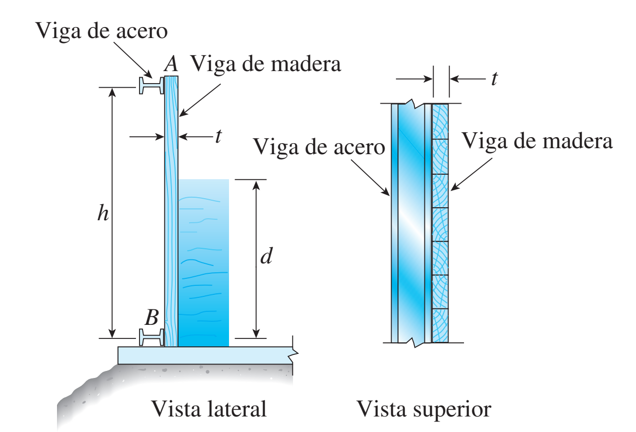
Encuentre los esfuerzos de flexión en la parte superior de la viga, en la parte superior del agujero y en la parte inferior de la viga.



PROB. 5.5.22

****5.5.23** Una represa pequeña con altura h = 6 ft está construida con vigas verticales de madera AB, como se muestra en la figura. Las vigas de madera, que tienen espesor t = 2.5 in, están simplemente apoyadas por vigas horizontales de acero en A y B.

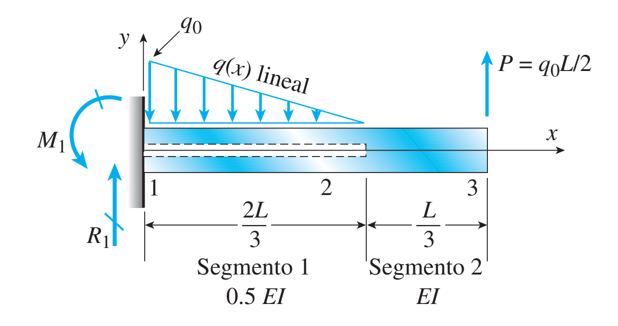
Elabore una gráfica donde muestre el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en las vigas de madera en función de la profundidad del agua d arriba del apoyo inferior en B. Trace los esfuerzos $\sigma_{\text{máx}}$ (psi) como la ordenada y la profundidad d (ft) como la abscisa. (*Nota:* el peso específico del agua γ es igual a 62.4 lb/ft^3).



PROB. 5.5.23

5.5.24 Considere la *viga en voladizo* no prismática con sección transversal circular como se muestra en la figura. La viga tiene un agujero cilíndrico interno en el segmento 1, es sólida (radio r) en el segmento 2 y está sometida a una carga triangular hacia abajo con intensidad máxima q_0 como se muestra.

Encuentre las expresiones para los esfuerzos de flexión máximos de tensión y compresión en la unión 1.

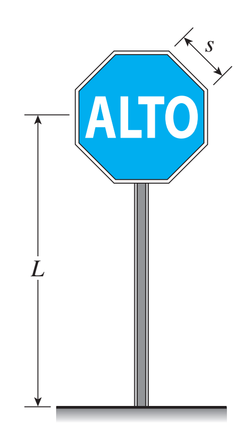


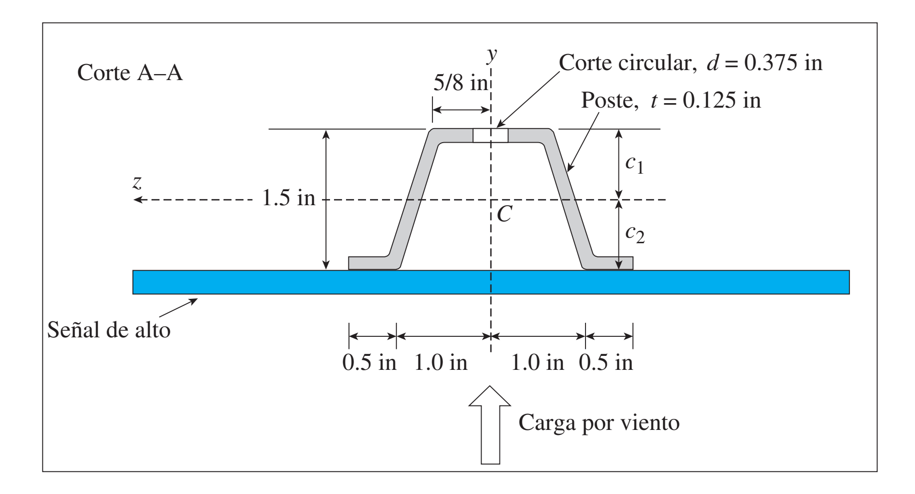
PROB. 5.5.24

5.5.25 Un poste de acero (E = 30 × 10^6 psi) con espesor t = 1/8 in y altura L = 72 in, soporta una señal de alto (consulte la figura: s = 12.5 in). La altura del poste L se mide desde la base hasta el centroide de la señal. La señal está sometida a una presión del viento p = 20 lb/ft^2 normal a su superficie. Suponga que el poste está empotrado en su base.

(a) ¿Cuál es la carga resultante sobre la señal? [Consulte el apéndice D, caso 25, para las propiedades de un octágono, n = 8.]

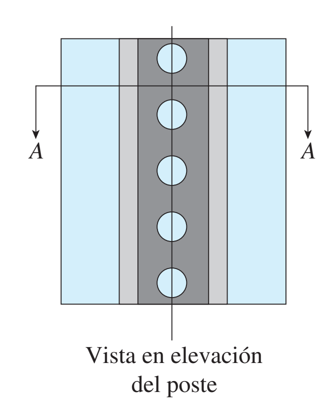
(b) ¿Cuál es el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en el poste?





Propiedades numéricas del poste

$A = 0.578 \text{ in}^2$, $c_1 = 0.769$ in, $c_2 = 0.731$ in,
$I_y = 0.44867 \text{ in}^4$, $I_z = 0.16101 \text{ in}^4$



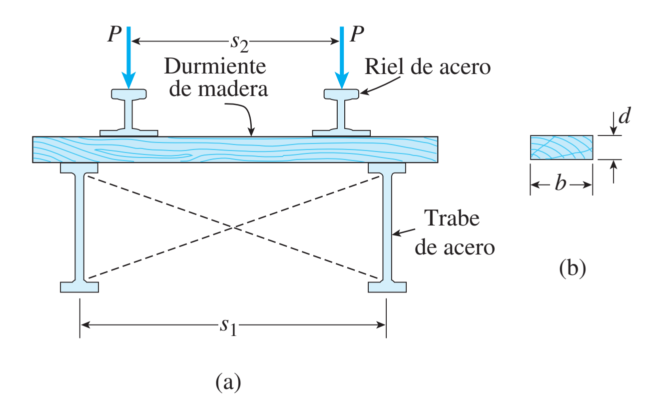
PROB. 5.5.25

Diseño de vigas

5.6.1 La sección transversal de un puente ferroviario de vía angosta se muestra en la parte (a) de la figura. El puente está construido con trabes longitudinales de acero que soportan los durmientes transversales de madera. Las trabes están restringidas contra el pandeo lateral mediante riostras diagonales, como se indica por las líneas discontinuas.

El espaciamiento de las trabes es $s_1 = 50$ in y el espaciamiento de los rieles es $s_2 = 30$ in. La carga transmitida por cada riel a un solo durmiente es $P = 1500$ lb. La sección transversal de un durmiente, mostrada en la parte (b) de la figura, tiene un ancho $b = 5.0$ in y profundidad d.

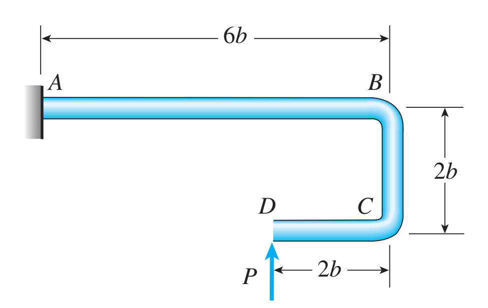
Determine el valor mínimo de d con base en un esfuerzo de flexión permisible de 1125 psi en el durmiente de madera. (No tome en cuenta el peso del durmiente.)



PROB. 5.6.1

5.6.2 Una ménsula de fibra de vidrio *ABCD* con sección transversal circular tiene la forma y las dimensiones que se muestran en la figura, una carga vertical $P = 40$ N actúa en el extremo libre D.

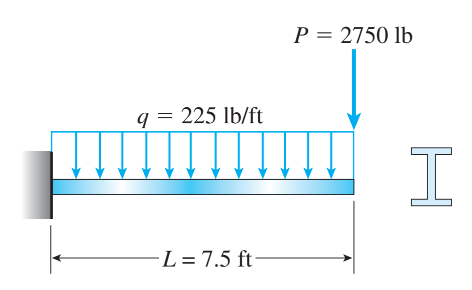
Determine el diámetro mínimo permisible $d_{mín}$ de la ménsula si el esfuerzo de flexión permisible en el material es 30 MPa y $b = 37$ mm. (*Nota:* no tome en cuenta el peso de la ménsula).



PROB. 5.6.2

5.6.3 Una viga en voladizo con longitud $L = 7.5$ ft soporta una carga uniforme con intensidad $q = 225$ lb/ft y una carga concentrada $P = 2750$ lb (consulte la figura).

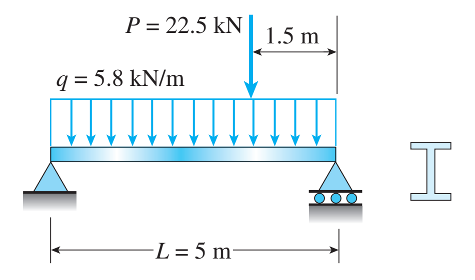
Calcule el módulo de sección requerido S si $\sigma_{máx} = 17{,}000$ psi. Luego seleccione una viga de patín ancho adecuada (perfil W) de la tabla E.1(a), apéndice E y vuelva a calcular S tomando en cuenta el peso de la viga. Seleccione un nuevo tamaño de la viga si fuera necesario.



PROB. 5.6.3

5.6.4 Una viga simple con longitud $L = 5$ m soporta una carga uniforme con intensidad $q = 5.8\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ y una carga concentrada de 22.5 kN (consulte la figura).

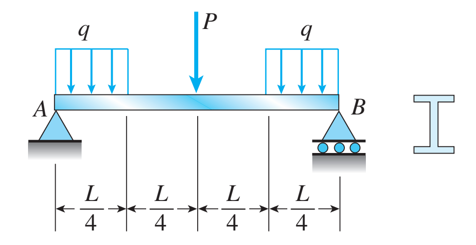
Suponiendo $\sigma_{perm} = 110$ MPa, calcule el módulo de sección requerido S. Luego seleccione una viga de patín ancho de 200 mm (perfil W) de la tabla E.1(b), apéndice E y vuelva a calcular S tomando en cuenta el peso de la viga. Seleccione una nueva viga de 200 mm si fuera necesario.



PROB. 5.6.4

5.6.5 Una viga simple *AB* está cargada como se muestra en la figura.

Calcule el módulo de sección requerido S si $\sigma_{máx} = 17{,}000$ psi, $L = 28$ ft, $P = 2200$ lb y $q = 425$ lb/ft. Luego seleccione una viga I adecuada (perfil S) de la tabla E.2(a), apéndice E y vuelva a calcular S tomando en cuenta el peso de la viga. Seleccione un nuevo tamaño de la viga si fuera necesario.

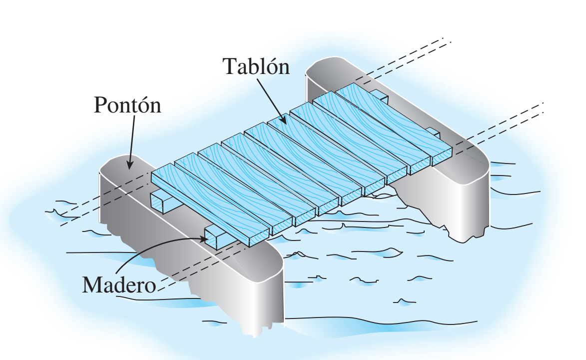


PROB. 5.6.5

5.5.6 Un puente de pontones (consulte la figura) está construido con dos vigas longitudinales de madera, conocidas como *maderos*, que salvan un claro entre pontones adyacentes y soportan las vigas transversales de piso, que se denominan *tablones*.

Para fines de diseño, suponga que una carga uniforme de piso de 8.0 kPa actúa sobre los tablones. (La carga incluye un margen para los pesos de los tablones y los maderos.) Además, suponga que los tablones tienen una longitud de 2.0 m y que los maderos están simplemente apoyados con un claro de 3.0 m. El esfuerzo de flexión permisible en la madera es 16 MPa.

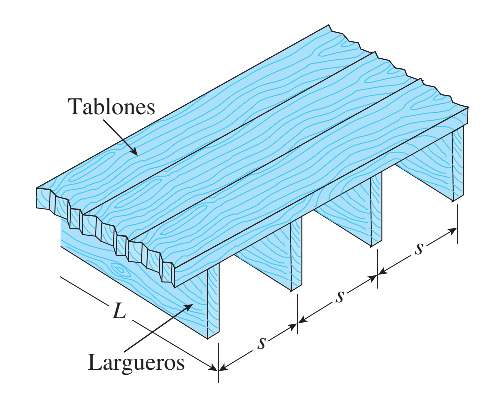
Si los maderos tienen una sección transversal cuadrada, ¿cuál es su ancho mínimo requerido $b_{\text{mín}}$?



PROB. 5.6.6

5.6.7 Un sistema de piso en un edificio pequeño consiste en dos tablones de madera soportados por largueros de 2 in (ancho nominal) espaciados a una distancia *s*, medida centro a centro (consulte la figura). La longitud del claro *L* de cada larguero es 10.5 ft, el espaciamiento *s* de los largueros es 16 in y el esfuerzo de flexión permisible en la madera es 1350 psi. La carga uniforme sobre el piso es 120 lb/ft^2, que incluye un margen para el peso propio del sistema de piso.

Calcule el módulo de sección requerido *S* para los largueros y luego seleccione un tamaño adecuado para ellos (madera cepillada) del apéndice F, suponiendo que cada larguero se puede representar como una viga simple que soporta una carga uniforme.



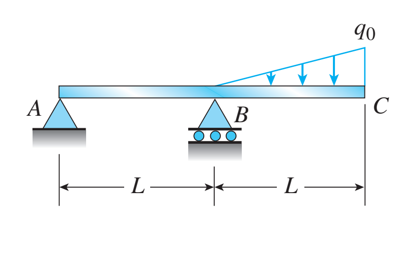
PROBS. 5.6.7 y 5.6.8

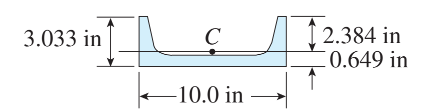
5.6.8 Los largueros de madera que soportan un piso de tablones (consulte la figura) tienen una sección transversal de 40 mm × 80 mm (dimensiones reales) y tienen una longitud del claro $L = 4.0$ m. La carga de piso es 3.6 kPa, que incluye el peso de los largueros y del piso.

Calcule el espaciamiento máximo permisible *s* de los largueros si el esfuerzo de flexión permisible es 15 MPa. (Suponga que cada larguero se puede representar como una viga simple que soporta una carga uniforme.)

5.6.9 Una viga *ABC* con un voladizo de *B* a *C* está construida con una sección en canal C 10 × 30 (consulte la figura). La viga soporta su propio peso (30 lb/ft) más una carga *triangular* con intensidad máxima q_0 que actúa sobre la saliente. Los esfuerzos permisibles en tensión y compresión son 20 ksi y 11 ksi, respectivamente.

Determine la intensidad de la carga *triangular* permisible $q_{0,\text{perm}}$ si la distancia *L* es igual a 3.5 ft.

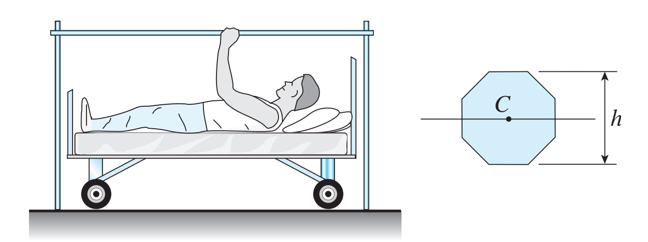




PROB. 5.6.9

5.6.10 Una "barra trapecio" en un cuarto de hospital proporciona un medio para que los pacientes se ejerciten mientras están en cama (consulte la figura). La barra tiene una longitud de 2.1 m y una sección transversal octagonal regular. La carga de diseño es 1.2 kN aplicada en el punto medio de la barra y el esfuerzo de flexión permisible es 200 MPa.

Determine el ancho mínimo h de la barra. (Suponga que los extremos de la barra están simplemente apoyados y que el peso de la barra es despreciable.)

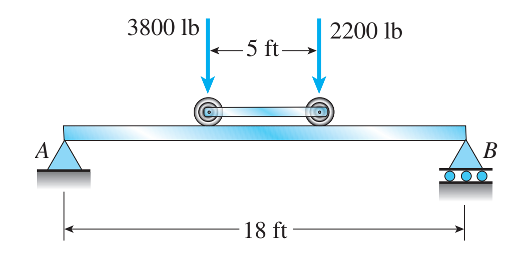


PROB. 5.6.10

5.6.11 Un carro de dos ejes que forma parte de una grúa viajera en un laboratorio de pruebas se mueve lentamente sobre una viga simple AB (consulte la figura). La carga transmitida a la viga por el eje frontal es 2200 lb y por el eje posterior es 3800 lb. El peso propio de la viga se puede ignorar.

(a) Determine el módulo de sección mínimo requerido S para la viga si el esfuerzo de flexión permisible es 17.0 ksi, la longitud de la viga es 18 ft y la separación entre ejes del carro es 5 ft.

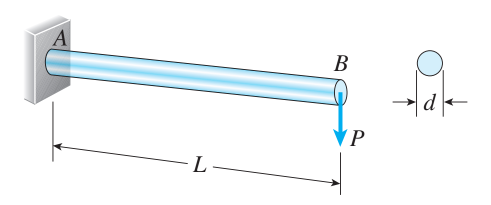
(b) Seleccione la viga I más económica (perfil S) de la tabla E.2(a), apéndice E.



PROB. 5.6.11

5.6.12 Una viga en voladizo AB con sección transversal circular y longitud L = 450 mm soporta una carga P = 400 N que actúa en el extremo libre (consulte la figura). La viga está hecha de acero con un esfuerzo de flexión permisible de 60 MPa.

Determine el diámetro requerido $d_{mín}$ de la viga, considerando el efecto del peso propio de la viga.

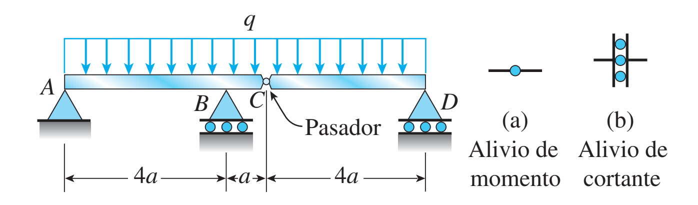


PROB. 5.6.12

5.6.13 Una viga compuesta $ABCD$ (consulte la figura) está apoyada en los puntos A, B y D, y tiene un empalme (pasador) en el punto C. La distancia a = 6.25 ft y la viga es un perfil S 18 × 70 de patín ancho con un esfuerzo de flexión permisible de 12,800 psi.

(a) Si el empalme es un *alivio de momento*, encuentre la carga uniforme permisible q_{perm} que se puede colocar sobre la viga, tomando en cuenta el peso de la viga. [Consulte la parte (a) de la figura.]

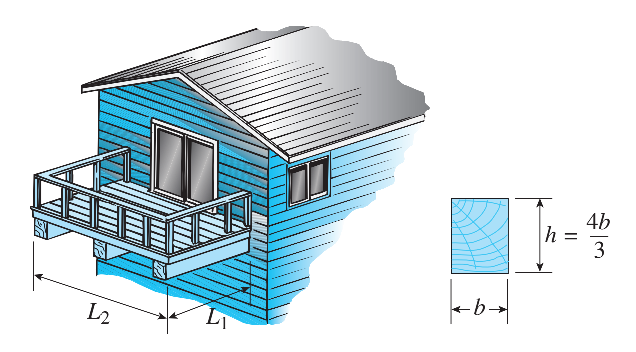
(b) Repita el cálculo suponiendo ahora que el empalme es un *alivio de cortante*, como en la parte (b) de la figura.



PROB. 5.6.13

5.6.14 Un balcón pequeño construido de madera está soportado por tres vigas idénticas en voladizo (consulte la figura). Cada viga tiene una longitud L_1 = 2.1 m, ancho b y altura $h = 4b/3$. Las dimensiones del piso del balcón son $L_1 \times L_2$, con L_2 = 2.5 m. La carga de diseño es 5.5 kPa sobre toda el área del piso. (Esta carga toma en cuenta todas las cargas excepto los pesos de las vigas en voladizo, que tienen un peso específico γ = 5.5 kN/m^3.) El esfuerzo de flexión permisible en el voladizo es 15 MPa.

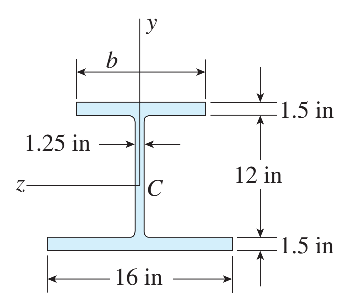
Suponiendo que la viga en el voladizo medio soporta 50 por ciento de la carga y que cada voladizo exterior soporta 35 por ciento de la carga, determine las dimensiones requeridas de b y h.



PROB. 5.6.14

5.6.15 Una viga con sección transversal asimétrica hecha de un perfil de patín ancho asimétrico (consulte la figura) se somete a un momento flexionante negativo que actúa con respecto al eje z.

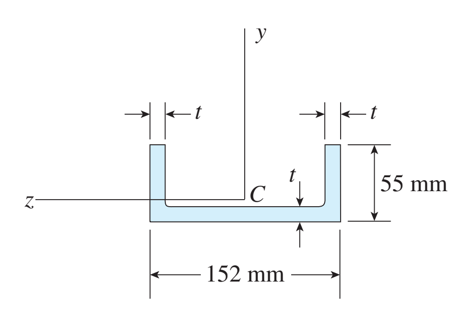
Determine el ancho b del patín superior a fin de que los esfuerzos en la parte superior e inferior de la viga tengan una razón de 4:3, respectivamente.



PROB. 5.6.15

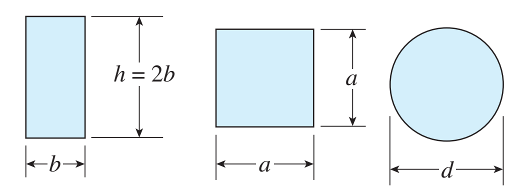
5.6.16 Una viga con sección transversal hecha de un perfil en forma de canal (consulte la figura) está sometida a un momento flexionante que actúa con respecto al eje z.

Calcule el espesor t del canal con el fin de que los esfuerzos de flexión en la parte superior e inferior de la viga tengan una razón de 7:3, respectivamente.



PROB. 5.6.16

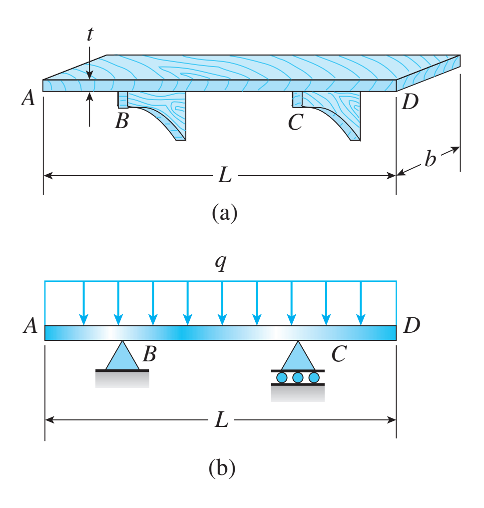
5.6.17 Determine las razones de los pesos de tres vigas que tienen la misma longitud, están hechas del mismo material, están sometidas al mismo momento flexionante máximo y tienen el mismo esfuerzo de flexión máximo si sus secciones transversales son (1) un rectángulo con altura igual al doble del ancho, (2) un cuadrado y (3) un círculo (consulte las figuras).



PROB. 5.6.17

***5.6.18** Una repisa AD con longitud L = 915 mm, ancho b = 305 mm y espesor t = 22 mm está soportado por ménsulas en B y C [consulte la parte (a) de la figura]. Las ménsulas son ajustables y se pueden colocar en cualquier posición deseada entre los extremos de la repisa. Una carga uniforme con intensidad q, que incluye el peso de la repisa, actúa sobre ella [consulte la parte (b) de la figura].

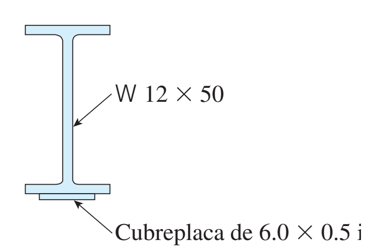
Determine el valor máximo permisible de la carga q si el esfuerzo de flexión permisible en la repisa es σ_{perm} = 7.5 MPa y la posición de los soportes se ajusta para tener una capacidad de carga máxima.



PROB. 5.6.18

***5.6.19** Una placa de acero (denominada *cubreplaca*) con dimensiones transversales de 6.0 in × 0.5 in está soldada a lo largo de toda la longitud del patín inferior de una viga de patín ancho W 12 × 50 (consulte la figura, que muestra la sección transversal de la viga).

¿Cuál es el incremento porcentual en módulo de sección menor (comparado sólo con la viga de patín ancho, sin incluir la cubreplaca)?

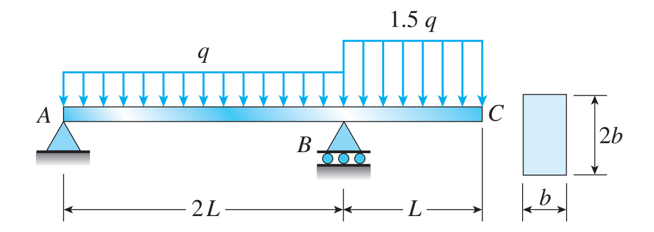


PROB. 5.6.19

****5.6.20** Una viga de acero *ABC* está simplemente apoyada en *A* y *B*, y tiene una saliente *BC* con longitud L = 150 mm (consulte la figura). La viga soporta una carga uniforme con intensidad q = 4.0 kN/m sobre todo el claro *AB* y de $1.5q$ sobre *BC*. La sección transversal de la viga es rectangular con ancho b y altura $2b$. El esfuerzo de flexión permisible en el acero es σ_{perm} = 60 MPa y su peso específico es γ = 77.0 kN/m^3.

(a) Sin tomar en cuenta el peso de la viga, calcule el ancho requerido b de la sección transversal rectangular.

(b) Tomando en cuenta el peso de la viga, calcule el ancho requerido b.

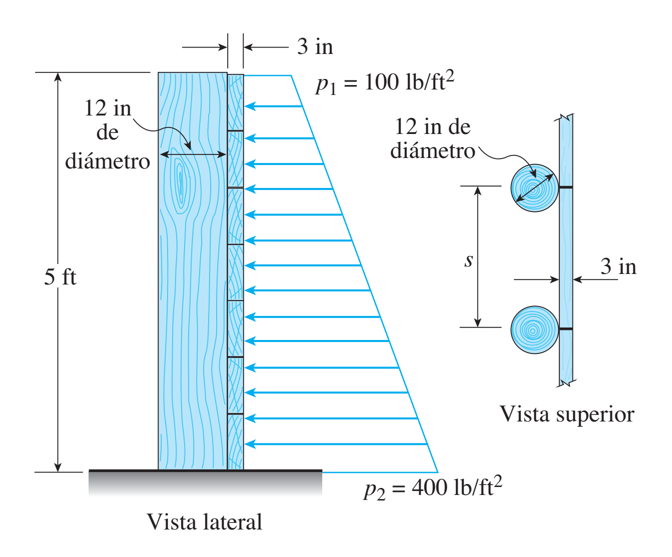


PROB. 5.6.20

****5.6.21** Un muro de contención con 5 ft de altura está construido con tablones horizontales de madera de 3 in de espesor (dimensión real) que están soportados por postes verticales de madera con 12 in de diámetro (dimensión real), como se muestra en la figura. La presión lateral del suelo es p_1 = 100 lb/ft^2 en la parte superior del muro y p_2 = 400 lb/ft^2 en el fondo.

Suponiendo que el esfuerzo permisible en la madera es 1200 psi, calcule el espaciamiento máximo permisible s de los postes.

(*Sugerencia:* observe que el espaciamiento de los postes puede estar gobernado por la capacidad de carga de los tablones o bien de los postes. Considere que los postes actúan como vigas en voladizo sometidas a una distribución trapezoidal de carga y que los tablones actúan como vigas simples entre los postes. Para estar en el lado seguro, suponga que la presión del suelo en el tablón inferior es uniforme e igual a la presión máxima.)

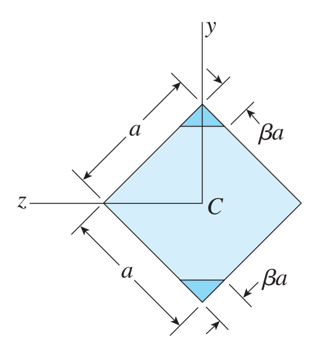


PROB. 5.6.21

****5.6.22** Una viga con sección transversal cuadrada (a = longitud de cada lado) se flexiona en el plano de una diagonal (consulte la figura). Al eliminar una cantidad pequeña de material en las esquinas superior e inferior, como se muestra en la figura mediante los triángulos sombreados, podemos aumentar el módulo de sección y obtener una viga más resistente, aunque se reduce el área de la sección transversal.

(a) Determine la razón β que define las áreas que se deben eliminar a fin de obtener la sección transversal más resistente en flexión.

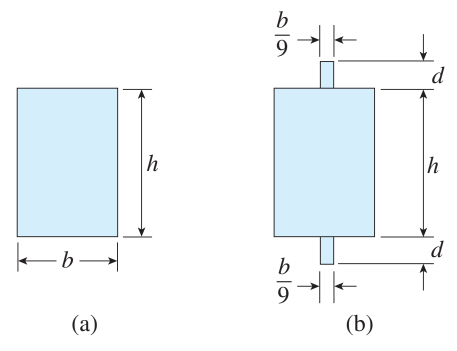
(b) ¿En qué porcentaje aumenta el módulo de sección cuando se eliminan las áreas?



PROB. 5.6.22

****5.6.23** La sección transversal de una viga rectangular con ancho b y altura h se muestra en la parte (a) de la figura. Por motivos desconocidos para el diseñador de la viga, se planea agregar proyecciones estructurales con ancho $b/9$ y altura d en la parte superior e inferior de la viga [consulte la parte (b) de la figura].

¿Para qué valores de d aumenta la capacidad de resistir el momento flexionante de la viga? ¿Para qué valores disminuye?



PROB. 5.6.23

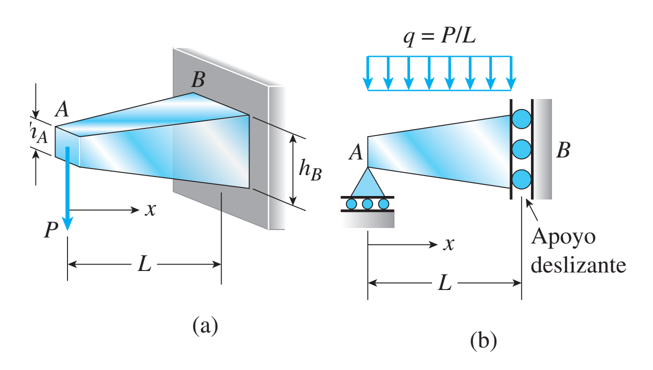
Vigas no prismáticas

5.7.1 Una viga ahusada en voladizo AB con longitud L tiene secciones transversales cuadradas y soporta una carga concentrada P en el extremo libre [consulte la parte (a) de la figura]. El ancho y la altura de la viga varían linealmente desde h_A en el extremo libre hasta h_B en el extremo fijo.

Determine la distancia x desde el extremo libre A hasta la sección transversal con esfuerzo de flexión máximo si $h_B = 3h_A$.

(a) ¿Cuál es la magnitud $\sigma_{máx}$ del esfuerzo de flexión de mayor magnitud? ¿Cuál es la razón entre el esfuerzo máximo y esfuerzo máximo en el empotramiento B?

(b) Repita el inciso (a) si la carga P ahora se aplica como una carga uniforme con intensidad $q = PL$ sobre toda la viga, A está restringido por un apoyo de rodillo y B es un apoyo deslizante [consulte parte (b) de la figura].



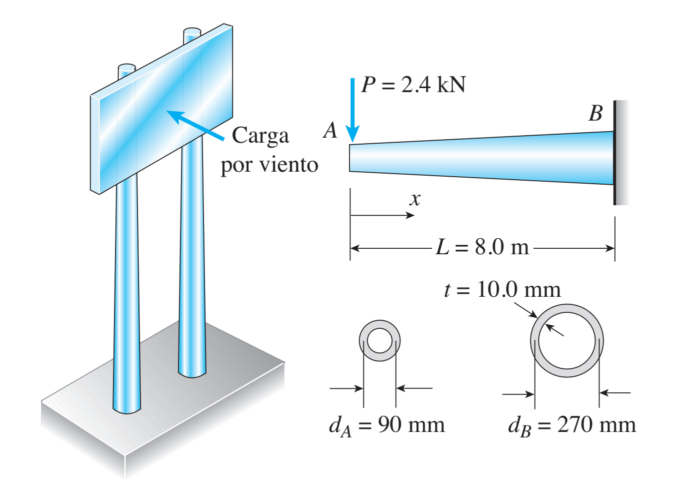
PROB. 5.7.1

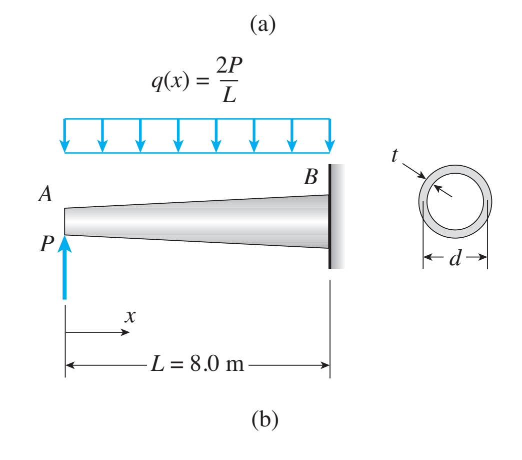
5.7.2 Un anuncio alto está soportado por dos vigas verticales que consisten de tubos circulares ahusados de pared delgada (consulte la figura). Para fines de este análisis cada viga se puede representar como una viga en voladizo AB con longitud $L = 8.0$ m sometida a una carga lateral $P = 2.4$ kN en el extremo libre. Los tubos tienen espesor constante $t = 10.0$ mm y diámetros promedio $d_A = 90$ mm y $d_B = 270$ mm en los extremos A y B, respectivamente.

Dado que el espesor es pequeño comparado con el diámetro, el momento de inercia en cualquier sección transversal se puede obtener con la fórmula $I = \pi d^3 t/8$ (consulte el caso 22, apéndice D) y, por tanto, el módulo de sección se puede obtener con la fórmula $S = \pi d^2 t/4$.

(a) ¿A qué distancia x desde el extremo libre ocurre el esfuerzo de flexión máximo? ¿Cuál es la magnitud $\sigma_{máx}$ del esfuerzo de flexión máximo? ¿Cuál es la razón entre el esfuerzo máximo y esfuerzo de mayor magnitud σ_B en el apoyo?

(b) Repita el inciso (a) si se aplica una carga concentrada P hacia arriba en A y una carga uniforme hacia abajo $q(x) = 2P/L$ se aplica sobre toda la viga como se muestra. ¿Cuál es la razón entre esfuerzo máximo y el esfuerzo en la ubicación de momento máximo?



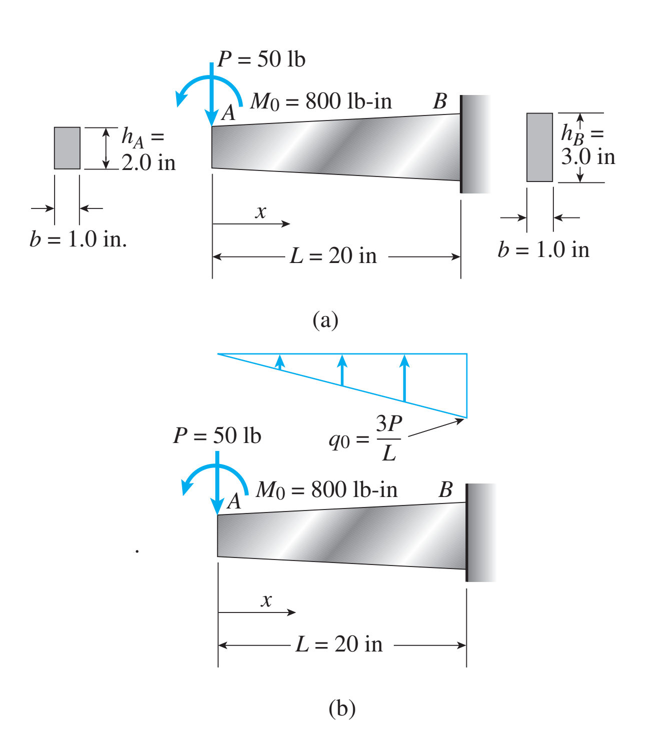


PROB. 5.7.2

5.7.3 Una viga ahusada en voladizo *AB* con sección transversal rectangular está sometida a una carga concentrada P = 50 lb y a un par M_0 = 800 lb-in que actúa en el extremo libre [consulte la parte (a) de la figura]. El ancho *b* de la viga es constante e igual a 1.0 in, pero la altura varía linealmente de h_A = 2.0 in en el extremo cargado a h_B = 3.0 in en el apoyo.

(a) ¿A qué distancia *x* desde el extremo libre ocurre el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$? ¿Cuál es la magnitud $\sigma_{máx}$ del esfuerzo de flexión máximo? ¿Cuál es la razón entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo de mayor magnitud σ_B en el apoyo?

(b) Repita el inciso (a) si, además de *P* y M_0, actúa una carga triangular distribuida con intensidad pico $q_0 = 3P/L$ hacia arriba sobre toda la viga como se muestra. ¿Cuál es la razón entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo en la ubicación de momento máximo?



PROB. 5.7.3

Considerando sólo los efectos de flexión debidos a las cargas *P* y M_0, determine las siguientes cantidades:

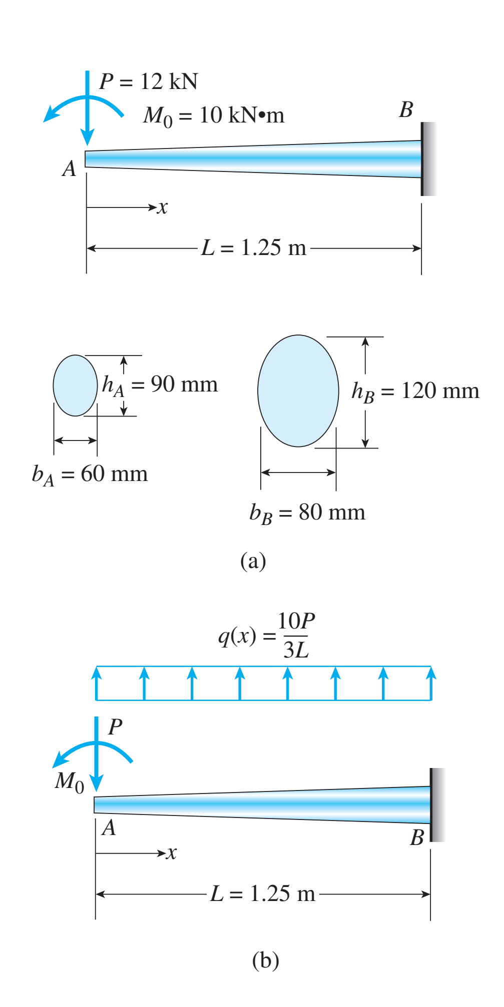
(a) El esfuerzo de flexión máximo σ_A en el extremo *A*.

(b) El esfuerzo de flexión máximo σ_B en el extremo *B*.

(c) La distancia *x* hasta la sección transversal con el esfuerzo de flexión máximo.

(d) La magnitud $\sigma_{máx}$ del esfuerzo de flexión máximo.

(e) Repita el inciso (d) si se agrega una carga uniforme $q(x) = 10P/3L$ a las cargas *P* y M_0 como se muestra en la parte (b) de la figura.



PROB. 5.7.4

***5.7.4** Los rayos en un volante de inercia grande se modelan como vigas fijas en un extremo y cargadas por una fuerza *P* y un par M_0 en el otro extremo (consulte la figura). Las secciones transversales de los rayos son elípticas con ejes mayor y menor (altura y ancho, respectivamente) con las longitudes que se muestran en la parte (a) de la figura. Las dimensiones de las secciones transversales varían linealmente del extremo *A* al extremo *B*.

***5.7.5** Consulte la viga ahusada en voladizo con sección transversal sólida que se muestra en la figura 5.24 del ejemplo 5.9.

(a) Considerando sólo los esfuerzos de flexión debidos a la carga *P*, determine el rango de valores de la razón d_B/d_A para la cual el esfuerzo normal máximo ocurre en el apoyo.

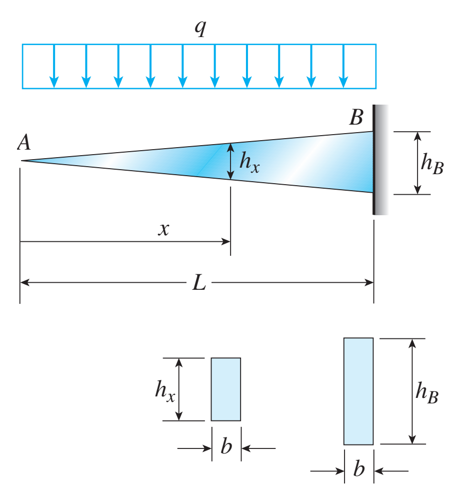
(b) ¿Cuál es el esfuerzo máximo para este rango de valores?

Vigas totalmente esforzadas

Los problemas 5.7.6 a 5.7.8 se refieren a vigas totalmente esforzadas con sección transversal rectangular. Considere sólo los esfuerzos de flexión obtenidos a partir de la fórmula de la flexión y no tome en cuenta los pesos de las vigas.

5.7.6 Una viga en voladizo *AB* que tiene secciones transversales rectangulares con ancho constante *b* y altura variable h_x está sometida a una carga uniforme con intensidad *q* (consulte la figura).

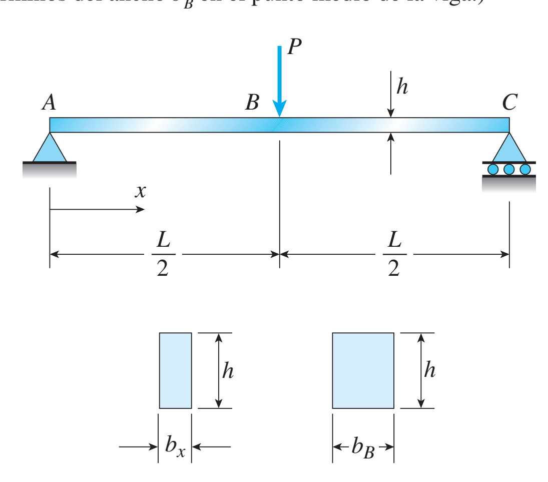
¿Cómo debe variar la altura h_x como una función de *x* (medida desde el extremo libre de la viga) a fin de tener una viga totalmente esforzada? (Exprese h_x en términos de la altura h_B en el extremo libre de la viga.)



PROB. 5.7.6

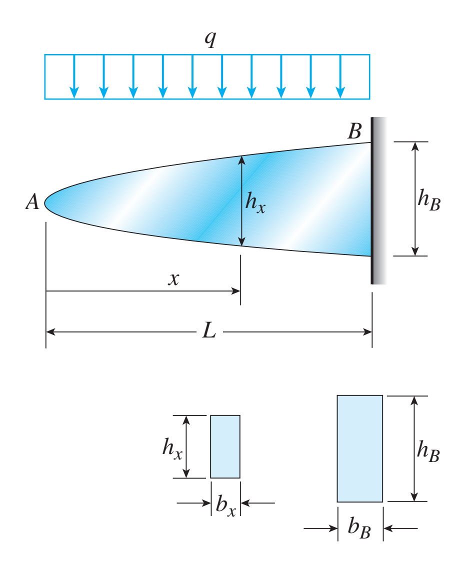
5.7.7 Una viga simple *ABC* con secciones transversales rectangulares con altura constante *h* y ancho variable b_x soporta una carga concentrada *P* que actúa en el centro del claro (consulte la figura).

¿Cómo debe variar el ancho b_x como una función de *x* a fin de tener una viga completamente esforzada? (Exprese b_x en términos del ancho b_B en el punto medio de la viga.)



PROB. 5.7.7

5.7.8 Una viga en voladizo *AB* de sección transversal rectangular con ancho variable b_x y altura variable h_x se somete a una carga uniforme con intensidad *q* (consulte la figura). Si el ancho varía linealmente con la distancia *x* de acuerdo con la ecuación $b_x = b_B x/L$, ¿cómo debe variar la altura h_x como una función de *x* con objeto de tener una viga totalmente esforzada? (Exprese h_x en términos de la altura h_B en el extremo fijo de la viga.)



PROB. 5.7.8

Esfuerzos cortantes en vigas rectangulares

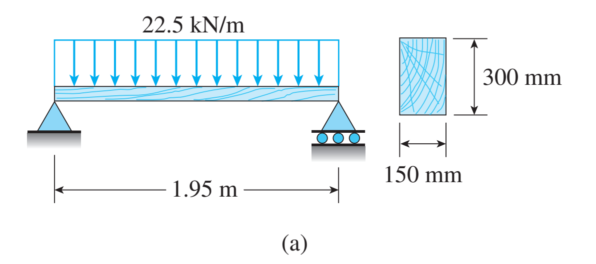
5.8.1 Los esfuerzos cortantes τ en una viga rectangular están dados por la ecuación (5.39):

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

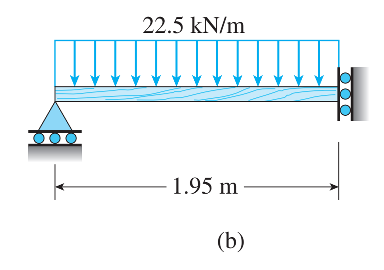
en donde *V* es la fuerza cortante, *I* es el momento de inercia del área de la sección transversal, *h* es la altura de la viga y y_1 es la distancia desde el eje neutro hasta el punto donde se está determinando el esfuerzo cortante (figura 5.30).

Integrando sobre el área de la sección transversal, demuestre que la resultante de los esfuerzos cortantes es igual a la fuerza cortante *V*.

5.8.2 Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ y el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en una viga de madera (consulte la figura) que soporta una carga uniforme de 22.5 kN/m (que incluye el peso de la viga) si la longitud es 1.95 m y la sección transversal es rectangular con ancho de 150 mm y peralte de 300 mm, y la viga está (a) simplemente apoyada como en la parte (a) de la figura y (b) tiene un soporte deslizante a la derecha como en la parte (b) de la figura.



(a)

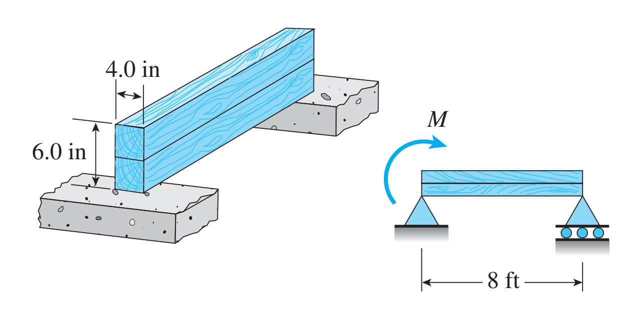


(b)

PROB. 5.8.2

5.8.3 Dos vigas de madera, cada una con sección transversal rectangular (3.0 in × 4.0 in, dimensiones reales) se pegan para formar un viga sólida con dimensiones de 6.0 in × 4.0 in (consulte la figura). La viga está simplemente apoyada y tiene un claro de 8 ft.

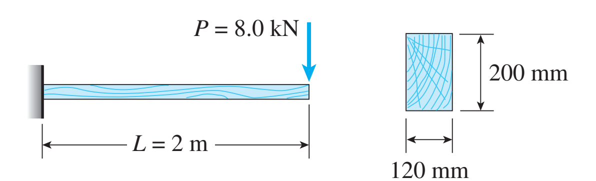
¿Cuál es el momento máximo $M_{máx}$ que se puede aplicar en el apoyo izquierdo si el esfuerzo cortante permisible en la junta pegada es 200 psi? (Incluya los efectos del peso de la viga, suponiendo que la madera pesa 35 lb/ft^3).



PROB. 5.8.3

5.8.4 Una viga en voladizo con longitud $L = 2$ m soporta una carga $P = 8.0$ kN (consulte la figura). La viga está hecha de madera con dimensiones transversales de 120 mm × 200 mm.

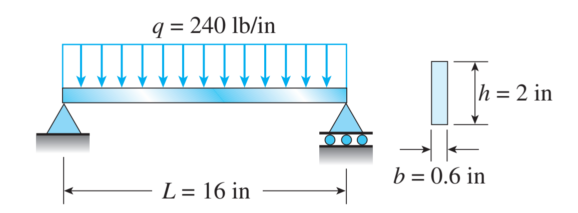
Calcule los esfuerzos cortantes debidos a la carga P en los puntos ubicados a 25 mm, 50 mm, 75 mm y 100 mm desde la superficie superior de la viga. A partir de estos resultados elabore una gráfica que muestre la distribución de los esfuerzos cortantes desde la parte superior hasta la parte inferior de la viga.



PROB. 5.8.4

5.8.5 Una viga de acero con longitud $L = 16$ in y dimensiones transversales $b = 0.6$ in y $h = 2$ in (consulte la figura) soporta una carga uniforme con intensidad $q = 240$ lb/in, que incluye el peso de la viga.

Calcule los esfuerzos cortantes en la viga (en la sección transversal de fuerza cortante máxima) en los puntos ubicados a ¼ in, ½ in, ¾ in y 1 in desde la superficie superior de la viga. A partir de estos cálculos, elabore una gráfica que muestre la distribución de los esfuerzos cortantes desde la parte superior hasta la parte inferior de la viga.



PROB. 5.8.5

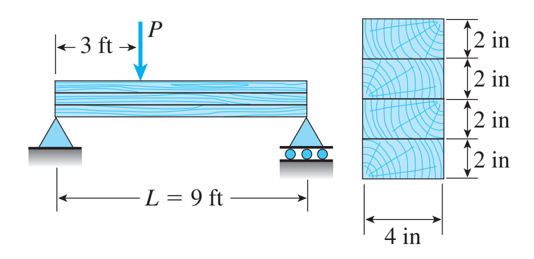
5.8.6 Una viga con sección transversal rectangular (ancho b y altura h) soporta una carga distribuida uniformemente a lo largo de toda su longitud L. Los esfuerzos permisibles en flexión y cortante son σ_{perm} y τ_{perm}, respectivamente.

(a) Si la viga está simplemente apoyada, ¿cuál es la longitud del claro L_0 debajo de la cual el esfuerzo cortante gobierna la carga permisible y arriba de la cual gobierna el esfuerzo de flexión?

(b) Si la viga está empotrada en voladizo, ¿cuál es la longitud del claro L_0 debajo de la cual el esfuerzo cortante gobierna la carga permisible y arriba de la cual gobierna el esfuerzo de flexión?

5.8.7 Una viga de madera laminada sobre apoyos simples se construye pegando cuatro tablas de 2 in × 4 in (dimensiones reales) para formar una viga sólida de 4 in × 8 in en su sección transversal, como se muestra en la figura. El esfuerzo cortante permisible en la junta pegada es 65 psi y el esfuerzo de flexión permisible en la madera es 1800 psi.

Si la viga tiene una longitud de 9 ft, ¿cuál es la carga permisible P que puede actuar a un tercio del claro de la viga? (Incluya los efectos del peso de la viga, suponiendo que la madera pesa 35 lb/ft^3.)



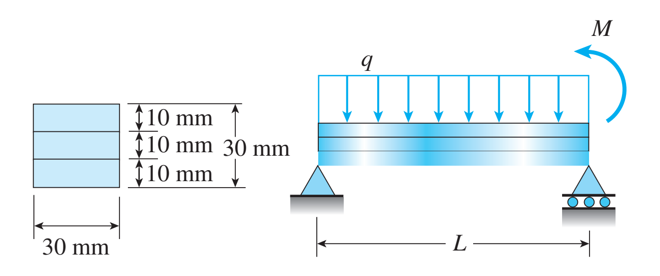
PROB. 5.8.7

5.8.8 Una viga de plástico laminado con sección transversal cuadrada está construida con tres tiras pegadas, cada una con sección transversal de 10 mm × 30 mm (consulte la figura). La viga tiene un peso total de 3.6 N, está simplemente apoyada y tiene una longitud de claro L = 360 mm.

Considerando el peso de la viga (q) calcule el momento M máximo permisible en sentido contrario al de las manecillas del reloj que se puede aplicar en el apoyo derecho.

(a) Si el esfuerzo cortante permisible en las juntas pegadas es 0.3 MPa.

(b) Si el esfuerzo de flexión permisible en el plástico es 8 MPa.

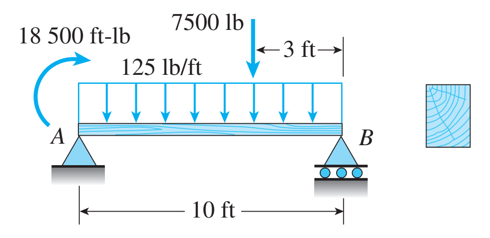


PROB. 5.8.8

***5.8.9** Una viga de madera AB sobre apoyos simples con longitud de claro igual a 10 ft está sometida a una carga uniforme con una intensidad de 125 lb/ft que actúa a lo largo de toda su longitud, a una carga concentrada con magnitud de 7500 lb que actúa en un punto a 3 ft del apoyo derecho y a un momento en A de 18,500 ft-lb (consulte la figura). Los esfuerzos permisibles en flexión y cortante, respectivamente, son 2250 psi y 160 psi.

(a) De la tabla en el apéndice F, seleccione la viga más ligera que soporte las cargas (no tome en cuenta el peso propio de la viga).

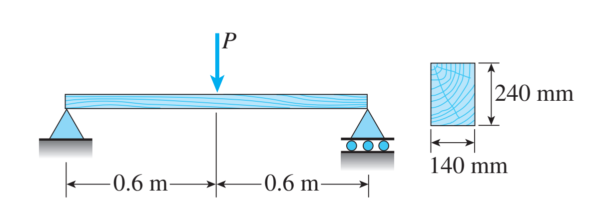
(b) Tomando en cuenta el peso de la viga (peso específico = 35 lb/ft^3), verifique si la viga seleccionada es adecuada, y si no lo es seleccione una viga nueva.



PROB. 5.8.9

***5.8.10** Una viga de madera simplemente apoyada con sección transversal rectangular y longitud de su claro de 1.2 m soporta una carga concentrada a la mitad de su claro además de su propio peso (consulte la figura). La sección transversal tiene un ancho de 140 mm y altura de 240 mm. El peso específico de la madera es 5.4 kN/m^3.

Calcule el valor máximo permisible de la carga P si (a) el esfuerzo de flexión permisible es 8.5 MPa y (b) el esfuerzo cortante permisible es 0.8 MPa.



PROB. 5.8.10

5.8.11 Una plataforma cuadrada de madera, de 8 ft × 8 ft de área, se apoya sobre muros de mampostería (consulte la figura). La cubierta de la plataforma está construida con tablones con espesor nominal de 2 in unidos con lengüeta y ranura (el espesor real es de 1.5 in; consulte el apéndice F) soportados sobre dos vigas de 8 ft de longitud. Las vigas tienen dimensiones nominales de 4 in × 6 in (las dimensiones reales son 3.5 in × 5.5 in).

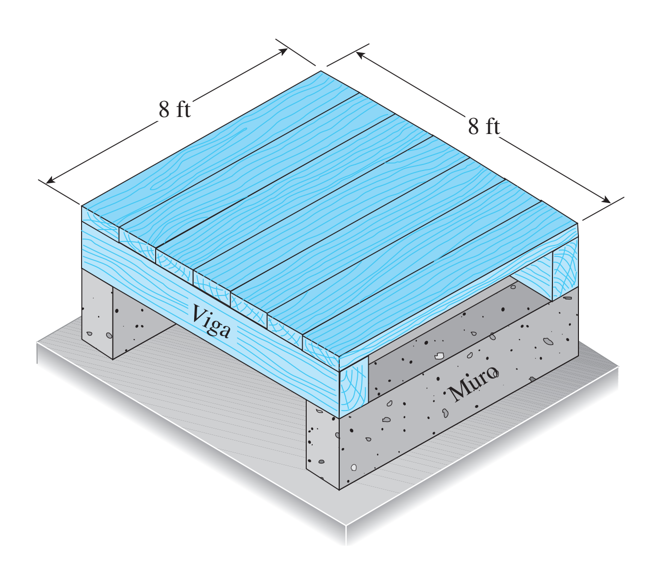
Los tablones están diseñados para soportar una carga distribuida uniformemente w (lb/ft^2) que actúa sobre toda la superficie de la plataforma. El esfuerzo de flexión permisible para los tablones es 2400 psi y el esfuerzo cortante permisible es 100 psi. Al analizar los tablones no tome en cuenta sus pesos y suponga que sus reacciones están distribuidas uniformemente sobre las superficies superiores de las vigas de apoyo.

(a) Determine la carga permisible sobre la plataforma w_1 (lb/ft^2) con base en el esfuerzo de flexión en los tablones.

(b) Determine la carga permisible sobre la plataforma w_2 (lb/ft^2) con base en el esfuerzo cortante en los tablones.

(c) ¿Qué valor de los anteriores se convierte en la carga permisible w_{perm} sobre la plataforma?

(*Sugerencias:* tenga cuidado al elaborar los diagramas de carga de los tablones, observe en especial que las reacciones son cargas distribuidas en vez de cargas concentradas. También tenga en cuenta que las fuerzas cortantes máximas ocurren en las caras interiores de las vigas de soporte.)

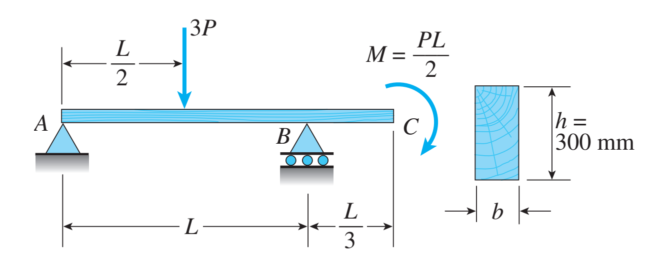


PROB. 5.8.11

5.8.12 Una viga de madera ABC con apoyos simples en A y B, y una saliente BC tiene una altura $h = 300$ mm (consulte la figura). La longitud del claro principal de la viga es $L = 3.6$ m y la longitud de la saliente es $L/3 = 1.2$ m. La viga soporta una carga concentrada $3P = 18$ kN en el punto medio del claro principal y un momento $PL/2 = 10.8$ kN·m en el extremo libre del voladizo. La madera tiene un peso específico $\gamma = 5.5$ kN/m^3.

(a) Determine el ancho requerido b de la viga con base en un esfuerzo de flexión permisible de 8.2 MPa.

(b) Determine el ancho requerido con base en un esfuerzo cortante permisible de 0.7 MPa.

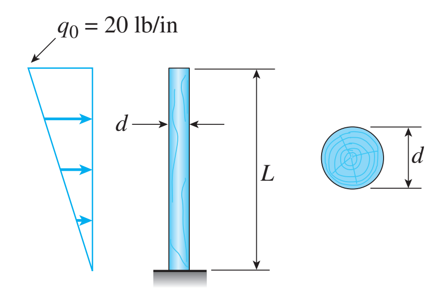


PROB. 5.8.12

Esfuerzos cortantes en vigas circulares

5.9.1 Un poste de madera con sección transversal circular (d = diámetro) está sometido a una fuerza horizontal con distribución triangular con intensidad pico $q_0 = 20$ lb/in (consulte la figura). La longitud del poste es $L = 6$ ft y los esfuerzos permisibles en la madera son 1900 psi en flexión y 120 psi en cortante.

Determine el diámetro mínimo requerido del poste con base en (a) el esfuerzo de flexión permisible y (b) el esfuerzo cortante permisible.

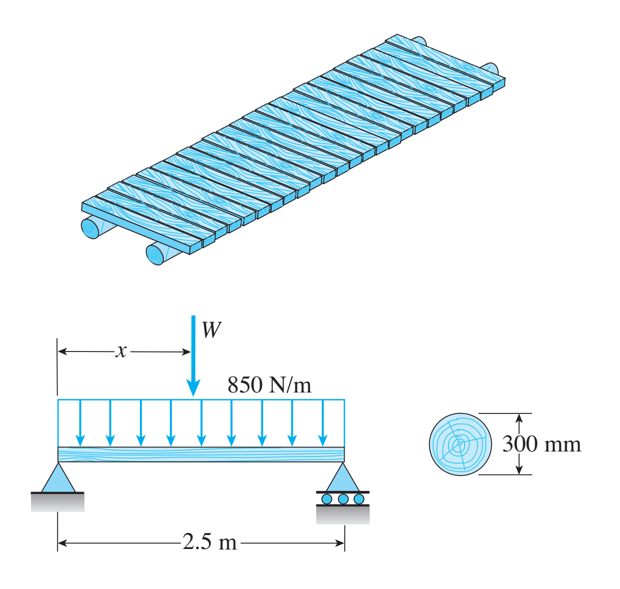


PROB. 5.9.1

5.9.2 Un puente simple construido con troncos en un área remota consiste de dos troncos paralelos con tablones transversales (consulte la figura). Los troncos son de abeto Douglas con diámetro promedio de 300 mm. Un camión se mueve lentamente a través del puente, que salva un claro de 2.5 m. Suponga que el peso del camión se distribuye igualmente entre los dos troncos.

Como la distancia entre ejes del camión es mayor que 2.5 m, sólo un par de neumáticos está sobre el puente al mismo tiempo. Por tanto, la carga por rueda sobre un tronco es equivalente a una carga concentrada W que actúa en cualquier posición a lo largo del claro. Además, el peso de un tronco y los tablones que soporta es equivalente a una carga uniforme de 850 N/m que actúa sobre el tronco.

Determine la carga por rueda máxima permisible W con base en (a) un esfuerzo de flexión permisible de 7.0 MPa y (b) un esfuerzo cortante permisible de 0.75 MPa.

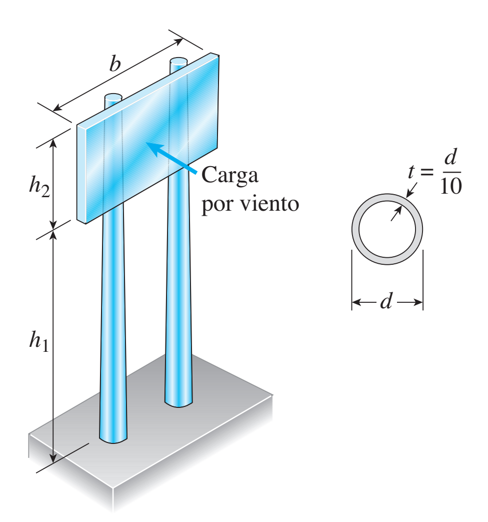


PROB. 5.9.2

***5.9.3** Un letrero para una estación de servicio automotriz está soportado por dos postes de aluminio con secciones transversales huecas, como se muestra en la figura. Los postes se diseñan para resistir una presión del viento de 75 lb/ft^2 contra el área total del letrero. Las dimensiones de los postes y el letrero son h_1 = 20 ft, h_2 = 5 ft y b = 10 ft. Para evitar el pandeo de las paredes de los postes, el espesor t se específica como un décimo del diámetro exterior d.

(a) Determine el diámetro requerido mínimo de los postes con base en un esfuerzo de flexión permisible de 7500 psi en el aluminio.

(b) Determine el diámetro mínimo requerido con base en un esfuerzo cortante permisible de 2000 psi.



PROB. 5.9.3 y 5.9.4

***5.9.4** Resuelva el problema anterior para un letrero y postes con las dimensiones siguientes: h_1 = 6.0 m, h_2 = 1.5 m, b = 3.0 m y $t = d/10$. La presión de diseño del viento es 3.6 kPa y los esfuerzos permisibles en el aluminio son 50 MPa en flexión y 14 MPa en cortante.

Esfuerzos cortantes en vigas con patines

5.10.1 a 5.10.6 Una viga de patín ancho (consulte la figura) con sección transversal como se describe a continuación está sometida a una fuerza cortante V. Utilizando las dimensiones de la sección transversal, calcule las cantidades siguientes:

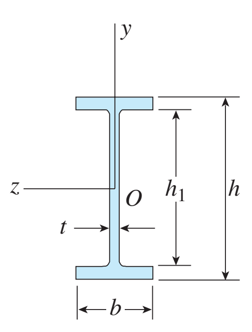
(a) El esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el alma.

(b) El esfuerzo cortante mínimo $\tau_{\text{mín}}$ en el alma.

(c) El esfuerzo cortante promedio τ_{prom} (obtenido al dividir la fuerza cortante entre el área del alma) y la razón $\tau_{\text{máx}}/\tau_{\text{prom}}$.

(d) La fuerza cortante V_{alma} soportada en el alma y la razón V_{alma}/V.

(*Nota:* no tome en cuenta los filetes en las uniones del alma con los patines y determine todas las cantidades, incluyendo el momento de inercia, considerando que la sección transversal consta de tres rectángulos.)



PROBS. 5.10.1 a 5.10.6

5.10.1 Dimensiones de la sección transversal: b = 6 in, t = 0.5 in, h = 12 in, h_1 = 10.5 in y V = 30 k.

5.10.2 Dimensiones de la sección transversal: b = 180 mm, t = 12 mm, h = 420 mm, h_1 = 380 mm y V = 125 kN.

5.10.3 Perfil de patín ancho, W 8 × 28 (consulte la tabla E.1, apéndice E); V = 10 k.

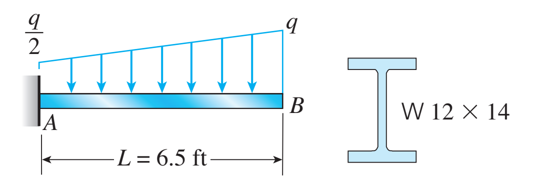
5.10.4 Dimensiones de la sección transversal: b = 220 mm, t = 12 mm, h = 600 mm, h_1 = 570 mm y V = 200 kN.

5.10.5 Perfil de patín ancho, W 18 × 71 (consulte la tabla E.1, apéndice E); V = 21 k.

5.10.6 Dimensiones de la sección transversal: b = 120 mm, t = 7 mm, h = 350 mm, h_1 = 330 mm y V = 60 kN.

5.10.7 Una viga en voladizo AB con longitud L = 6.5 ft soporta una carga con distribución trapezoidal con intensidad pico q e intensidad mínima $q/2$, que incluye el peso de la viga (consulte la figura). La viga es un perfil de acero W 12 × 14 de patín ancho (consulte la tabla E.1(a), apéndice E).

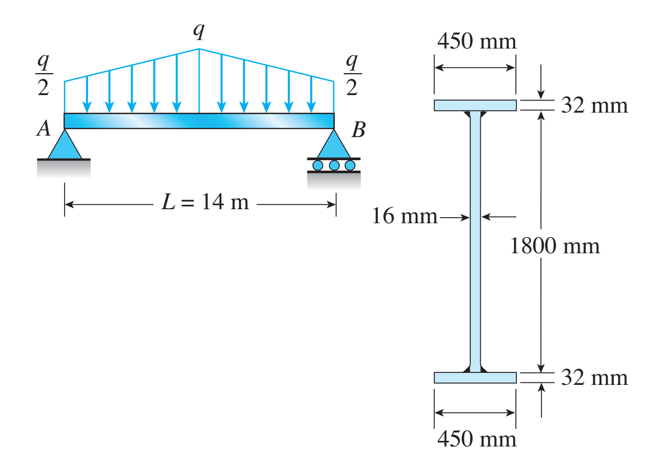
Calcule la carga máxima permisible q con base en (a) un esfuerzo de flexión permisible $\sigma_{\text{máx}}$ = 18 ksi y (b) un esfuerzo cortante permisible τ_{perm} = 7.5 ksi. [*Nota:* obtenga el momento de inercia y el módulo de sección de la viga de la tabla E.1(a).]



PROB. 5.10.7

5.10.8 Una trabe de un puente AB sobre un claro simple con longitud L = 14 m soporta una carga distribuida con intensidad máxima q a la mitad del claro e intensidad mínima $q/2$ en los apoyos (estribos) A y B que incluye el peso de la trabe (consulte la figura). La trabe está construida con tres placas soldadas para formar la sección transversal que se muestra en la figura.

Determine la carga máxima permisible q con base en (a) un esfuerzo de flexión permisible σ_{perm} = 110 MPa y (b) un esfuerzo cortante permisible τ_{perm} = 50 MPa.

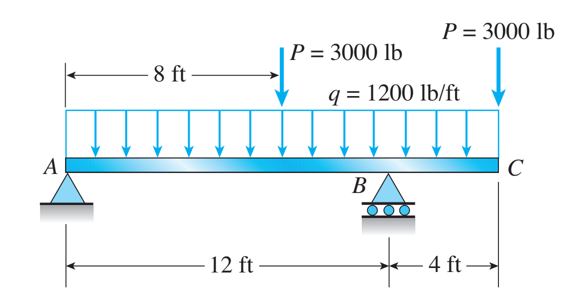


PROB. 5.10.8

5.10.9 Una viga simple con una saliente soporta una carga uniforme con una intensidad q = 1200 lb/ft y una carga concentrada P = 3000 lb a 8 ft a la derecha de A y también en C (consulte la figura). La carga uniforme incluye un margen para el peso de la viga. Los esfuerzos permisibles en flexión y cortante son 18 ksi y 11 ksi, respectivamente.

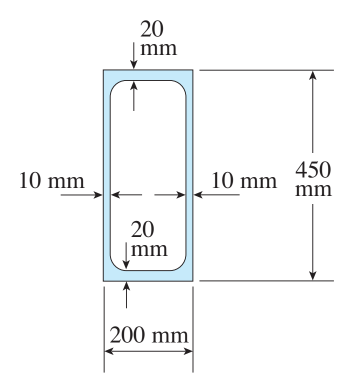
Seleccione de la tabla E.2(a), apéndice E, la viga I más ligera (perfil S) que soporte las cargas dadas.

(*Sugerencia:* seleccione una viga con base en el esfuerzo de flexión y luego calcule el esfuerzo cortante máximo. Si la viga está sobreesforzada en cortante, seleccione una viga más pesada y repita el cálculo.)



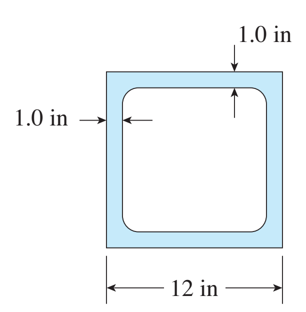
PROB. 5.10.9

5.10.10 Una viga de caja hueca de acero tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la fuerza cortante máxima permisible V que puede actuar sobre la viga si el esfuerzo cortante permisible es 36 MPa.



PROB. 5.10.10

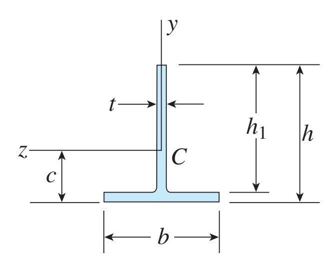
5.10.11 Una viga de caja hueca de aluminio tiene la sección transversal cuadrada que se muestra en la figura. Calcule los esfuerzos cortantes máximo y mínimo $\tau_{\text{máx}}$ y $\tau_{\text{mín}}$ en las almas de la viga debidos a la fuerza cortante V = 28 k.



PROB. 5.10.11

5.10.12 La viga T que se muestra en la figura tiene las dimensiones transversales siguientes: $b = 210$ mm, $t = 16$ mm, $h = 300$ mm y $h_1 = 280$ mm. La viga está sometida a una fuerza cortante $V = 68$ kN.

Determine el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el alma de la viga.



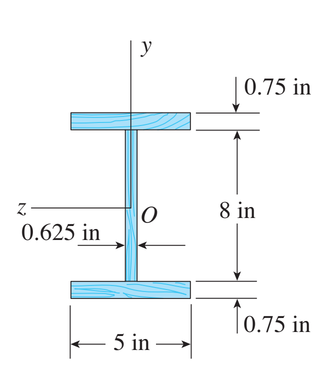
PROBS. 5.10.12 y 5.10.13

5.10.13 Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el alma de la viga T que se muestra en la figura si $b = 10$ in, $t = 0.5$ in, $h = 7$ in, $h_1 = 6.2$ in y la fuerza cortante $V = 5300$ lb.

Trabes armadas

5.11.1 Una trabe I prefabricada que sirve como larguero de piso tiene la sección transversal que se muestra en la figura. La carga permisible en cortante para las juntas pegadas entre el alma y los patines es 65 lb/in en la dirección longitudinal.

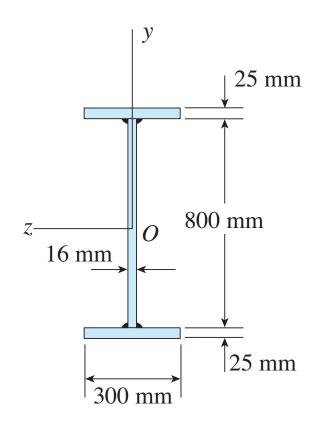
Determine la fuerza cortante máxima permisible $V_{máx}$ para la viga.



PROB. 5.11.1

5.11.2 Una trabe soldada de acero con la sección transversal que se muestra en la figura está fabricada con dos placas que conforman los patines de 300 mm × 25 mm cada una y una placa para el alma de 800 mm × 16 mm. Las placas están unidas por cuatro filetes de soldadura en toda la longitud de la trabe. Cada soldadura tiene una carga permisible en cortante de 920 kN/m.

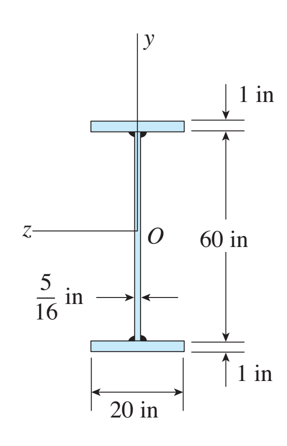
Calcule la fuerza cortante permisible $V_{máx}$ para la trabe.



PROB. 5.11.2

5.11.3 Una trabe soldada de acero con sección transversal como se muestra en la figura está hecha con dos placas que conforman los patines de 20 in × 1 in cada una y una placa para el alma de 60 in × 5/16 in. Las placas están unidas por cuatro filetes de soldadura en toda la longitud de la trabe.

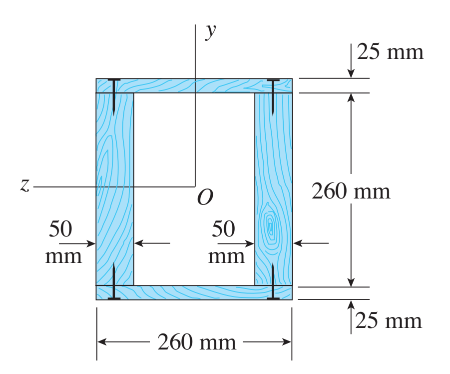
Si la trabe está sometida a una fuerza cortante de 280 kips, ¿qué fuerza F (por pulgada de longitud de soldadura) debe resistir cada soldadura?



PROB. 5.11.3

5.11.4 Una viga de caja de madera está construida con dos tablones de 260 mm × 50 mm y dos tablones de 260 mm × 25 mm (consulte la figura). Los tablones están clavados con un espaciamiento longitudinal s = 100 mm.

Si cada clavo tiene una fuerza cortante permisible F = 1200 N, ¿cuál es la fuerza cortante máxima permisible $V_{máx}$?

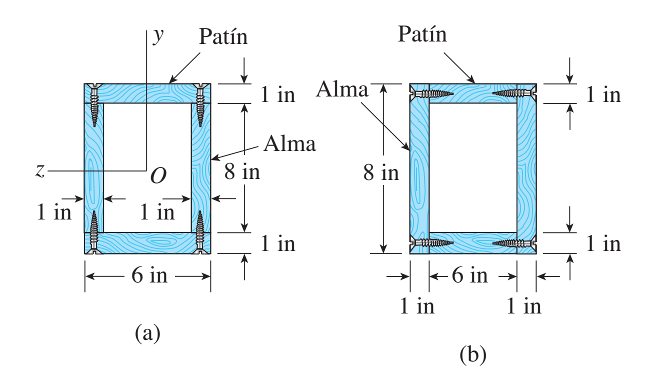


PROB. 5.11.4

5.11.5 Una viga de caja está construida con cuatro tablones de madera como se muestra en la parte (a) de la figura. Las almas son tablones de 8 in × 1 in y los patines son de 6 in × 1 in (dimensiones reales), unidos por tornillos para los cuales la carga permisible en cortante es F = 250 lb por tornillo.

(a) Calcule el espaciamiento longitudinal máximo permisible $S_{máx}$ de los tornillos si la fuerza cortante V es 1200 lb.

(b) Repita el inciso (a) si los patines se unen a las almas empleando una configuración *horizontal* de los tornillos como se muestra en la parte (b) de la figura.



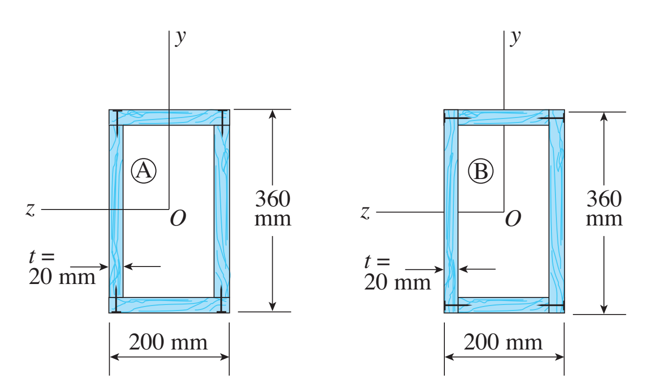
PROB. 5.11.5

5.11.6 Dos vigas de caja de madera (vigas A y B) tienen las mismas dimensiones exteriores (200 mm × 360 mm) y el mismo espesor (t = 20 mm), como se muestra en la figura. Las dos vigas se unen con clavos, cada uno con un carga cortante permisible de 250 N. Las vigas están diseñadas para una fuerza cortante V = 3.2 kN.

(a) ¿Cuál es el espaciamiento longitudinal máximo s_A para los clavos en la viga A?

(b) ¿Cuál es el espaciamiento longitudinal máximo s_B para los clavos en la viga B?

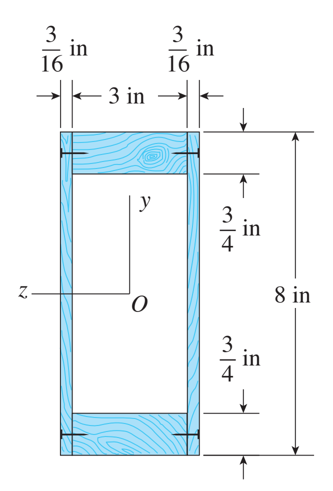
(c) ¿Qué viga es más eficiente para resistir la fuerza cortante?



PROB. 5.11.6

5.11.7 Una viga hueca de madera con almas de madera contrachapada tiene las dimensiones transversales que se muestran en la figura. La madera contrachapada está unida a los patines por medio de clavos pequeños. Cada clavo tiene una carga permisible en cortante de 30 lb.

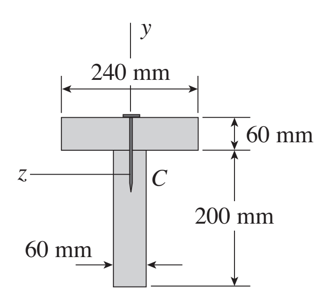
Encuentre el espaciamiento máximo permisible s de los clavos en secciones transversales donde la fuerza cortante V es igual a (a) 200 lb y (b) 300 lb.



PROB. 5.11.7

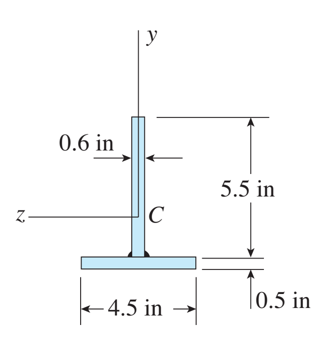
5.11.8 Una viga T con sección transversal se forma clavando dos tablones que tienen las dimensiones que se muestran en la figura.

Si la fuerza cortante total V que actúa sobre la sección transversal es 1500 N y cada clavo puede soportar 760 N en cortante, ¿cuál el espaciamiento máximo permisible s de los clavos?



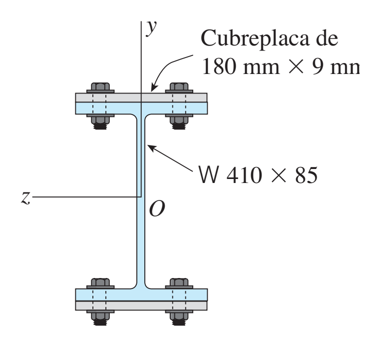
PROB. 5.11.8

5.11.9 La viga T que se muestra en la figura está fabricada soldando dos placas de acero. Si la carga permisible para cada soldadura es 1.8 k/in en la dirección longitudinal, ¿cuál es la fuerza cortante máxima permisible *V*?



PROB. 5.11.9

5.11.10 Una trabe de acero se arma con dos vigas de patín ancho W 410 × 85 y dos cubreplacas de 180 mm × 9 mm (consulte la figura). La carga permisible en cortante sobre cada perno es 9.8 kN. ¿Cuál es el espaciamiento requerido *s* de los pernos en la dirección longitudinal si la fuerza cortante es V = 110 kN? (*Nota:* obtenga las dimensiones y los momentos de inercia del perfil W de la tabla E.1(b).)

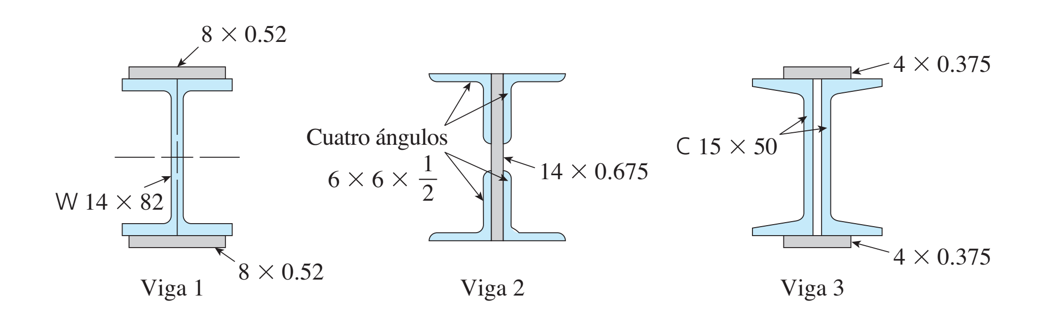


PROB. 5.11.10

5.11.11 Las tres vigas que se muestran en la figura tienen aproximadamente la misma área transversal. La viga 1 es un perfil W 14 × 82 con placas en los patines; la viga 2 consiste en una placa de alma con cuatro ángulos y la viga 3 está construida con dos perfiles C con placas en los patines.

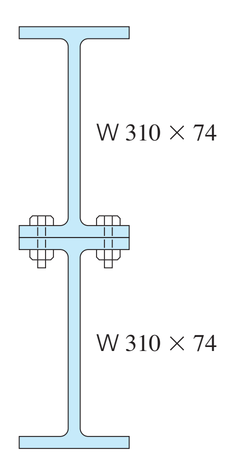
(a) ¿Qué diseño tiene la mayor capacidad de momento?
(b) ¿Qué viga tiene la mayor capacidad de cortante?
(c) ¿Qué viga es la más económica en flexión?
(d) ¿Qué viga es la más económica en cortante?

Suponga que los valores del esfuerzo permisible son: σ_a = 18 ksi y τ_a = 11 ksi. La viga más económica es la que tiene la mayor razón entre capacidad y peso. No tome en cuenta los costos de fabricación al responder (c) y (d). (*Nota:* obtenga las dimensiones y propiedades de todos los perfiles laminados de las tablas en el apéndice E.)



PROB. 5.11.11

5.11.12 Dos vigas con patín ancho W 310 × 74 se unen con pernos para formar una trabe armada como se muestra en la figura. ¿Cuál es el espaciamiento máximo permisible s si la fuerza cortante $V = 80$ kN y la carga permisible en cortante sobre cada perno es $F = 13.5$ kN? (*Nota:* obtenga las dimensiones y propiedades de los perfiles W de la tabla E.1(b).)



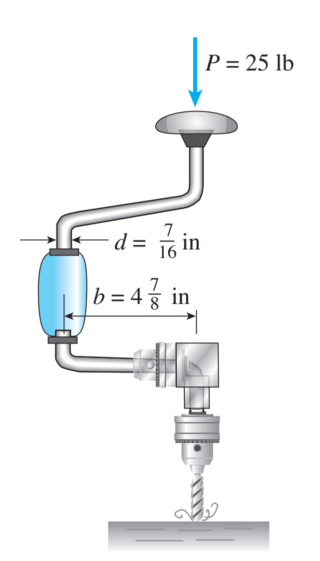
PROB. 5.11.12

Vigas con cargas axiales

Al resolver los problemas para la sección 5.12, suponga que los momentos flexionantes no se ven afectados por la presencia de deflexiones laterales.

5.12.1 Al hacer un agujero con un berbiquí y una barrena, usted ejerce una fuerza hacia abajo $P = 25$ lb sobre la manija del berbiquí (consulte la figura). El diámetro de la manivela es $d = 7/16$ in y su desplazamiento lateral es $b = 4\text{-}7/8$ in.

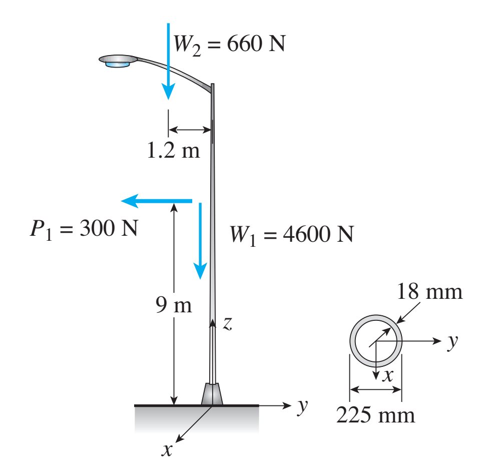
Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_1 y σ_2, respectivamente, en la manivela.



PROB. 5.12.1

5.12.2 Un poste de aluminio para alumbrado público pesa 4600 N y soporta un brazo que pesa 660 N (consulte la figura). El centro de gravedad del brazo está a 1.2 m del eje del poste. También actúa una fuerza por viento de 300 N en la dirección (−y) a 9 m arriba de la base. El diámetro exterior del poste (en su base) es 225 mm y su espesor es 18 mm.

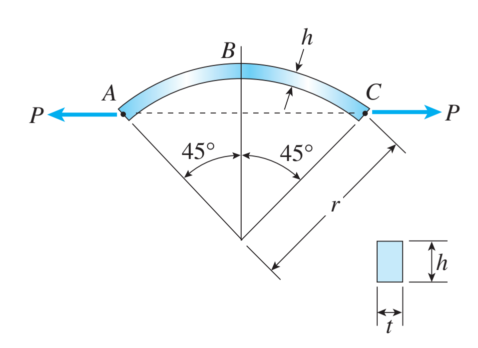
Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en el poste (en su base) debidos a los pesos y a la fuerza del viento.



PROB. 5.12.2

5.12.3 Una barra curva ABC con eje circular (radio $r = 12$ in) está cargada por fuerzas $P = 400$ lb (consulte la figura). La sección transversal de la barra es rectangular con altura h y espesor t.

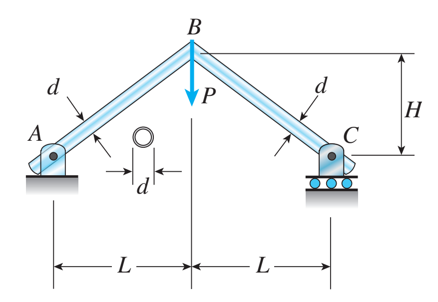
Si el esfuerzo de tensión permisible en la barra es 12,000 psi y el peralte $h = 1.25$ in, ¿cuál es el espesor mínimo requerido $t_{mín}$?



PROB. 5.12.3

5.12.4 un marco rígido ABC se forma soldando tubos de acero en B (consulte la figura). Cada tubo tiene un área de sección transversal $A = 11.31 \times 10^3$ mm^2, momento de inercia $I = 46.37 \times 10^6$ mm^4 y diámetro exterior $d = 200$ mm.

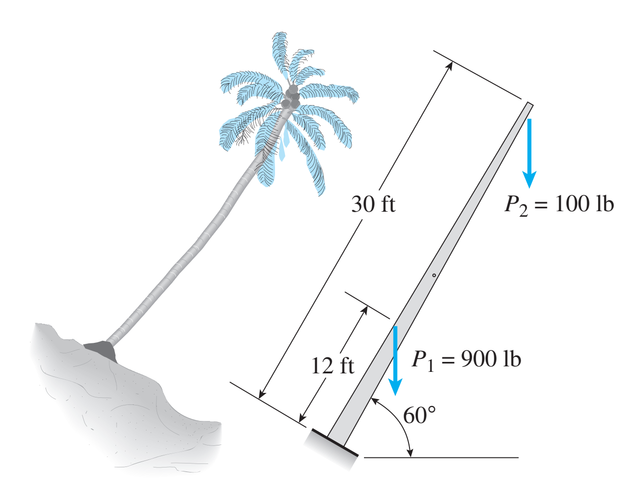
Encuentre los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en el marco debidos a la carga $P = 8.0$ kN si $L = H = 1.4$ m.



PROB. 5.12.4

5.12.5 Una palmera que pesa 1000 lb está inclinada a un ángulo de 60° (consulte la figura). El peso de la palmera se puede descomponer en dos fuerzas resultantes, una fuerza P_1 = 900 lb que actúa en un punto a 12 ft de la base y una fuerza P_2 = 100 lb que actúa en la parte superior de la palmera, que tiene una altura de 30 ft. El diámetro en la base de la palmera es 14 in.

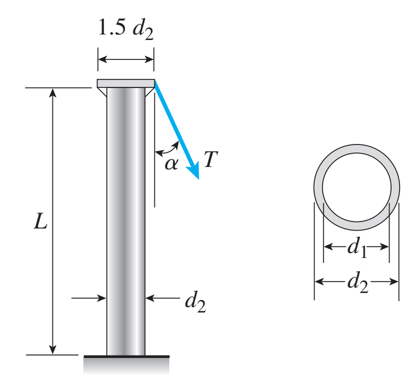
Calcule los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en la base de la palmera debidos a su peso.



PROB. 5.12.5

5.12.6 Un poste vertical de aluminio está empotrado en su base y es jalado en su parte superior por un cable que tiene una fuerza de tensión T (consulte la figura). El cable está sujeto al borde exterior de una cubreplaca rigidizada en la parte superior del poste y forma un ángulo $\alpha = 20°$ en el punto de sujeción. El poste tiene una longitud $L = 2.5$ m y una sección transversal hueca con diámetro exterior $d_2 = 280$ mm y diámetro interior $d_1 = 220$ mm. La cubreplaca circular tiene un diámetro de $1.5d_2$.

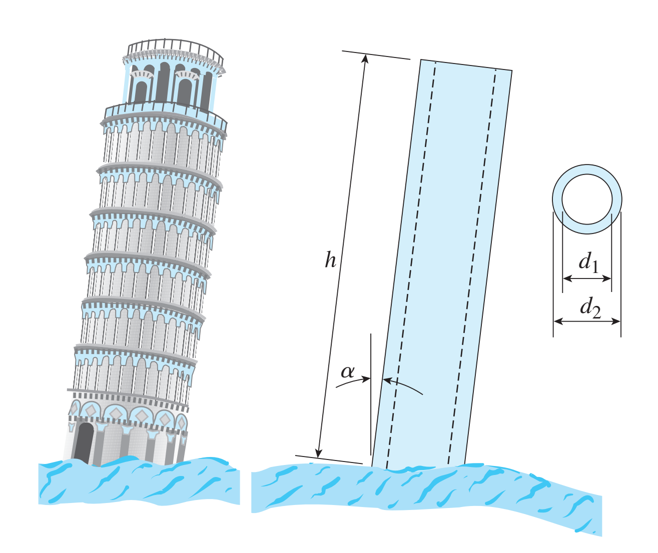
Determine la fuerza permisible de tensión T_{perm} en el cable si el esfuerzo permisible de compresión en el poste de aluminio es 90 MPa.



PROB. 5.12.6

5.12.7 Debido al asentamiento de la cimentación, una torre circular está inclinada a un ángulo α con respecto a la vertical (consulte la figura). El núcleo estructural de la torre es un cilindro circular con altura h, diámetro exterior d_2 y diámetro interior d_1. Por simplicidad en el análisis, suponga que el peso de la torre está distribuido uniformemente a lo largo de la altura.

Obtenga una fórmula para el ángulo máximo permisible α para no tener esfuerzos de tensión en la torre.

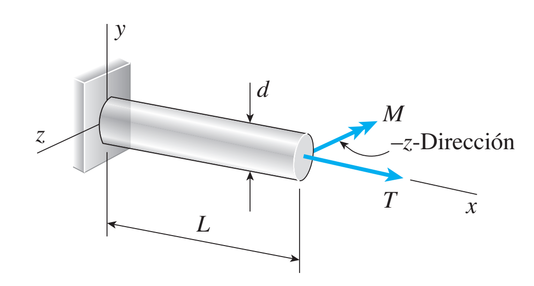


PROB. 5.12.7

5.12.8 Una barra de acero con sección transversal circular sólida y longitud $L = 2.5$ m está sometida a una fuerza axial de tensión $T = 24$ kN y a un momento flexionante $M = 3.5$ kN·m (consulte la figura).

(a) Con base en un esfuerzo permisible en tensión de 110 MPa, determine el diámetro requerido d de la barra; no tome en cuenta el peso de la barra.

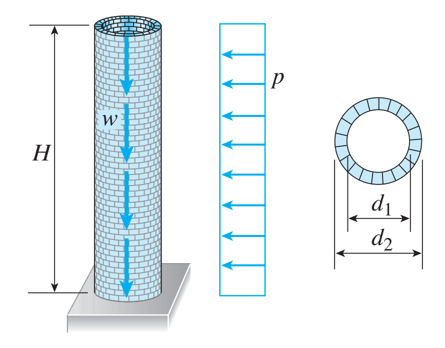
(b) Repita el inciso (a) incluyendo el peso de la barra.



PROB. 5.12.8

5.12.9 Una chimenea cilíndrica de ladrillos con altura H pesa $w = 825$ lb/ft de altura (consulte la figura). Los diámetros interior y exterior son $d_1 = 3$ ft y $d_2 = 4$ ft, respectivamente. La presión del viento contra el lado de la chimenea es $p = 10$ lb/ft^2 de área proyectada.

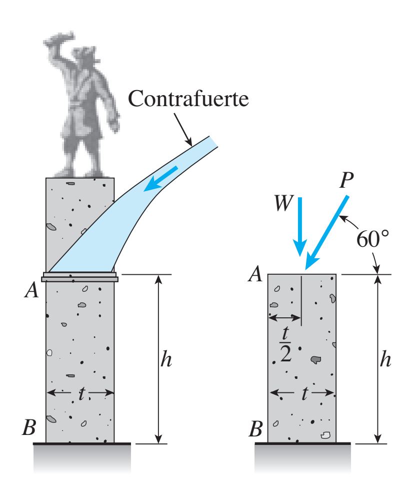
Determine la altura máxima H para no tener tensión en la estructura de ladrillos.



PROB. 5.12.9

5.12.10 Un contrafuerte transmite una carga $P = 25$ kN, que actúa a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal, hasta la parte superior de un contrafuerte vertical AB (consulte la figura). El contrafuerte vertical tiene una altura $h = 5.0$ m y sección transversal rectangular con espesor $t = 1.5$ m y ancho $b = 1.0$ m (perpendicular al plano de la figura). La piedra empleada en la construcción pesa $\lambda = 26$ kN/m^3.

¿Cuál es la altura requerida W del pedestal y la estatua arriba del contrafuerte vertical (es decir, arriba de la sección A) para evitar cualesquiera esfuerzos de tensión en el botarel vertical?

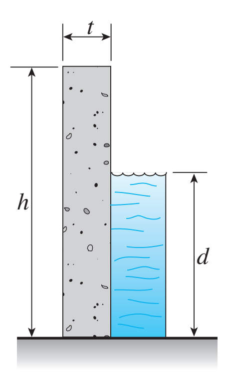


PROB. 5.12.10

5.12.11 Un muro de concreto simple (es decir, un muro sin acero de refuerzo) se apoya sobre una cimentación firme y sirve como una represa pequeña sobre una cañada (consulte la figura). La altura del muro es $h = 6.0$ ft y su espesor es $t = 1.0$ ft.

(a) Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en la base del muro cuando el nivel de agua alcanza la parte superior ($d = h$). Suponga que el concreto simple tiene un peso específico $\gamma_c = 145$ lb/ft^3.

(b) Determine el nivel máximo permisible $d_{máx}$ del agua si no debe haber tensión en el concreto.



PROB. 5.12.11

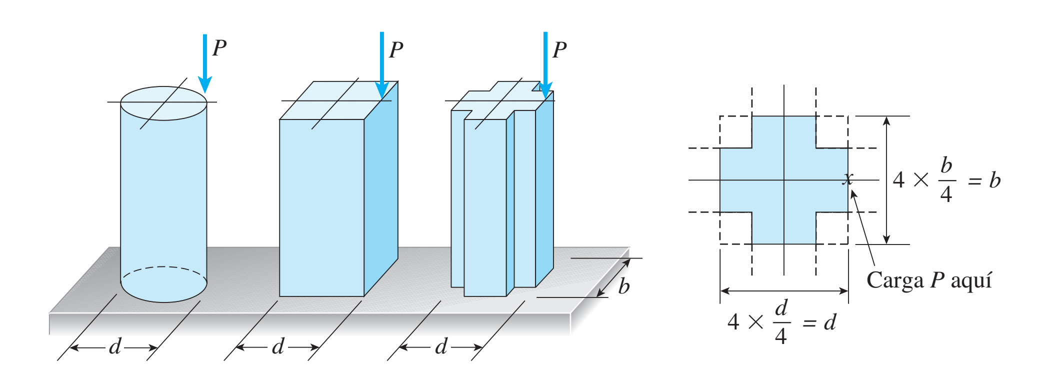
Cargas excéntricas axiales

5.12.12 Un poste circular, un poste rectangular y un poste con sección rectangular cruciforme, se comprimen por cargas que producen una fuerza resultante P que actúa en el borde de la sección transversal (consulte la figura). El diámetro del poste circular y el ancho de los postes rectangular y cruciforme son iguales.

(a) ¿Para qué ancho b del poste rectangular serán iguales los esfuerzos máximos de tensión en los postes circular y rectangular?

(b) Repita el inciso (a) para el poste con sección transversal cruciforme.

(c) En las condiciones descritas en los incisos (a) y (b), ¿qué poste tiene el esfuerzo de compresión máximo?

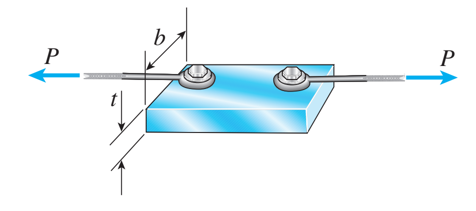


PROB. 5.12.12

5.12.13 Dos cables, cada uno de los cuales soporta una fuerza de tensión $P = 1200$ lb, están sujetos con pernos a un bloque de acero (consulte la figura). El bloque tiene espesor $t = 1$ in y ancho $b = 3$ in.

(a) Si el diámetro d del cable es 0.25 in, ¿cuáles son los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en el bloque?

(b) Si el diámetro del cable se aumenta (sin cambiar la fuerza P), ¿qué sucede con los esfuerzos máximos de tensión y compresión?

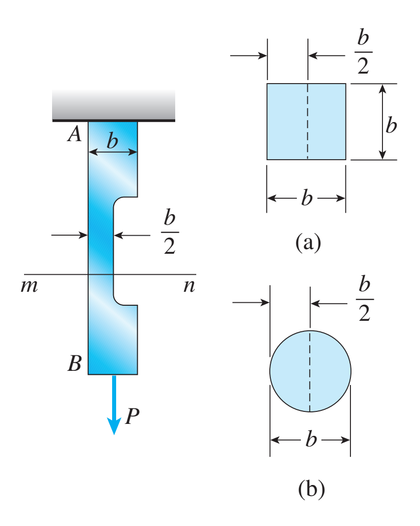


PROB. 5.12.13

5.12.14 Una barra AB soporta una carga P que actúa en el centroide de la sección transversal extrema (consulte la figura). En la parte media de la barra el área de la sección transversal se reduce eliminado la mitad de la barra.

(a) Si las secciones transversales extremas de la barra son cuadradas con lados de longitud b, ¿cuáles son los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en la sección transversal mn dentro de la parte reducida?

(b) Si las secciones transversales extremas son circulares con diámetro b, ¿cuáles son los esfuerzos máximos σ_t y σ_c?



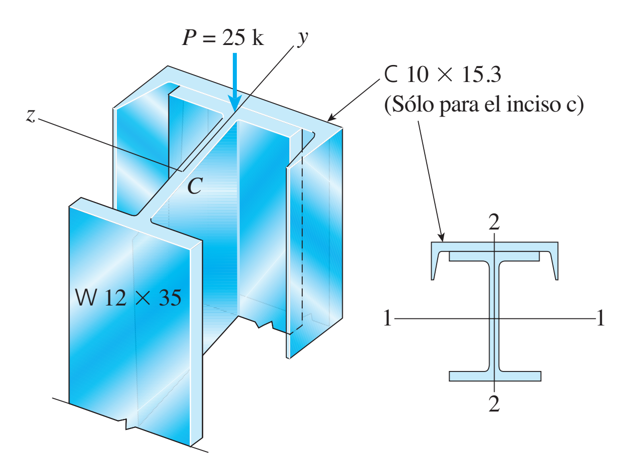
PROB. 5.12.14

5.12.15 Una columna corta construida con un perfil W 12 × 35 de patín ancho está sometida a una carga resultante de compresión $P = 25$ k con su línea de acción en el punto medio de un patín (consulte la figura).

(a) Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en la columna.

(b) Ubique el eje neutro ante esta condición de carga.

(c) Vuelva a calcular los esfuerzos máximos de tensión y compresión si se coloca un perfil C 10 × 15.3 sobre un patín, como se muestra.



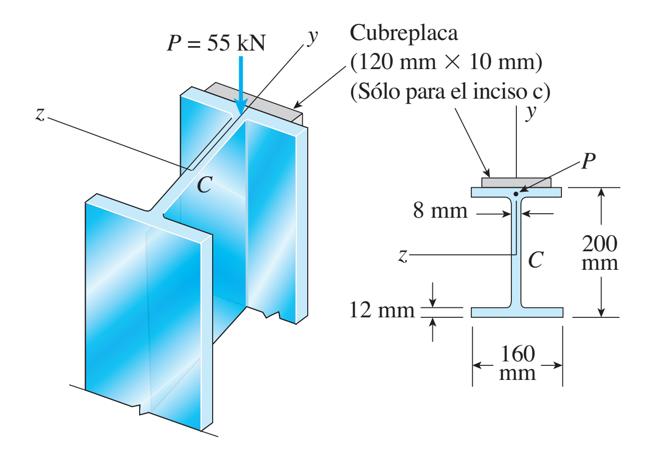
PROB. 5.12.15

5.12.16 Una columna corta de patín ancho está sometida a una carga de compresión que produce una fuerza resultante $P = 55$ kN que actúa en el punto medio de un patín (consulte la figura).

(a) Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión σ_t y σ_c, respectivamente, en la columna.

(b) Ubique el eje neutro ante esta condición de carga.

(c) Vuelva a calcular los esfuerzos máximos de tensión y compresión si se agrega una cubreplaca de 120 mm × 10 mm a un patín, como se muestra.

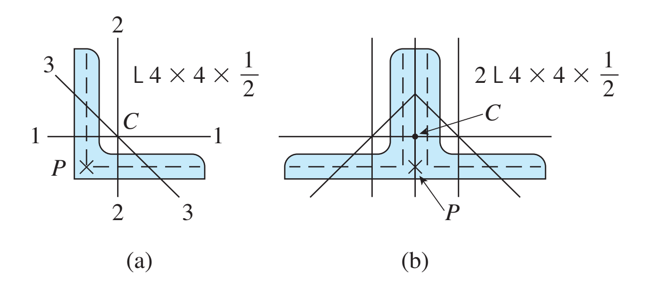


PROB. 5.12.16

5.12.17 Un elemento en tensión construido con un perfil en ángulo L 4 × 4 × $\frac{1}{2}$ in (consulte la tabla E.4(a) en el apéndice E) está sometido a una carga de tensión $P = 12.5$ k que actúa en el punto donde las líneas medias de los lados se cruzan [consulte la parte (a) de la figura].

(a) Determine el esfuerzo máximo de tensión σ_t en el perfil en ángulo.

(b) Vuelva a calcular el esfuerzo máximo de tensión si se utilizan dos ángulos y P se aplica como se muestra en la parte (b) de la figura.



PROB. 5.12.17

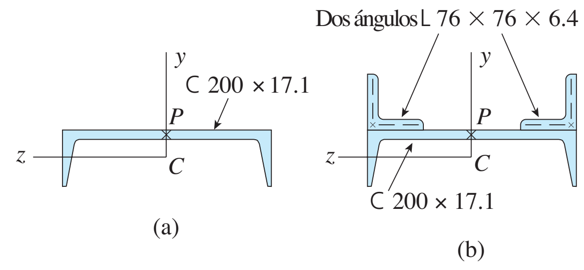
5.12.18 Un canal con longitud corta C 200 × 17.1 se somete a una fuerza axial de compresión P que tiene su línea de acción en el punto medio del alma del canal [consulte la parte (a) de la figura].

(a) Determine la ecuación del eje neutro ante esta condición de carga.

(b) Si los esfuerzos permisibles en tensión y compresión son 76 MPa y 52 MPa, respectivamente, determine la carga máxima permisible $P_{máx}$.

(c) Repita los incisos (a) y (b) si se agregan dos ángulos L 76 × 76 × 6.4 al canal, como se muestra en la parte (b) de la figura.

Consulte la tabla E.3(b) en el apéndice E para obtener las propiedades del canal y la tabla E.4(b) para obtener las propiedades del ángulo.



PROB. 5.12.18

Concentraciones de esfuerzos

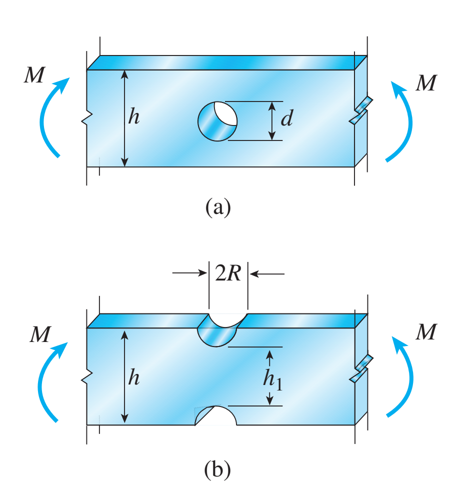
Los problemas para la sección 5.13 se deben resolver considerando los factores de concentración de esfuerzos.

5.13.1 Las vigas que se muestran en la figura están sometidas a momentos flexionantes $M = 2100$ lb-in. Cada viga tiene

una sección transversal rectangular con altura h = 1.5 in y ancho b = 0.375 in (perpendicular al plano de la figura).

(a) Para la viga con un agujero a la mitad de su altura, determine los esfuerzos máximos para diámetros del agujero d = 0.25, 0.50, 0.75 y 1.00 in.

(b) Para la viga con dos muescas idénticas (altura interior h_1 = 1.25 in), determine los esfuerzos máximos para los radios de las muescas R = 0.05, 0.10, 0.15 y 0.20 in.



PROBS. 5.13.1 a 5.13.4

5.13.2 Las vigas que se muestran en la figura están sometidas a momentos flexionantes M = 250 N·m. Cada viga tiene una sección transversal rectangular con altura h = 44 mm y ancho b = 10 mm (perpendicular al plano de la figura).

(a) Para la viga con un agujero a la mitad de su altura, determine los esfuerzos máximos para diámetros del agujero d = 10, 16, 22 y 28 mm.

(b) Para la viga con dos muescas idénticas (peralte interior h_1 = 40 mm), determine los esfuerzos máximos para los radios de las muescas R = 2, 4, 6 y 8 mm.

5.13.3 Una viga rectangular con muescas semicirculares, como se muestra en la parte (b) de la figura, tiene dimensiones h = 0.88 in y h_1 = 0.80 in. El esfuerzo de flexión máximo permisible en la viga metálica es $\sigma_{\text{máx}}$ = 60 ksi y el momento flexionante es M = 600 lb·in.

Determine el ancho mínimo permisible $b_{\text{mín}}$ de la viga.

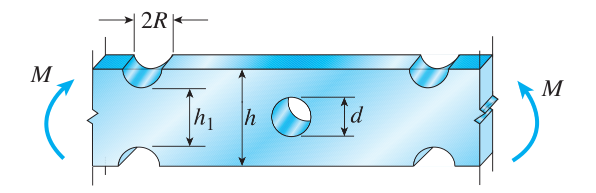
5.13.4 Una viga rectangular con muescas semicirculares, como se muestra en la parte (b) de la figura, tiene dimensiones h = 120 mm y h_1 = 100 mm. El esfuerzo de flexión máximo permisible en la viga de plástico es $\sigma_{\text{máx}}$ = 6 MPa y el momento flexionante es M = 150 N·m.

Determine el ancho mínimo permisible $b_{\text{mín}}$ de la viga.

5.13.5 Una viga rectangular con muescas y un agujero (consulte la figura) tiene dimensiones h = 5.5 in, h_1 = 5 in y ancho b = 1.6 in. La viga está sometida a un momento flexionante M = 130 k·in y el esfuerzo de flexión máximo permisible en el material (acero) es $\sigma_{\text{máx}}$ = 42,000 psi.

(a) ¿Cuál es el radio menor $R_{\text{mín}}$ que se debe emplear en las muescas?

(b) ¿Cuál es el diámetro $d_{\text{máx}}$ del agujero máximo que se debe hacer a la mitad de la altura de la viga?



PROB. 5.13.5



Se requiere una teoría más avanzada para el análisis y diseño de vigas compuestas y vigas con secciones transversales asimétricas.

6

Esfuerzos en vigas (temas avanzados)

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideraremos una variedad de temas avanzados relacionados con las vigas en cortante y flexión con secciones transversales arbitrarias. Primero, en la sección 6.2 se analizan los esfuerzos y las deformaciones unitarias en las *vigas compuestas*; es decir, vigas fabricadas con más de un material. En primer lugar, ubicamos el eje neutro y luego encontramos la fórmula de la flexión para una viga compuesta hecha con dos materiales diferentes. Después, en la sección 6.3 estudiamos el *método de la sección transformada* como un procedimiento alternativo para analizar los esfuerzos flexionantes en una viga compuesta. A continuación estudiamos la flexión de vigas doblemente simétricas sometidas sólo a *cargas inclinadas* con una línea de acción en el centroide de la sección transversal (sección 6.4). En este caso hay momentos flexionantes (M_y, M_z) con respecto a cada uno de los ejes principales de la sección transversal, y el eje neutro ya no es perpendicular al plano longitudinal que contiene las cargas aplicadas. Se obtienen los esfuerzos normales finales superponiendo los esfuerzos calculados con las fórmulas de la flexión para cada uno de los ejes separados de la sección transversal. Enseguida investigamos el caso general de vigas asimétricas en flexión pura y se elimina la restricción de al menos un eje de simetría en la sección transversal (sección 6.5). Continuamos con el desarrollo de un procedimiento general para analizar una viga asimétrica sometida a cualquier momento flexionante M descompuesto en componentes a lo largo de los ejes centroidales principales de la sección transversal. Por supuesto, las vigas simétricas son casos especiales de las vigas asimétricas y, por tanto, los análisis también se aplican a vigas simétricas. Si la restricción de flexión pura se elimina y se permiten cargas transversales, observamos que éstas deben actuar en el *centro de cortante* de la sección transversal de manera que se pueda evitar el torcimiento de la viga con respecto a un eje longitudinal (secciones 6.6 y 6.9). Las distribuciones de los esfuerzos cortantes en elementos de las secciones transversales de una variedad de vigas con sección abierta y pared delgada (como canales, ángulos y perfiles Z) se calculan y luego se utilizan para ubicar el centro de cortante para cada perfil transversal particular (secciones 6.7, 6.8 y 6.9). Como tema final en el capítulo, se describe la flexión de vigas elastoplásticas en las que los esfuerzos normales van más allá del rango de comportamiento lineal elástico (sección 6.10).

El capítulo 6 está organizado como sigue:

**Temas avanzados*

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo continuamos nuestro estudio de la flexión de vigas al examinar varios temas especializados, los cuales se basan en temas fundamentales analizados en el capítulo 5; tópicos como curvatura, esfuerzos normales en vigas (incluida la fórmula de la flexión) y esfuerzos cortantes en vigas. Sin embargo, ya no requerimos que las vigas estén compuestas sólo de un material; también eliminaremos la restricción de que las vigas tengan un plano de simetría en el cual se deben aplicar las cargas transversales. Por último, ampliaremos el desempeño en el rango de comportamiento inelástico de vigas hechas de materiales elastoplásticos.

Más adelante, en los capítulos 9 y 10 estudiaremos dos temas adicionales de importancia fundamental en el diseño de vigas; deflexión de vigas y vigas estáticamente indeterminadas.

6.2 VIGAS COMPUESTAS

Las vigas fabricadas con más de un material se llaman **vigas compuestas**. Algunos ejemplos son las vigas bimetálicas (como las empleadas en los termostatos), tubos recubiertos con plástico y vigas de madera con placas de refuerzo de acero (consulte la figura 6.1).

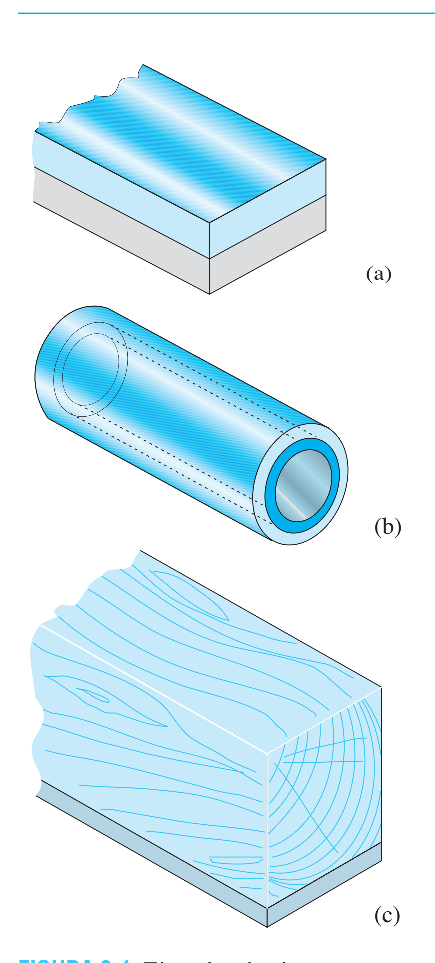


FIGURA 6.1 Ejemplos de vigas compuestas (a) viga bimetálica, (b) tubo de acero recubierto con plástico y (c) viga de madera reforzada con una placa de acero.

En años recientes se han desarrollado muchos otros tipos de vigas compuestas, principalmente para ahorrar material y reducir peso. Por ejemplo, las **vigas sándwich** se usan ampliamente en las industrias de aviación y aeroespacial, donde se requiere peso ligero, alta resistencia y rigidez. Algunos objetos comunes como esquíes, puertas, paneles de muros, estantes y cajas de cartón también se fabrican como elementos sándwich.

Una viga sándwich ordinaria (figura 6.2) consiste en dos *tapas* delgadas de material con resistencia relativamente alta (como el aluminio) separadas por un *núcleo* grueso de material ligero y baja resistencia. Como las tapas están a la mayor distancia del eje neutro (donde los esfuerzos de flexión son mayores) funcionan de alguna forma como los patines de una viga I. El núcleo sirve como un relleno y proporciona soporte para las tapas, estabilizándolas contra arrugamiento o pandeo. Con frecuencia se utilizan como núcleos plásticos y espumas de peso ligero, así como paneles y corrugaciones.

Deformaciones unitarias y esfuerzos

Las deformaciones unitarias en vigas compuestas se determinan a partir del mismo axioma básico que empleamos para encontrar las deformaciones unitarias en vigas hechas con un solo un material; es decir, las secciones transversales permanecen planas durante la flexión. Este axioma es válido para flexión pura sin importar la naturaleza del material (consulte la sección 5.4). Por tanto, las deformaciones unitarias longitudinales ϵ_x en una viga compuesta varían linealmente desde la parte superior hasta la inferior de la viga, como se expresa en la ecuación (5.4), que repetimos a continuación:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \tag{6.1}$$

En esta ecuación, y es la distancia desde el eje neutro, ρ es el radio de curvatura y κ es la curvatura.

Al iniciar con la distribución lineal de las deformaciones unitarias representada por la ecuación (6.1), podemos determinar las deformaciones unitarias y los esfuerzos en cualquier viga compuesta. Para mostrar cómo se lleva a cabo esto, considere la viga compuesta que se muestra en la figura 6.3. Esta viga consiste en dos materiales, identificados 1 y 2 en la figura, que están pegados firmemente de manera que actúan como una sola viga sólida.

Al igual que en nuestros análisis anteriores de vigas (capítulo 5), suponemos que el plano xy es de simetría y que el plano xz es el neutro de la viga. Sin embargo, el eje neutro (el eje z en la figura 6.3b) *no* pasa por el centroide del área de la sección transversal cuando la viga está hecha con dos materiales diferentes.

Si la viga se flexiona con curvatura positiva, las deformaciones unitarias ϵ_x variarán como se muestra en la figura 6.3c, donde ϵ_A es la deformación unitaria por compresión en la parte superior de la viga, ϵ_B es la deformación unitaria por tensión en la parte inferior y ϵ_C es la deformación unitaria en la superficie de contacto de los dos materiales. Por supuesto, la deformación unitaria es cero en el eje neutro (el eje z).

Los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal se pueden obtener a partir de las deformaciones unitarias empleando las relaciones esfuerzo-deformación unitaria para los dos materiales. Supongamos que los dos materiales se comportan de una manera linealmente elástica de manera que es valida la ley de Hooke para esfuerzo uniaxial. Entonces, los esfuerzos en los materiales se obtienen multiplicando las deformaciones unitarias por el módulo de elasticidad apropiado.

Si denotamos los módulos de elasticidad para los materiales 1 y 2 con E_1 y E_2, respectivamente, y también suponemos que $E_2 > E_1$, obtenemos el diagrama de esfuerzos que se muestra en la figura 6.3d. El esfuerzo de compresión en la parte superior de la viga es $\sigma_A = E_1\epsilon_A$ y el esfuerzo de tensión en la parte inferior es $\sigma_B = E_2\epsilon_B$.

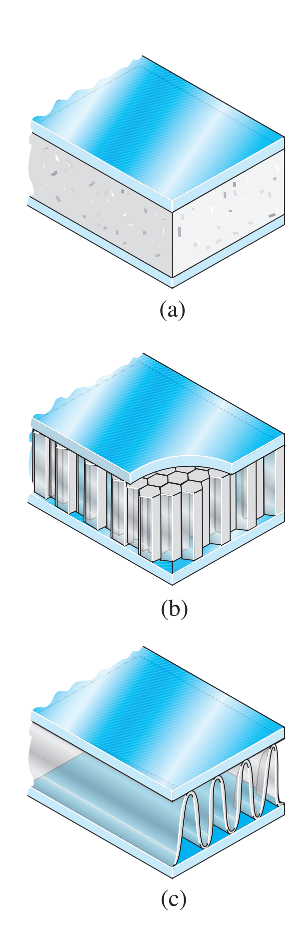


FIGURA 6.2 Vigas sándwich: (a) núcleo plástico, (b) núcleo de panal y (c) núcleo corrugado.

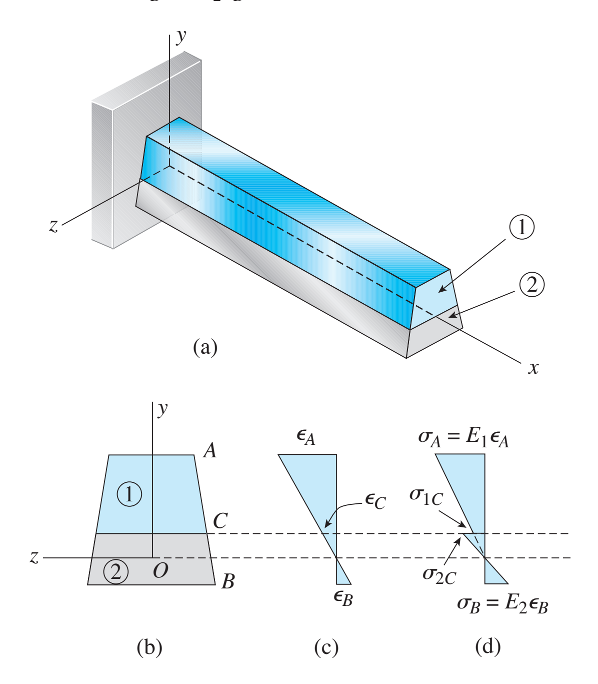


FIGURA 6.3 (a) Viga compuesta de dos materiales, (b) sección transversal de la viga, (c) distribución de deformaciones unitarias ϵ_x en toda la altura de la viga y (d) distribución de esfuerzos σ_x en la viga para el caso en que $E_2 > E_1$.

En la superficie de contacto (C) los esfuerzos en los dos materiales son diferentes debido a que sus módulos son distintos. En el material 1 el esfuerzo es $\sigma_{1C} = E_1\epsilon_C$ y en el material 2 es $\sigma_{2C} = E_2\epsilon_C$.

Al utilizar la ley de Hooke y la ecuación (6.1), podemos expresar los esfuerzos normales a una distancia y del eje neutro en términos de la curvatura:

$$\sigma_{x1} = -E_1\kappa y \qquad \sigma_{x2} = -E_2\kappa y \tag{6.2a,b}$$

en donde σ_{x1} es el esfuerzo en el material 1 y σ_{x2} es el esfuerzo en el material 2. Con la ayuda de estas ecuaciones, podemos localizar el eje neutro y obtener la relación momento-curvatura.

Eje neutro

La posición del eje neutro (el eje z) se determina a partir de la condición de que la fuerza axial resultante que actúa sobre la sección transversal es cero (consulte la sección 5.5); por tanto,

$$\int_1 \sigma_{x1}\,dA + \int_2 \sigma_{x2}\,dA = 0 \tag{a}$$

donde se entiende que la primera integral se debe evaluar sobre el área de la sección transversal del material 1 y la segunda integral se evalúa sobre el área de la sección transversal del material 2. Al reemplazar σ_{x1} y σ_{x2} en la ecuación anterior con sus expresiones de las ecuaciones (6.2a) y (6.2b), obtenemos

$$-\int_1 E_1\kappa y\,dA - \int_2 E_2\kappa y\,dA = 0$$

Como la curvatura es una constante en cualquier sección transversal dada, no se involucra en las integraciones y se puede cancelar en la ecuación; por tanto, la ecuación para ubicar el **eje neutro** se convierte en

$$E_1\int_1 y\,dA + E_2\int_2 y\,dA = 0 \tag{6.3}$$

Las integrales en esta ecuación representan los momentos estáticos de las dos partes del área de la sección transversal con respecto al eje neutro. (Si hay más de dos materiales, una condición poco común, se requieren términos adicionales en la ecuación.)

La ecuación (6.3) es una forma generalizada de la ecuación análoga para una viga de un material (ecuación 5.8). Los detalles del procedimiento para localizar el eje neutro con la ayuda de la ecuación (6.3) se ilustran más adelante en el ejemplo 6.1.

Si la sección transversal de una viga es **doblemente simétrica,** como en el caso de una viga de madera cubierta con placas de acero en la parte superior e inferior (figura 6.4), el eje neutro se ubica a la mitad de la altura de la sección transversal y por tanto la ecuación (6.3) no es necesaria.

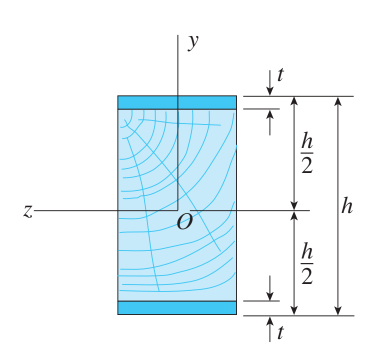


FIGURA 6.4 Sección transversal doblemente simétrica.

Relación momento-curvatura

La relación momento-curvatura para una viga compuesta de dos materiales (figura 6.3) se puede determinar a partir de la condición de que el momento resultante de los esfuerzos flexionantes sea igual al momento flexionante M que actúa en la sección transversal. Siguiendo los mismos pasos para una viga de un solo material (consulte las ecuaciones 5.9 a 5.12) y también empleando las ecuaciones (6.2a) y (6.2b), obtenemos

$$M = -\int_A \sigma_x y\,dA = -\int_1 \sigma_{x1} y\,dA - \int_2 \sigma_{x2} y\,dA$$
$$= \kappa E_1 \int_1 y^2 dA + \kappa E_2 \int_2 y^2 dA \quad \text{(b)}$$

Esta ecuación se puede escribir en forma más simple

$$M = \kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2) \quad (6.4)$$

en donde I_1 e I_2 son los momentos de inercia con respecto al eje neutro (el eje z) de las áreas de las secciones transversales de los materiales 1 y 2, respectivamente. Observe que $I = I_1 + I_2$, donde I es el momento de inercia de *toda* el área de la sección transversal con respecto al eje neutro.

Ahora de la ecuación (6.4) puede despejarse la curvatura en términos del momento flexionante:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (6.5)$$

Esta ecuación es la **relación momento-curvatura** para una viga de dos materiales (compare con la ecuación 5.12 para una viga de un material). El denominador en el lado derecho es la **rigidez a la flexión** de la viga compuesta.

Esfuerzos normales (fórmulas de flexión)

Los esfuerzos normales (o esfuerzos de flexión) en la viga se obtienen al sustituir la expresión para la curvatura (ecuación 6.5) en las expresiones σ_{x1} y σ_{x2} (ecuaciones 6.2a y 6.2b); por tanto,

$$\sigma_{x1} = -\frac{MyE_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \qquad \sigma_{x2} = -\frac{MyE_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (6.6a,b)$$

Estas expresiones, conocidas como **fórmulas de la flexión para una viga compuesta**, proporcionan los esfuerzos normales en los materiales 1 y 2, respectivamente. Si los dos materiales tienen módulos de elasticidad iguales ($E_1 = E_2 = E$), entonces las dos ecuaciones se reducen a la fórmula de la flexión para una viga de un material (ecuación 5.13).

El análisis de vigas compuestas, utilizando las ecuaciones (6.3) a (6.6), se ilustra en los ejemplos 6.1 y 6.2 al final de esta sección.

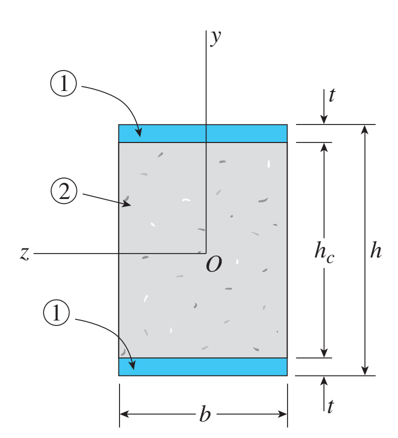


FIGURA 6.5 Sección transversal de una viga sándwich con dos ejes de simetría (sección transversal doblemente simétrica).

Teoría aproximada para la flexión de vigas sándwich

Las vigas sándwich con secciones transversales doblemente simétricas y compuestas de dos materiales linealmente elásticos (figura 6.5) se pueden analizar para la flexión utilizando las ecuaciones (6.5) y (6.6), como describió con anterioridad. Sin embargo, también podemos desarrollar una teoría aproximada para la flexión de vigas sándwich introduciendo algunas suposiciones simplificadoras.

Si el material de las tapas (material 1) tiene un módulo de elasticidad mucho mayor que el material del núcleo (material 2), es razonable ignorar los esfuerzos normales en el núcleo y suponer que las tapas resisten todos los esfuerzos de flexión longitudinal. Esta suposición es equivalente a decir que el módulo de elasticidad E_2 del núcleo es cero. Ante estas condiciones la fórmula de la flexión para el material 2 (ecuación 6.6b) da $\sigma_{x2} = 0$ (como se esperaba) y la fórmula de la flexión para el material 1 (ecuación 6.6a) da

$$\sigma_{x1} = -\frac{My}{I_1} \tag{6.7}$$

que es similar a la fórmula ordinaria de la flexión (ecuación 5.13). La cantidad I_1 es el momento de inercia de las dos tapas evaluado con respecto al eje neutro; por tanto

$$I_1 = \frac{b}{12}\left(h^3 - h_c^3\right) \tag{6.8}$$

en donde b es el ancho de la viga, h es la altura total de la viga y h_c es la altura del núcleo. Observe que $h_c = h - 2t$ donde t es el espesor de las tapas.

Los esfuerzos normales máximos en la viga sándwich ocurren en la parte superior e inferior de la sección transversal donde $y = h/2$ y $-h/2$, respectivamente. Por tanto, de la ecuación (6.7), obtenemos

$$\sigma_{\text{arriba}} = -\frac{Mh}{2I_1} \qquad \sigma_{\text{abajo}} = \frac{Mh}{2I_1} \tag{6.9a,b}$$

Si el momento flexionante M es positivo, la tapa superior está en compresión y la tapa inferior en tensión. (Estas ecuaciones son conservadoras debido a que dan esfuerzos en las tapas que son mayores que los obtenidos con las ecuaciones 6.6a y 6.6b.)

Si las tapas son delgadas comparadas con el espesor del núcleo (es decir, si t es pequeño comparado con h_c), podemos ignorar los esfuerzos cortantes en las tapas y suponer que el núcleo soporta todos los esfuerzos cortantes. En estas condiciones el esfuerzo cortante promedio y la deformación unitaria promedio en el núcleo son, respectivamente,

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{bh_c} \qquad \gamma_{\text{prom}} = \frac{V}{bh_c G_c} \tag{6.10a,b}$$

en donde V es la fuerza cortante que actúa sobre la sección transversal y G_c es el módulo de elasticidad en cortante para el material del núcleo. (Aunque el esfuerzo cortante máximo y la deformación unitaria máxima por cortante son mayores que los valores promedio, con frecuencia se utilizan los valores promedio para fines de diseño.)

Limitaciones

En todo el análisis anterior sobre vigas compuestas supusimos que los dos materiales seguían la ley de Hooke y que las dos partes de la viga estaban unidas adecuadamente de manera que actuaban como una sola unidad. Por tanto, nuestro análisis es muy idealizado y sólo representa un primer paso para comprender el comportamiento de las vigas compuestas y de los materiales compuestos. Los métodos para tratar con materiales no homogéneos y no lineales, esfuerzos de adherencia entre las partes, esfuerzos cortantes sobre las secciones transversales, pandeo de las tapas y otros temas afines se tratan en libros de referencia que tratan específicamente de la construcción compuesta.

Las **vigas de concreto reforzado** son uno de los tipos más complejos de construcción compuesta (figura 6.6) y su comportamiento difiere de manera significativa del de las vigas compuestas analizadas en esta sección. El concreto es resistente en compresión pero extremadamente débil en tensión. En consecuencia, es usual despreciar por completo su resistencia a la tensión. Ante estas condiciones, *las fórmulas dadas en esta sección no son aplicables*.

Además, la mayor parte de las vigas de concreto reforzado no se diseñan con base en un comportamiento linealmente elástico, sino que se emplean métodos de diseño más realistas (con base en capacidad de carga en lugar de esfuerzos permisibles). El diseño de elementos de concreto reforzado es un tema muy especializado que se presenta en cursos y libros de texto dedicados únicamente a ese tema.

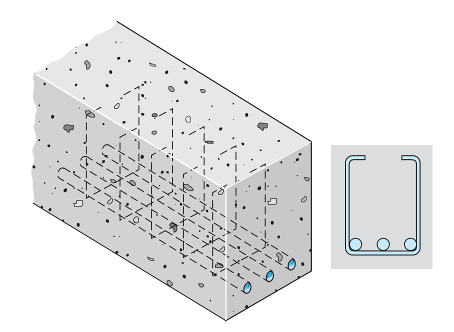


FIGURA 6.6 Viga de concreto reforzado con varillas de refuerzo longitudinal y estribos verticales.

Ejemplo 6.1

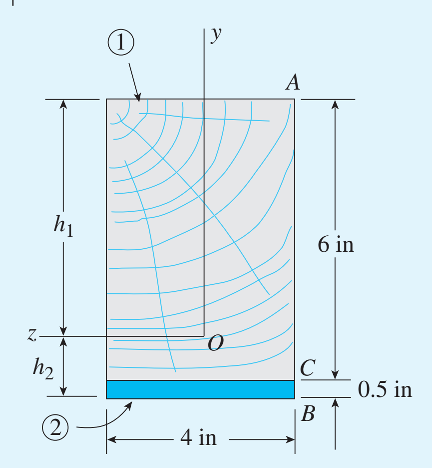


FIGURA 6.7 Ejemplo 6.1. Sección transversal de una viga compuesta de madera y acero.

Una viga compuesta (figura 6.7) está construida con una viga de madera (4.0 in × 6.0 in de dimensiones reales) y una placa de acero de refuerzo (4.0 in ancho y 0.5 in espesor). La madera y el acero están firmemente unidos para actuar como una sola viga. La viga está sometida a un momento flexionante positivo $M = 60$ k-in.

Calcule los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la madera (material 1) y los esfuerzos máximo y mínimo de tensión en el acero (material 2) si $E_1 = 1500$ ksi y $E_2 = 30{,}000$ ksi.

Solución

Eje neutro. El primer paso en el análisis es ubicar el eje neutro de la sección transversal. Para ese fin denotamos las distancias desde el eje neutro hasta la parte superior e inferior de la viga como h_1 y h_2, respectivamente. Para obtener estas distancias utilizamos la ecuación (6.3). Las integrales en esa ecuación se evalúan tomando los momentos estáticos de las áreas 1 y 2 con respecto al eje z, como sigue:

$$\int_1 y\,dA = \bar{y}_1 A_1 = (h_1 - 3 \text{ in})(4 \text{ in} \times 6 \text{ in}) = (h_1 - 3 \text{ in})(24 \text{ in}^2)$$

$$\int_2 y\,dA = \bar{y}_2 A_2 = -(6.25 \text{ in} - h_1)(4 \text{ in} \times 0.5 \text{ in}) = (h_1 - 6.25 \text{ in})(2 \text{ in}^2)$$

en donde A_1 y A_2 son las áreas de las partes 1 y 2 de la sección transversal, y_1 y y_2 son las coordenadas y de los centroides de las áreas respectivas y h_1 tiene unidades de pulgadas.

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (6.3) da la ecuación para ubicar el eje neutro, que es

$$E_1 \int_1 y\,dA + E_2 \int_2 y\,dA = 0$$

o bien

$$(1500 \text{ ksi})(h_1 - 3 \text{ in})(24 \text{ in}^2) + (30{,}000 \text{ ksi})(h_1 - 6.25 \text{ in})(2 \text{ in}^2) = 0$$

Al resolver esta ecuación, obtenemos la distancia h_1 desde el eje neutro hasta la parte superior de la viga:

$$h_1 = 5.031 \text{ in}$$

Además, la distancia h_2 desde el eje neutro hasta la parte inferior de la viga es

$$h_2 = 6.5 \text{ in} - h_1 = 1.469 \text{ in}$$

De esta manera se establece la posición del eje neutro.

Momentos de inercia. Los momentos de inercia I_1 e I_2 de las áreas A_1 y A_2 con respecto al eje neutro se pueden determinar empleando el teorema del eje paralelo (consulte la sección 12.5 del capítulo 12). Comenzando con el área 1 (figura 6.7), obtenemos

$$I_1 = \frac{1}{12}(4 \text{ in})(6 \text{ in})^3 + (4 \text{ in})(6 \text{ in})(h_1 - 3 \text{ in})^2 = 171.0 \text{ in}^4$$

De manera similar, para el área 2 obtenemos

$$I_2 = \frac{1}{12}(4 \text{ in})(0.5 \text{ in})^3 + (4 \text{ in})(0.5 \text{ in})(\ h_2 - 0.25 \text{ in})^2 = 3.01 \text{ in}^4$$

Para verificar estos cálculos, podemos determinar el momento de inercia I de toda el área de la sección transversal con respecto al eje z como se muestra:

$$I = \frac{1}{3}(4 \text{ in})\, h_1^3 + \frac{1}{3}(4 \text{ in})\, h_2^3 = 169.8 + 4.2 = 174.0 \text{ in}^4$$

lo que concuerda con la suma de I_1 e I_2.

Esfuerzos normales. Los esfuerzos en los materiales 1 y 2 se calculan a partir de las fórmulas de la flexión para vigas compuestas (ecuaciones 6.6a y b). El esfuerzo de compresión máximo en el material 1 ocurre en la parte superior de la viga (A) donde $y = h_1 = 5.031$ in. Al denotar este esfuerzo con σ_{1A} y emplear la ecuación (6.6a) se obtiene

$$\sigma_{1A} = -\frac{Mh_1E_1}{E_1I_1 + E_2I_2}$$

$$= -\frac{(60 \text{ k-in})(5.031 \text{ in})(1500 \text{ ksi})}{(1500 \text{ ksi})(171.0 \text{ in}^4) + (30{,}000 \text{ ksi})(3.01 \text{ in}^4)} = -1310 \text{ psi}$$

El esfuerzo de tensión máximo en el material 1 se tiene en el plano de contacto entre los dos materiales (C) donde $y = -(h_2 - 0.5 \text{ in}) = -0.969$ in. Al continuar como en los cálculos anteriores, obtenemos

$$\sigma_{1C} = -\frac{(60 \text{ k-in})(-0.969 \text{ in})(1500 \text{ ksi})}{(1500 \text{ ksi})(171.0 \text{ in}^4) + (30\ 000 \text{ ksi})(3.01 \text{ in}^4)} = 251 \text{ psi}$$

Por tanto, hemos encontrado los esfuerzos máximos de compresión y tensión en la madera.

La placa de acero (material 2) está ubicada debajo del eje neutro y, por tanto, está completamente en tensión. El esfuerzo de tensión máximo sucede en la parte inferior de la viga (B) donde $y = -h_2 = -1.469$ in. Por tanto, de la ecuación (6.6b) obtenemos

$$\sigma_{2B} = -\frac{M(-h_2)E_2}{E_1I_1 + E_2I_2}$$

$$= -\frac{(60 \text{ k-in})(\ -1.469 \text{ in})(30{,}000 \text{ ksi})}{(1500 \text{ ksi})(171.0 \text{ in}^4) + (30{,}000 \text{ ksi})(3.01 \text{ in}^4)} = 7620 \text{ psi}$$

El esfuerzo de tensión mínimo en el material 2 se tiene en el plano de contacto (C) donde $y = -0.969$ in. Por tanto,

$$\sigma_{2C} = -\frac{(60 \text{ k-in})(\ -0.969 \text{ in})(30{,}000 \text{ ksi})}{(1500 \text{ ksi})(171.0 \text{ in}^4) + (30{,}000 \text{ ksi})(3.01 \text{ in}^4)} = 5030 \text{ psi}$$

Estos son los esfuerzos máximo y mínimo de tensión en el acero.

Nota: en el plano de contacto la razón entre el esfuerzo en el acero y el esfuerzo en la madera es

$$\sigma_{2C}/\sigma_{1C} = 5030 \text{ psi}/251 \text{ psi} = 20$$

que es igual a la razón E_2/E_1 de los módulos de elasticidad (como se esperaba). Si bien las deformaciones unitarias en el acero y la madera son iguales en el plano de contacto, los esfuerzos son diferentes debido a los módulos distintos.

Ejemplo 6.2

Una viga sándwich con tapas de aluminio con un núcleo de plástico (figura 6.8) está sometida a un momento flexionante $M = 3.0$ kN·m. El espesor de las tapas es $t = 5$ mm y su módulo de elasticidad es $E_1 = 72$ GPa. La altura del núcleo de plástico es $h_c = 150$ mm y su módulo de elasticidad es $E_2 = 800$ MPa. Las dimensiones totales de la viga son $h = 160$ mm y $b = 200$ mm.

Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en las tapas y el núcleo empleando: (a) la teoría general para vigas compuestas y (b) la teoría aproximada para vigas sándwich.

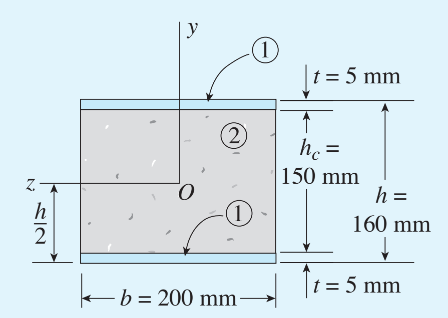


FIGURA 6.8 Ejemplo 6.2. Sección transversal de una viga sándwich con tapas de aleación de aluminio y núcleo de plástico.

Solución

Eje neutro. Como la sección transversal es doblemente simétrica, el eje neutro (eje x en la figura 6.8) está ubicado a la mitad de la altura.

Momentos de inercia. El momento de inercia I_1 de las áreas de las secciones transversales de las tapas (con respecto al eje z) es

$$I_1 = \frac{b}{12}(h^3 - h_c^3) = \frac{200 \text{ mm}}{12}\left[(160 \text{ mm})^3 - (150 \text{ mm})^3\right] = 12.017 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

y el momento de inercia I_2 del núcleo de plástico es

$$I_2 = \frac{b}{12}(h_c^3) = \frac{200 \text{ mm}}{12}(150 \text{ mm})^3 = 56.250 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Como verificación de estos resultados, observe que el momento de inercia de toda el área de la sección transversal con respecto al eje z ($I = bh^3/12$) es igual a la suma de I_1 e I_2.

(a) *Esfuerzos normales calculados con la teoría general para vigas compuestas*. Para calcular estos esfuerzos, empleamos las ecuaciones (6.6a) y (6.6b). Como punto preliminar, evaluaremos el término en el denominador de estas ecuaciones (es decir, la rigidez a la flexión de la viga compuesta):

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = (72 \text{ GPa})(12.017 \times 10^6 \text{ mm}^4) + (800 \text{ MPa})(56.250 \times 10^6 \text{ mm}^4)$$
$$= 910{,}200 \text{ N·m}^2$$

Los esfuerzos máximos de tensión y compresión en las tapas de aluminio se determinan con la ecuación (6.6a):

$$(\sigma_1)_{\text{máx}} = \pm \frac{M(h/2)(E_1)}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

$$= \pm \frac{(3.0 \text{ kN}\cdot\text{m})(80 \text{ mm})(72 \text{ GPa})}{910\,200 \text{ N}\cdot\text{m}^2} = \pm\, 19.0 \text{ MPa}$$

Las cantidades correspondientes para el núcleo de plástico (de la ecuación 6.6b) son

$$(\sigma_2)_{\text{máx}} = \pm \frac{M(h_c/2)(E_2)}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

$$= \pm \frac{(3.0 \text{ kN}\cdot\text{m})(75 \text{ mm})(800 \text{ MPa})}{910\,200 \text{ N}\cdot\text{m}^2} = \pm\, 0.198 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos máximos en las caras son 96 veces mayores que los esfuerzos máximos en el núcleo, debido principalmente a que el módulo de elasticidad del aluminio es 90 veces mayor que el del plástico.

(b) *Esfuerzos normales calculados con la teoría aproximada para vigas compuestas*. En la teoría aproximada ignoramos los esfuerzos normales en el núcleo y suponemos que las caras transmiten todo el momento flexionante. Luego, los esfuerzos máximos de tensión y compresión en las caras se pueden encontrar con las ecuaciones (6.9a) y (6.9b), como sigue:

$$(\sigma_1)_{\text{máx}} = \pm \frac{\text{Mh}}{2\text{I}_1} = \pm \frac{(3.0 \text{ kN}\cdot\text{m})(80 \text{ mm})}{12.017 \times 10^6 \text{ mm}^4} = \pm\, 20.0 \text{ MPa}$$

Como se esperaba, la teoría aproximada proporciona esfuerzos ligeramente mayores en las caras que la teoría general para vigas compuestas.

6.3 MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

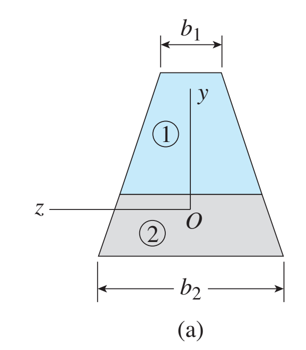
El método de la sección transformada es un procedimiento alternativo para analizar esfuerzos de flexión en una viga compuesta. El método se basa en las teorías y ecuaciones desarrolladas en la sección anterior, y por lo tanto está sujeto a las mismas limitaciones (por ejemplo, sólo es válido para materiales linealmente elásticos) y proporciona los mismos resultados. Si bien el método de la sección transformada no reduce el trabajo de cálculo, muchos diseñadores consideran que proporciona una forma conveniente para visualizar y organizar los cálculos.

El método consiste en transformar la sección transversal de una viga compuesta en una sección transversal equivalente de una viga imaginaria que está hecha sólo con un material. Esta nueva sección transversal se denomina **sección transformada.** Luego la viga imaginaria con la sección

transformada se analiza de la manera usual para una viga de un material. Como paso final, los esfuerzos en la viga transformada se convierten en los de la viga original.

Eje neutro y sección transformada

Para que la viga transformada sea equivalente a la viga original, *su eje neutro debe estar ubicado en el mismo lugar y su capacidad de resistencia de momento debe ser la misma*. Para demostrar cómo se cumplen estos requisitos, considere de nuevo una viga compuesta de dos materiales (figura 6.9a). El **eje neutro** de la sección transversal se obtiene con la ecuación (6.3), que se repite a continuación:



$$E_1 \int_1 y\,dA + E_2 \int_2 y\,dA = 0 \qquad (6.11)$$

En esta ecuación, las integrales representan los momentos estáticos de las dos partes de la sección transversal con respecto al eje neutro.

Ahora introducimos la notación

$$n = \frac{E_2}{E_1} \qquad (6.12)$$

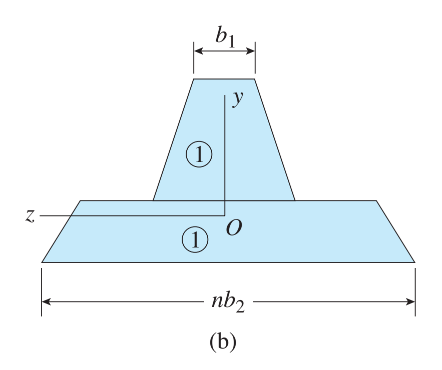


FIGURA 6.9 Viga compuesta de dos materiales: (a) sección transversal real y (b) sección transformada que consiste sólo del material 1.

donde n es la **razón modular**. Con esta notación, podemos rescribir la ecuación (6.11) en la siguiente forma:

$$\int_1 y\,dA + \int_2 yn\,dA = 0 \qquad (6.13)$$

Como las ecuaciones (6.11) y (6.13) son equivalentes, la ecuación anterior muestra que el eje neutro no cambia si cada elemento de área dA en el material 2 se multiplica por el factor n, siempre que la coordenada y para cada elemento de área no cambie.

Por tanto, podemos crear una sección transversal que consista sólo de dos partes: (1) área 1 con sus dimensiones sin cambiar y (2) área 2 con su *ancho* (es decir, su dimensión paralela al eje neutro) multiplicada por n. Esta nueva sección transversal (la sección transformada) se muestra en la figura 6.9b para el caso en que $E_2 > E_1$ (y por tanto $n > 1$). Su eje neutro está en la misma posición que el eje neutro de la viga original. (Observe que todas las dimensiones perpendiculares al eje neutro permanecen iguales.)

Puesto que el esfuerzo en el material (para una deformación unitaria dada) es proporcional al módulo de elasticidad ($\sigma = E\epsilon$), observamos que al multiplicar el ancho del material 2 por $n = E_2/E_1$ equivale a transformarlo en el material 1. Por ejemplo, suponga que $n = 10$. Entonces, el área de la parte 2 de la sección transversal ahora es 10 veces más ancho que antes.

Si imaginamos que esta parte de la viga ahora es el material 1, vemos que soportará la misma fuerza que antes debido a que su módulo se *reduce* por un factor de 10 (de E_2 a E_1) al mismo tiempo que su área se *aumenta* por un factor de 10. Por tanto, la sección nueva (la sección transformada) consiste sólo de material 1.

Relación momento-curvatura

La *relación momento-curvatura* para la viga transformada puede ser la misma que para la viga original. Para demostrar que en efecto este es el caso, observamos que los esfuerzos en la viga transformada (ya que consiste sólo de material 1) están dados por la ecuación (5.7) de la sección 5.5:

$$\sigma_x = -E_1 \kappa y$$

Al utilizar esta ecuación y también siguiendo el mismo procedimiento que para la viga de un material (consulte la sección 5.5), podemos obtener la relación momento-curvatura para la viga transformada:

$$M = -\int_A \sigma_x y\, dA = -\int_1 \sigma_x y\, dA - \int_2 \sigma_x y\, dA$$

$$= E_1 \kappa \int_1 y^2 dA + E_1 \kappa \int_2 y^2 dA = \kappa(E_1 I_1 + E_1 n I_2)$$

o

$$M = \kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2) \qquad (6.14)$$

Esta ecuación es la misma que la ecuación (6.4) lo que demuestra que la relación momento-curvatura para la viga transformada es igual que la de la viga original.

Esfuerzos normales

Como la viga transformada consiste sólo de un material, los *esfuerzos normales* (o *esfuerzos de flexión*) se pueden determinar con la fórmula estándar de la flexión (ecuación 5.13). Por tanto, los esfuerzos normales en la viga transformada para el material 1 (figura 6.9b) son

$$\sigma_{x1} = -\frac{My}{I_T} \qquad (6.15)$$

donde I_T es el momento de inercia de la sección transformada con respecto al eje neutro. Al sustituir en esta ecuación, podemos calcular los esfuerzos en cualquier punto de la viga *transformada*. (Como se explica más adelante, los esfuerzos en la viga transformada concuerdan con los de la viga original en la parte de ésta que consiste de material 1; sin embargo, en la parte de la viga original que consiste de material 2, los esfuerzos son diferentes de los de la viga transformada.)

Es fácil verificar la ecuación (6.15) al observar que el momento de inercia de la sección transformada (figura 6.9b) está relacionado con el momento de inercia de la sección original (figura 6.9a) mediante la siguiente relación:

$$I_T = I_1 + nI_2 = I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_2 \tag{6.16}$$

Al sustituir esta expresión por I_T en la ecuación (6.15) da

$$\sigma_{x1} = -\frac{MyE_1}{E_1I_1 + E_2I_2} \tag{a}$$

que es la misma que la ecuación (6.6a), demostrando así que los esfuerzos en el material 1 en la viga original son iguales que los esfuerzos en la parte correspondiente de la viga transformada.

Como se mencionó con anterioridad, los esfuerzos en el material 2 en la viga original *no* son iguales que los esfuerzos en la parte correspondiente de la viga transformada. En cambio, los esfuerzos en la viga transformada (ecuación 6.15) se deben multiplicar por la razón modular n para obtener los esfuerzos en el material 2 de la viga original:

$$\sigma_{x2} = -\frac{My}{I_T} n \tag{6.17}$$

Podemos verificar esta fórmula observando que cuando la ecuación (6.16) para I_T se sustituye en la ecuación (6.17), obtenemos

$$\sigma_{x2} = -\frac{MynE_1}{E_1I_1 + E_2I_2} = -\frac{MyE_2}{E_1I_1 + E_2I_2} \tag{b}$$

que es igual a la ecuación (6.6b).

Comentarios generales

En este análisis del método de la sección transformada elegimos transformar la viga original en una viga formada por completo de material 1. También es posible transformar la viga en el material 2. En ese caso los esfuerzos en la viga original en el material 2 serán iguales que los esfuerzos en la parte correspondiente de la viga transformada. Sin embargo, los esfuerzos en el material 1 en la viga original se deben obtener multiplicando los esfuerzos en la parte correspondiente de la viga transformada por la razón modular n, que en este caso se define como $n = E_1/E_2$.

También es posible transformar la viga original en un material que tenga cualquier módulo de elasticidad arbitrario E, en cuyo caso todas las partes de la viga se deben transformar en el material ficticio. Por supuesto, los cálculos son más simples si transformamos en uno de los materiales originales. Por último, con un poco de ingenuidad es posible ampliar el método de la sección transformada a vigas compuestas por más de dos materiales.

Ejemplo 6.3

La viga compuesta que se muestra en la figura 6.10a está formada de una viga de madera (con dimensiones reales 4.0 in × 6.0 in) y una placa de refuerzo de acero (ancho de 4.0 in y espesor de 0.5 in). La viga está sometida a un momento flexionante positivo $M = 60$ k-in.

Utilizando el método de la sección transformada, calcule los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la madera (material 1) y los esfuerzos máximo y mínimo de tensión en el acero (material 2) si $E_1 = 1500$ ksi y $E_2 = 30{,}000$ ksi.

Nota: es la misma viga que analizó antes en el ejemplo 6.1 de la sección 6.2.

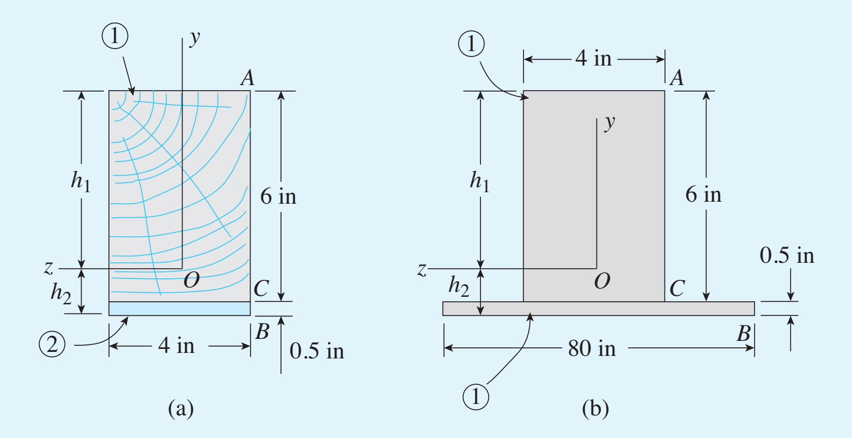


FIGURA 6.10 Ejemplo 6.3. Viga compuesta del ejemplo 6.1 analizada mediante el método de la sección transformada: (a) sección transversal original de la viga y (b) sección transformada (material 1).

Solución

Sección transformada. Transformaremos la viga original en una viga de material 1, lo que significa que la relación modular se define como

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{30{,}000 \text{ ksi}}{1500 \text{ ksi}} = 20$$

La parte de la viga hecha de madera (material 1) no se altera pero la parte hecha de acero (material 2) tiene su ancho multiplicado por la razón modular. Por tanto, el ancho de esta parte de la viga se convierte en

$$n(4 \text{ in}) = 20(4 \text{ in}) = 80 \text{ in}$$

en la sección transformada (figura 6.10b).

Eje neutro. Como la viga transformada consiste sólo de un material, el eje neutro pasa por el centroide del área de la sección transversal. Por tanto, con el borde superior de la sección sirviendo como una línea de referencia y con la distancia y_1 medida positiva hacia abajo, podemos calcular la distancia h_1 hasta el centroide como se muestra:

$$h_1 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(3 \text{ in})(4 \text{ in})(6 \text{ in}) + (6.25 \text{ in})(80 \text{ in})(0.5 \text{ in})}{(4 \text{ in})(6 \text{ in}) + (80 \text{ in})(0.5 \text{ in})}$$

$$= \frac{322.0 \text{ in}^3}{64.0 \text{ in}^2} = 5.031 \text{ in}$$

continúa

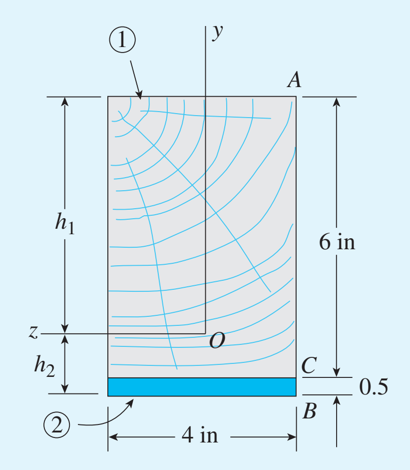
Además, la distancia h_2 desde el borde inferior de la sección hasta el centroide es

$$h_2 = 6.5 \text{ in} - h_1 = 1.469 \text{ in}$$

De esta manera determinamos la ubicación del eje neutro.

Momento de inercia de la sección transformada. Al emplear el teorema del eje paralelo (consulte la sección 12.5 del capítulo 12), podemos calcular el momento de inercia I_T de toda el área de la sección transversal con respecto al eje neutro como sigue:

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{1}{12}(4 \text{ in})(6 \text{ in})^3 + (4 \text{ in})(6 \text{ in})(h_1 - 3 \text{ in})^2 \\ &+ \frac{1}{12}(80 \text{ in})(0.5 \text{ in})^3 + (80 \text{ in})(0.5 \text{ in})(h_2 - 0.25 \text{ in})^2 \\ &= 171.0 \text{ in}^4 + 60.3 \text{ in}^4 = 231.3 \text{ in}^4 \end{aligned}$$



Esfuerzos normales en la madera (material 1). Los esfuerzos en la viga transformada (figura 6.10b) en la parte superior de la sección transversal (A) y en el plano de contacto entre las dos partes (C) son los mismos que en la viga original (figura 6.10a). Estos esfuerzos se pueden determinar a partir de la fórmula de la flexión (ecuación 6.15), como sigue:

$$\sigma_{1A} = -\frac{My}{I_T} = -\frac{(60 \text{ k-in})(5.031 \text{ in})}{231.3 \text{ in}^4} = -1310 \text{ psi}$$

$$\sigma_{1C} = -\frac{My}{I_T} = -\frac{(60 \text{ k-in})(-0.969 \text{ in})}{231.3 \text{ in}^4} = 251 \text{ psi}$$

Estos son los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la madera (material 1) en la viga original. El esfuerzo σ_{1A} es de compresión y el esfuerzo σ_{1C} es de tensión.

Esfuerzos normales en el acero (material 2). Los esfuerzos máximo y mínimo en la placa de acero se determinan multiplicando los esfuerzos correspondientes en la viga transformada por la razón modular n (ecuación 6.17). El esfuerzo máximo ocurre en el borde inferior de la sección transversal (B) y el esfuerzo mínimo se tiene en el plano de contacto (C):

$$\sigma_{2B} = -\frac{My}{I_T}n = -\frac{(60 \text{ k-in})(-1.469 \text{ in})}{231.3 \text{ in}^4}(20) = 7620 \text{ psi}$$

$$\sigma_{2C} = -\frac{My}{I_T}n = -\frac{(60 \text{ k-in})(-0.969 \text{ in})}{231.3 \text{ in}^4}(20) = 5030 \text{ psi}$$

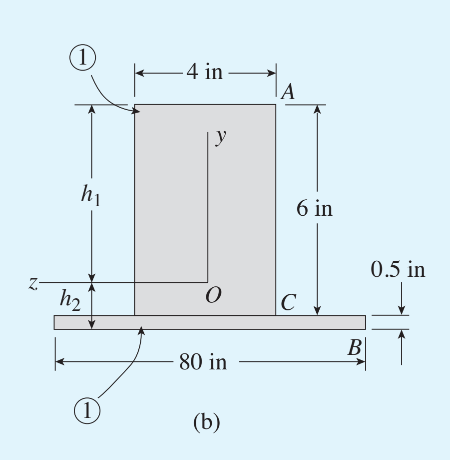


FIGURA 6.10 (Repetida.)

Los dos esfuerzos son de tensión.

Observe que los esfuerzos calculados mediante el método de la sección transformada concuerdan con los determinados en el ejemplo 6.1 por aplicación directa de las fórmulas para una viga compuesta.

6.4 VIGAS DOBLEMENTE SIMÉTRICAS CON CARGAS INCLINADAS

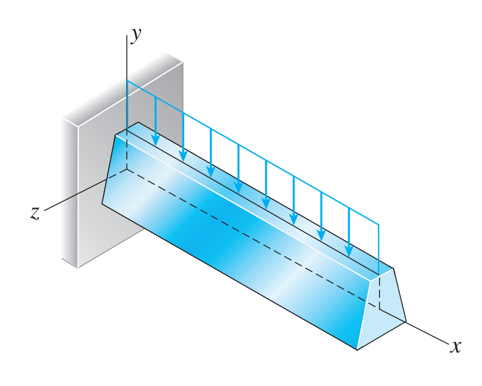


FIGURA 6.11 Viga con carga lateral que actúa en un plano de simetría.

En nuestros estudios anteriores de la flexión, analizamos vigas con un plano de simetría longitudinal (el plano *xy* en la figura 6.11) y que soportaban cargas laterales que actuaban en ese mismo plano. En esas condiciones los esfuerzos flexionantes se pueden obtener con la fórmula de la flexión (ecuación 5.13) siempre que el material sea homogéneo y linealmente elástico.

En esta sección ampliaremos estas ideas y consideraremos lo que sucede cuando la viga está sometida a cargas que no actúan en el plano de simetría, es decir, **cargas inclinadas** (figura 6.12). Limitaremos nuestro análisis a vigas que tienen una sección transversal doblemente simétrica, es decir, los dos planos *xy* y *xz* son planos de simetría. Además, las cargas inclinadas deben actuar en el centroide de la sección transversal para evitar torcimiento de la viga con respecto al eje longitudinal.

Podemos determinar los esfuerzos flexionantes en la viga que se muestra en la figura 6.12 descomponiendo la carga inclinada en dos componentes, una sobre cada plano de simetría. Luego los esfuerzos flexionantes se pueden obtener a partir de la fórmula de la flexión para cada componente de carga actuando por separado y los esfuerzos finales se pueden obtener superponiendo los esfuerzos separados.

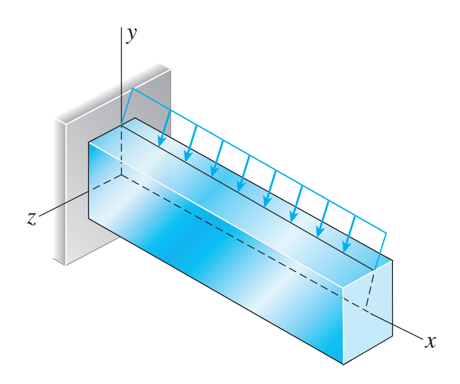


FIGURA 6.12 Viga doblemente simétrica con una carga inclinada.

Convenciones de signos para momentos flexionantes

Como punto preliminar estableceremos convenciones de signos para los momentos flexionantes que actúan sobre secciones transversales de una viga.* Para este fin, cortamos a través de la viga y consideramos un sección transversal característica (figura 6.13). Los momentos flexionantes M_y y M_z que actúan con respecto a los ejes *y* y *z*, respectivamente, están representados como vectores empleando flechas con doble punta. Los momentos son positivos cuando sus vectores apuntan en las direcciones positivas de los ejes correspondientes y la regla de la mano derecha para vectores da el sentido de rotación (indicado por las flechas curvas en la figura).

De la figura 6.13 observamos que un momento flexionante positivo M_y produce compresión en el lado derecho de la viga (el lado *z* negativo) y tensión en el lado izquierdo (el lado *z* positivo). De manera similar, un momento positivo M_z produce compresión en la parte superior de la viga (donde *y* es positiva) y tensión en la parte inferior (donde *y* es negativa). Además, es importante observar que los momentos flexionantes que se muestran en la figura 6.13 actúan sobre la cara *x* positiva de un segmento de la viga, es decir, sobre una cara con su normal hacia fuera en la dirección positiva del eje *x*.

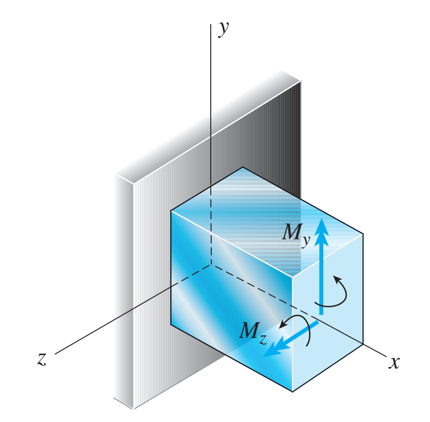


FIGURA 6.13 Convenciones de signos para momentos flexionantes M_y y M_z.

Esfuerzos normales (esfuerzos de flexión)

Los esfuerzos normales asociados con los momentos flexionantes individuales M_y y M_z se obtienen a partir de la fórmula de la flexión (ecuación 5.13). Estos esfuerzos se superponen luego para obtener los esfuerzos pro-

*Los sentidos de los esfuerzos normal y cortante en una viga suelen ser aparentes por inspección de la viga y sus cargas, y por tanto a menudo calculamos esfuerzos ignorando las convenciones de signos y utilizando sólo valores absolutos. Sin embargo, al deducir fórmulas generales necesitamos mantener convenciones de signos rigurosas para evitar ambigüedad en las ecuaciones.

ducidos por los dos momentos simultáneamente. Por ejemplo, considere los esfuerzos en un punto en la sección transversal con coordenadas positivas y y z (punto A en la figura 6.14). Un momento positivo M_y produce tensión en este punto y un momento negativo M_z produce compresión; por tanto, el **esfuerzo normal** en el punto A es

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \tag{6.18}$$

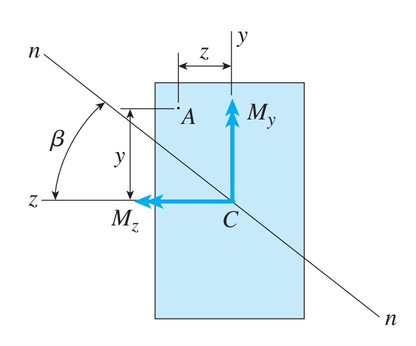


FIGURA 6.14 Sección transversal de una viga sometida a momentos flexionantes M_y y M_z.

en donde I_y e I_z son los momentos de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes y y z, respectivamente. Al utilizar esta ecuación podemos encontrar el esfuerzo normal en cualquier punto en la sección transversal sustituyendo los valores algebraicos apropiados de los momentos y las coordenadas.

Eje neutro

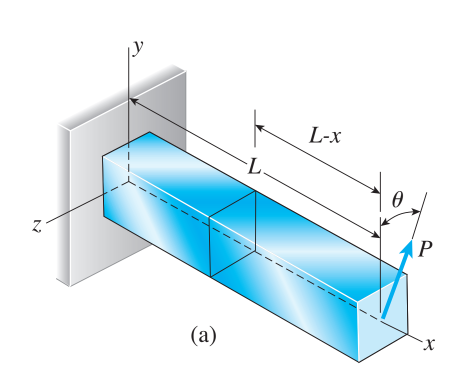
La ecuación del eje neutro se puede determinar igualando el esfuerzo normal σ_x (ecuación 6.18) a cero:

$$\frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = 0 \tag{6.19}$$

Esta ecuación muestra que el eje neutro nn es una línea recta que pasa por el centroide C (figura 6.14). El ángulo β entre el eje neutro y el eje z se determina como sigue:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} \tag{6.20}$$

Dependiendo de las magnitudes y de los sentidos de los momentos flexionantes, el ángulo β puede variar de −90° a +90°. Conocer la orientación del eje neutro es útil al determinar los puntos en la sección transversal donde los esfuerzos normales son máximos. (Como los esfuerzos varían linealmente con la distancia desde el eje neutro, los esfuerzos máximos ocurren en puntos ubicados más alejados del eje neutro.)



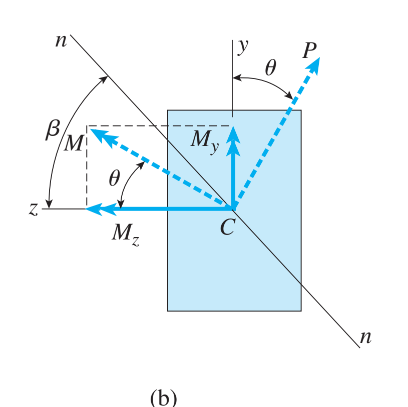


FIGURA 6.15 Viga doblemente simétrica con una carga inclinada P que actúa en un ángulo θ con respecto al eje y positivo.

Relaciones entre el eje neutro y la inclinación de las cargas

Como apenas hemos visto, la orientación del eje neutro con respecto al eje z se determina por medio de los momentos flexionantes y los momentos de inercia (ecuación 6.20). Ahora queremos determinar la orientación del eje neutro con respecto al ángulo de inclinación de las cargas que actúan sobre la viga. Para este fin, utilizaremos la viga en voladizo que se muestra en la figura 6.15a como ejemplo. La viga está cargada por una fuerza P que actúa en el plano de la sección transversal extrema y que está inclinada a un ángulo θ con respecto al eje y positivo. Se selecciona esta orientación particular de la

carga debido a que significa que los dos momentos flexionantes (M_y y M_z) son positivos cuando θ tiene valores entre 0 y 90°.

La carga P se puede descomponer en dos componentes, $P \cos \theta$ en la dirección y positiva y $P \operatorname{sen} \theta$ en la dirección z negativa. Por tanto, los momentos flexionantes M_y y M_z (figura 6.15b) que actúan sobre una sección transversal ubicada a una distancia x del apoyo fijo son

$$M_y = (P \operatorname{sen} \theta)(L - x) \qquad M_z = (P \cos \theta)(L - x) \qquad (6.21a,b)$$

en donde L es la longitud de la viga. La razón de estos momentos es

$$\frac{M_y}{M_z} = \tan \theta \qquad (6.22)$$

que muestra que el vector momento resultante M forma el ángulo θ desde el eje z (figura 6.15b). En consecuencia, el vector momento resultante es *perpendicular* al plano longitudinal que contiene la fuerza P.

El ángulo β entre el eje neutro nn y el eje z (figura 6.15b) se obtiene con la ecuación (6.20):

$$\tan \beta = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \qquad (6.23)$$

que muestra que el ángulo β en general *no* es igual al ángulo θ. Entonces, *excepto en casos especiales, el eje neutro no es perpendicular al plano longitudinal que contiene la carga*.

Las excepciones para esta regla general se tienen en tres **casos especiales:**

1. Cuando la carga se encuentra en el plano xy ($\theta = 0$ o 180°), lo cual significa que el eje z es el eje neutro.
2. Cuando la carga se encuentra en el plano xz ($\theta = \pm 90°$), lo cual significa que el eje y es el eje neutro.
3. Cuando los momentos de inercia principales son iguales, es decir, cuando $I_y = I_z$.

En el caso (3), todos los ejes que pasan por el centroide son ejes principales y todos tienen el mismo momento de inercia. El plano de carga, no importa cuál sea su dirección, siempre está en un plano principal, y el eje neutro siempre es perpendicular a éste. (Esta situación ocurre con secciones transversales cuadradas, circulares y algunas otras, como se describe en la sección 12.9 del capítulo 12.)

El hecho de que el eje neutro no sea necesariamente perpendicular al plano de la carga puede afectar en gran medida los esfuerzos en una viga, en especial si la razón de los momentos de inercia principales es muy grande. En estas condiciones los esfuerzos en la viga son muy sensibles a cambios ligeros en la dirección de la carga y a irregularidades en el alineamiento de la propia viga. Esta característica de ciertas vigas se ilustra más adelante en el ejemplo 6.5.

Ejemplo 6.4

Una viga de madera *AB* con sección transversal rectangular que funciona como larguero de techo (figuras 6.16a y b) está simplemente apoyada sobre las cuerdas superiores de dos armaduras de techo adyacentes. La viga soporta el peso de la cubierta del techo y el material del techo, más su peso propio y cualesquiera cargas adicionales que afecten el techo (como cargas por viento, nieve y sismo).

En este ejemplo, consideraremos sólo los efectos de una carga distribuida uniformemente con intensidad $q = 3.0$ kN/m que actúa en la dirección vertical en los centroides de las secciones transversales (figura 6.16c). La carga actúa a lo largo de toda la longitud de la viga e incluye el peso de la viga. Las cuerdas superiores de las armaduras tienen una pendiente de 1 a 2 ($\alpha = 26.57°$) y la viga tiene un ancho $b = 100$ mm, altura $h = 150$ mm y claro $L = 1.6$ m.

Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga y localice el eje neutro.

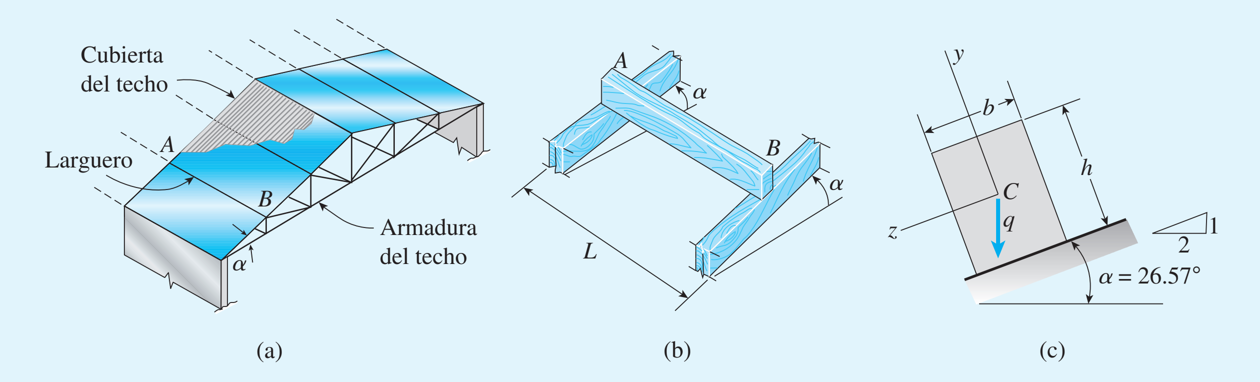


FIGURA 6.16 Ejemplo 6.4. Viga de madera con sección transversal rectangular que sirve como larguero de techo.

Solución

Cargas y momentos flexionantes. La carga uniforme *q* que actúa en la dirección vertical se puede descomponer en las direcciones *y* y *z* (figura 6.17a):

$$q_y = q\cos\alpha \qquad q_z = q\,\text{sen}\,\alpha \tag{6.24a,b}$$

Los momentos flexionantes máximos ocurren en el punto medio de la viga y se determinan mediante la fórmula general $M = qL^2/8$; de aquí,

$$M_y = \frac{q_z L^2}{8} = \frac{qL^2 \text{sen}\,\alpha}{8} \qquad M_z = \frac{q_y L^2}{8} = \frac{qL^2 \cos\alpha}{8} \tag{6.25a,b}$$

Los dos momentos son positivos porque sus vectores señalan en las direcciones positivas de los ejes *y* y *z* (figura 6.17b).

Momentos de inercia. Los momentos de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes *y* y *z* son los siguientes:

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_z = \frac{bh^3}{12} \tag{6.26a,b}$$

Esfuerzos de flexión. Los esfuerzos en la sección media de la viga se obtienen con la ecuación (6.18) con los momentos flexionantes dados por las ecuaciones (6.25) y los momentos de inercia proporcionados por las ecuaciones (6.26).

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{qL^2 \text{sen}\,\alpha}{8hb^3/12} z - \frac{qL^2 \cos\,\alpha}{8bh^3/12} y$$

$$= \frac{3qL^2}{2bh}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{b^2} z - \frac{\cos\,\alpha}{h^2} y\right) \qquad (6.27)$$

El esfuerzo en cualquier punto en la sección transversal se obtiene a partir de esta ecuación sustituyendo las coordenadas y y z del punto.

A partir de la orientación de la sección transversal y con las direcciones de las cargas y momentos flexionantes (figura 6.17), es aparente que el esfuerzo de compresión máximo se tiene en el punto D (donde $y = h/2$ y $z = -b/2$) y el esfuerzo de tensión máximo se presenta en el punto E (donde $y = -h/2$ y $z = b/2$). Al sustituir estas coordenadas en la ecuación (6.27 y después de simplificarla, obtenemos expresiones para los esfuerzos máximos y mínimo en la viga:

$$\sigma_E = -\sigma_D = \frac{3qL^2}{4bh}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{b} + \frac{\cos\,\alpha}{h}\right) \qquad (6.28)$$

Valores numéricos. Los esfuerzos máximos de tensión y compresión se calculan con la ecuación anterior sustituyendo los datos dados

$$q = 3.0 \text{ kN/m} \qquad L = 1.6 \text{ m} \qquad b = 100 \text{ mm} \qquad h = 150 \text{ mm} \qquad \alpha = 26.57°$$

Los resultados son

$$\sigma_E = -\sigma_D = 4.01 \text{ MPa}$$

Eje neutro. Además de encontrar los esfuerzos en la viga, a menudo es útil ubicar el eje neutro. La ecuación de esta línea se obtiene igualando a cero el esfuerzo (ecuación 6.27):

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{b^2} z - \frac{\cos\,\alpha}{h^2} y = 0 \qquad (6.29)$$

El eje neutro se muestra en la figura 6.17b como la línea nn. El ángulo β del eje z al eje neutro se obtiene con la ecuación (6.29) como se muestra:

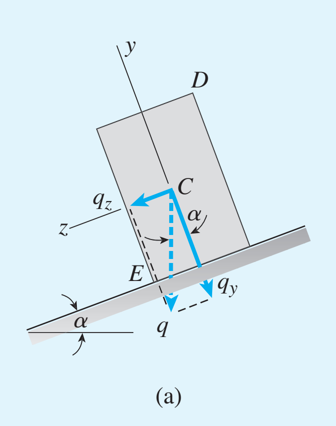
$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{h^2}{b^2}\tan\alpha \qquad (6.30)$$

Al sustituir valores numéricos, obtenemos

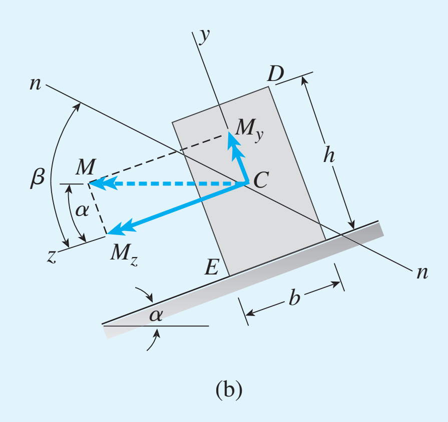
$$\tan\beta = \frac{h^2}{b^2}\tan\alpha = \frac{(150 \text{ mm})^2}{(100 \text{ mm})^2}\left(\tan 26.57°\right) = 1.125 \qquad \beta = 48.4°$$

Dado que el ángulo β no es igual al ángulo α, el eje neutro está inclinado con respecto al plano de carga (que es vertical).

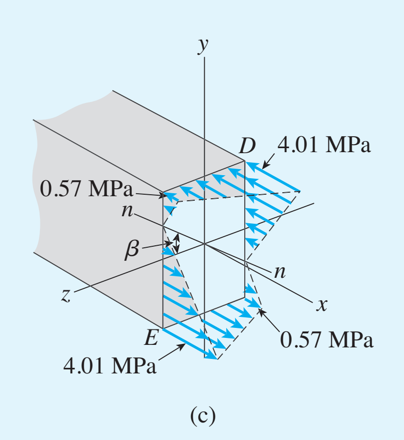
De la orientación del eje neutro (figura 6.17b) observamos que los puntos D y E son los más alejados del eje neutro, confirmando así nuestra suposición de que los esfuerzos máximos ocurren en esos puntos. La parte de la viga arriba y a la derecha del eje neutro está en compresión y la parte a la izquierda y debajo del eje neutro está en tensión.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 6.17 Solución del ejemplo 6.4. (a) Componentes de la carga uniforme, (b) momentos flexionantes que actúan sobre una sección transversal y (c) distribución de los esfuerzos normales.

Ejemplo 6.5

Una viga en voladizo de 12 ft de longitud (figura 6.18a) está construida con un perfil S 24 × 80 (consulte la tabla E.2 del apéndice E para las dimensiones y propiedades de esta viga). Una carga $P = 10$ k actúa en dirección vertical en el extremo de la viga.

Como la viga es muy angosta comparada con su altura (figura 6.18b), su momento de inercia con respecto al eje z es mucho mayor que su momento de inercia con respecto al eje y.

(a) Determine los esfuerzos de flexión máximos en la viga si el eje y de la sección transversal es vertical y, por tanto, está alineado con la carga P (figura 6.18a).

(b) Determine los esfuerzos de flexión máximos si la viga está inclinada un ángulo pequeño $\alpha = 1°$ con respecto a la carga P (figura 6.18b). (Una inclinación pequeña puede ser causada por imperfecciones en la fabricación de la viga, mal alineamiento durante su montaje o movimiento de la estructura de soporte.)

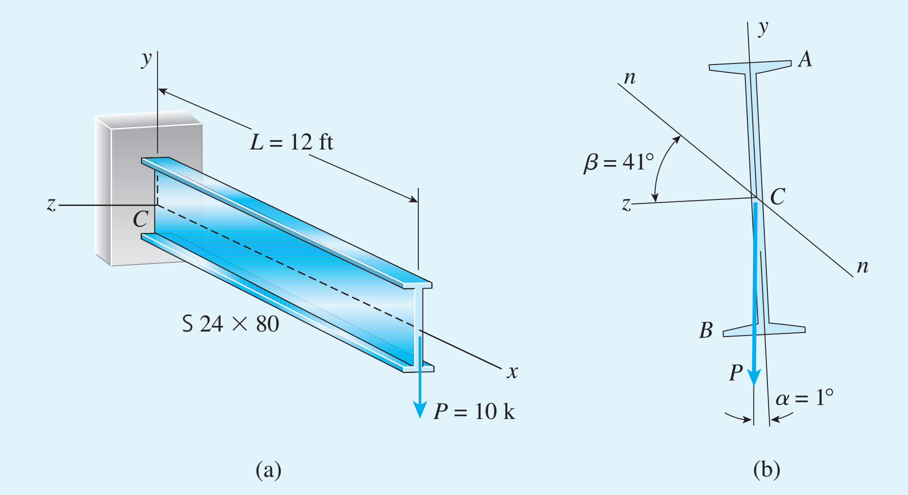


FIGURA 6.18 Ejemplo 6.5. Viga en voladizo con momento de inercia I_z mucho mayor que I_y.

Solución

(a) *Esfuerzos de flexión máximos cuando la carga está alineada con el eje y*. Si la viga y la carga están alineadas perfectamente, el eje z del eje neutro y los esfuerzos máximos en la viga (en el apoyo) se obtienen con la fórmula de la flexión:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{My}{I_z} = \frac{PL(h/2)}{I_z}$$

en donde $M_z = -M = -PL$ y $M_y = 0$, por tanto $M = PL$ es el momento flexionante en el apoyo, h es la altura de la viga e I_z es el momento de inercia con respecto al eje z. Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{(10\text{ k})(12\text{ ft})(12\text{ in/ft})(12.00\text{ in})}{2100\text{ in}^4} = 8230\text{ psi}$$

Este esfuerzo es de tensión en la parte superior de la viga y de compresión en la parte inferior de la misma.

(b) *Esfuerzos flexionantes máximos cuando la carga está inclinada con respecto al eje y*. Ahora suponemos que la viga tiene una inclinación pequeña (figura 6.18b), de manera que el ángulo entre el eje y y la carga es $\alpha = 1°$.

Las componentes de la carga P son: $P \cos \alpha$ en la dirección y negativa y P sen α en la dirección z positiva. Por tanto, los momentos flexionantes en el apoyo son:

$$M_y = -(P\text{sen}\ \alpha)L = -(10\text{ k})(\text{sen } 1°)(12\text{ ft})(12\text{ in/ft}) = -25.13\text{ k-in}$$

$$M_z = -(P\cos\alpha)L = -(10\text{ k})(\cos 1°)(12\text{ ft})(12\text{ in/ft}) = -1440\text{ k-in}$$

El ángulo β que proporciona la orientación del eje neutro nn (figura 6.18b) se obtiene con la ecuación (6.20):

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \frac{(-25.13\text{ k-in})(2100\text{ in}^4)}{(-1440\text{ k-in})(42.2\text{ in}^4)} = 0.8684 \qquad \beta = 41°$$

Este cálculo muestra que el eje neutro está inclinado un ángulo de 41° desde el eje z aunque el plano de la carga está inclinado sólo 1° desde el eje y. La sensibilidad de la posición del eje neutro con respecto al ángulo de la carga es una consecuencia de la gran magnitud de la razón I_z/I_y.

De acuerdo con la posición del eje neutro (figura 6.18b), observamos que los esfuerzos máximos en la viga ocurren en los puntos A y B, que están ubicados en las distancias más alejadas del eje neutro. Las coordenadas del punto A son

$$z_A = -3.50\text{ in} \qquad y_A = 12.0\text{ in}$$

Por tanto, el esfuerzo de tensión en el punto A (consulte la ecuación 6.18) es

$$\sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y} - \frac{M_z y_A}{I_z}$$
$$= \frac{(-25.13\text{ k-in})(-3.50\text{ in})}{42.2\text{ in}^4} - \frac{(-1440\text{ k-in})(12.0\text{ in})}{2100\text{ in}^4}$$
$$= 2080\text{ psi} + 8230\text{ psi} = 10{,}310\text{ psi}$$

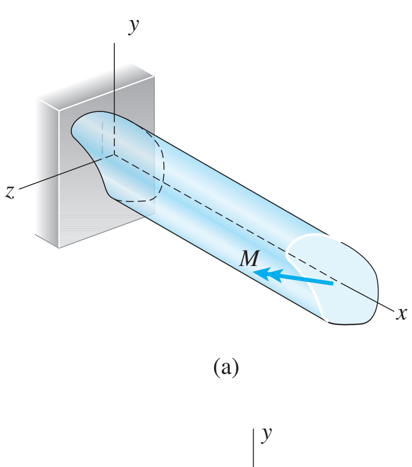
El esfuerzo en B tiene la misma magnitud pero es de compresión:

$$\sigma_B = -10{,}310\text{ psi}$$

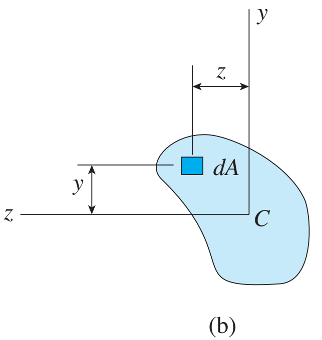
Estos esfuerzos son 25 por ciento mayores que el esfuerzo $\sigma_{\text{máx}} = 8230$ psi para la misma viga con una carga perfectamente alineada. Además, la carga inclinada produce una deflexión lateral en la dirección z, en tanto que la carga perfectamente alineada no.

Este ejemplo muestra que las vigas con I_z mucho mayor que I_y pueden desarrollar esfuerzos grandes si la viga o sus cargas se desvían incluso una cantidad pequeña de su alineación planeada. Por tanto, se deben emplear con precaución, debido a que son muy susceptibles a sobreesfuerzos, a flexión y pandeo lateral. La solución es proporcionar soporte lateral adecuado para la viga y así evitar la flexión lateral. Por ejemplo, los largueros de madera en pisos de edificios se soportan lateralmente instalando riostras o bloques entre ellos.

6.5 FLEXIÓN DE VIGAS ASIMÉTRICAS



(a)



(b)

FIGURA 6.19 Viga asimétrica sometida a un momento flexionante M.



Viga asimétrica compuesta hecha de un perfil canal y una viga vieja de madera

En nuestros análisis anteriores de la flexión, supusimos que las vigas tenían secciones transversales con al menos un eje de simetría. Ahora abandonaremos esa restricción y consideraremos vigas con secciones transversales asimétricas. Iniciaremos estudiando vigas en flexión pura y luego en secciones posteriores (secciones 6.6 a 6.9) estudiaremos los efectos de cargas laterales. Igual que en los análisis anteriores, supondremos que las vigas están hechas de materiales linealmente elásticos.

Suponga que una viga con una sección transversal asimétrica está sometida a un momento flexionante M que actúa en la sección transversal extrema (figura 6.19a). Nos gustaría conocer los esfuerzos en la viga y la posición del eje neutro. Por desgracia, en esta etapa del análisis no hay una forma directa para determinar estas cantidades. Por tanto, utilizaremos un enfoque indirecto; en vez de empezar con un momento flexionante y tratar de encontrar el eje neutro, empezaremos con un eje neutro supuesto y determinaremos el momento flexionante asociado.

Eje neutro

Comenzamos trazando dos ejes perpendiculares (los ejes y y z) en un punto seleccionado de manera arbitraria en el plano de la sección transversal (figura 6.19a). Los ejes pueden tener cualquier orientación, pero por conveniencia los orientaremos horizontal y verticalmente. Luego, *suponemos* que la viga se flexiona de tal manera que el eje z es el eje neutro de la sección transversal. En consecuencia, la viga se flexiona en el plano xy, que se convierte en el plano de flexión. En estas condiciones, el esfuerzo normal que actúa sobre un elemento de área dA ubicado a una distancia y desde el eje neutro (consulte la figura 6.19b y la ecuación 5.7 del capítulo 5) es

$$\sigma_x = -E\kappa_y y \tag{6.31}$$

El signo menos es necesario debido a que pare de la viga arriba del eje z (el eje neutro) está en compresión cuando la curvatura es positiva. (La convención de signos para la curvatura cuando la viga se flexiona en el plano xy se muestra en la figura 6.20a.)

La fuerza que actúa sobre el elemento de área dA es $\sigma_x dA$ y la fuerza resultante que actúa sobre toda la sección transversal es la integral de esta fuerza elemental sobre el área de la sección transversal A. Como la viga está en flexión pura, la fuerza resultante debe ser cero; de aquí,

$$\int_A \sigma_x dA = -\int_A E\kappa_y y\, dA = 0$$

El módulo de elasticidad y la curvatura son constantes en cualquier sección transversal dada y, por tanto,

$$\int_A y\, dA = 0 \tag{6.32}$$

Esta ecuación muestra que el eje z (el eje neutro) pasa por el centroide C de la sección transversal.

Ahora suponga que la viga se flexiona de tal manera que el eje y es el eje neutro y el plano xz es el plano de flexión. Entonces el esfuerzo que actúa sobre el elemento de área dA (figura 6.19b) es

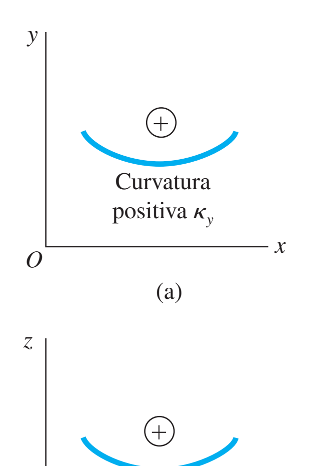


FIGURA 6.20 Convenciones de signos para las curvaturas κ_y y κ_z en los planos xy y xz, respectivamente.

$$\sigma_x = -E\kappa_z z \tag{6.33}$$

La convención de signos para la curvatura κ_z en el plano xz se muestra en la figura 6.20b. El signo menos se necesita en la ecuación (6.33) ya que la curvatura positiva en el plano xz produce compresión sobre el elemento dA. La fuerza resultante para este caso es

$$\int_A \sigma_x dA = -\int_A E\kappa_z z\, dA = 0$$

de donde obtenemos

$$\int_A z\, dA = 0 \tag{6.34}$$

y de nuevo observamos que el eje neutro debe pasar por el centroide. Por tanto, hemos establecido que *el origen de los ejes y y z para una viga asimétrica debe localizarse en el centroide C.*

Ahora consideremos el momento resultante de los esfuerzos σ_x. Una vez más supongamos que la flexión tiene lugar con el eje z como eje neutro, caso en el cual los esfuerzos σ_x están dados por la ecuación (6.31). Los momentos flexionantes correspondientes M_z y M_y con respecto a los ejes z y y, respectivamente (figura 6.21), son

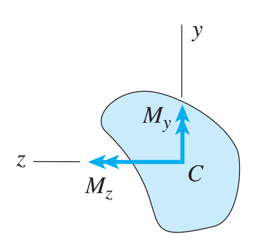


FIGURA 6.21 Momentos flexionantes M_y y M_z que actúan con respecto a los ejes y y z, respectivamente

$$M_z = -\int_A \sigma_x y\, dA = \kappa_y E\int_A y^2 dA = \kappa_y EI_z \tag{6.35a}$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z\, dA = -\kappa_y E\int_A yz\, dA = -\kappa_y EI_{yz} \tag{6.35b}$$

En estas ecuaciones, I_z es el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje z e I_{yz} es el *producto de inercia* con respecto a los ejes y y z.*

De las ecuaciones (6.35a) y (6.35b) podemos sacar las siguientes conclusiones: (1) si el eje z se selecciona en una dirección arbitraria que pase por el centroide, será el eje neutro *sólo* si los momentos M_y y M_z actúan con respecto a los ejes y y z y *sólo* si estos momentos están en la razón establecida por las ecuaciones (6.35a) y (6.35b). (2) Si el eje z se selecciona como un *eje principal*, entonces el producto de inercia I_{yz} es igual a cero y el único momento flexionante es M_z. En ese caso, el eje z es el eje neutro, la flexión tiene lugar en el plano xy y el momento M_z actúa en ese mismo plano. Por tanto, la flexión ocurre de una manera análoga a la de una viga simétrica.

En resumen, una viga asimétrica se flexiona de la misma manera general que una viga simétrica siempre que el eje z sea un *eje centroidal prin-*

*Los productos de inercia se analizan en la sección 12.7 del capítulo 12.

cipal y el único momento flexionante sea el momento M_z que actúa con respecto al mismo eje.

Si ahora suponemos que el eje y es el eje neutro, llegaremos a las mismas conclusiones. Los esfuerzos σ_x están dados por la ecuación (6.33) y los momentos flexionantes son

$$M_y = \int_A \sigma_x z\, dA = -\kappa_z E \int_A z^2 dA = -\kappa_z E I_y \qquad (6.36a)$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y\, dA = \kappa_z E \int_A yz\, dA = \kappa_z E I_{yz} \qquad (6.36b)$$

en donde I_y es el momento de inercia con respecto al eje y. De nuevo observamos que si el eje neutro (el eje y en este caso) está orientado de manera arbitraria, deberán existir los momentos M_y y M_z. Sin embargo, si el eje y es un eje principal, el único momento es M_y y tenemos flexión ordinaria en el plano xz. Por tanto, podemos establecer que una viga asimétrica se flexiona de la misma manera general que una viga simétrica cuando el eje y es un *eje centroidal principal* y el único momento flexionante es el momento M_y que actúa con respecto al mismo eje.

Una observación adicional es que como los ejes y y z son ortogonales, sabemos que si *cualquiera de ellos* es un eje principal, entonces el otro es automáticamente un eje principal.

Ahora hemos llegado a la siguiente conclusión importante: *cuando una viga asimétrica está en flexión pura, el plano en el cual el momento flexionante actúa es perpendicular a la superficie neutra sólo si los ejes y y z son ejes centroidales principales de la sección transversal y el momento flexionante actúa en uno de los dos planos principales (el plano xy o el plano xz).* En ese caso, el plano principal en el que actúa el momento flexionante se convierte en el plano de flexión y es válida la teoría usual de la flexión (incluyendo la fórmula de la flexión).

Al haber llegado a esta conclusión, ahora tenemos un método directo para determinar los esfuerzos en una viga asimétrica sometida a un momento flexionante en una dirección arbitraria.

Procedimiento para analizar una viga asimétrica

Ahora describiremos un procedimiento general para analizar una viga asimétrica sometida a cualquier momento flexionante M (figura 6.22). Iniciamos ubicando el centroide C de la sección transversal y trazando un conjunto de ejes principales en ese punto (los ejes y y z en la figura).* Luego, el momento flexionante M se descompone en las componentes M_y y M_z, positivas en las direcciones que se muestran en la figura. Estas componentes son

$$M_y = M \operatorname{sen} \theta \qquad M_z = M \cos \theta \qquad (6.37a,b)$$

en donde θ es el ángulo entre el vector momento M y el eje z (figura 6.22). Como cada componente actúa en un plano principal, produce flexión pura

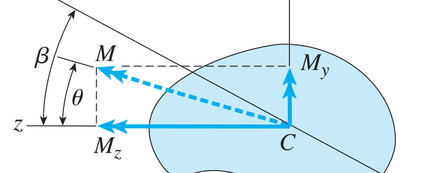


FIGURA 6.22 Sección transversal asimétrica con el momento flexionante M descompuesto en componentes M_y y M_z que actúa con respecto a los ejes centroidales principales.

*Los ejes principales se analizan en las secciones 12.8 y 12.9 del capítulo 12.

en ese mismo plano. Por tanto, se aplican las fórmulas usuales para flexión pura y podemos encontrar fácilmente los esfuerzos debidos a los momentos M_y y M_z que actúan por separado. Luego los esfuerzos flexionantes obtenidos a partir de los momentos que actúan por separado se superponen para obtener los esfuerzos producidos por el momento flexionante original M. (Observe que este procedimiento general es similar al descrito en la sección anterior para analizar vigas doblemente simétricas con cargas inclinadas.)

La superposición de los esfuerzos flexionantes con objeto de obtener el esfuerzo resultante en cualquier punto en la sección transversal está dado por la ecuación (6.18):

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(M \operatorname{sen} \theta)z}{I_y} - \frac{(M \cos\, \theta)y}{I_z} \tag{6.38}$$

en donde y y z son las coordenadas del punto en consideración.

Además, la ecuación del eje neutro *nn* (figura 6.22) se obtiene igualando σ_x a cero y simplificando:

$$\frac{\operatorname{sen}\, \theta}{I_y} z - \frac{\cos\, \theta}{I_z} y = 0 \tag{6.39}$$

El ángulo β entre el eje neutro y el eje z se puede obtener con la ecuación anterior, como sigue:

$$\tan\, \beta = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \tan\, \theta \tag{6.40}$$

Esta ecuación muestra que en general los ángulos β y θ no son iguales, de aquí que el eje neutro generalmente no sea perpendicular al plano en el que actúa el par aplicado M. Las únicas excepciones son los tres casos especiales descritos en la sección anterior en el párrafo que sigue a la ecuación (6.23).

En esta sección hemos puesto nuestra atención en las vigas asimétricas. Por supuesto, las vigas simétricas son casos especiales de vigas asimétricas y, por tanto, los análisis de esta sección también se aplican a las vigas simétricas. Si una viga tiene un solo eje de simetría, éste es uno de los ejes principales centroidales de la sección transversal; el otro eje principal es perpendicular al eje de simetría del centroide. Si una viga es doblemente simétrica, los dos ejes de simetría son ejes principales centroidales.

En un sentido estricto los análisis de esta sección sólo se aplican a flexión pura, lo cual significa que no actúan fuerzas cortantes sobre las secciones transversales. Cuando existen fuerzas cortantes, surge la posibilidad de que la viga se tuerza con respecto al eje longitudinal. Sin embargo, la torsión se evita cuando las fuerzas cortantes actúan a través del *centro de cortante*, el cual se describe en la siguiente sección.

Los ejemplos siguientes ilustran el análisis de una viga con un eje de simetría. (Los cálculos para una viga asimétrica sin ejes de simetría se llevan a cabo de la misma manera general, excepto que la determinación de las diversas propiedades de la sección transversal es mucho más compleja.)

Ejemplo 6.6

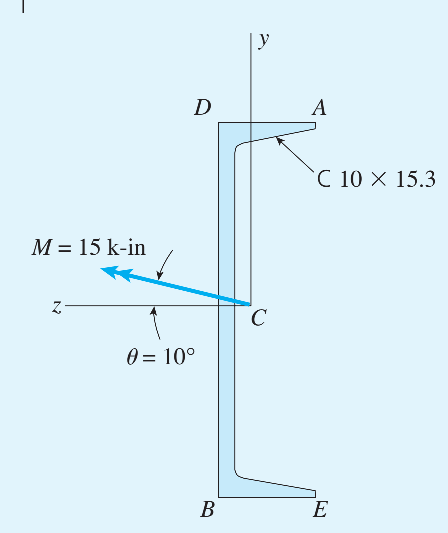


FIGURA 6.23 Ejemplo 6.6. Sección en canal sometida a un momento flexionante M que actúa a un ángulo θ con respecto al eje z.

Una sección en canal (C 10 × 15.3) está sometida a un momento flexionante M = 15 k-in orientado a un ángulo $\theta = 10°$ con respecto al eje z (figura 6.23).

Calcule los esfuerzos flexionantes σ_A y σ_B, respectivamente y determine la posición del eje neutro.

Solución

Propiedades de la sección transversal. El centroide C está ubicado sobre el eje de simetría (el eje z) a una distancia

$$c = 0.634 \text{ in}$$

desde la parte posterior del canal (figura 6.24).* Los ejes y y z son ejes centroidales principales con momentos de inercia

$$I_y = 2.28 \text{ in}^4 \qquad I_z = 67.4 \text{ in}^4$$

Además, las coordenadas de los puntos A, B, D y E son las siguientes:

$$y_A = 5.00 \text{ in} \qquad z_A = -2.600 \text{ in} + 0.634 \text{ in} = -1.966 \text{ in}$$
$$y_B = -5.00 \text{ in} \qquad z_B = 0.634 \text{ in}$$
$$y_D = y_A,\ z_D = z_B$$
$$y_E = y_B,\ z_E = z_A$$

Momentos flexionantes. Los momentos flexionantes con respecto a los ejes y y z (figura 6.24) son

$$M_y = M \text{ sen } \theta = (15 \text{ k-in})(\text{sen } 10°) = 2.605 \text{ k-in}$$
$$M_z = M \cos \theta = (15 \text{ k-in})(\cos 10°) = 14.77 \text{ k-in}$$

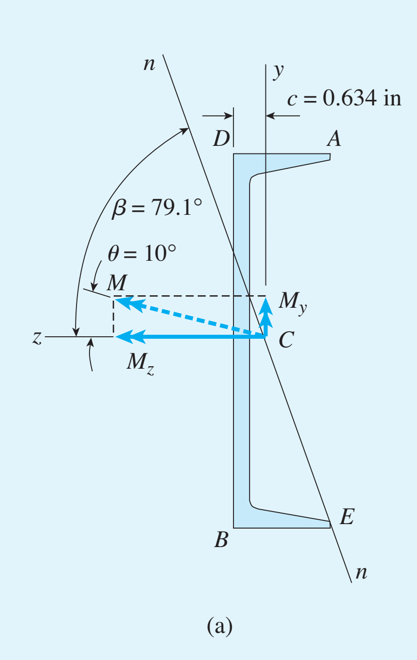


FIGURA 6.24 (a) Solución del ejemplo 6.6.

Esfuerzos flexionantes. Ahora calculamos el esfuerzo en el punto A con la ecuación (6.38):

$$\sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y} - \frac{M_z y_A}{I_z}$$
$$= \frac{(2.605 \text{ k-in})(-1.966 \text{ in})}{2.28 \text{ in}^4} - \frac{(14.77 \text{ k-in})(5.00 \text{ in})}{67.4 \text{ in}^4}$$
$$= -2246 \text{ psi} - 1096 \text{ psi} = -3340 \text{ psi}$$

Mediante un cálculo similar obtenemos el esfuerzo en el punto B:

$$\sigma_B = \frac{M_y z_B}{I_y} - \frac{M_z y_B}{I_z}$$
$$= \frac{(2.605 \text{ k-in})(0.634 \text{ in})}{2.28 \text{ in}^4} - \frac{(14.77 \text{ k-in})(-5.00 \text{ in})}{67.4 \text{ in}^4}$$
$$= 724 \text{ psi} + 1096 \text{ psi} = 1820 \text{ psi}$$

Éstos son los esfuerzos máximos de compresión y tensión en la viga.

*Consulte la tabla E.3, apéndice E, para obtener las dimensiones y propiedades de las secciones en canal.

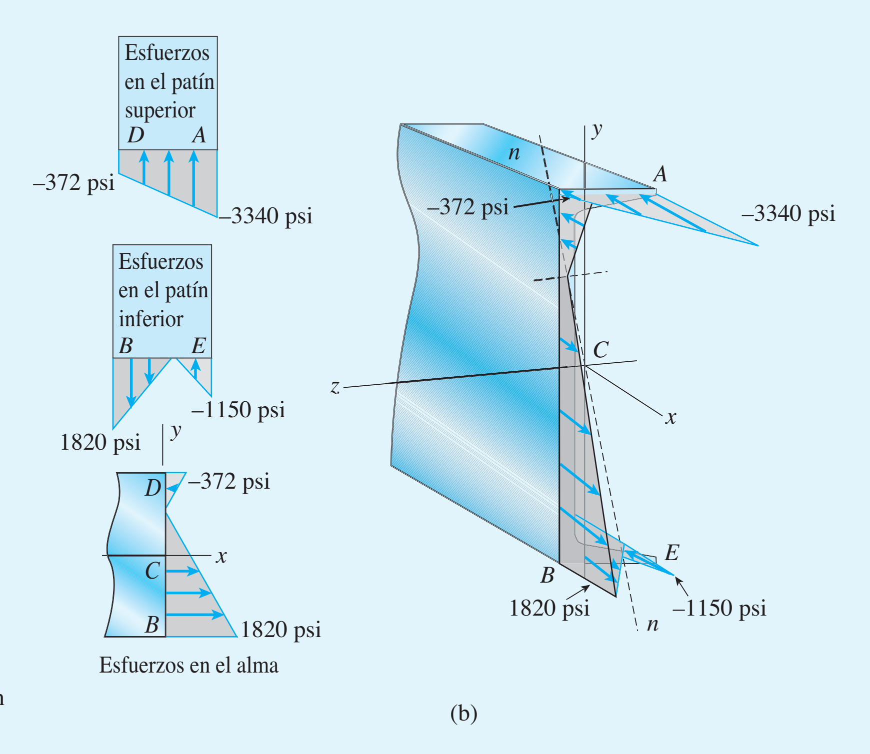


FIGURA 6.24 (Cont.) (b) Distribuciones de los esfuerzos normales en la sección en canal.

Los esfuerzos normales en los puntos D y E también se pueden calcular empleando el procedimiento que se muestra.

$$\sigma_D = -372 \text{ psi}, \qquad \sigma_E = -1150 \text{ psi}$$

Los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal se muestran en la figura 6.24(b).

Eje neutro. El ángulo β que ubica al eje neutro (ecuación 6.40) se determina de la siguiente manera:

$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{67.4 \text{ in}^4}{2.28 \text{ in}^4} \tan 10° = 5.212 \qquad \beta = 79.1°$$

El eje neutro nn se muestra en la figura 6.24 donde observamos que los puntos A y B están ubicados a las distancias más alejadas desde el eje neutro, confirmando de esta manera que σ_A y σ_B son los esfuerzos máximos en la viga.

En este ejemplo el ángulo β entre el eje z y el eje neutro es mucho mayor que el ángulo θ (figura 6.24) debido a que la razón I_z/I_y es grande. El ángulo β varía de 0 a 79.1° conforme el ángulo θ varía de 0 a 10°. Como se analizó con anterioridad en el ejemplo 6.5 de la sección 6.4, las vigas con razones I_z/I_y grandes son muy sensibles a la dirección de la carga y por tanto deben tener soporte lateral suficiente para evitar deflexiones laterales excesivas.

Ejemplo 6.7

Un perfil Z se somete a un momento flexionante $M = 3$ kN·m a un ángulo $\theta = -20°$ con respecto al eje z, como se muestra en la figura. Encuentre los esfuerzos normales en A, B, D y E (σ_A, σ_B, σ_D y σ_E, respectivamente) y también determine la posición del eje neutro. Utilice los datos numéricos siguientes: $h = 200$ mm, $b = 90$ mm, espesor $t = 15$ mm.

Solución

Propiedades de la sección transversal. Utilice los resultados del ejemplo 12.7.

$$I_Z = 32.6\,(10^6)\text{ mm}^4 \qquad I_Y = 2.4\,(10^6)\text{ mm}^4$$

$$\theta_{p1} = 19.2° \qquad \theta_{p1} = (19.2)\frac{\pi}{180}\text{ radianes}$$

Coordenadas (y, z) de los puntos A, B, D, D', E y E'.

$$\theta = -20\left(\frac{\pi}{180}\right)\text{ radianes}$$

$$y_A = \frac{h}{2}\cos(\theta_{p1}) + \left(b - \frac{t}{2}\right)\text{sen}(\theta_{p1}) \qquad y_A = 121.569\text{ mm}$$

$$y_B = -y_A \qquad y_B = -121.569\text{ mm}$$

$$y_D = \frac{h}{2}\cos(\theta_{p1}) - \frac{t}{2}\text{ sen}(\theta_{p1}) \qquad y_D = 91.971\text{ mm}$$

$$y_{D'} = \frac{h}{2}\cos(\theta_{p1}) \qquad y_{D'} = 94.438\text{ mm}$$

$$y_{E'} = -y_{D'} \qquad y_{E'} = -94.438\text{ mm}$$

$$y_E = -y_D \qquad y_E = -91.971\text{ mm}$$

$$z_A = \left(b - \frac{t}{2}\right)\cos(\theta_{p1}) - \frac{h}{2}\text{sen}(\theta_{p1}) \qquad z_A = 45.024\text{ mm}$$

$$z_B = -z_A \qquad z_B = -45.024\text{ mm}$$

$$z_D = \frac{-h}{2}\text{ sen}(\theta_{p1}) - \frac{t}{2}\cos(\theta_{p1}) \qquad z_D = -39.969\text{ mm}$$

$$z_{D'} = \frac{-h}{2}\text{ sen}(\theta_{p1}) \qquad z_{D'} = -32.887\text{ mm}$$

$$z_{E'} = -z_{D'} \qquad z_{E'} = 32.887\text{ mm}$$

$$z_E = -z_D \qquad z_E = 39.969\text{ mm}$$

Momentos flexionantes (kN·m) $M = 3$ kN·m

$$M_y = M\text{sen}(\theta) \qquad M_y = -1.026\text{ kN·m}$$

$$M_z = M\cos(\theta) \qquad M_z = 2.819\text{ kN·m}$$

Esfuerzos flexionantes en A, B, D y E (consulte las gráficas de los esfuerzos normales en la figura 6.25 (b) siguiente)

$$\sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y} - \frac{M_z y_A}{I_z} = -19.249 - 10.513 = -29.762\text{ MPa}$$

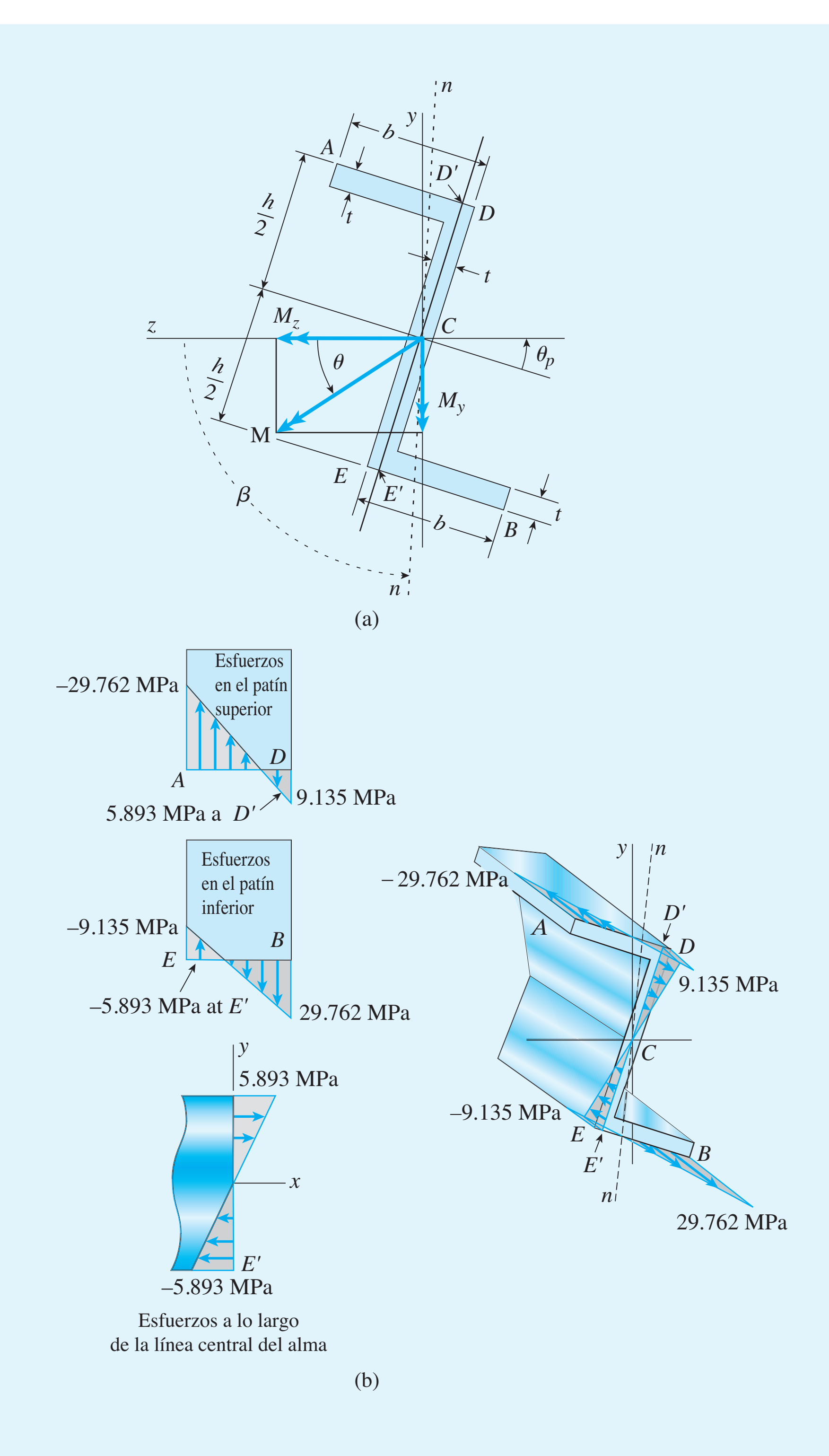


FIGURA 6.25 (a) Perfil Z sometido a un momento flexionante M a un ángulo θ con respecto al eje z, (b) distribución de los esfuerzos normales en el perfil Z.

continúa

$$\sigma_B = \frac{M_y z_B}{I_y} - \frac{M_z y_B}{I_z} = 19.249 + 10.513 = 29.762 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = \frac{M_y z_D}{I_y} - \frac{M_z y_D}{I_z} = 17.088 - 7.953 = 9.135 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D{}' = \frac{M_y z_D{}'}{I_y} - \frac{M_z y_D{}'}{I_z} = 14.06 - 8.167 = 5.893 \text{ MPa} = -\sigma_E{}'$$

$$\sigma_E = \frac{M_y z_E}{I_y} - \frac{M_z y_E}{I_z} = -17.088 + 7.953 = -9.135 \text{ MPa}$$

Ubicación del eje neutro $\tan(\beta) = \frac{I_z}{I_z} \tan(\theta)$

$$\beta = -89.147°$$

6.6 CONCEPTO DE CENTRO DE CORTANTE

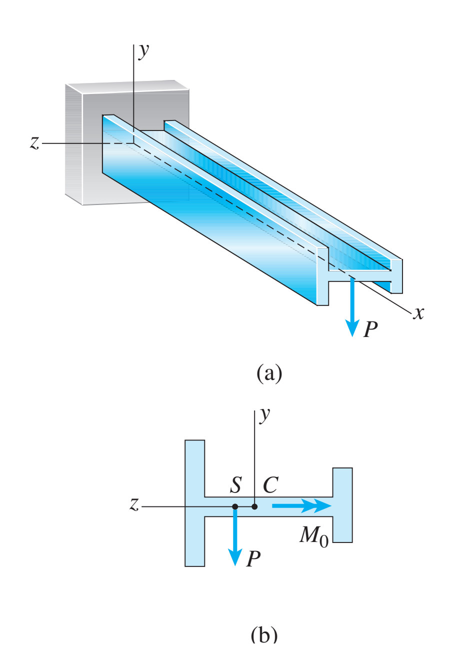


FIGURA 6.26 Viga en voladizo con sección transversal simétrica con respecto a un solo eje: (a) viga con carga y (b) sección transversal intermedia de la viga que muestra las resultantes de esfuerzos P y M_0, el centroide C y el centro de cortante S.

En las secciones anteriores de este capítulo nuestro interés fue determinar los esfuerzos de flexión en vigas ante una variedad de condiciones especiales. Por ejemplo, en la sección 6.4 consideramos vigas simétricas con cargas inclinadas y en la sección 6.5 estudiamos vigas asimétricas. Sin embargo, las cargas laterales que actúan sobre una viga producen fuerzas cortantes así como momentos flexionantes y, por tanto, en esta y en las tres secciones siguientes examinaremos los efectos del esfuerzo cortante.

En el capítulo 5 vimos cómo determinar los esfuerzos cortantes en vigas cuando las cargas actúan en un plano de simetría y dedujimos la fórmula del cortante para calcular estos esfuerzos para ciertas formas de vigas. Ahora examinaremos los esfuerzos cortantes en vigas cuando las cargas laterales actúan en un plano que *no* es de simetría. Para que la viga se flexione sin torsión encontraremos que las cargas se deben aplicar en un punto particular en la sección transversal, denominado *centro de cortante*.

Considere una viga en voladizo con sección transversal simétrica con respecto a un solo eje que soporta una carga P en el extremo libre (consulte la figura 6.26a). Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura 6.26b se denomina *viga I desequilibrada*. Las vigas con perfil I ya sea equilibradas o desequilibradas, usualmente se cargan en el plano de simetría (el plano xz), pero en este caso la línea de acción de la fuerza P es perpendicular a ese plano. Como el origen de las coordenadas se toma en el centroide C de la sección transversal y puesto que z es un eje de simetría de la sección transversal, los dos ejes y y z son ejes centroidales principales.

Supongamos que ante la acción de la carga P la viga se flexiona con el plano xz como el plano neutro, lo que significa que el plano xy es el plano de flexión. En estas condiciones existen dos resultantes de esfuerzos en secciones transversales intermedias de la viga (figura 6.26b): un momento

flexionante M_0 que actúa con respecto al eje z y con su vector momento en la dirección negativa del eje z y una fuerza cortante con magnitud P que actúa en la dirección y negativa. Para una viga y carga dada, M_0 y P son cantidades conocidas.

Los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal tienen una resultante que es el momento flexionante M_0 y los esfuerzos cortantes tienen una resultante que es la fuerza cortante (igual a P). Si el material sigue la ley de Hooke, los esfuerzos varían linealmente con la distancia desde el eje neutro (el eje z) y se pueden calcular con la fórmula de la flexión. Como los esfuerzos cortantes actúan en una sección transversal se determinan a partir de los esfuerzos normales únicamente con base en consideraciones de equilibrio (consulte la deducción de la fórmula del cortante en la sección 5.8), se deduce que la distribución de los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal también está determinada. La resultante de estos esfuerzos cortantes es una fuerza vertical igual en magnitud a la fuerza P y que tiene su línea de acción en el punto S que se encuentra en el eje z (figura 6.26b). Este punto se conoce como **centro de cortante** (también se llama *centro de flexión*) de la sección transversal.

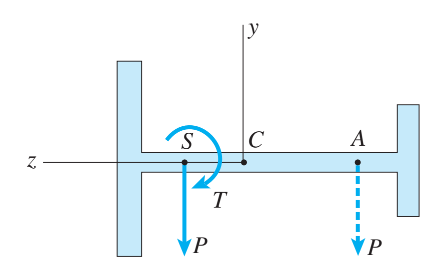
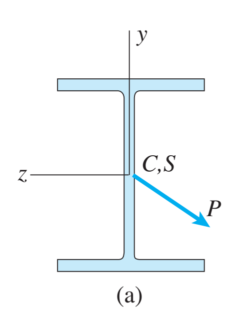


FIGURA 6.27 Viga simétrica con respecto a un solo eje con carga P aplicada en el punto A.

En resumen, al suponer que el eje z es el eje neutro, no sólo podemos determinar la distribución de los esfuerzos normales, sino también la distribución de los esfuerzos cortantes y la posición de la fuerza cortante resultante. Por tanto, ahora reconocemos que una carga P aplicada en el extremo la viga (figura 6.26a) debe actuar en un punto particular (el centro de cortante) para que la flexión ocurra con el eje z como el eje neutro.

Si la carga se aplica en algún otro punto sobe el eje z (digamos, en el punto A en la figura 6.27), se puede reemplazar con un sistema estáticamente equivalente que consista de una fuerza P que actúe en el centro de cortante y un par de torsión T. La fuerza que actúa en el centro de cortante produce flexión con respecto al eje z y el par de torsión produce torsión. Por tanto, ahora reconocemos que *una carga lateral que actúa sobre una viga producirá flexión sin torsión sólo si actúa en el centro de cortante*.

El centro de cortante (igual que el centroide) se encuentra sobre cualquier eje de simetría, y por tanto el centro de cortante S y el centroide C coinciden para una **sección transversal doblemente simétrica** (figura 6.28a). Una carga P que actúa en el centroide produce flexión con respecto a los ejes y y z sin torsión, y los esfuerzos de flexión correspondientes se pueden determinar mediante el método descrito en la sección 6.4 para vigas doblemente simétricas.



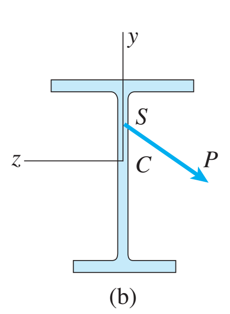


FIGURA 6.28 (a) Viga doblemente simétrica con una carga P que actúa en el centroide (y centro de cortante) y (b) viga con simetría simple con una carga P que actúa en el centro de cortante.

Si una viga tiene una **sección transversal con un solo eje de simetría** (figura 6.28b), el centroide y el centro de cortante se encuentran sobre el eje de simetría. Una carga P que actúa en el centro de cortante se puede descomponer en componentes en las direcciones y y z. La componente en la dirección y producirá flexión en el plano xy con el eje z como eje neutro y la componente en la dirección z producirá flexión (sin torsión) en el plano xz con el eje y como eje neutro. Los esfuerzos de flexión producidos por estas componentes se pueden superponer para obtener los esfuerzos causados por la carga original.

Por último, si una viga tiene una **sección transversal asimétrica** (figura 6.29), el análisis de la flexión procede como sigue (siempre que la carga actúe en el centro de cortante). Primero, ubique el centroide C de la sección transversal y determine la orientación de los ejes centroidales principales y

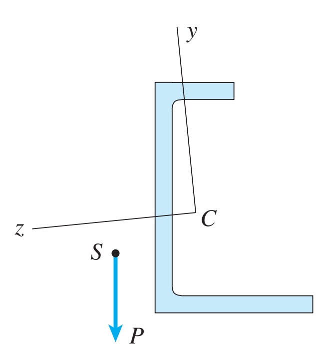


FIGURA 6.29 Viga asimétrica con una carga P que actúa por el centro de cortante S.

y z. Luego descomponga la carga en componentes (que actúan en el centro de cortante) en las direcciones y y z y determine los momentos flexionantes M_y y M_z con respecto a los ejes principales. Por último, calcule los esfuerzos de flexión empleando el método descrito en la sección 6.5 para vigas asimétricas.

Ahora que hemos explicado la *importancia* del centro de cortante y su uso en el análisis de vigas, es natural preguntar, "¿cómo *ubicamos* el centro de cortante?". Para perfiles doblemente simétricos por supuesto que la respuesta es simple: está en el centroide. Para perfiles con simetría simple el centro de cortante se encuentra sobre el eje de simetría, pero la ubicación exacta sobre ese eje quizá no se determine fácilmente. Ubicar el centro de cortante es aún más difícil si la sección transversal es asimétrica (figura 6.29). En esos casos, la tarea requiere métodos más avanzados que los que son apropiados para este libro. (Algunos manuales de ingeniería proporcionan fórmulas para ubicar los centros de cortante; por ejemplo, consulte la referencia 2.9.)

Las vigas con **secciones transversales abiertas de pared delgada**, como las vigas de patín ancho, canales, ángulos, vigas T y perfiles Z, son un caso especial. No sólo son de uso común para fines estructurales, sino que también son muy débiles en torsión. En consecuencia, es de importancia especial ubicar sus centros de cortante. Las secciones transversales de este tipo se consideran en las tres secciones siguientes: en las secciones 6.7 y 6.8 analizamos cómo encontrar los esfuerzos cortantes en ese tipo de vigas y en la sección 6.9 mostramos cómo ubicar sus centros de cortante.

6.7 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS CON SECCIONES TRANSVERSALES ABIERTAS DE PARED DELGADA

La distribución de los esfuerzos cortantes en vigas rectangulares, vigas circulares y en las almas de vigas con patines se describió antes en las secciones 5.8, 5.9 y 5.10, y dedujimos que la fórmula del cortante (ecuación 5.38) para calcular los esfuerzos es:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \qquad (6.41)$$

En esta fórmula, V representa la fuerza cortante que actúa sobre la sección transversal, I es el momento de inercia del área de la sección transversal (con respecto al eje neutro), b es el ancho de la viga en la ubicación donde se determinará el esfuerzo cortante y Q es el momento estático del área de la sección transversal fuera de la ubicación donde se determina el esfuerzo.

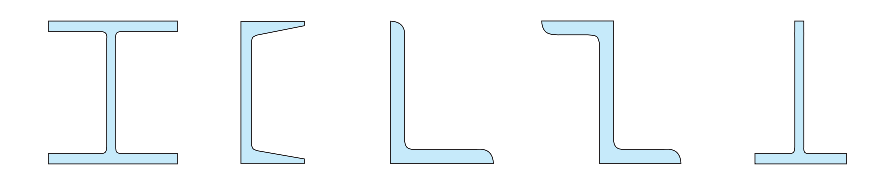


FIGURA 6.30 Vigas comunes con sección transversal abierta de pared delgada (viga de patín ancho o viga I, canal, ángulo, Z y T).

Ahora consideraremos los esfuerzos cortantes en un tipo especial de vigas con **sección transversal abierta de pared delgada**. Las vigas de este tipo se distinguen mediante dos características: (1) el espesor de pared es pequeño comparado con la altura y el ancho de la sección transversal y (2) la sección transversal está abierta, como en el caso de una viga I o una viga en canal, en vez de cerrada, como en el caso de una viga de caja hueca. En la figura 6.30 se muestran algunos ejemplos. Las vigas de este tipo también se llaman **secciones o perfiles estructurales.**

Podemos determinar los esfuerzos cortantes en vigas de pared delgada con sección transversal abierta al emplear las mismas técnicas que utilizamos al deducir la fórmula del cortante (ecuación 6.41). Para mantener la deducción tan general como sea posible, consideraremos una viga con su línea central de la sección transversal *mm* con forma arbitraria (figura 6.31a). Los ejes y y z son ejes centroidales principales de la sección transversal y la carga P actúa paralela al eje y en el centro de cortante S (figura 6.31b). Por tanto, la flexión ocurrirá en el plano xy con el eje z como el eje neutro.

En estas condiciones, podemos obtener el esfuerzo normal en cualquier punto en la viga con la fórmula de la flexión:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{6.42}$$

donde M_z es el momento flexionante con respecto al eje z (positivo según su definición en la figura 6.13) y y es una coordenada del punto en consideración.

Ahora consideramos un elemento de volumen *abcd* cortado entre dos secciones transversales separadas una distancia dx (figura 6.31a). Observe que el elemento inicia en el borde de la sección transversal y tiene una longitud s medida a lo largo de la línea central *mm* (figura 6.31b). Para determinar los esfuerzos cortantes, aislamos el elemento como se muestra en la figura 6.31c. La resultante de los esfuerzos normales que actúan sobre la cara *ad* es la fuerza F_1 y la resultante sobre la cara *bc* es la fuerza F_2. Como los esfuerzos normales que actúan sobre la cara *ad* son mayores que los que actúan sobre la cara *bc* (debido a que el momento flexionante es mayor), la fuerza F_1 será mayor que F_2. Por tanto, los esfuerzos cortantes τ deben actuar a lo largo de la cara *cd* a fin que el elemento esté en equilibrio. Estos esfuerzos cortantes actúan paralelos a las superficies superior e inferior del

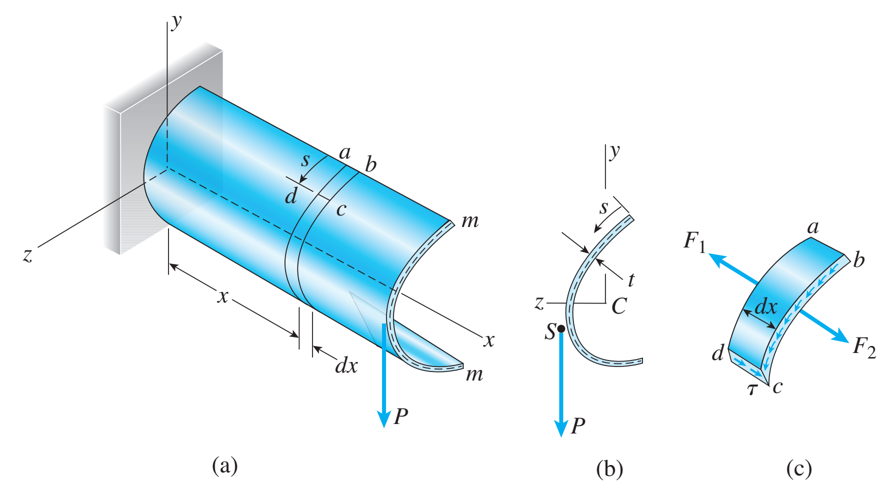


FIGURA 6.31 Esfuerzos cortantes en una viga con sección transversal abierta de pared delgada. (Los ejes y y z son ejes centroidales principales).

elemento y deben estar acompañados por esfuerzos cortantes suplementarios que actúan sobre las caras transversales *ad* y *bc*, como se muestra en la figura.

Para evaluar estos esfuerzos cortantes, sumamos las fuerzas en la dirección *x* para el elemento *abcd* (figura 6.31c); por tanto,

$$\tau t\,dx + F_2 - F_1 = 0 \quad \text{o} \quad \tau t\,dx = F_1 - F_2 \tag{a}$$

donde *t* es el espesor de la sección transversal en la cara *cd* del elemento. En otras palabras, *t* es el espesor de la sección transversal a una distancia *s* desde el borde libre (figura 6.31b). Luego obtenemos una expresión para la fuerza F_1 empleando la ecuación (6.42):

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{z1}}{I_z}\int_0^s y\,dA \tag{b}$$

donde *dA* es un elemento de área en el lado *ad* del elemento de volumen *abcd*, *y* es una coordenada para el elemento *dA* y M_{z1} es el momento flexionante en la sección transversal. Para la fuerza F_2 se obtiene una expresión análoga:

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{z2}}{I_z}\int_0^s y\,dA \tag{c}$$

Al sustituir estas expresiones para F_1 y F_2 en la ecuación (a), obtenemos

$$\tau = \left(\frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx}\right)\frac{1}{I_z t}\int_0^s y\,dA \tag{d}$$

La cantidad $(M_{z2} - M_{z1})/dx$ es la razón de cambio dM/dx del momento flexionante y es igual a la fuerza cortante que actúa sobre la sección transversal (consulte la ecuación 4.6):

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx} = V_y \tag{6.43}$$

La fuerza cortante *V* es paralela al eje *y* y es positiva en la dirección negativa del eje *y*, es decir, positiva en la dirección de la fuerza *P* (figura 6.31). Esta convención es consistente con la convención de signos adoptada antes en el capítulo 4 (consulte la figura 4.5 para ver las convenciones de signos para las fuerzas cortantes).

Al sustituir la ecuación (6.43) en la ecuación (d), obtenemos la ecuación siguiente para el esfuerzo cortante τ:

$$\tau = \frac{V_y}{I_z t}\int_0^s y\,dA \tag{6.44}$$

Esta ecuación proporciona los esfuerzos cortantes en cualquier punto en la sección transversal a una distancia *s* desde el borde libre. La integral en el lado derecho representa el momento estático con respecto al eje *z* (el eje neutro) del área de la sección transversal dada $s = 0$ hasta $s = s$. Denotemos este momento estático con *Q* para escribir la ecuación para los **esfuerzos cortantes** τ en la forma más simple

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} \tag{6.45}$$

que es análoga a la fórmula estándar del cortante (ecuación 6.41).

Los esfuerzos cortantes están dirigidos a lo largo de la línea central de la sección transversal y actúan paralelos a los bordes de la sección. Además, tácitamente supusimos que estos esfuerzos tienen una intensidad constante a través del espesor t de la pared, que es una hipótesis válida cuando el espesor es pequeño. (Observe que el espesor de la pared no necesita ser constante sino que puede variar como una función de la distancia s.)

El **flujo de cortante** en cualquier punto en la sección transversal, igual al producto del esfuerzo cortante y el espesor en ese punto, es

$$f = \tau t = \frac{V_y Q_z}{I_z} \tag{6.46}$$

Como V_y e I_z son constantes, el flujo de cortante es directamente proporcional a Q_z. En los bordes superior e inferior de la sección transversal, Q_z es cero y de aquí que el flujo de cortante también es cero. El flujo de cortante varía continuamente entre estos puntos extremos y alcanza su valor máximo donde Q_z es máximo, que es en el eje neutro.

Ahora suponga que la viga que se muestra en la figura 6.31 se flexiona por cargas que actúan paralelas al eje z y por el centro de cortante. Entonces la viga se flexionará en el plano xz y el eje y será el eje neutro. En este caso podemos repetir el mismo tipo de análisis y llegar a las ecuaciones siguientes para los esfuerzos cortantes y el flujo de cortante (compare con las ecuaciones 6.45 y 6.46):

$$\tau = \frac{V_z Q_y}{I_y t} \qquad f = \tau t = \frac{V_z Q_y}{I_y} \tag{6.47a,b}$$

En estas ecuaciones, V_z es la fuerza cortante paralela al eje z y Q_y es el momento estático con respecto al eje y.

En resumen, hemos deducido expresiones para los esfuerzos cortantes en vigas con secciones transversales abiertas de pared delgada con las estipulaciones de que la fuerza cortante debe actuar en el centro de cortante y ser paralela a uno de los ejes centroidales principales. Si la fuerza cortante está inclinada con respecto los ejes y y z (pero aún actúa en el centro de cortante) se puede descomponer en componentes paralelas a los ejes principales. Luego se hacen dos análisis separados y los resultados se superponen.

Para ilustrar el uso de las ecuaciones del esfuerzo cortante, en la sección siguiente consideraremos los esfuerzos cortantes en una viga de patín ancho. Más adelante, en la sección 6.9, utilizaremos las ecuaciones del esfuerzo cortante para ubicar los centros de cortante de varias vigas de pared delgada con secciones transversales abiertas.

6.8 ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE PATÍN ANCHO

Ahora emplearemos los conceptos y las ecuaciones analizadas en la sección anterior para investigar los esfuerzos cortantes en vigas de patín ancho. Para fines de estudio, considere la viga de patín ancho de la figura 6.32a. Esta viga está cargada por una fuerza P que actúa en el plano del alma, es decir,

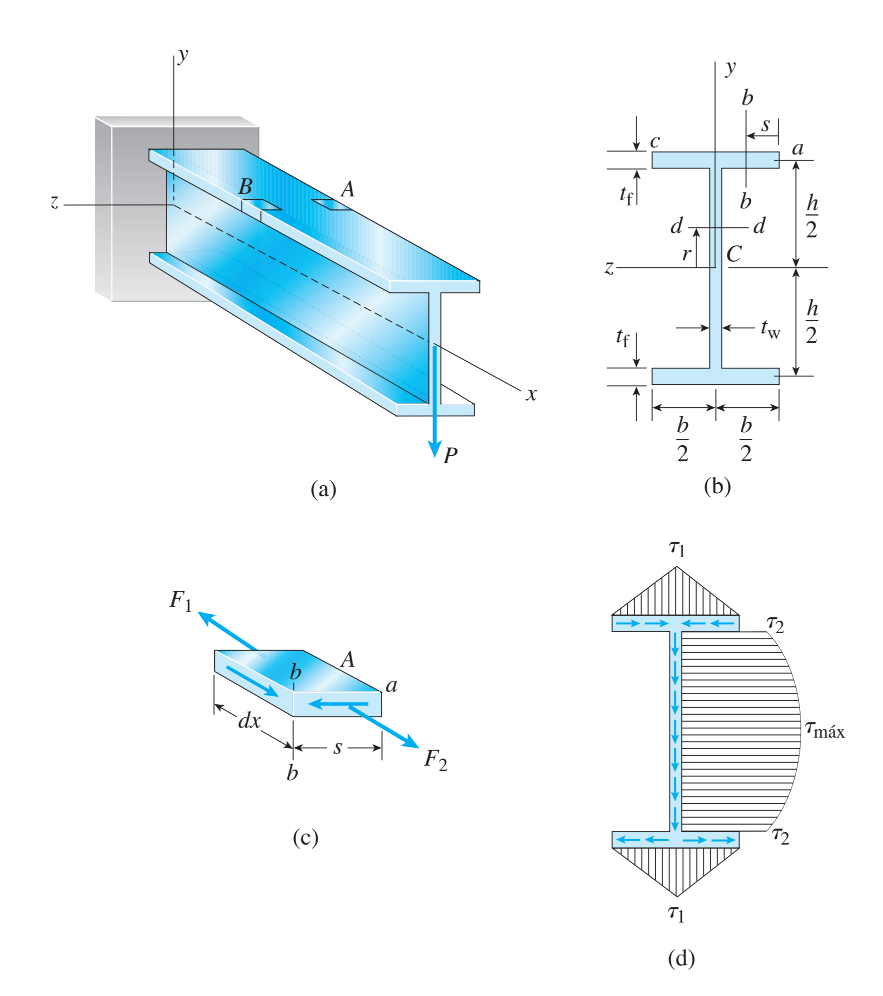


FIGURA 6.32 Esfuerzos cortantes en una viga de patín ancho.

en el centro de cortante, que coincide con el centroide de la sección transversal. Las dimensiones transversales se muestran en la figura 6.32b, donde observamos que b es el ancho del patín, h es la altura entre las *líneas centrales* de los patines, t_f es el espesor del patín y t_w es el espesor del alma.

Esfuerzos cortantes en el patín superior

Comenzamos considerando los esfuerzos cortantes en la sección bb en la parte derecha del patín superior (figura 6.32b). Como la distancia s tiene su origen en el borde de la sección (punto a), el área de la sección transversal entre el punto a y la sección bb es st_f. Además, la distancia desde el centroide de esta área hasta el eje neutro es $h/2$ y, por consiguiente, su momento estático Q_z es igual a $st_fh/2$. Por tanto, el esfuerzo cortante τ_f en el patín en la sección bb (de la ecuación 6.45) es

$$\tau_f = \frac{V_yQ_z}{I_zt} = \frac{P(st_fh/2)}{I_zt_f} = \frac{shP}{2I_z} \tag{6.48}$$

La dirección de este esfuerzo se puede determinar al examinar las fuerzas que actúan sobre el elemento *A*, que está cortado del patín entre el punto *a* y la sección *bb* (consulte las figuras 6.32a y b).

El elemento está dibujado a una escala más grande en la figura 6.32c a fin de mostrar con claridad las fuerzas y los esfuerzos que actúan sobre él. Reconocemos de inmediato que la fuerza de tensión F_1 es mayor que la fuerza F_2, debido a que el momento flexionante es mayor sobre la cara posterior del elemento que sobre la cara anterior. Se deduce que el esfuerzo cortante sobre la cara izquierda del elemento *A* debe actuar hacia el lector para que el elemento esté en equilibrio. A partir de esta observación se deduce que los esfuerzos cortantes sobe la cara frontal del elemento *A* deben actuar hacia la izquierda.

Regresando ahora a la figura 6.32b, vemos que hemos determinado por completo la magnitud y la dirección del esfuerzo cortante en la sección *bb*, que se puede ubicar en cualquier parte entre el punto *a* y la unión del patín superior y el alma. Por tanto, los esfuerzos cortantes en toda la parte derecha del patín son horizontales, actúan hacia la izquierda y tienen la magnitud dada por la ecuación (6.48). Como se puede observar de la ecuación, los esfuerzos cortantes aumentan en forma lineal con la distancia *s*.

La variación de los esfuerzos en el patín derecho se muestra de forma gráfica en la figura 6.32, donde observamos que los esfuerzos varían desde cero en el punto *a* (donde $s = 0$) hasta un valor máximo τ_1 en $s = b/2$:

$$\tau_1 = \frac{bhP}{4I_z} \tag{6.49}$$

El flujo de cortante correspondiente es

$$f_1 = \tau_1 t_f = \frac{bht_f P}{4I_z} \tag{6.50}$$

Observe que hemos calculado el esfuerzo cortante y el flujo de cortante en la unión de las *líneas centrales* del patín y el alma, empleando en los cálculos sólo las dimensiones hasta la línea central de la sección transversal. Este procedimiento aproximado simplifica los cálculos y es satisfactorio para secciones transversales de pared delgada.

Al empezar en el punto *c* en la parte izquierda del patín superior (figura 6.32b) y midiendo *s* hacia la derecha, podemos repetir el mismo tipo de análisis. Encontraremos que la magnitud de los esfuerzos cortantes está de nuevo dada por las ecuaciones (6.48) y (6.49). Sin embargo, cortando un elemento *B* (figura 6.32a) y al considerar su equilibrio determinamos que los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal ahora actúan hacia la derecha, como se muestra en la figura 6.32d.

Esfuerzos cortantes en el alma

El paso siguiente es determinar los esfuerzos cortantes que actúan en el alma. Considerando un corte horizontal en la parte superior del alma (en la unión del patín y el alma), encontramos que el momento estático con respecto al eje neutro es $Q_z = bt_f/2$, de manera que el esfuerzo cortante correspondiente es

$$\tau_2 = \frac{bht_f P}{2I_z t_w} \tag{6.51}$$

El flujo de cortante asociado es

$$f_2 = \tau_2 t_w = \frac{bht_f P}{2I_z} \tag{6.52}$$

Observe que el flujo de cortante f_2 es igual al doble del flujo de cortante f_1, lo que se esperaba, ya que los flujos de cortante en las dos mitades del patín superior se combinan para producir el flujo de cortante en la parte superior del alma.

Los esfuerzos cortantes en el alma actúan hacia abajo y aumentan su magnitud hasta que se alcanza el eje neutro. En la sección *dd*, ubicado a una distancia *r* desde el eje neutro (figura 6.32b), el esfuerzo cortante τ_w en el alma se calcula como sigue:

$$Q_z = \frac{bt_f h}{2} + \left(\frac{h}{2} - r\right)(t_w)\left(\frac{h/2 + r}{2}\right) = \frac{bt_f h}{2} + \frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

$$\tau_w = \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)\frac{P}{2I_z} \tag{6.53}$$

Cuando $r = h/2$ esta ecuación se reduce a la ecuación (6.51) y cuando $r = 0$ da el esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{máx} = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{4}\right)\frac{Ph}{2I_z} \tag{6.54}$$

Una vez más se debe observar que hemos hecho todos los cálculos con base en las dimensiones hasta la línea central de la sección transversal. Por esta razón, los esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho calculados con la ecuación (6.53) pueden ser ligeramente diferentes de los obtenidos mediante el análisis más exacto hecho en el capítulo 5 (consulte la ecuación 5.46 de la sección 5.10).

Los esfuerzos cortantes en el alma varían parabólicamente, como se muestra en la figura 6.32d, aunque la variación no es grande. La razón entre de $\tau_{máx}$ y τ_2 es

$$\frac{\tau_{máx}}{\tau_2} = 1 + \frac{ht_w}{4bt_f} \tag{6.55}$$

Por ejemplo, si suponemos $h = 2b$ y $t_f = 2t_w$, la razón es $\tau_{máx}/\tau_2 = 1.25$.

Esfuerzos cortantes en el patín inferior

Como paso final en el análisis, podemos investigar los esfuerzos cortantes en el patín inferior al emplear los mismos métodos que utilizamos para el patín superior. Encontraremos que las magnitudes de los esfuerzos son las mismas que en el patín superior, pero las direcciones son como se muestra en la figura 6.32d.

Comentarios generales

En la figura 6.32d observamos que los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal "fluyen" hacia dentro desde los bordes exteriores del patín superior, luego hacia abajo por el alma y por último hacia fuera hasta los bordes del patín inferior. Como este flujo siempre es continuo en cualquier sección estructural, sirve como un método conveniente para determinar las direccio-

nes de los esfuerzos. Por ejemplo, si la fuerza cortante actúa hacia abajo sobre la viga de la figura 6.32a, sabemos de inmediato que el flujo de cortante en el alma también debe ser hacia abajo. Al conocer la dirección del flujo de cortante en el alma también conocemos las direcciones de los flujos de cortante en los patines debido a la continuidad requerida en el flujo. Emplear esta técnica simple para obtener las direcciones de los esfuerzos cortantes es más fácil que visualizar las direcciones de las fuerzas que actúan sobre elementos como el *A* (figura 6.32c) cortado de la viga.

Es obvio que la resultante de todos los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal que es una fuerza vertical, ya que los esfuerzos horizontales en los patines no producen resultante. Los esfuerzos cortantes en el alma tienen una resultante R que se puede calcular integrando los esfuerzos cortantes sobre la altura del alma, como se muestra:

$$R = \int \tau \, dA = 2\int_0^{h/2} \tau t_w \, dr$$

Al sustituir de la ecuación (6.53), obtenemos

$$R = 2t_w \int_0^{h/2} \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right)\left(\frac{P}{2I_z}\right) dr = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{6}\right)\frac{h^2 t_w P}{2I_z} \qquad (6.56)$$

El momento de inercia I_z se puede calcular como sigue (empleando las dimensiones hasta la línea central):

$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bt_f h^2}{2} \qquad (6.57)$$

en donde el primer término es el momento de inercia del alma y el segundo término es el momento de inercia de los patines. Cuando esta expresión para I_z se sustituye en la ecuación (6.56), obtenemos $R = P$, que demuestra que la resultante de los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal es igual a la carga. Además, la línea de acción de la resultante está en el plano del alma, y por tanto la resultante pasa por el centro de cortante.

El análisis anterior proporciona un panorama más completo de los esfuerzos cortantes en una viga de patín ancho o I debido a que incluye los patines (recuerde que en el capítulo 5 investigamos sólo los esfuerzos cortantes en el alma). Además, este análisis ilustra las técnicas generales para determinar los esfuerzos cortantes en vigas con sección transversal abierta de pared delgada. Otros ejemplos se pueden encontrar en la sección siguiente, donde se determinan los esfuerzos cortantes en una sección en canal y en una sección en ángulo como parte del proceso de ubicación de sus centros de cortante.

6.9 CENTROS DE CORTANTE EN SECCIONES ABIERTAS DE PARED DELGADA

En las secciones 6.7 y 6.8 desarrollamos métodos para determinar los esfuerzos cortantes en vigas con sección transversal abierta de pared delgada. Ahora utilizaremos esos métodos para ubicar los centros de cortante de varios perfiles de vigas.

Sólo se considerarán las vigas con secciones transversales con un eje de simetría o asimétricas, debido a que ya sabemos que el centro de cortante de una sección transversal doblemente simétrica está ubicado en el centroide.

El procedimiento para ubicar el centro de cortante consiste de dos pasos: primero, evaluar los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal cuando ocurre flexión con respecto a uno de los ejes principales y, segundo, determinar la resultante de esos esfuerzos. El centro de cortante está ubicado en la línea de acción de la resultante. Al considerar la flexión con respecto a los *dos* ejes principales, podemos determinar la posición del centro de cortante.

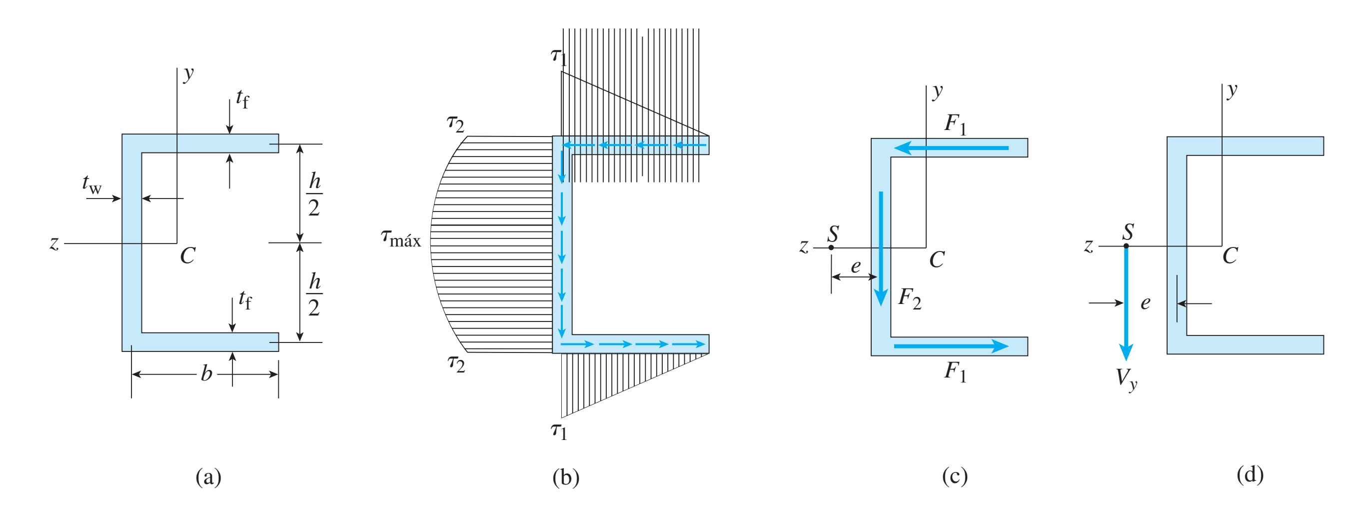
Igual que en las secciones 6.7 y 6.8, al deducir las fórmulas y hacer los cálculos sólo utilizaremos las dimensiones hasta la línea central. Este procedimiento es satisfactorio si la viga es de parad delgada, es decir, si el espesor de la viga es pequeño comparado con las otras dimensiones de la sección transversal.

Secciones en canal

La primera viga que analizaremos es una sección en canal con un solo eje de simetría (figura 6.33a). Del análisis general en la sección 6.6 sabemos de inmediato que el centro de cortante está ubicado en el eje de simetría (el eje z). Para encontrar la posición del centro de cortante en el eje z, suponemos que la viga se flexiona con respecto al eje z como el eje neutro y luego determinamos la línea de acción de la fuerza cortante resultante V_y que actúa paralela al eje y. El centro de cortante está ubicado donde la línea de acción de V_y interseca al eje z. (Observe que el origen de los ejes está en el centroide C, de manera que y y z son ejes centroidales principales).

Con base en los análisis hechos en la sección 6.8, concluimos que los esfuerzos cortantes en una sección en canal varían linealmente en los patines y parabólicamente en el alma (figura 6.33b). Podemos encontrar la resultante de estos esfuerzos si conocemos el esfuerzo máximo τ_1 en el patín, el esfuerzo τ_2 en la parte superior del alma y el esfuerzo máximo $\tau_{máx}$ en el alma.

FIGURA 6.33 Centro de cortante S de una sección en canal.



Para encontrar el esfuerzo τ_1 en el patín, empleamos la ecuación (6.45) con Q_z igual al momento estático del área del patín con respecto al eje z:

$$Q_z = \frac{bt_f h}{2} \qquad \text{(a)}$$

en donde b es el ancho del patín, t_f es el espesor del patín y h es la altura de la viga. (Observe de nuevo que las dimensiones b y h están medidas a lo largo de la línea central de la sección.) Por tanto, el esfuerzo τ_1 en el patín es

$$\tau_1 = \frac{V_y Q_z}{I_z t_f} = \frac{bhV_y}{2I_z} \qquad (6.58)$$

donde I_z es el momento de inercia con respecto al eje z.

El esfuerzo τ_2 en la parte superior del alma se obtiene de manera similar, pero con el espesor igual al espesor del alma en lugar del espesor del patín:

$$\tau_2 = \frac{V_y Q_z}{I_z t_w} = \frac{bt_f hV_y}{2t_w I_z} \qquad (6.59)$$

Además, en el eje neutro el momento estático del área es

$$Q_z = \frac{bt_f h}{2} + \frac{ht_w}{2}\left(\frac{h}{4}\right) = \left(bt_f + \frac{ht_w}{4}\right)\frac{h}{2} \qquad \text{(b)}$$

Por tanto, el esfuerzo máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_y Q_z}{I_z t_w} = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{4}\right)\frac{hV_y}{2I_z} \qquad (6.60)$$

Los esfuerzos τ_1 y τ_2 en la mitad inferior de la viga son iguales a los esfuerzos correspondientes en la mitad superior (figura 6.33b).

La fuerza cortante horizontal F_1 en cualquiera de los patines (figura 6.33c) se puede encontrar a partir de los diagramas triangulares de esfuerzo. Cada fuerza es igual al área del triángulo de esfuerzo multiplicada por el espesor del patín:

$$F_1 = \left(\frac{\tau_1 b}{2}\right)(t_f) = \frac{hb^2 t_f V_y}{4I_z} \qquad (6.61)$$

La fuerza vertical F_2 en el alma debe ser igual a la fuerza cortante V_y, ya que las fuerzas en los patines no tienen componentes verticales. Como verificación, podemos comprobar si $F_2 = V_y$ considerando el diagrama parabólico de esfuerzos de la figura 6.33b. El diagrama consta de dos parte: un rectángulo de área $\tau_2 h$ y un segmento parabólico de área

$$\frac{2}{3}(\tau_{\text{máx}} - \tau_2)h$$

Por tanto, la fuerza cortante F_2, igual al área del diagrama de esfuerzos por el espesor del alma t_w, es

$$F_2 = \tau_2 ht_w + \frac{2}{3}(\tau_{\text{máx}} - \tau_2)ht_w$$

Al sustituir las expresiones para τ_2 y $\tau_{\text{máx}}$ (ecuaciones 6.59 y 6.60) en la ecuación anterior, obtenemos

$$F_2 = \left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2}\right)\frac{V_y}{I_z} \qquad \text{(c)}$$

Por último, observamos que la expresión para el momento de inercia es

$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \qquad (6.62)$$

en donde de nuevo basamos los cálculos en las dimensiones hasta la línea central. Si sustituimos esta expresión para I_z en la ecuación (c) para F_2, obtenemos

$$F_2 = V_y \qquad \text{(d)}$$

como se esperaba.

Las tres fuerzas que actúan sobre la sección transversal (figura 6.33c) tienen una resultante V_y que interseca el eje z en el centro de cortante S (figura 6.33d). Por tanto, el momento de las tres fuerzas con respecto a cualquier punto en la sección transversal debe ser igual al momento de la fuerza V_y con respecto al mismo punto. Esta relación entre momentos proporciona una ecuación a partir de la cual se puede determinar el centro de cortante.

Como ilustración, seleccionemos el propio centro de cortante como el centro de momentos. En ese caso el momento de las tres fuerzas (figura 6.33c) es $F_1h - F_2e$, donde e es la distancia desde la línea central del alma hasta el centro de cortante y el momento de la fuerza resultante V_y es cero (figura 6.33d). Al igualar estos momentos da

$$F_1 h - F_2 e = 0 \qquad (6.63)$$

Al sustituir F_1 en la ecuación (6.61) y F_2 en la ecuación (d) y luego despejamos e, obtenemos

$$e = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I_z} \qquad (6.64)$$

Cuando se sustituye la expresión para I_z (ecuación 6.62), la ecuación (6.64) se transforma en

$$e = \frac{3b^2 t_f}{ht_w + 6bt_f} \qquad (6.65)$$

Por tanto, hemos determinado la posición del centro de cortante de una sección en canal.

Como se explicó en la sección 6.6, una viga de sección en canal experimentará flexión sin torsión siempre que se cargue con fuerzas que actúen en el centro de cortante. Si las cargas actúan paralelas al eje y pero en algún punto que no sea el centro de cortante (por ejemplo, si las cargas actúan en el plano del alma), pueden reemplazarse con un sistema de fuerzas estática-

mente equivalente que consista de cargas en el centro de cortante y pares de torsión. Entonces tenemos una combinación de flexión y torsión de la viga. Si las cargas actúan a lo largo del eje z, tenemos flexión simple con respecto al eje y; si actúan inclinadas y pasan por el centro de cortante, pueden reemplazarse con cargas estáticamente equivalentes que actúen paralelas a los ejes y y z.

Sección en ángulo

El perfil siguiente que consideraremos es una sección en ángulo con lados iguales (figura 6.34a), en donde cada lado del ángulo tiene longitud b y espesor t. El eje z es un eje de simetría y el origen de las coordenadas está en el centroide C; por tanto, y y z son ejes centroidales principales.

Para ubicar el centro de cortante, seguiremos el mismo procedimiento general descrito para una sección en canal, ya que queremos determinar la distribución de los esfuerzos cortantes como parte del análisis. Sin embargo, como veremos más adelante, el centro de cortante de una sección en ángulo puede establecerse por inspección.

Comenzamos suponiendo que la sección está sometida a una fuerza cortante V_y que actúa paralela al eje y. Luego empleamos la ecuación (6.45) para encontrar los esfuerzos cortantes correspondientes en los lados del ángulo. Para este fin necesitamos el momento estático del área de la sección transversal entre el punto a en el borde exterior de la viga (figura 6-34b) y la sección bb ubicada a una distancia s desde el punto a. El área es igual a st y su distancia centroidal desde el eje neutro es

$$\frac{b - s/2}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, el momento estático del área es

$$Q_z = st\left(\frac{b - s/2}{\sqrt{2}}\right) \tag{6.66}$$

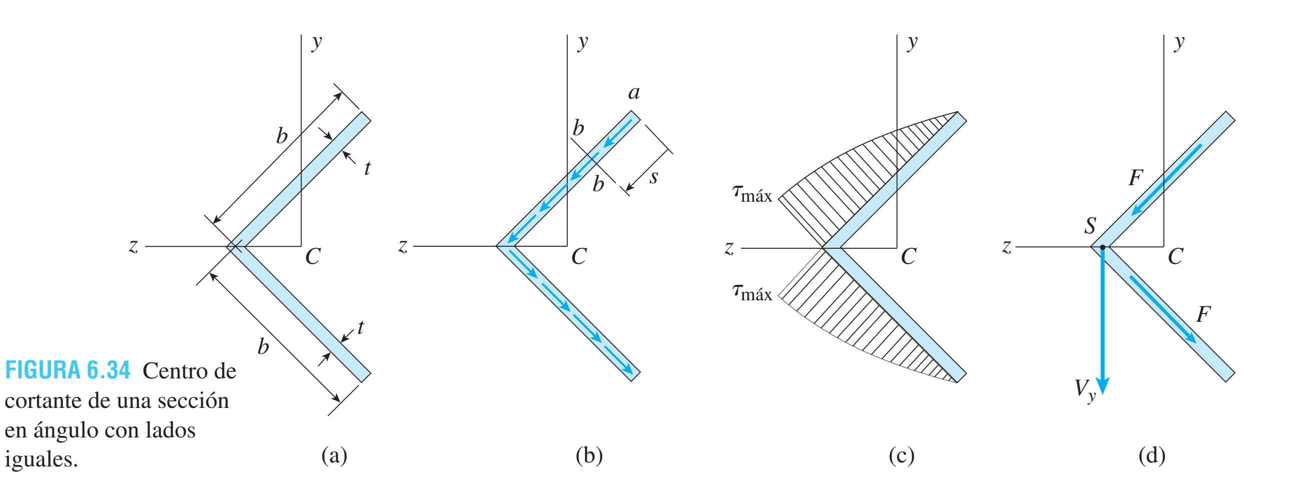
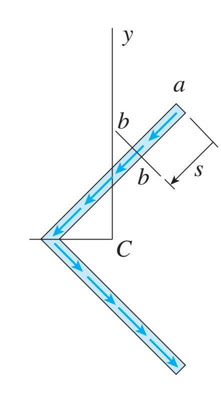
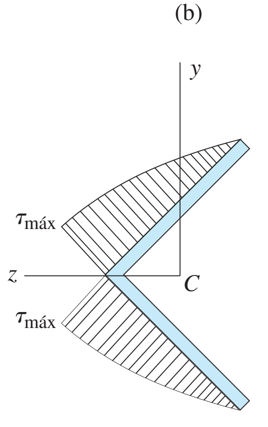


FIGURA 6.34 Centro de cortante de una sección en ángulo con lados iguales.





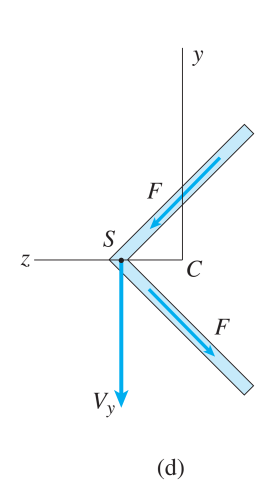


FIGURA 6.34 b, c, d (Repetida).

Al sustituir en la ecuación (6.45), obtenemos la expresión siguiente para el esfuerzo cortante a una distancia s desde el borde de la sección transversal:

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} = \frac{V_y s}{I_z \sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right) \tag{6.67}$$

El momento de inercia I_z se puede obtener del caso 24 del apéndice D con $\beta = 45°$:

$$I_z = 2I_{BB} = 2\left(\frac{tb^3}{6}\right) = \frac{tb^3}{3} \tag{6.68}$$

Sustituimos esta expresión para I_z en la ecuación (6.67), y obtenemos

$$\tau = \frac{3V_y s}{b^3 t \sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right) \tag{6.69}$$

Esta ecuación da el esfuerzo cortante en cualquier punto a lo largo del lado del ángulo. El esfuerzo varía de forma cuadrática con s, como se muestra en la figura 6.34c.

El valor máximo del esfuerzo cortante ocurre en la intersección de los lados del ángulo y se obtiene con la ecuación (6.69) sustituyendo $s = b$:

$$\tau_{máx} = \frac{3V_y}{2bt\sqrt{2}} \tag{6.70}$$

La fuerza cortante F en cada lado (figura 6.34d) es igual al área del diagrama parabólico de esfuerzos (figura 6.34c) multiplicada por el espesor t de los lados:

$$F = \frac{2}{3}(\tau_{máx} b)(t) = \frac{V_y}{\sqrt{2}} \tag{6.71}$$

Como las componentes horizontales de las fuerzas F se cancelan entre sí, sólo permanecen componentes verticales. Cada componente vertical es igual a $F/\sqrt{2}$, o $V_y/2$, y por tanto la fuerza resultante vertical es igual a la fuerza cortante V_y, tal como se esperaba.

Puesto que la fuerza resultante pasa por el punto de intersección de las líneas de acción de las dos fuerzas F (figura 6.34d), observamos que el centro de cortante S está ubicado en la unión de los dos lados del ángulo.

Secciones que consisten de dos rectángulos angostos que se intersecan

En el análisis anterior de una sección en ángulo evaluamos los esfuerzos cortantes y las fuerzas en los lados a fin de ilustrar la metodología general para analizar secciones abiertas de pared delgada. Sin embargo, si nuestro único objetivo hubiera sido ubicar el centro de cortante, no hubiera sido necesario evaluar los esfuerzos y las fuerzas.

Dado que los esfuerzos cortantes son paralelos a las líneas centrales de los lados (figura 6.34b), hubiéramos sabido de inmediato que sus resultantes son dos fuerzas F (figura 6.34d). La resultante de estas dos fuerzas es

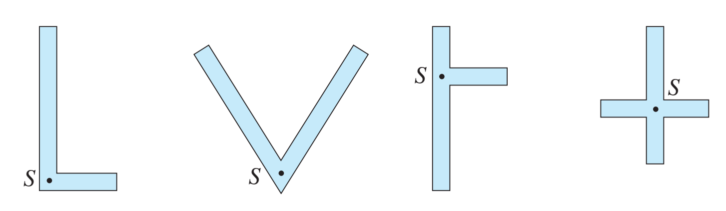


FIGURA 6.35 Centros de cortante de secciones que consisten en dos rectángulos angostos que se intersecan.

una sola fuerza que pasa por su punto de intersección. En consecuencia, este punto es el centro de cortante. Por tanto, es posible determinar la ubicación del centro de cortante de una sección en ángulo con lados iguales mediante una línea simple de razonamiento (*sin* hacer cálculos).

La misma línea de razonamiento es válida para todas las secciones transversales que consistan de dos rectángulos delgados que se intersecan (figura 6.35). En cada caso las resultantes de los esfuerzos cortantes son fuerzas que se intersecan en la unión de los rectángulos. Por tanto, el centro de cortante *S* se localiza en ese punto.

Sección Z

Ahora determinemos la ubicación del centro de cortante de una sección Z de paredes delgadas (figura 6.36a). La sección no tiene ejes de simetría pero es simétrica con respecto al centroide *C* (consulte la sección 12.2 del capítulo 12 para ver un análisis de la *simetría con respecto a un punto*). Los ejes *y* y *z* son ejes principales que pasan por el centroide.

Comenzamos suponiendo que una fuerza cortante V_y actúa paralela al eje *y* y que ocasiona flexión con respecto al eje *z* como el eje neutro. Entonces los esfuerzos cortantes en los patines y el alma estarán dirigidos como se muestra en la figura 6.36a. A partir de consideraciones de simetría concluimos que las fuerzas F_1 en los dos patines deben ser iguales entre sí (figura 6.36b). La resultante de las fuerzas que actúan sobre la sección transversal (F_1 en los patines y F_2 en el alma) debe ser igual a la fuerza cortante V_y. Las fuerzas F_1 poseen una resultante $2F_1$ que actúa en el centroide y es paralela a los patines. Esta fuerza interseca la fuerza F_2 en el centroide *C* y, por tanto, concluimos que la línea de acción de la fuerza cortante V_y debe pasar por el centroide.

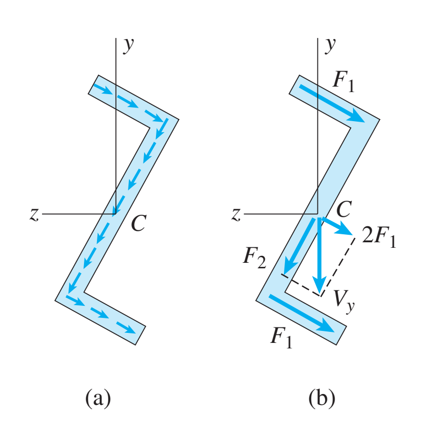


FIGURA 6.36 Centro de cortante de una sección Z de pared delgada.

Si la viga se somete a una fuerza cortante V_z paralela al eje *z* llegamos a una conclusión similar, a saber, que la fuerza cortante actúa en el centroide. Como el centro de cortante se ubica en la intersección de las líneas de acción de las dos fuerzas cortantes, concluimos que el centro de cortante de la sección Z coincide con el centroide.

Esta conclusión se aplica a cualquier sección Z que sea simétrica con respecto al centroide, es decir, cualquier sección Z que tenga patines idénticos (mismo ancho y mismo espesor). Sin embargo, observe que el espesor del alma no tiene que ser igual al espesor de los patines.

Las ubicaciones de los centros de cortante de muchos otros perfiles estructurales se dan en los problemas al final de este capítulo.*

*La primera determinación de un centro de cortante la realizó S.P. Timoshenko en 1913 (referencia 6.1).

Ejemplo 6.8

Una sección transversal semicircular de pared delgada con radio r y espesor t se muestra en la figura 6.37a. Determine la distancia e desde el centro O del semicírculo hasta el centro de cortante S.

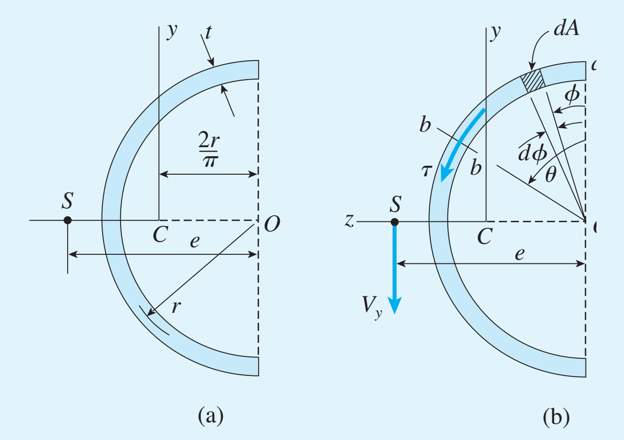


FIGURA 6.37 Ejemplo 6.8. Centro de cortante de una sección semicircular de pared delgada.

Solución

De inmediato sabemos que el centro de cortante está ubicado en algún punto en el eje de simetría (el eje z). Para determinar la posición exacta, suponemos que la viga se flexiona por una fuerza cortante V_y que actúa paralela al eje y y produce flexión con respecto al eje z como el eje neutro (figura 6.37b).

Esfuerzos cortantes. El primer paso es determinar los esfuerzos cortantes τ que actúan sobre la sección transversal (figura 6.37b). Consideramos una sección bb definida por la distancia s medida a lo largo de la línea central de la sección transversal desde el punto a. El ángulo central subtendido entre el punto a y la sección bb está denotado por θ. Por tanto, la distancia s es igual a $r\theta$, donde r es el radio hasta la línea central y θ se mide en radianes.

Para evaluar el momento estático del área de la sección transversal entre el punto a y la sección bb, identificamos un elemento de área dA (se muestra sombreado en la figura) e integramos como se indica:

$$Q_z = \int y\,dA = \int_0^{\theta} (r\cos\phi)(tr\,d\phi) = r^2 t \operatorname{sen}\theta \tag{e}$$

en donde ϕ es el ángulo al elemento de área y t es el espesor de la sección. Por tanto, el esfuerzo cortante τ en la sección bb es

$$\tau = \frac{V_y Q_z}{I_z t} = \frac{V_y r^2 \operatorname{sen}\theta}{I_z} \tag{f}$$

Al sustituir $I_z = \pi r^3 t/2$ (caso 22 o caso 23 del apéndice D), obtenemos

$$\tau = \frac{2V_y \operatorname{sen}\theta}{\pi r t} \tag{6.72}$$

Cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, esta expresión da $\tau = 0$, como se esperaba. Cuando $\theta = \pi/2$, proporciona el esfuerzo cortante máximo.

Ubicación del centro de cortante. La resultante de los esfuerzos cortantes debe ser la fuerza cortante vertical V_y. Por tanto, el momento M_0 de los esfuerzos cortantes con respecto al centro O debe ser igual al momento de la fuerza V_y con respecto a ese mismo punto:

$$M_0 = V_y e \tag{g}$$

Para evaluar M_0, iniciamos observando que el esfuerzo cortante τ que actúa sobre el elemento de área dA (figura 6.37b) es

$$\tau = \frac{2V_y \operatorname{sen} \phi}{\pi r t}$$

como se encontró con la ecuación (6.72). La fuerza correspondiente es $\tau\ dA$ y el momento de esta fuerza es

$$dM_0 = r(\tau dA) = \frac{2V_y \operatorname{sen} \phi\, dA}{\pi t}$$

Como $dA = tr\ d\phi$, esta expresión se convierte en

$$dM_0 = \frac{2rV_y \operatorname{sen} \phi\, d\phi}{\pi}$$

Por tanto el momento generado por los esfuerzos cortantes es

$$M_0 = \int dM_0 = \int_0^{\pi} \frac{2rV_y \operatorname{sen} \phi\, d\phi}{\pi} = \frac{4rV_y}{\pi} \tag{h}$$

De la ecuación (g) se deduce que la distancia e hasta el centro de cortante es

$$e = \frac{M_0}{V_y} = \frac{4r}{\pi} \approx 1.27r \tag{6.73}$$

Este resultado muestra que el centro de cortante S se localiza fuera de la sección semicircular.

Nota: la distancia desde el centro O del semicírculo hasta el centroide C de la sección transversal (figura 6.37a) es $2r/\pi$ (del caso 23 del apéndice D), que es la mitad de la distancia e. Así pues, el centroide se ubica a la mitad entre el centro de cortante y el centro del semicírculo.

La posición del centro de cortante en un caso más general de una sección circular de pared delgada se determina en el problema 6.9.13.

*6.10 FLEXIÓN ELASTOPLÁSTICA

En nuestros análisis anteriores de flexión supusimos que las vigas estaban hechas de materiales que seguían la ley de Hooke (materiales linealmente elásticos). Ahora consideraremos la flexión de vigas elastoplásticas cuando en el material los esfuerzos exceden la región lineal. Cuando esto sucede, la distribución de los esfuerzos ya no es lineal, sino que varía de acuerdo con la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria.

Los **materiales elastoplásticos** se estudiaron antes cuando analizamos barras cargadas axialmente en la sección 2.12. Como se explica en

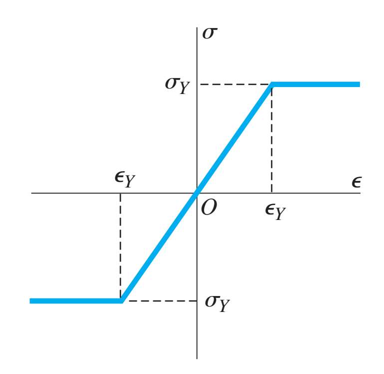


FIGURA 6.38 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria idealizado para un material elastoplástico.

esta sección, los materiales elastoplásticos siguen la ley de Hooke hasta el esfuerzo de fluencia σ_Y y luego fluyen plásticamente ante un esfuerzo constante (consulte el diagrama esfuerzo-deformación unitaria de la figura 6.38). En la figura observamos que un material elastoplástico tiene una región de elasticidad lineal entre regiones de plasticidad perfecta. En toda esta sección, supondremos que el material tiene el mismo esfuerzo de fluencia σ_Y y la misma deformación unitaria de fluencia ϵ_Y tanto en tensión como en compresión.

Los aceros estructurales son ejemplos excelentes de materiales elastoplásticos dado que tienen puntos de fluencia bien definidos y experimentan grandes deformaciones unitarias durante la fluencia. A la larga, los aceros empiezan a endurecerse por deformación y entonces la suposición de plasticidad perfecta ya no es válida. Sin embargo, el endurecimiento por deformación proporciona un aumento en resistencia y, por tanto, la suposición de plasticidad perfecta está en el lado seguro.

Momento de fluencia

Consideremos una viga de material elastoplástico sometida a un momento flexionante M que ocasiona flexión en el plano xy (figura 6.39). Cuando el momento flexionante es pequeño, el esfuerzo máximo en la viga es menor que el esfuerzo de fluencia σ_Y y, por tanto, la viga está en la misma condición que una viga ordinaria en flexión elástica ordinaria con una distribución lineal de esfuerzos, como se muestra en la figura 6.40b. En estas condiciones el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal y los esfuerzos normales se obtienen con la fórmula de la flexión ($\sigma = -M_y/I$). Como el momento flexionantes es positivo, los esfuerzos son de compresión arriba del eje z y de tensión debajo de éste.

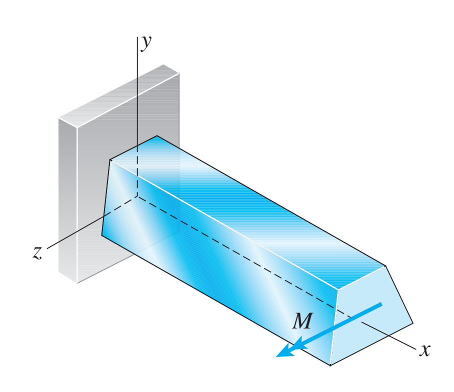


FIGURA 6.39 Viga de material elastoplástico sometida a un momento flexionante positivo M.

Las condiciones anteriores existen hasta que el esfuerzo en la viga en el punto más alejado del eje neutro alcanza el esfuerzo de fluencia σ_Y, sea en tensión o en compresión (figura 6.40c). El momento flexionante en la viga cuando el esfuerzo máximo apenas alcanza el esfuerzo de fluencia, denominado **momento de fluencia** M_Y, se obtiene con la fórmula de la flexión:

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \sigma_Y S \qquad (6.74)$$

en donde c es la distancia hasta el punto más alejado desde el eje neutro y S es el módulo de sección correspondiente.

Momento plástico y eje neutro

Si ahora aumentamos el momento flexionante más allá del momento de fluencia M_Y, las deformaciones unitarias en la viga continuarán aumentando y la deformación unitaria máxima excederá la deformación unitaria de fluencia ϵ_Y. Sin embargo, debido a la fluencia perfectamente plástica, el esfuerzo máximo permanecerá constante e igual a σ_Y, como se representa en la figura 6.40d. Observe que las regiones exteriores de la viga se han plastificado por completo mientras que un núcleo central (denominado **núcleo elástico**) permanece linealmente elástico.

Si z no es un eje de simetría (sección transversal con un solo eje de simetría), el eje neutro se alejará del centroide cuando se rebase el momento de fluencia. Este desplazamiento en la ubicación del eje neutro no es grande

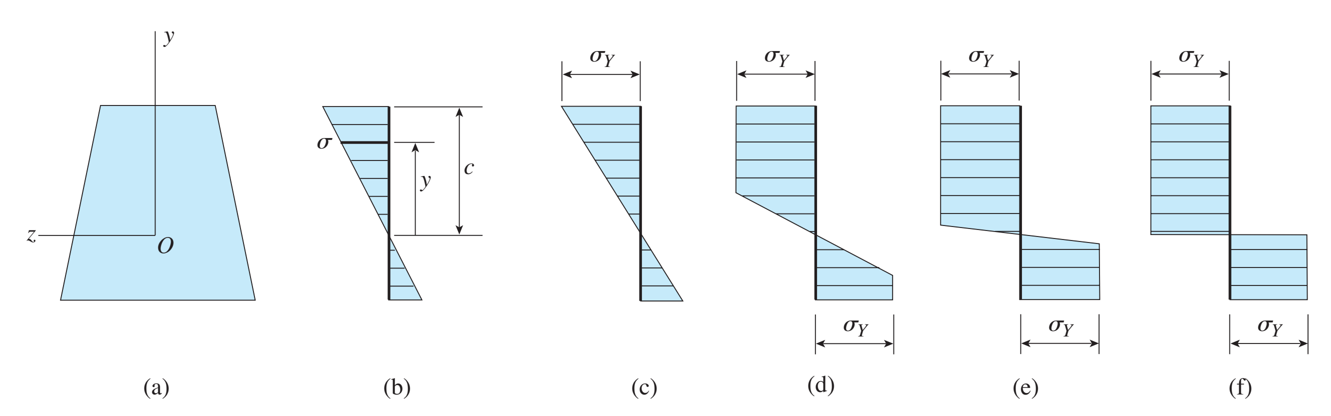


FIGURA 6.40 Distribuciones de esfuerzo en una viga de material elastoplástico.

y en el caso de la sección transversal trapezoidal de la figura 6.40, es demasiado pequeño para verlo en la figura. Si la sección transversal es doblemente simétrica, el eje neutro pasa por el centroide aun cuando el momento de fluencia se haya excedido.

Conforme aumenta aún más el momento flexionante, la región plástica se agranda y se mueve hacia adentro hacia el eje neutro hasta que se alcanza la condición que se muestra en la figura 6.40e. En esta etapa la deformación unitaria máxima en la viga (a la distancia más alejada desde el eje neutro) es tal vez 10 o 15 veces la deformación unitaria de fluencia ϵ_Y y el núcleo elástico casi ha desaparecido. Por tanto, para fines prácticos la viga ha alcanzado su capacidad última de resistencia de momento y podemos idealizar la distribución última de los esfuerzos como si consistiera de dos partes rectangulares (figura 6.40f). El momento flexionante que corresponde a esta distribución idealizada de esfuerzos, denominada **momento plástico** M_P**,** representa el momento máximo que puede soportar una viga de material elastoplástico.

Para encontrar el momento plástico M_P, comenzamos ubicando el **eje neutro** de la sección transversal en condiciones completamente plásticas. Para este fin, considere la sección transversal que se muestra en la figura 6.41a y que z es el eje neutro. Cada punto en la sección transversal arriba del eje neutro está sometido a un esfuerzo de compresión σ_Y (figura 6.41b) y cada punto debajo del eje neutro está sometido a un esfuerzo de tensión σ_Y. La fuerza de compresión resultante C es igual a σ_Y multiplicado por el área de la sección transversal A_1 arriba del eje neutro (figura 6.41a) y la fuerza de tensión resultante T es igual a σ_Y multiplicado por el área A_2 debajo del eje neutro. Dado que la fuerza resultante que actúa sobre la sección transversal es cero, se deduce que

$$T = C \quad \text{o} \quad A_1 = A_2 \tag{a}$$

Como el área total A de la sección transversal es igual a $A_1 + A_2$, tenemos que

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \tag{6.75}$$

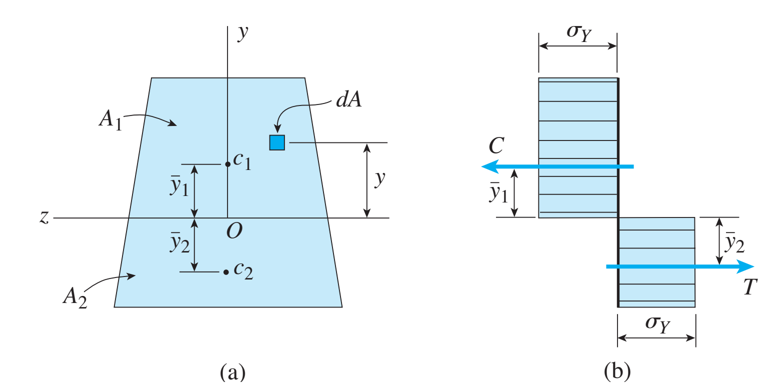


FIGURA 6.41 Ubicación del eje neutro y determinación del momento plástico M_P en condiciones completamente plásticas.

Por tanto, en condiciones completamente plásticas, **el eje neutro divide la sección transversal en dos áreas iguales.**

Como resultado, la posición del eje neutro para el momento plástico M_P puede ser diferente de su ubicación para flexión linealmente elástica. Por ejemplo, en el caso de una sección transversal trapezoidal que es más angosta en la parte superior que en la inferior (figura 6.41a), el eje neutro para flexión completamente plástica está ligeramente por debajo del eje neutro para flexión linealmente elástica.

Puesto que el momento plástico M_P es el momento resultante de los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal, éste se puede encontrar integrando sobre el área A de la sección transversal (figura 6.41a):

$$\begin{aligned} M_P &= -\int_A \sigma y\, dA = -\int_{A_1} (-\sigma_Y) y\, dA - \int_{A_2} \sigma_Y y\, dA \\ &= \sigma_Y(\bar{y}_1 A_1) - \sigma_Y(-\bar{y}_2 A_2) = \frac{\sigma_Y A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} \end{aligned} \tag{b}$$

en donde y es la coordenada (positiva hacia arriba) del elemento de área dA y y_1 y y_2 son las distancias desde el eje neutro hasta los centroides c_1 y c_2 de las áreas A_1 y A_2, respectivamente.

Una forma más fácil para obtener el momento plástico es evaluar los momentos con respecto al eje neutro de las fuerzas C y T (figura 6.41b):

$$M_P = C\,\bar{y}_1 + T\,\bar{y}_2 \tag{c}$$

Al reemplazar T y C con $\sigma_Y A/2$, obtenemos

$$M_P = \frac{\sigma_Y A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} \tag{6.76}$$

que es igual a la ecuación (b).

El procedimiento para obtener el **momento plástico** es dividir la sección transversal de la viga en dos áreas iguales, ubicar el centroide de cada mitad y luego emplear la ecuación (6.76) para calcular M_P.

Módulo plástico y factor de forma

La expresión para el momento plástico se puede escribir en una forma similar a la del momento de fluencia (ecuación 6.74), como sigue:

$$M_P = \sigma_Y Z \tag{6.77}$$

en donde

$$Z = \frac{A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} \tag{6.78}$$

es el **módulo plástico** (o el *módulo de la sección plástica*) para la sección transversal. El módulo plástico se puede interpretar de manera geométrica como el momento estático (evaluado con respecto al eje neutro) del área de la sección transversal arriba del eje neutro más el momento estático del área debajo del eje neutro.

La razón entre el momento plástico y el momento de fluencia es únicamente una función de la forma de la sección transversal y se denomina **factor de forma** f:

$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{Z}{S} \tag{6.79}$$

Este factor es una medida de la resistencia de reserva de la viga después de que empieza la fluencia; es máximo cuando la mayoría del material está ubicado cerca del eje neutro (por ejemplo, una viga con sección circular sólida) y mínimo cuando la mayor parte del material está alejada del eje neutro (por ejemplo, una viga con sección de patín ancho). Los valores de f para secciones transversales rectangulares, de patín ancho y circulares se dan en el resto de esta sección. Otras formas se consideran en los problemas al final del capítulo.

Vigas de sección transversal rectangular

Ahora determinemos las propiedades de una viga con sección transversal rectangular (figura 6.42) cuando el material es elastoplástico. El módulo de sección es $S = bh^2/6$ y, por tanto, el **momento de fluencia** (ecuación 6.74) es

$$M_Y = \frac{\sigma_Y bh^2}{6} \tag{6.80}$$

en donde b es el ancho y h es la altura de la sección transversal.

Debido a que la sección transversal es doblemente simétrica, el eje neutro pasa por el centroide aun cuando la viga esté cargada en el rango plástico. En consecuencia, las distancias hasta los centroides de las áreas arriba y debajo del eje neutro son

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \frac{h}{4} \tag{d}$$

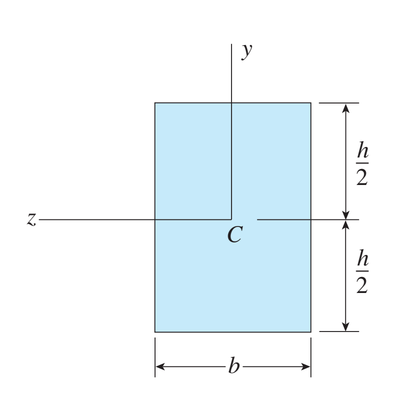


FIGURA 6.42 Sección transversal rectangular.

Por tanto, el **módulo plástico** (ecuación 6.78) es

$$Z = \frac{A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} = \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4} \tag{6.81}$$

y el **momento plástico** (ecuación 6.77) es

$$M_P = \frac{\sigma_Y bh^2}{4} \tag{6.82}$$

Por último, el **factor de forma** para una sección transversal rectangular es

$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{Z}{S} = \frac{3}{2} \tag{6.83}$$

lo cual significa que el momento plástico para una viga rectangular es 50 por ciento mayor que el momento de fluencia.

A continuación consideramos los esfuerzos en una viga rectangular cuando el momento flexionante M es mayor que el momento de fluencia pero que aún no ha alcanzado el momento plástico. Las partes exteriores de la viga estarán sometidas al esfuerzo de fluencia σ_Y y la parte interior (el **núcleo elástico**) tendrá una distribución de esfuerzos con variación lineal (figuras 6.43a y b). Las zonas completamente plásticas están sombreadas en la figura 6.43a y las distancias desde el eje neutro hasta los bordes interiores de las zonas plásticas (o los bordes exteriores del núcleo elástico) están denotadas con e.

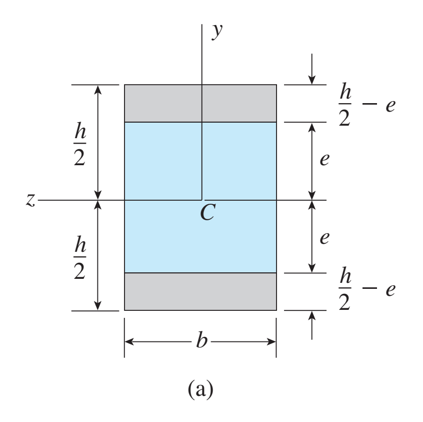
Los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal tienen las resultantes de las fuerzas C_1, C_2, T_1 y T_2 como se muestra en la figura 6.43c. Las fuerzas C_1 y T_1 en las zonas plásticas son iguales cada una al esfuerzo de fluencia multiplicado por el área de la sección transversal de la zona:

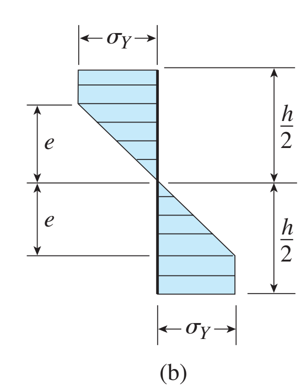
$$C_1 = T_1 = \sigma_Y b\left(\frac{h}{2} - e\right) \tag{e}$$

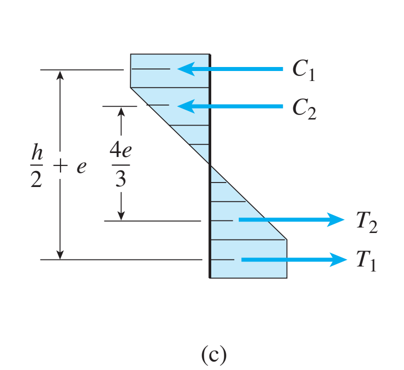
Las fuerzas C_2 y T_2 en el núcleo elástico son iguales cada una al área del diagrama de esfuerzos multiplicada por el ancho b de la viga:

$$C_2 = T_2 = \frac{\sigma_Y e}{2} b \tag{f}$$

FIGURA 6.43 Distribución del esfuerzo en una viga con sección transversal rectangular con un núcleo elástico ($M_Y \leq M \leq M_P$).







Por tanto, el **momento flexionante** (consulte la figura 6.43c) es

$$M = C_1\left(\frac{h}{2} + e\right) + C_2\left(\frac{4e}{3}\right) = \sigma_Y b\left(\frac{h}{2} - e\right)\left(\frac{h}{2} + e\right) + \frac{\sigma_Y be}{2}\left(\frac{4e}{3}\right)$$

$$= \frac{\sigma_Y bh^2}{6}\left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2}\right) = M_Y\left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2}\right) \qquad M_Y \leq M \leq M_P \quad (6.84)$$

Observe que cuando $e = h/2$, la ecuación da $M = M_Y$ y cuando $e = 0$, produce $M = 3M_Y/2$, que es el momento plástico M_P.

La ecuación (6.84) se puede utilizar para determinar el momento flexionante cuando se conocen las dimensiones del núcleo elástico. Sin embargo, un requerimiento más común es determinar el **tamaño del núcleo elástico** cuando se conoce el momento flexionante. Por tanto, en la ecuación (6.84) despejamos e en términos del momento flexionante:

$$e = h\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{M}{M_Y}\right)} \qquad M_Y \leq M \leq M_P \qquad (6.85)$$

Observe de nuevo las condiciones limitantes: cuando $M = M_Y$, la ecuación da $e = h/2$ y cuando $M = M_P = 3M_Y/2$ da $e = 0$, que es la condición totalmente plástica.

Vigas de patín ancho

Para una viga de patín ancho doblemente simétrica (figura 6.44), el módulo plástico Z (ecuación 6.78) se calcula tomando el momento estático con respecto al eje neutro del área de uno de los patines más la mitad superior del alma y luego multiplicando por 2. El resultado es

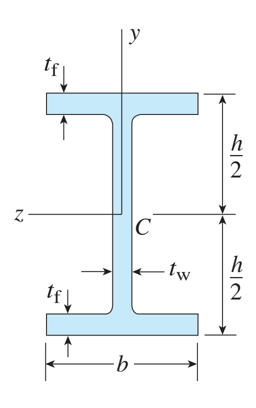


FIGURA 6.44 Sección transversal de una viga de patín ancho.

$$Z = 2\left[(bt_f)\left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2}\right) + (t_w)\left(\frac{h}{2} - t_f\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{2} - t_f\right)\right]$$

$$= bt_f(h - t_f) + t_w\left(\frac{h}{2} - t_f\right)^2 \qquad (g)$$

Reacomodando términos, podemos expresar Z de una manera más conveniente:

$$Z = \frac{1}{4}\left[bh^2 - (b - t_w)(h - 2t_f)^2\right] \qquad (6.86)$$

Después de calcular el módulo plástico con la ecuación (6.86), podemos obtener el momento plástico M_P con la ecuación (6.77).

Los valores de Z para formas comercialmente disponibles de vigas de patín ancho se encuentran en el manual AISC (referencia 5.4). El factor de forma f para vigas de patín ancho por lo general está en el rango de 1.1 a 1.2, dependiendo de las proporciones de la sección transversal.

Se pueden analizar otras vigas elastoplásticas de una manera similar a la descrita para vigas rectangulares y de patín ancho (consulte los ejemplos siguientes y los problemas al final del capítulo).

Ejemplo 6-9

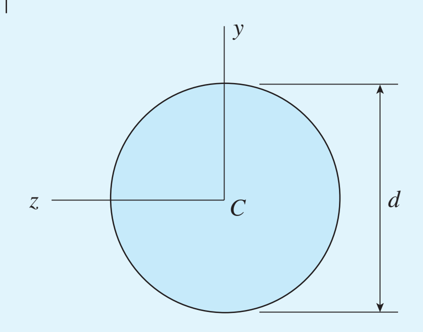


FIGURA 6.45 Ejemplo 6.9. Sección transversal de una viga circular (material elastoplástico).

Determine el momento de fluencia, el módulo plástico, el momento plástico y el factor de forma de una viga con sección transversal circular con diámetro d (figura 6.45).

Solución

Como punto preliminar, observamos que como la sección transversal es doblemente simétrica, el eje neutro pasa por el centro del círculo tanto para comportamiento linealmente elástico como elastoplástico.

El momento de fluencia M_Y se determina a partir de la fórmula de la flexión (ecuación 6.74) como se muestra:

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{\sigma_Y(\pi d^4/64)}{d/2} = \sigma_Y\left(\frac{\pi d^3}{32}\right) \qquad (6.87)$$

El módulo plástico Z se obtiene con la ecuación (6.78) en donde A es el área del círculo y $\bar{y}_1$ y $\bar{y}_2$ son las distancias hasta los centroides c_1 y c_2 de las dos mitades del círculo (figura 6.46). De esta manera, a partir de los casos 9 y 10 del apéndice D, obtenemos

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \qquad \bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \frac{2d}{3\pi}$$

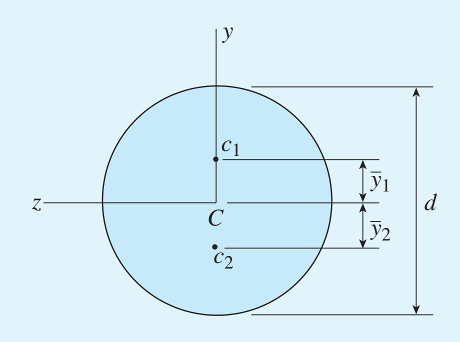


FIGURA 6.46 Solución del ejemplo 6.9.

Ahora sustituyendo en la ecuación (6.78) para el módulo plástico, determinamos

$$Z = \frac{A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} = \frac{d^3}{6} \qquad (6.88)$$

Por tanto, el momento plástico M_P (ecuación 6.77) es

$$M_P = \sigma_Y Z = \frac{\sigma_Y d^3}{6} \qquad (6.89)$$

y el factor de forma f (ecuación 6.79) es

$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{16}{3\pi} \approx 1.70 \qquad (6.90)$$

Este resultado muestra que el momento flexionante máximo para una viga de material elastoplástico es casi 70 por ciento mayor que el momento flexionante cuando la viga apenas empieza a fluir.

Ejemplo 6.10

Una viga de caja hueca doblemente simétrica (figura 6.47) de material elastoplástico ($\sigma_Y = 33$ ksi) está sometida a un momento flexionante M de tal magnitud que los patines fluyen pero las almas permanece linealmente elásticas.

Determine la magnitud del momento M si las dimensiones de la sección transversal son $b = 5.0$ in, $b_1 = 4.0$ in, $h = 9.0$ in y $h_1 = 7.5$ in.

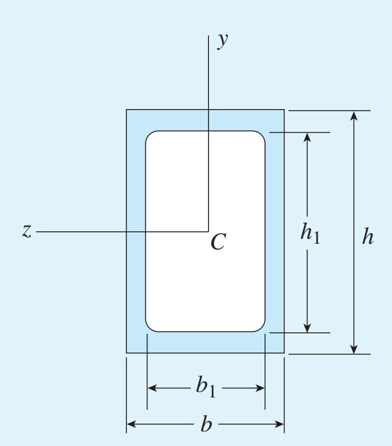


FIGURA 6.47 Ejemplo 6.10. Sección transversal de una viga de caja hueca (material elastoplástico).

Solución

La sección transversal de la viga y la distribución de los esfuerzos normales se muestran en las figuras 6.48a y b, respectivamente. En la figura observamos que los esfuerzos en las almas aumentan linealmente con la distancia desde el eje neutro y los esfuerzos en los patines son iguales al esfuerzo de fluencia σ_Y. Por tanto, el momento flexionante M que actúa sobre la sección transversal consiste en dos partes:

(1) un momento M_1 que corresponde al núcleo elástico y

(2) un momento M_2 producido por los esfuerzos de fluencia σ_Y en los patines.

El momento flexionante generado por el núcleo se determina con la fórmula de la flexión (ecuación 6.74) con el módulo de sección calculado sólo para las almas; por tanto

$$S_1 = \frac{(b - b_1)h_1^2}{6} \tag{6.91}$$

y

$$M_1 = \sigma_Y S_1 = \frac{\sigma_Y(b - b_1)h_1^2}{6} \tag{6.92}$$

Para encontrar el momento generado por los patines, observamos que la fuerza resultante F en cada patín (figura 6.48b) es igual al esfuerzo de fluencia multiplicado por el área del patín:

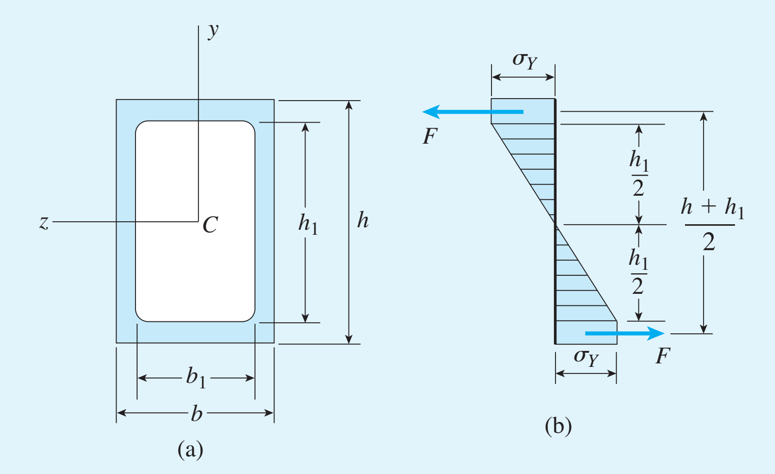


FIGURA 6.48 Solución del ejemplo 6.10.

$$F = \sigma_Y b\left(\frac{h - h_1}{2}\right) \qquad \text{(h)}$$

La fuerza en el patín superior es de compresión y la fuerza en el patín inferior es de tensión si el momento flexionante M es positivo. En conjunto, las dos fuerzas originan el momento flexionante M_2:

$$M_2 = F\left(\frac{h + h_1}{2}\right) = \frac{\sigma_Y b(h^2 - h_1^2)}{4} \qquad (6.93)$$

Por tanto, el momento total que actúa sobre la sección transversal, después de reacomodar términos, es

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\sigma_Y}{12}\left[3bh^2 - (b + 2b_1)h_1^2\right] \qquad (6.94)$$

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$M = 1330 \text{ k-in}$$

Nota: el momento de fluencia M_Y y el momento plástico M_P para la viga en este ejemplo tienen los siguientes valores (determinados en el problema 6.10.13):

$$M_Y = 1196 \text{ k-in} \qquad M_P = 1485 \text{ k-in}$$

El momento flexionante M está entre estos valores, como se esperaba.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos una variedad de temas especializados relacionados con la flexión de vigas, incluyendo el análisis de vigas compuestas (es decir, vigas de más de un material), vigas con cargas inclinadas, vigas asimétricas, esfuerzos cortantes en vigas de pared delgada, centros de cortante y flexión elastoplástica.

Algunos de los conceptos y averiguaciones importantes presentadas en este capítulo son los siguientes:

1. En el análisis introductorio de *vigas compuestas*, que condujo a la relación momento-curvatura y a las fórmula de la flexión para vigas compuestas de dos materiales, supusimos que los dos materiales seguían la ley de Hooke y que las dos partes de la viga estaban unidas de manera adecuada de manera que actúan como una sola unidad; temas avanzados, como materiales no homogéneos y no lineales, esfuerzos de adherencia entre las partes, esfuerzos cortantes sobre las secciones transversales, alabeo de las tapas y otros puntos similares no se consideraron. En particular, las fórmulas presentadas aquí no se aplican a vigas de concreto reforzado las cuales no se diseñan con base en un comportamiento linealmente elástico.
2. El *método de la sección transformada* ofrece una forma conveniente para transformar la sección transversal de una viga compuesta en una sección transversal equivalente de una viga imaginaria que está compuesta sólo de un material. El eje neutro de la viga transformada está ubicado en el mismo lugar y su capacidad de resistencia de momento es igual que la de la viga original. Los esfuerzos normales se calculan empleando la fórmula de la flexión pero dependen del momento de inercia de la sección transformada.
3. Si cargas inclinadas actúan en el centroide de la sección transversal de vigas con dos ejes de simetría en la sección transversal, no habrá torsión de la viga con respecto al eje longitudinal. Para estas vigas determinamos los esfuerzos flexionantes descomponiendo la carga inclinada en dos componentes, una en acción en cada plano de simetría. Los esfuerzos flexionantes se obtuvieron con la fórmula de la flexión para cada componente de la carga en acción por separado y los esfuerzos finales se obtuvieron superponiendo los esfuerzos separados. Además, en general, el ángulo de inclinación del eje neutro (β) no es igual al ángulo de las cargas inclinadas (θ). Como resultado, excepto en casos especiales, el eje neutro no es perpendicular al plano longitudinal que contiene la carga. En este caso, los esfuerzos en la viga son muy sensibles a cambios ligeros en la dirección de la carga y a irregularidades en el alineamiento de la propia viga.
4. Cuando se eliminó la restricción de simetría con respecto a por lo menos un eje de la sección transversal, determinamos que en el caso de flexión pura el plano donde actúa el momento flexionante es perpendicular a la superficie neutra sólo si los ejes y y z son ejes centroidales principales de la sección transversal y el momento flexionante actúa en uno de los dos planos principales (el plano xy o bien el plano xz). Luego establecimos un procedimiento general para calcular esfuerzos normales en *vigas asimétricas* sometidas a cualquier momento M. Primero se encontró el centroide y luego se obtuvieron los esfuerzos normales superponiendo los resultados de la fórmula de la flexión con respecto a los dos ejes centroidales principales.
5. Una carga lateral que actúa sobre una viga producirá flexión sin torsión sólo si actúa el *centro de cortante*. El centro de cortante (igual que el centroide) se encuentra en cualquier eje de simetría; el centro de cortante S y el centroide C coinciden para una sección transversal doblemente simétrica.

6. Las vigas con secciones transversales abiertas de pared delgada (como vigas de patín ancho, perfiles en canal, en ángulo, vigas T, perfiles Z) son de uso común para fines estructurales, pero son muy débiles en torsión.
7. Dedujimos expresiones para los esfuerzos cortantes en vigas con secciones transversales abiertas de pared delgada para el caso de fuerza cortante que actúa en acción por el centro de cortante y paralela a uno de los ejes centroidales principales. Utilizamos estas expresiones para encontrar las distribuciones del esfuerzo cortante en los patines y las almas de las vigas de patín ancho, canales y ángulos. Estudiamos que los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal *fluyen* hacia dentro desde los bordes más exteriores, luego hacia abajo por el alma y por último hacia fuera hasta los bordes del patín inferior.
8. Se ilustró el procedimiento para localizar el centro de cortante para varias secciones transversales abiertas de pared delgada. Primero se calcularon los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal cuando se tiene flexión con respecto a uno de los ejes principales, y luego se determinó la fuerza resultante asociada con estos esfuerzos. Se observó que el centro de cortante se encuentra en la línea de acción de la resultante.
9. Cualquier perfil Z que es simétrico con respecto al centroide (es decir, cualquier perfil Z con patines idénticos; mismo ancho y mismo espesor) tiene su centro de cortante en el centroide de la sección transversal. Las ubicaciones de los centros de cortante de muchos otros perfiles estructurales se dan tanto en los ejemplos como en los problemas al final del capítulo.
10. Por último, consideramos *materiales elastoplásticos*, que siguen la ley de Hooke hasta el esfuerzo de fluencia σ_Y y luego fluyen de manera plástica ante esfuerzo constante. Los aceros estructurales son ejemplos excelentes de materiales elastoplásticos porque que tienen puntos de fluencia muy bien definidos y experimentan deformaciones unitarias grandes durante la fluencia. Primero, determinamos el *momento de fluencia,* $M_Y = \sigma_Y \times S$, utilizando la fórmula de la flexión. Luego, continuamos con el momento plástico $M_P = \sigma_Y \times Z$, donde S y Z son el módulo de sección y el módulo de la sección plástica de la sección transversal, respectivamente. M_Y es el momento flexionante en la viga cuando el esfuerzo máximo apenas alcanza el esfuerzo de fluencia y M_P es el momento máximo que puede soportar una viga de material elastoplástico. Definimos el factor de forma $f = M_P/M_Y = Z/S$, como una medida de la resistencia de reserva de la viga después del inicio de la fluencia.

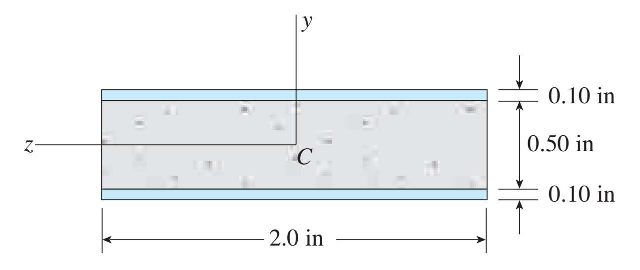
PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6

Vigas compuestas

Al resolver los problemas para la sección 6.2, suponga que las partes componentes de las vigas están firmemente unidas entre sí mediante adhesivos o sujetadores. Además, asegúrese de utilizar la teoría general para vigas compuestas descrita en esta sección

6.2.1 Una viga compuesta que consiste de caras de fibra de vidrio y un núcleo de aglomerado tiene la sección transversal que se muestra en la figura. El ancho de la viga es 2.0 in, el espesor de las caras es 0.10 in y el espesor del núcleo es 0.50 in. La viga está sometida a un momento flexionante de 250 lb-in que actúa con respecto al eje z.

Encuentre los esfuerzos flexionantes máximos σ_{tapa} y $\sigma_{núcleo}$ en las tapas y en el núcleo, respectivamente, si sus módulos de elasticidad respectivos son 4×10^6 psi y 1.5×10^6 psi.

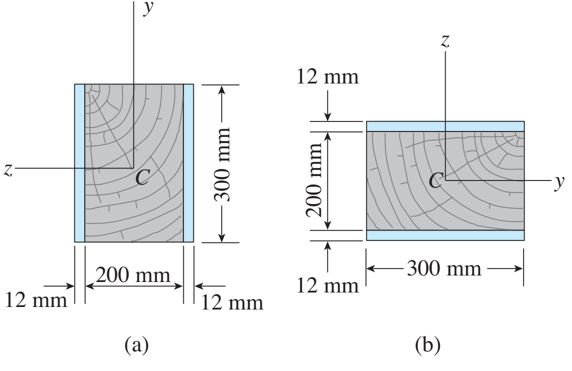


PROB. 6.2.1

6.2.2 Una viga de madera con dimensiones transversales de 200 mm × 300 mm está reforzada en sus lados por placas de acero de 12 mm de espesor (consulte la figura). Los módulos de elasticidad para el acero y la madera son $E_s = 190$ GPa y $E_w = 11$ GPa, respectivamente. Además, los esfuerzos permisibles correspondientes son $\sigma_s = 110$ MPa y $\sigma_w = 7.5$ MPa.

(a) Calcule el momento flexionante máximo permisible $M_{máx}$ cuando la viga se flexiona con respecto al eje z.

(b) Repita el inciso (a) si ahora se flexiona con respecto al eje y.

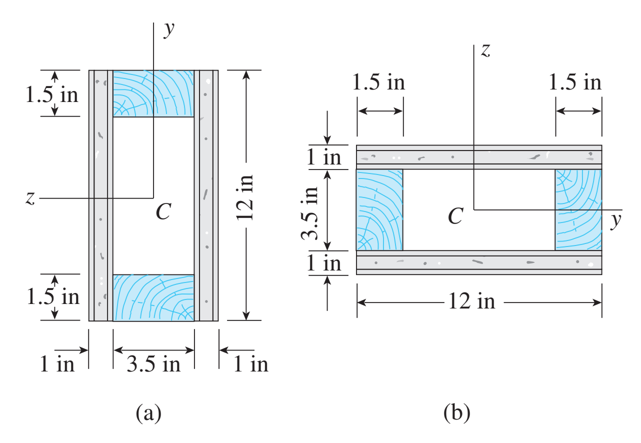


PROB. 6.2-2

6.2.3 Una viga de caja hueca está construida con almas de madera contrachapada de abeto Douglas y patines de pino, como se muestra en la figura en vista transversal. La madera contrachapada tiene 1 in de espesor y 12 in de ancho; los patines son de 2 in × 4 in (tamaño nominal). El módulo de elasticidad para la madera contrachapada es 1,800,000 psi y para el pino es 1,400,000 psi.

(a) Si los esfuerzos permisibles son 2000 psi para la madera contrachapada y 1750 psi para el pino, encuentre el momento flexionante permisible $M_{máx}$ cuando la viga se flexiona con respecto al eje z.

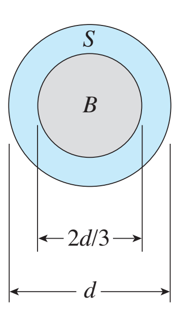
(b) Repita el inciso (a) si la viga ahora se flexiona con respecto al eje y.



PROB. 6.2.3

6.2.4 Un tubo redondo de acero con diámetro exterior d y un núcleo de latón con diámetro $2d/3$ están unidos para formar una viga compuesta, como se muestra en la figura.

Deduzca una fórmula para el momento flexionante permisible M que pueda soportar por la viga con base en el esfuerzo permisible σ_s en el acero. (Suponga que los módulos de elasticidad para el acero y el latón son E_s y E_b, respectivamente.)



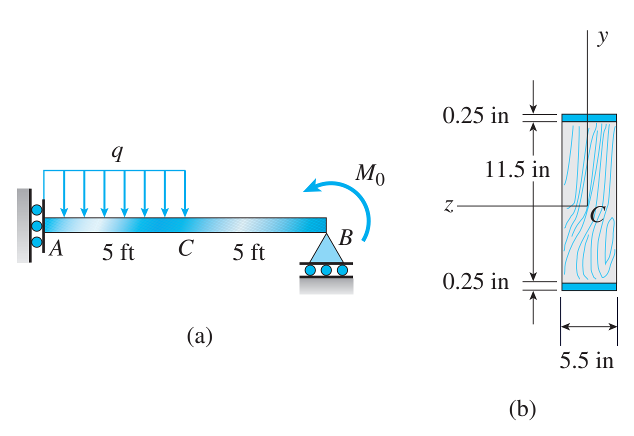
PROB. 6.2.4

6.2.5 Una viga con un apoyo guiado y claro de 10 ft soporta una carga distribuida con intensidad $q = 660$ lb/ft sobre su primera mitad [consulte la parte (a) de la figura] y un momento $M_0 = 300$ ft-lb en el apoyo B. La viga consiste de un elemento de madera (dimensiones nominales 6 in × 12 in, dimensiones reales 5.5 in × 11.5 in en su sección transversal, como se muestra en la parte (b) de la figura que está reforzada con placas de acero de 0.25 in de espesor en su parte superior e inferior. Los módulos de elasticidad para el acero y la madera son $E_s = 30 \times 10^6$ psi y $E_w = 1.5 \times 10^6$ psi, respectivamente.

(a) Calcule los esfuerzos flexionantes máximos σ_s en las placas de acero y σ_w en el elemento de madera debidos a las cargas aplicadas.

(b) Si el esfuerzo de flexión permisible en las placas de acero es $\sigma_{as} = 14\,00$ psi y en la madera es $\sigma_{aw} = 900$ psi, encuentre $q_{máx}$. (Suponga que el momento en B, M_0, permanece en 300 ft-lb.)

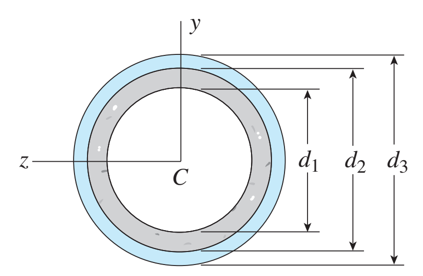
(c) Si $q = 660$ lb/ft y se aplican los valores del esfuerzo permisible indicados en el inciso (b), ¿cuál es $M_{0,máx}$ en B?



PROB. 6.2.5

6.2.6 Un tubo de acero recubierto con plástico tiene la sección transversal que se muestra en la figura. El tubo de acero tiene un diámetro exterior $d_3 = 100$ mm y un diámetro interior $d_2 = 94$ mm. El recubrimiento plástico tiene un diámetro interior $d_1 = 82$ mm. El módulo de elasticidad del acero es 75 veces el módulo del plástico.

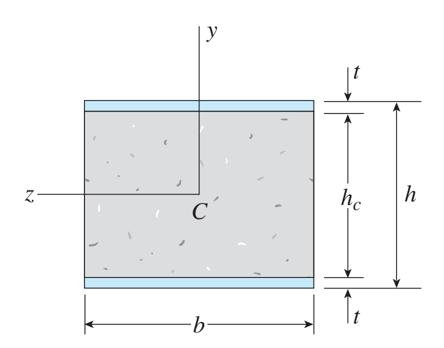
Determine el momento flexionante permisible M_{perm} si el esfuerzo permisible en el acero es 35 MPa y en el plástico es 600 kPa.



PROB. 6.2.6

6.2.7 La sección transversal de una viga sándwich que consiste de tapas de una aleación de aluminio y un núcleo de material alveolar se muestra en la figura. El ancho b de la viga es 8.0 in, el espesor t de los recubrimientos es 0.25 in y la altura h_c del núcleo es 5.5 in (altura total $h = 6.0$ in). Los módulos de elasticidad son 10.5×10^6 psi para las tapas de aluminio y 12,000 psi para el núcleo de material alveolar. Un momento flexionante $M = 40$k-in actúa con respecto al eje z.

Determine los esfuerzos máximos en los recubrimientos y el núcleo utilizando (a) la teoría general para vigas compuestas y (b) la teoría aproximada para vigas sándwich.



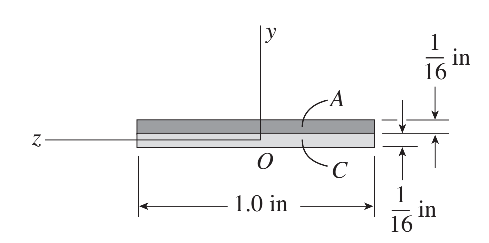
PROBS. 6.2.7 y 6.2.8

6.2.8 La sección transversal de una viga sándwich que consiste de recubrimientos de fibra de vidrio y un núcleo plástico de peso ligero se muestra en la figura. El ancho b de la viga es 50 mm, el espesor t de los recubrimientos es 4 mm y la altura h_c del núcleo es 92 mm (altura total $h = 100$ mm). Los módulos de elasticidad son 75 GPa para la fibra de vidrio y 1.2 GPa para el plástico. Un momento flexionante $M = 275$ N·m actúa con respecto al eje z.

Determine los esfuerzos máximos en las tapas y el núcleo empleando (a) la teoría general para vigas compuestas y (b) la teoría aproximada para vigas sándwich.

***6.2.9** Una viga bimetálica utilizada en un conmutador de control de temperatura consiste de tiras de aluminio y cobre unidas entre sí como se muestra en la figura, que es una vista transversal. El ancho de la viga es 1.0 in y cada tira tiene un espesor de 1/16 in.

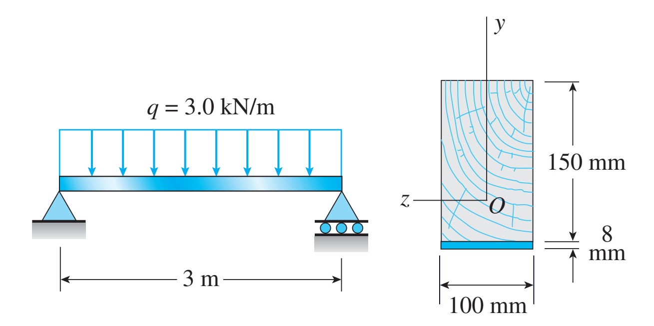
Ante la acción de un momento flexionante $M = 12$ lb-in que actúa con respecto al eje z, ¿cuáles son los esfuerzos máximos σ_a y σ_c en el aluminio y el cobre, respectivamente? (Suponga $E_a = 10.5 \times 10^6$ psi y $E_c = 16.8 \times 10^6$ psi.)



PROB. 6.2.9

***6.2.10** Una viga compuesta simplemente apoyada de 3 m de longitud soporta una carga uniformemente distribuida con intensidad $q = 3.0$ kN/m (consulte la figura). La viga está construida con un elemento de madera, de 100 mm de ancho por 150 mm de altura, reforzada sobre su parte inferior con una placa de acero de 8 mm de espesor y 100 mm de ancho.

Encuentre los esfuerzos flexionantes máximos σ_w y σ_s en la madera y el acero, respectivamente, debidos a la carga uniforme si los módulos de elasticidad son $E_w = 10$ GPa para la madera y $E_s = 210$ GP para el acero.

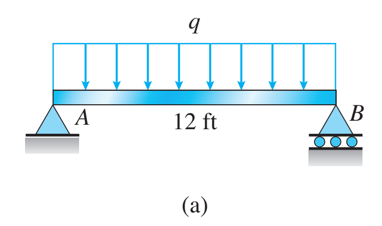


PROB. 6.2.10

6.2.11 Una viga I de madera simplemente apoyada con un claro de 12 ft soporta una carga distribuida con intensidad $q = 90$ lb/ft sobre su longitud [consulte la parte (a) de la figura]. La viga está construida con un alma de madera contrachapada de abeto Douglas y patines de pino pegados al alma como se muestra en la parte (b) de la figura. La madera contrachapada tiene un espesor de 3/8 in; los patines son de 2 in × 2in (tamaño real). El módulo de elasticidad para la madera contrachapada es 1,600,000 psi y para el pino es 1,200,000 psi.

(a) Calcule los esfuerzos flexionantes máximos en los patines de pino y en el alma de madera contrachapada.

(B) ¿Cuál es valor de $q_{máx}$ si los esfuerzos permisibles son 1600 psi en los patines y 1200 psi en el alma?



(a)

PROB. 6.2.11

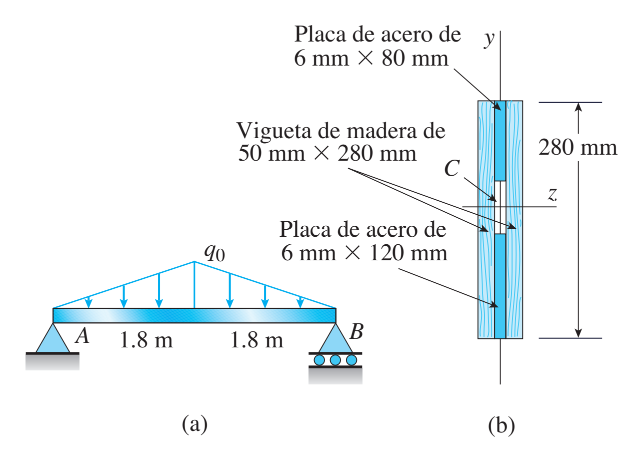
Patín de pino 2 in × 2 in
y
$\frac{1}{2}$ in
2 in
C
8 in
z
Madera contrachapada (abeto Douglas) $\frac{3}{8}$ in
2 in
2 in

(b)

PROB. 6.2.11

6.2.12 Una viga compuesta simplemente apoyada con un claro de 3.6 m soporta una carga con distribución triangular con intensidad pico q_0 a la mitad del claro [consulte la parte (a) de la figura]. La viga está construida con dos viguetas de madera, cada una de 50 mm × 280 mm, sujetadas a dos placas de acero, una en la parte superior con dimensiones de 6 mm × 80 mm y otra en la parte inferior con dimensiones de 6 mm × 120 mm [consulte la parte (b) de la figura]. El módulo de elasticidad de la madera es 11 GPa y el del acero es 210 GPa.

Si los esfuerzos permisibles son 7 MPa para la madera y 120 MPa para el acero, encuentre la intensidad de carga pico permisible $q_{0,máx}$ cuando la viga se flexiona con respecto al eje z. No tome en cuenta el peso de la viga.



(a) (b)

PROB. 6.2.12

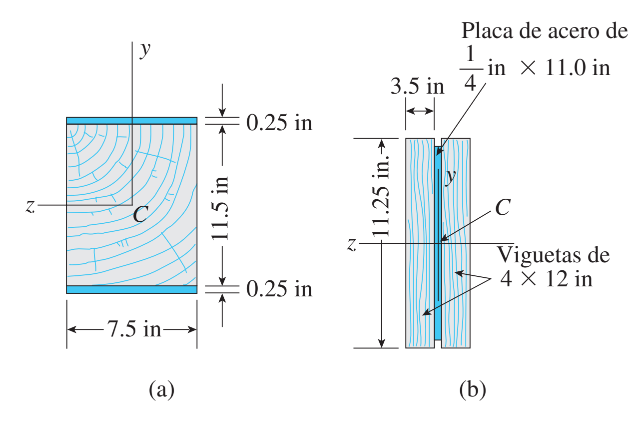
Método de la sección transformada

Al resolver los problemas para la sección 6.3 suponga que las partes componentes de las vigas están firmemente unidas mediante adhesivos o conectadas por sujetadores. También asegúrese de utilizar el método de la sección transformada en las soluciones.

6.3.1 Una viga de madera de 8 in de ancho y 12 in de altura (dimensiones nominales) está reforzada en sus partes superior e inferior por placas de acero de 0.25 in de espesor [consulte la parte (a) de la figura].

(a) Encuentre el momento flexionante permisible $M_{máx}$ con respecto al eje z si el esfuerzo permisible en la madera es 1100 psi y en el acero es 15,000 psi. (Suponga que la razón entre los módulos de elasticidad del acero y la madera es 20.)

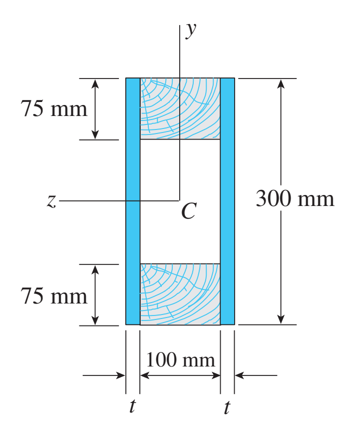
(b) Compare la capacidad de momento de la viga en la parte (a) con la que se muestra en la parte (b) que tiene dos viguetas de 4 in × 12 in cada una (dimensiones nominales) sujetas a una placa de acero de ¼ in × 11.0 in.



PROB. 6.3.1

6.3.2 Una viga simple con claro de 3.2 m soporta una carga uniforme con intensidad de 48 kN/m. La sección transversal de la viga es una caja hueca con patines de madera y placas laterales de acero, como se muestra en la figura. La sección transversal de los patines de madera es de 75 mm × 100 mm y las placas de acero tienen una altura de 300 mm.

¿Cuál es el espesor t requerido de las placas de acero si los esfuerzos permisibles son 120 MPa para el acero y 6.5 MPa para la madera? (Suponga que los módulos de elasticidad para el acero y la madera son 210 GPa y 10 GPa, respectivamente y no tome en cuenta el peso de la viga.)

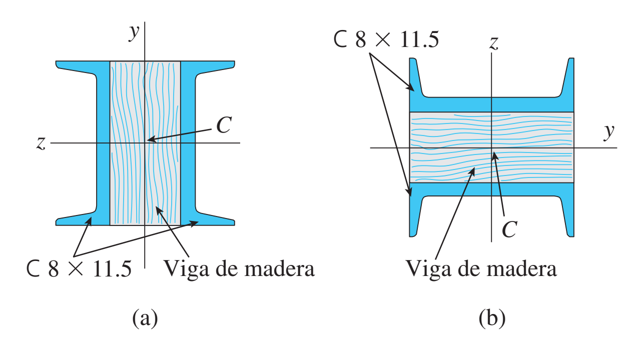


PROB. 6.3.2

6.3.3 Una viga simple que tiene una longitud de 18 ft soporta una carga uniforme con intensidad q. La viga está construida con dos secciones C 8 × 11.5 (secciones en canal o perfiles C) a ambos lados de una viga de madera de 4 × 8 [dimensiones reales, consulte la sección transversal que se muestra en la parte (a) de la figura]. El módulo de elasticidad del acero (E_s = 30,000 ksi) es 20 veces mayor que el de la madera (E_w).

(a) Si los esfuerzos permisibles en el acero y la madera son 12,000 psi y 900 psi, respectivamente, ¿cuál es la carga permisible q_{perm}? (*Nota:* no tome en cuenta el peso de la viga y consulte la tabla E.3a del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades del perfil C de la viga).

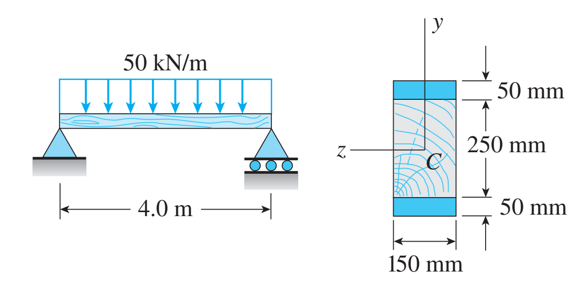
(b) Si la viga se gira 90° para que se flexione con respecto a su eje y [consulte la parte (b) de la figura] y se aplica una carga uniforme q = 250 lb/ft, determine los esfuerzos máximos σ_s y σ_w en el acero y la madera, respectivamente. Incluya el peso de la viga. (Suponga pesos específicos de 35 lb/ft^3 y 490 lb/ft^3 para la madera y el acero, respectivamente.)



PROB. 6.3.3

6.3.4 La viga compuesta que se muestra en la figura está simplemente apoyada y soporta una carga uniforme total de 50 kN/m sobre un claro de 4.0 m. La viga está construida con un elemento de madera con dimensiones transversales de 150 mm × 250 mm y dos placas de acero con dimensiones transversales de 50 mm × 150 mm.

Determine los esfuerzos máximos σ_s y σ_w en el acero y la madera, respectivamente, si los módulos de elasticidad son E_s = 209 GPa y E_w = 11 GPa. (No tome en cuenta el peso de la viga.)

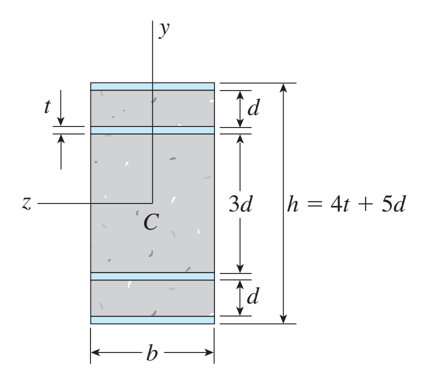


PROB. 6.3.4

6.3.5 La sección transversal de una viga hecha con tiras delgadas de aluminio separadas por un plástico ligero se muestra en la figura. La viga tiene un ancho $b = 3.0$ in, las tiras de aluminio tienen un espesor $t = 0.1$ in y los segmentos de plástico tienen alturas $d = 1.2$ in y $3d = 3.6$ in. La altura total de la viga es $h = 6.4$ in.

Los módulos de elasticidad para el aluminio y el plástico son $E_a = 11 \times 10^6$ psi y $E_p = 440 \times 10^3$ psi, respectivamente.

Determine los esfuerzos máximos σ_a y σ_p en el aluminio y el plástico, respectivamente, debidos a un momento flexionante de 6.0 k-in.



PROBS. 6.3.5 y 6.3.6

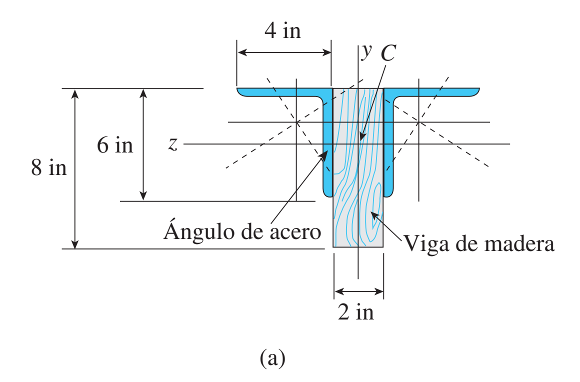
6.3.6 Considere el problema anterior si la viga tiene un ancho $b = 75$ mm, las tiras de aluminio tienen espesor $t = 3$ mm, los segmentos de plástico tienen alturas $d = 40$ mm y $3d = 120$ mm, y la altura total de la viga es $h = 212$ mm. Además, los módulos de elasticidad son $E_a = 75$ GPa y $E_p = 3$ GPa, respectivamente.

Determine los esfuerzos máximos σ_a y σ_p en el aluminio y el plástico, respectivamente, debidos a un momento flexionante de 1.0 kN·m.

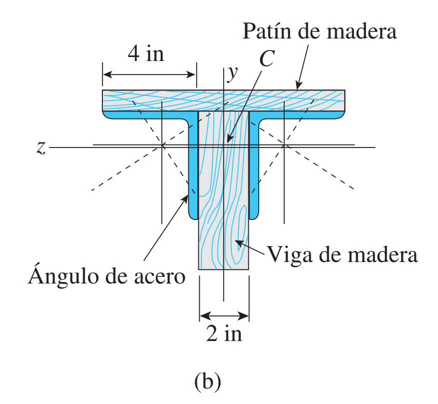
6.3.7 Una viga simple con longitud de 18 ft soporta una carga uniforme con intensidad q. La viga está construida con dos secciones en ángulo, L 6 × ½, una a cada lado de de una viga de madera [consulte la sección transversal que se muestra en la parte (a) de la figura] de 2 in × 8 in (dimensiones reales). El módulo de elasticidad del acero es 20 veces mayor que el de la madera.

(a) Si los esfuerzos permisibles en el acero y la madera son 12,000 psi y 900 psi, respectivamente, ¿cuál es la carga permisible q_{perm}? (*Nota:* no tome en cuenta el peso de la viga y consulte la tabla E.5a del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de los ángulos.)

(b) Repita el inciso (a) si se agrega un patín de madera [consulte la parte (b) de la figura] de 1 in × 10 in (dimensiones reales).



(a)

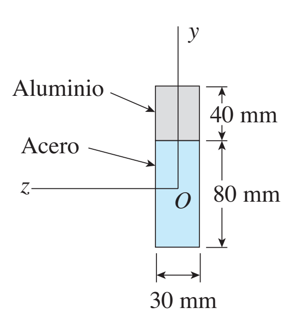


(b)

PROB. 6.3.7

6.3.8 En la figura se muestra la sección transversal de una viga compuesta hecha de aluminio y acero. Los módulos de elasticidad son $E_a = 75$ GPa y $E_s = 200$ GPa.

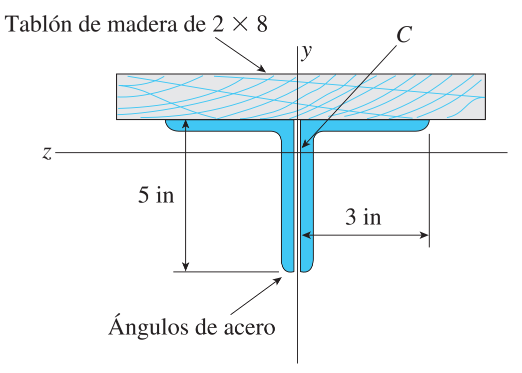
Ante la acción de un momento flexionante que produce un esfuerzo máximo de 50 MPa en el aluminio, ¿cuál es el esfuerzo máximo σ_s en el acero?



PROB. 6.3.8

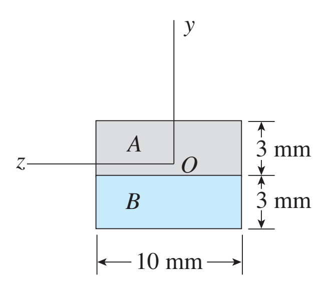
6.3.9 Una viga está construida con dos perfiles angulares, L 5 × 3 × 1/2 cada uno, que refuerzan un tablón de madera (consulte la sección transversal que se muestra en la figura) de 2 × 8 in (dimensiones reales). El módulo de elasticidad para la madera es $E_w = 1.2 \times 10^6$ psi y para el acero es $E_s = 30 \times 10^6$ psi.

Encuentre el momento flexionante permisible M_{perm} para la viga si el esfuerzo permisible en la madera es $\sigma_w = 1100$ psi y en el acero es $\sigma_s = 12{,}000$ psi. (*Nota:* no tome en cuenta el peso de la viga y consulte la tabla E.5a del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de los ángulos.)



PROB. 6.3.9

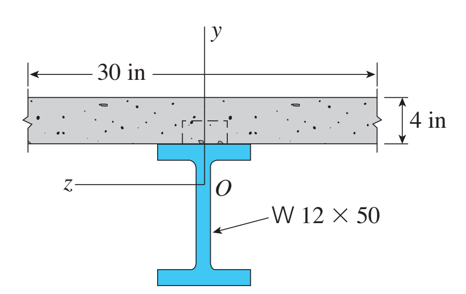
6.3.10 La sección transversal de una tira bimetálica se muestra en la figura. Suponiendo que los módulos de elasticidad para los metales A y B son $E_A = 168$ GPa y $E_B = 90$ GPa, respectivamente, determine el menor de los dos módulos de sección para la viga. (Recuerde que el módulo de sección es igual al momento flexionante dividido entre el esfuerzo de flexión máximo.) ¿En qué material ocurre el esfuerzo máximo?



PROB. 6.3.10

6.3.11 Una viga de patín ancho W 12 × 50 y un segmento de una losa de concreto de 4 in de espesor (consulte la figura) resisten en conjunto un momento flexionante positivo de 95 k-ft. La viga y la losa están unidas por conectores de cortante que están soldados a la viga de acero. (Éstos resisten el cortante horizontal en la superficie de contacto.) Los módulos de elasticidad del acero y el concreto tienen una razón 12 a 1.

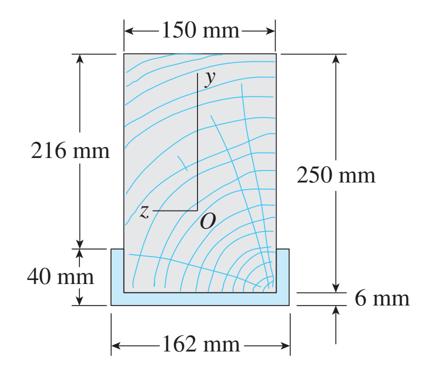
Determine los esfuerzos máximos σ_s y σ_c en el acero y el concreto, respectivamente. (*Nota:* consulte la tabla E.1a del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la viga de acero.)



PROB. 6.3.11

***6.3.12** En la figura se muestra una viga de madera reforzada con una sección en canal de aluminio como se ve en la figura. La viga tiene una sección transversal con dimensiones de 150 mm por 250 mm y el canal tiene un espesor uniforme de 6 mm.

Si los esfuerzos permisibles en la madera y el aluminio son 8.0 MPa y 38 MPa, respectivamente, y si sus módulos de elasticidad tienen una razón 1 a 6, ¿cuál es el momento flexionante máximo permisible para la viga?

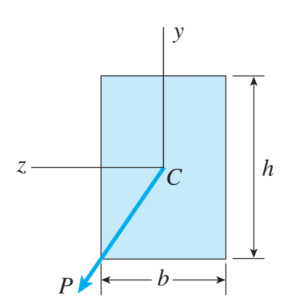


PROB. 6.3.12

Vigas con cargas inclinadas

Al resolver los problemas para la sección 6.4, asegúrese de hacer un diagramas de la sección transversal que muestre la orientación del eje neutro y las ubicaciones de los puntos donde se están determinando los esfuerzos.

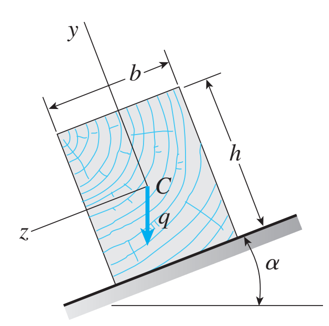
6.4.1 Una viga con sección transversal rectangular soporta una carga inclinada P que tiene su línea de acción a lo largo de una diagonal de la sección transversal (consulte la figura). Demuestre que el eje neutro se encuentra a lo largo de la otra diagonal.



PROB. 6.4.1

6.4.2 Una viga de madera con sección transversal rectangular (consulte la figura) está simplemente apoyada y tiene un claro con longitud L. El eje longitudinal de la viga es horizontal y su sección transversal está inclinada a un ángulo α. La carga sobre la viga es uniforme y vertical con intensidad q que actúa en el centroide C.

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{máx}$ si b = 80 mm, h = 140 mm, L = 1.75 m, α = 22.5° y q = 7.5 kN/m.

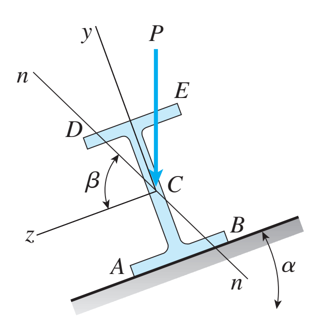


PROBS. 6.4.2 y 6.4.3

6.4.3 Resuelva el problema anterior con los datos siguientes: b = 6 in, h = 10 in, L = 12.0 ft, tan α = 1/3 y q = 325 lb/ft.

6.4.4 Una viga de patín ancho simplemente apoyada con un claro L soporta una carga concentrada vertical P que actúa en el centroide C a la mitad del claro (consulte la figura). La viga está sujeta a apoyos inclinados un ángulo α con respecto a la horizontal.

Determine la orientación del eje neutro y calcule los esfuerzos máximos en las esquinas exteriores de la sección transversal (puntos A, B, D y E) debidos a la carga P. Los datos para la viga son los siguientes: perfil W 250 × 448, L = 3.5 m, P = 18 kN y α = 26.57°. (*Nota:* consulte la tabla E.1b del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la viga.)

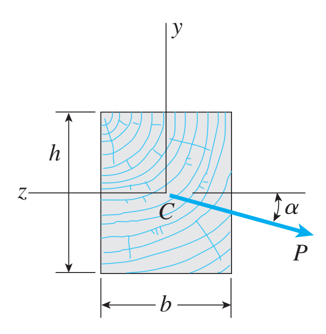


PROBS. 6.4.4 y 6.4.5

6.4.5 Resuelva el problema anterior empleando los datos siguientes: perfil W 8 × 21, L = 84 in, P = 4.5 k y α = 22.5°.

6.4.6 Una viga de madera en voladizo con sección transversal rectangular y longitud L soporta una carga inclinada P en su extremo libre (consulte la figura).

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{máx}$ debido a la carga P. Los datos para la viga son los siguientes: b = 80 mm, h = 140 mm, L = 2.0 m, P = 575 N y α = 30°.

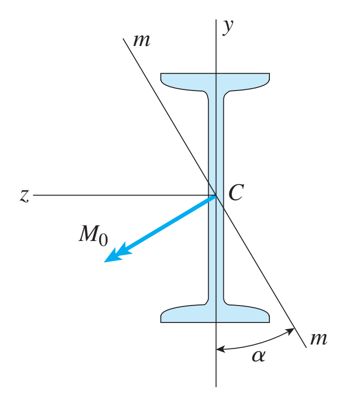


PROBS. 6.4.6 y 6.4.7

6.4.7 Resuelva el problema anterior para una viga en voladizo con los datos siguientes: b = 4 in, h = 9 in, L = 10.0 ft, P = 325 lb y α = 45°.

6.4.8 Una viga de acero con perfil I (consulte la figura) está simplemente apoyada en los extremos, donde actúan dos momentos flexionantes M_0 iguales y en sentidos opuestos, de manera que la viga está en flexión pura. Los momentos actúan en el plano *mm*, que está orientado a un ángulo α con respecto al plano *xy*.

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ debido a los momentos M_0. Los datos para la viga son los siguientes: perfil S 200 × 27.4, M_0 = 4 kN·m y α = 24°. (*Nota:* consulte la tabla E2.b del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la viga.)

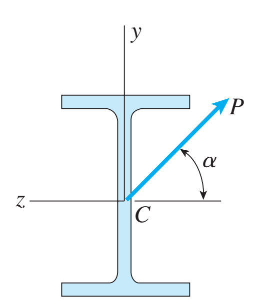


PROB. 6.4.8

6.4.9 Una viga en voladizo con sección transversal de patín ancho y longitud *L* soporta una carga inclinada *P* en su extremo libre (consulte la figura).

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ debido a la carga *P*.

Los datos para la viga son los siguientes: perfil W 10 × 45, *L* = 8.0 ft, *P* = 1.5 k y α = 55°. (*Nota:* consulte la tabla E.1 del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la viga.)



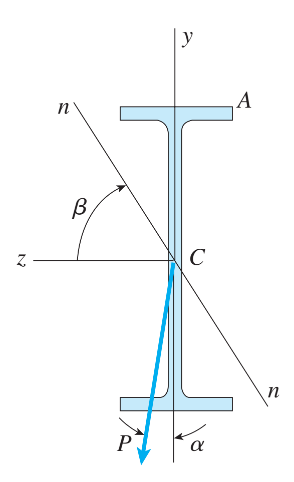
PROBS. 6.4.9 y 6.4.10

6.4.10 Resuelva el problema anterior utilizando los datos siguientes: perfil W 310 × 129, *L* = 1.8 m, *P* = 9.5 kN y α = 60°. (*Nota:* consulte la tabla E.1b del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la viga.)

***6.4.11** Una viga en voladizo con perfil W 12 × 14 y longitud *L* = 9 ft soporta una carga ligeramente inclinada *P* = 500 lb en su extremo libre (consulte la figura).

(a) Elabore una gráfica del esfuerzo σ_A en el punto *A* como una función del ángulo de inclinación α.

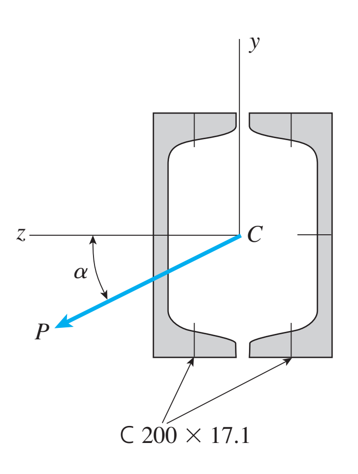
(b) Elabore una gráfica del ángulo β, que ubica el eje neutro *nn* como una función del ángulo α. (Al elaborar las gráficas, considere valores de α de 0 a 10°.) (*Nota:* consulte la tabla E.1 del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la viga.)



PROB. 6.4.11

6.4.12 Una viga en voladizo armada con dos secciones en canal, C 200 × 17.1 cada una, y longitud *L* soporta una carga inclinada *P* en su extremo libre (consulte la figura).

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ debido a la carga *P*. Los datos para la viga son los siguientes: *L* = 4.5 m, *P* = 500 N y α = 30°.

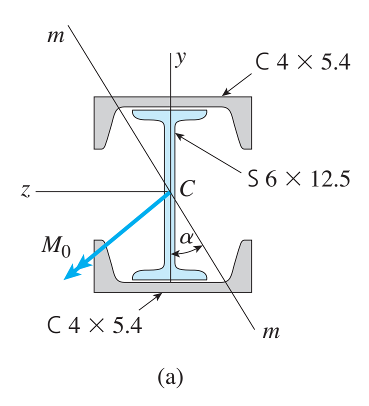


PROB. 6.4.12

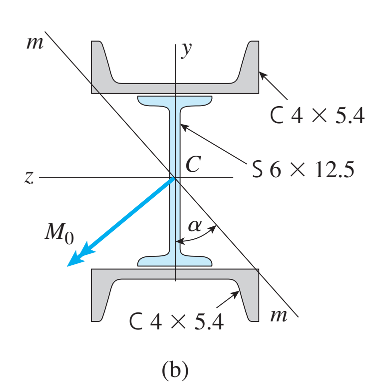
6.4.13 Una viga armada de acero compuesta de un perfil I y canales sujetos a los patines [consulte la parte (a) de la figura] está simplemente apoyada en los extremos, en donde actúan dos momentos M_0 iguales pero en sentidos opuestos, de manera que la viga está en flexión pura. Los momentos actúan en el plano *mm*, que está orientado a un ángulo α con respecto al plano *xy*.

(a) Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ debido a los momentos M_0.

(b) Repita el inciso (a) si ahora los patines de los canales apuntan alejándose del patín de la viga, como se muestra en la parte (b) de la figura. Los datos para la viga son los siguientes: perfil S 6 × 12.5 con perfiles C 4 × 5.4 sujetos a los patines, M_0 = 45 k-in y α = 40°. (*Nota:* consulte las tablas E.2a y E.3a del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de los perfiles S y C.)



(a)



(b)

PROB. 6.4.13

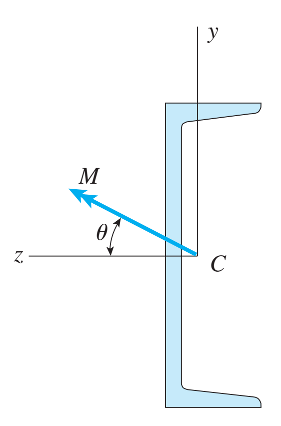
Flexión de vigas asimétricas

Al resolver los problemas para la sección 6.5, asegúrese de elaborar un diagrama de la sección transversal que muestre la orientación del eje neutro y las ubicaciones de los puntos donde se están determinando los esfuerzos.

6.5.1 Una viga con sección transversal en canal está sometida a un momento flexionante *M* que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje *z* (consulte la figura).

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga.

Utilice los datos siguientes: perfil C 8 × 11.5, *M* = 20 k-in, tan θ = 1/3. (*Nota:* consulte la tabla E.3 del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la sección en canal.)

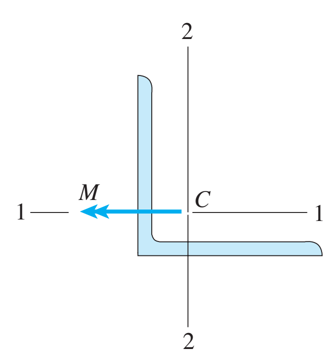


PROBS. 6.5.1 y 6.5.2

6.5.2 Una viga de sección en canal está sometida a un momento flexionante *M* que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje *z* (consulte la figura).
Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Utilice una sección en canal C 200 × 20.5 con *M* = 0.75 kN·m y θ = 20°.

6.5.3 Una sección en ángulo con lados iguales está sometida a un momento flexionante *M* que tiene su vector dirigido a lo largo del eje 1-1, como se muestra en la figura.

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c si el ángulo es un perfil L 6 × 6 × 3/4 y $M = 20$ k-in. (*Nota:* consulte la tabla E.4 del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la sección en ángulo.)



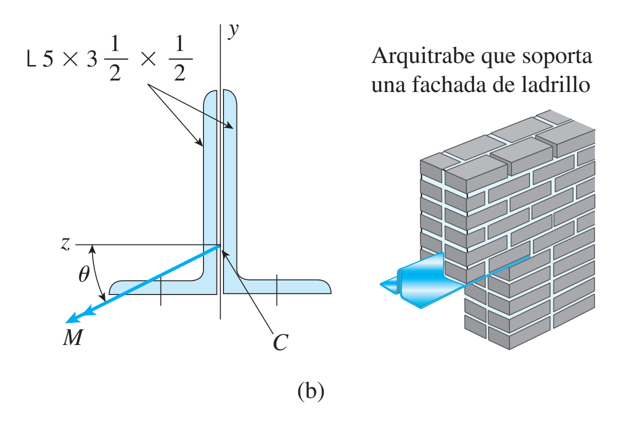
PROBS. 6.5.3 y 6.5.4

6.5.4 Una sección en ángulo con lados iguales está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector dirigido a lo largo del eje 1-1, como se muestra en la figura.

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c si la sección es un perfil L 152 × 152 × 12.7 y $M = 2.5$ kN·m. (*Nota:* consulte la tabla E.4b del apéndice E para obtener las dimensiones y propiedades de la sección en ángulo.)

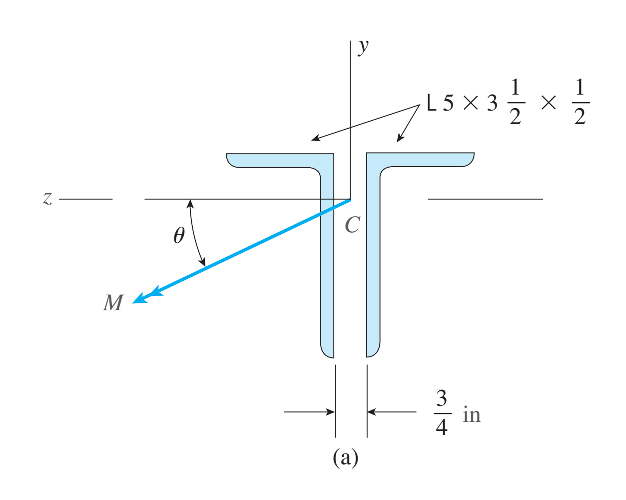
6.5.5 Una viga armada con dos ángulos con lados desiguales está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje z [consulte la parte (a) de la figura].

(a) Para la posición que se muestra en la figura, determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Suponga que $\theta = 30°$ y $M = 30$ k-in.



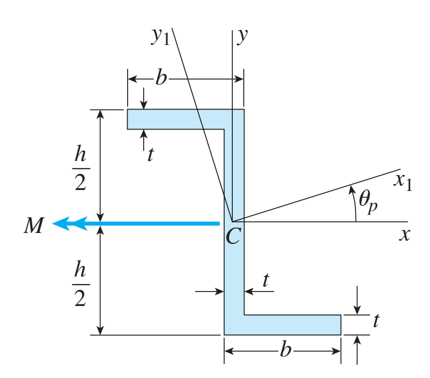
PROB. 6.5.5

(b) Ahora los dos ángulos se invierten y se unen espalda con espalda para formar un arquitrabe que soporta dos hileras de ladrillo de la fachada [consulte la parte (b) de la figura]. Encuentre la nueva orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga empleando $\theta = 30°$ y $M = 30$ k-in.



6.5.6 El perfil Z del ejemplo 12.7 está sometido a un momento $M = 5$ kN·m, como se muestra en la figura.

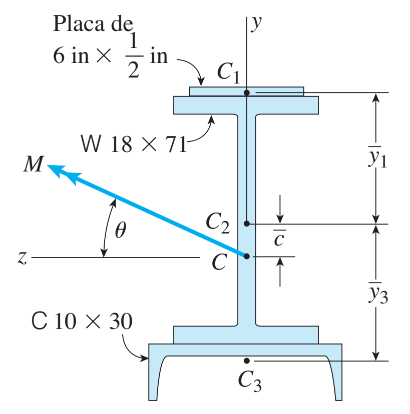
Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Utilice los siguientes datos numéricos: altura $h = 200$ mm, ancho $b = 90$ mm, espesor constante $t = 15$ mm y $\theta_p = 19.2°$. Utilice $I_1 = 32.6 \times 10^6$ mm^4 e $I_2 = 2.4 \times 10^6$ mm^4 del ejemplo 12.7.



PROB. 6.5.6

6.5.7 La sección transversal de una viga de acero está construida con una sección de patín ancho W 18 × 71, con una placa de cubierta de 6 in × 1/2 in soldada al patín superior y una sección en canal C 10 × 30 soldada al patín inferior. La viga está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje z (consulte la figura).

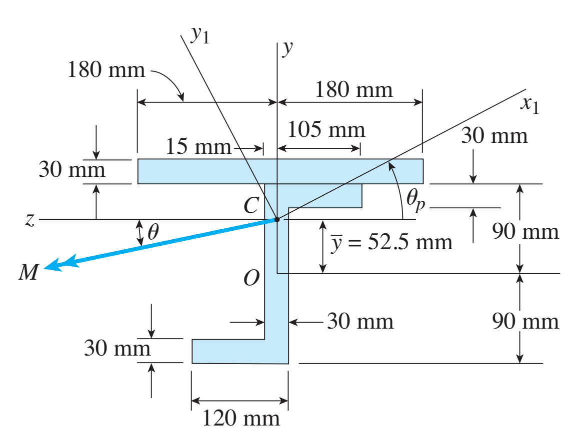
Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Suponga que $\theta = 30°$ y $M = 75$ k-in. (*Nota:* las propiedades de la sección transversal de esta viga se calcularon en los ejemplos 12.2 y 12.5.)



PROB. 6.5.7

6.5.8 En la figura se muestra la sección transversal de una viga de acero que está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje z.

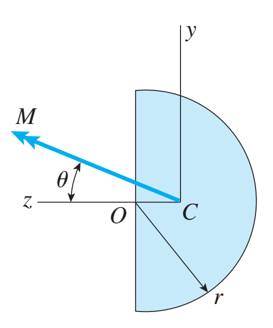
Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Suponga que $\theta = 22.5°$ y $M = 4.5$ kN·m. Utilice las siguientes propiedades de la sección: $I_{x_1} = 93.14 \times 10^6$ mm^4, $I_{y_1} = 152.7 \times 10^6$ mm^4, y $\theta_p = 27.3°$.



PROB. 6.5.8

***6.5.9** Una viga con sección transversal semicircular con radio r está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje z (consulte la figura).

Obtenga fórmulas para el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga para $\theta = 0$, 45° y 90°. (*Nota:* exprese los resultados con la forma $\alpha\, M/r^3$, donde α es un valor numérico.)



PROB. 6.5.9

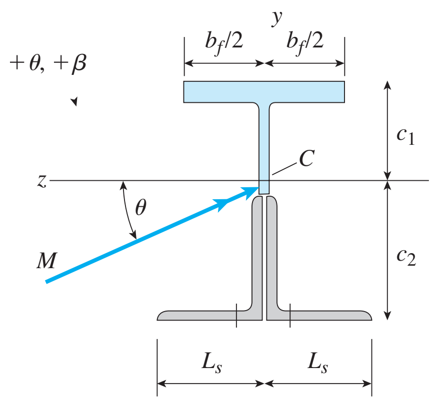
6.5.10 Una trabe armada que soporta un balcón de un condominio está compuesta de un perfil estructural T (la mitad de un perfil W 200 × 31.5) para el patín superior y el alma, y dos ángulos (2L 102 × 76 × 6.4 de lados largos espalda con espalda) para el patín inferior y el alma, como se muestra en la figura. La viga está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje z (consulte la figura).

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Suponga que $\theta = 30°$ y $M = 15$ kN·m.

Utilice las propiedades numéricas siguientes: $c_1 = 4.111$mm, $c_2 = 4.169$ mm, $b_f = 134$ mm, $L_s = 76$ mm, $A = 4144$ mm^2, $I_y = 3.88 \times 10^6$ mm^4 e $I_z = 34.18 \times 10^6$ mm^4.



Trabe armada

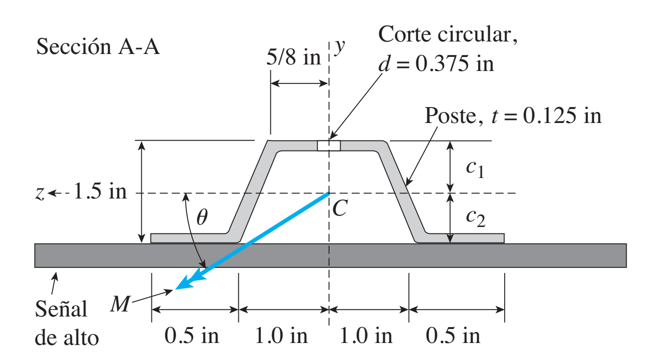


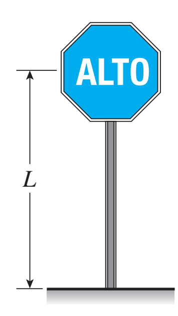
PROB. 6.5.10

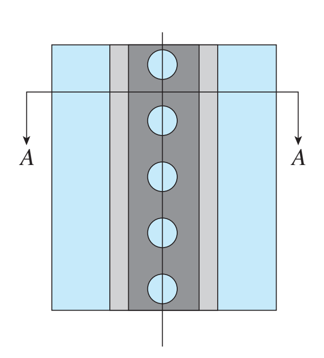
6.5.11 Un poste de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) que tiene un espesor $t = 1/8$ in y altura $L = 72$ in, soporta una señal de alto (consulte la figura). La señal de alto está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector a un ángulo θ con respecto al eje z.

Determine la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c en la viga. Suponga que $\theta = 30°$ y $M = 5.0$ k-in.

Utilice las propiedades numéricas siguientes para el poste: $A = 0.578$ in^2, $c_1 = 0.769$ in, $c_2 = 0.731$ in, $I_y = 0.44867$ in^4 e $I_z = 0.16101$ in^4.







Vista en elevación del poste

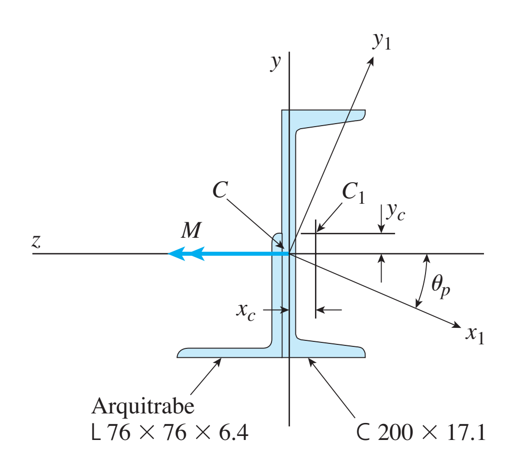


Poste de acero

PROB. 6.5.11

6.5.12 Una sección en canal C 200 × 17.1 tiene un ángulo con lados iguales sujeto como se muestra; el ángulo sirve como una arquitrabe. La sección combinada de acero está sometida a un momento flexionante M que tiene su vector dirigido a lo largo del eje z, como se muestra en la figura. El centroide C de la sección transversal está ubicado a distancias x_c y y_c desde el centroide (C_1) del canal. Los ejes principales x_1 y y_1 también se muestran en la figura y las propiedades I_{x_1}, I_{y_1} y θ_p se dan a continuación.

Encuentre la orientación del eje neutro y calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t y el esfuerzo de compresión máximo σ_c si el ángulo es una sección L 76 × 76 × 6.4 y M = 3.5 kN·m. Utilice las propiedades siguientes para los ejes principales en la sección combinada: $I_{x_1} = 18.49 \times 10^6$ mm^4 $I_{y_1} = 1.602 \times 10^6$ mm^4, $\theta_p = 7.448°$, en el (en el sentido de las manecillas del reloj), x_c = 10.70 mm, y_c = 24.07 mm.



PROB. 6.5.12

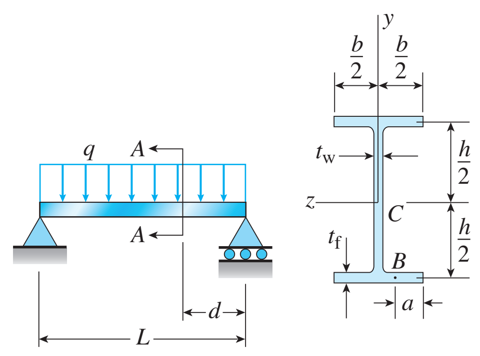
Esfuerzos cortantes en vigas de patín ancho

Al resolver los problemas para la sección 6.8, suponga que las secciones transversales son de pared delgada. Utilice dimensiones hasta la línea central para todos los cálculos y deducciones, a menos que se especifique lo contrario.

6.8.1 Una viga simple con sección transversal de patín ancho W 10 × 30 soporta una carga uniforme con intensidad q = 3.0 k/ft sobre un claro de longitud L = 12 ft (consulte la figura). Las dimensiones de la sección transversal son h = 10.5 in, b = 5.81 in, t_f = 0.510 in y t_w = 0.300 in.

(a) Calcule el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en la sección A-A ubicada a una distancia d = 2.5 ft desde el extremo de la viga.

(b) Calcule el esfuerzo cortante τ en el punto B en la sección transversal. El punto B está ubicado a una distancia a = 1.5 in desde el borde del patín inferior.



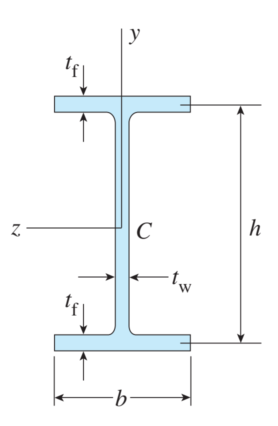
PROBS. 6.8.1 y 6.8.2

6.8.2 Resuelva el problema anterior para un perfil de patín ancho W 250 × 44.8 con los datos siguientes: L = 3.5 m, q = 45 kN/m, h = 267 mm, b = 148 mm, t_f = 13 mm, t_w = 7.62 mm, d = 0.5 mm y a = 50 mm.

6.8.3 Una viga de un perfil de patín ancho, W 8 × 28, tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Las dimensiones son b = 6.54 in, h = 8.06 in, t_w = 0.285 in y t_f = 0.465 in. Las cargas sobre la viga producen una fuerza cortante V = 7.5 k en la sección transversal en consideración.

(a) Emplean dimensiones hasta la línea central para calcular el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en el alma de la viga.

(b) Utilice el análisis más exacto de la sección 5.10 en el capítulo 5 para calcular el esfuerzo cortante máximo en el alma de la viga y compárelo con el esfuerzo obtenido en el inciso a.



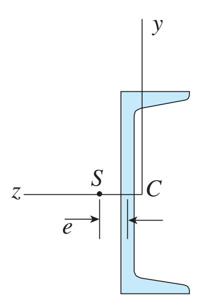
PROBS. 6.8.3 y 6.8.4

6.8.4 Resuelva el problema anterior para un perfil W 200 × 41.7 con los datos siguientes: b = 166 mm, h = 205 mm, t_w = 7.24 mm, t_f = 11.8 mm y V = 38 kN.

Centros de cortante de secciones abiertas de pared delgada

Al ubicar los centros de cortante en los problemas para la sección 6.9, suponga que las secciones transversales son de pared delgada y utilice las dimensiones hasta la línea central para todos los cálculos y deducciones.

6.9.1 Calcule la distancia e desde la línea central del alma de una sección en canal C 15 × 40 hasta el centro de cortante S (consulte la figura). (*Nota:* para fines de análisis, considere los patines como rectángulos con espesor t_f igual al espesor promedio del patín dado en la tabla E.3a en el apéndice E.)



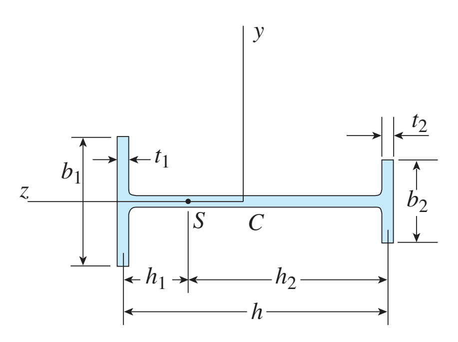
PROBS. 6.9.1 y 6.9.2

6.9.2 Calcule la distancia e desde la línea central del alma de una sección en canal C 310 × 45 hasta el centro de cortante S (consulte la figura). (*Nota:* para fines de análisis, considere los patines como rectángulos con espesor t_f igual al espesor promedio del patín que se da en la tabla E.3b en el apéndice E.)

6.9.3 En la figura se muestra la sección transversal de una viga de patín ancho asimétrica. Obtenga la siguiente fórmula para la distancia h_1 desde la línea central de un patín hasta el centro de cortante S:

$$h_1 = \frac{t_2 b_2^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$$

Además, verifique la fórmula para los casos especiales de una viga T ($b_2 = t_2 = 0$) y una viga de patín ancho simétrica ($t_2 = t_1$ y $b_2 = b_1$).

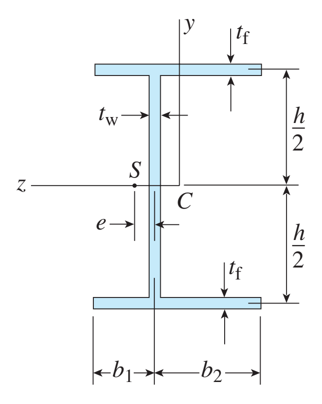


PROB. 6.9.3

6.9.4 En la figura se muestra la sección transversal de una viga de patín ancho asimétrica. Obtenga la fórmula siguiente para la distancia e desde la línea central del alma hasta el centro de cortante S:

$$e = \frac{3t_f(b_2^2 - b_1^2)}{ht_w + 6t_f(b_1 + b_2)}$$

Además, verifique la fórmula para los casos especiales de una sección en canal ($b_1 = 0$ y $b_2 = b$) y una viga doblemente simétrica ($b_1 = b_2 = b/2$).

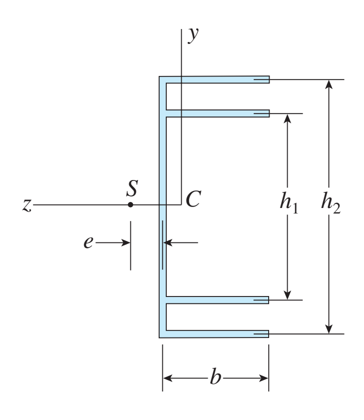


PROB. 6.9.4

6.9.5 En la figura se muestra la sección transversal de una viga en canal con patines dobles y espesor constante en toda la sección.

Obtenga la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central del alma hasta el centro de cortante S:

$$e = \frac{3b^2(h_1^2 + h_2^2)}{h_2^3 + 6b(h_1^2 + h_2^2)}$$

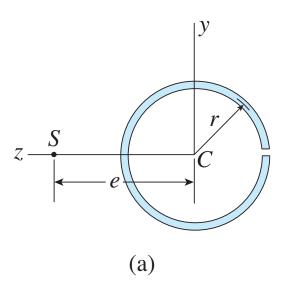


PROB. 6.9.5

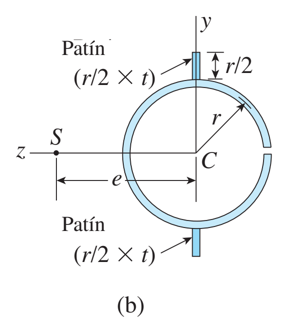
6.9.6 En la figura se muestra la sección transversal de un tubo cortado con espesor constante.

(a) Demuestre que la distancia e desde el centro del círculo hasta el centro de cortante S es igual a $2r$ en la parte (a) de la figura.

(b) Encuentre una expresión para e si se agregan patines con el mismo espesor que el tubo, como se muestra en la parte (b) de la figura.



(a)

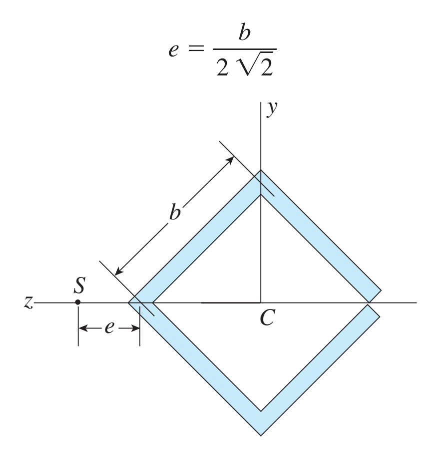


(b)

PROB. 6.9.6

6.9.7 En la figura se muestra la sección transversal de un tubo cuadrado cortado con espesor constante. Obtenga la fórmula siguiente para la distancia e desde la esquina de la sección transversal hasta el centro de cortante S:

$$e = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$



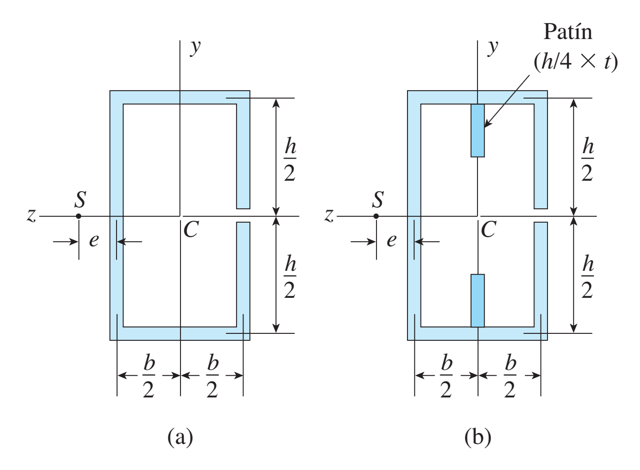
PROB. 6.9.7

6.9.8 En las figuras se muestra la sección transversal de un tubo rectangular cortado con espesor constante.

(a) Obtenga la fórmula siguiente para la distancia e desde la línea central de la pared del tubo en la parte (a) de la figura hasta el centro de cortante S:

$$e = \frac{b(2h + 3b)}{2(h + 3b)}$$

(b) Encuentre una expresión para e si se agregan patines con el mismo espesor que el del tubo como se muestra en la parte (b) de la figura.

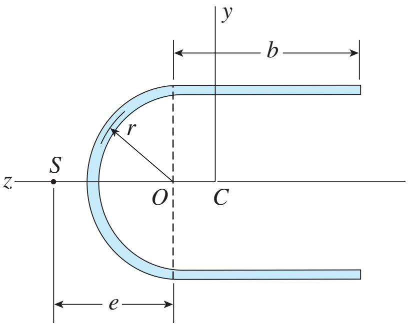


PROB. 6.9.8

***6.9.9** En la figura se muestra una sección transversal U con espesor constante. Obtenga la fórmula siguiente para la distancia e desde el centro del semicírculo hasta el centro de cortante S:

$$e = \frac{2(2r^2 + b^2 + \pi br)}{4b + \pi r}$$

Además, elabore una gráfica que muestre cómo varía la distancia e (expresada como la razón adimensional e/r) en función de la razón b/r. (Utilice valores de 0 a 2 para b/r.)

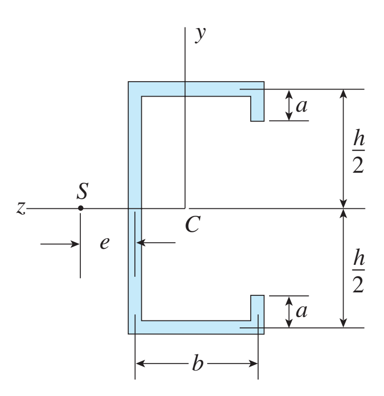


PROB. 6.9.9

***6.9.10** Obtenga la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central de la pared hasta el centro de cortante S para el perfil C con espesor constante que se muestra en la figura:

$$e = \frac{3bh^2(b + 2a) - 8ba^3}{h^2(h + 6b + 6a) + 4a^2(2a - 3h)}$$

Además, verifique la fórmula para los casos especiales de un perfil canal ($a = 0$) y un tubo rectangular cortado ($a = h/2$).

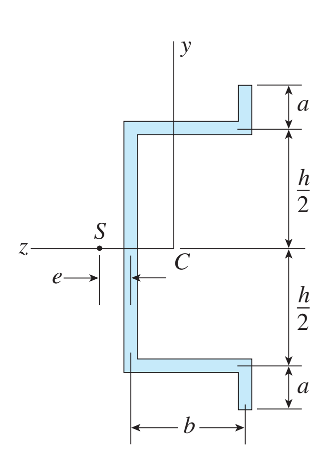


PROB. 6.9.10

***6.9.11** Obtenga la siguiente fórmula para la distancia e desde la línea central de la pared hasta el centro de cortante S para la sección en sombrero con espesor constante que se muestra en la figura:

$$e = \frac{3bh^2(b + 2a) - 8ba^3}{h^2(h + 6b + 6a) + 4a^2(2a + 3h)}$$

Además, verifique la fórmula para el caso especial de un perfil canal ($a = 0$).



PROB. 6.9.11

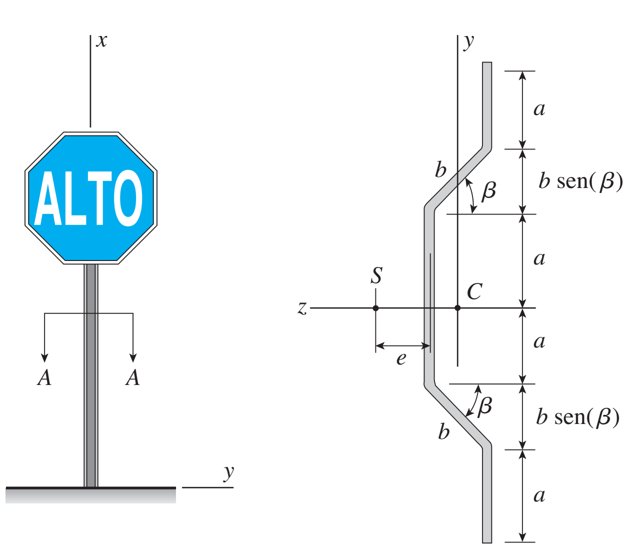
6.9.12 En la figura se muestra la sección transversal del poste de una señal.

Obtenga la fórmula siguiente para la distancia e desde la línea central de la pared del poste hasta el centro de cortante S:

$$e = \frac{1}{3}tba(4a^2 + 3ab\,\text{sen}(\beta) + 3ab + 2\,\text{sen}(\beta)b^2)\,\frac{\cos(\beta)}{I_z}$$

donde I_z = momento de inercia con respecto al eje z.

Además, compare esta fórmula con la dada en el problema 6.9.11 para el caso especial de $\beta = 0$ aquí y $a = h/2$ en las dos fórmulas.

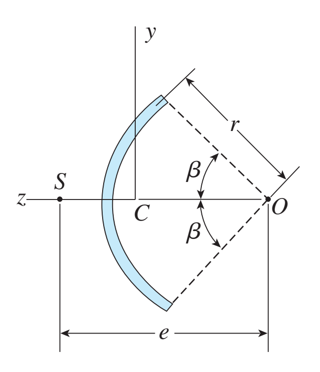


PROB. 6.9.12

***6.9.13** En la figura se muestra la sección transversal de un arco de círculo con espesor constante. Obtenga la fórmula siguiente para la distancia e desde el centro del arco hasta el centro de cortante S:

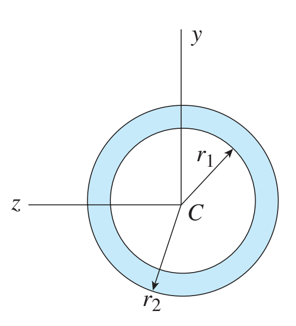
$$e = \frac{2r(\text{sen}\,\beta - \beta\cos\beta)}{\beta - \text{sen}\,\beta\cos\beta}$$

en donde β está en radianes. Además, elabore una gráfica que muestre cómo varía la distancia e conforme β varía de 0 a π.



PROB. 6.9.13

6.10.2 (a) Determine el factor de forma f para una sección transversal circular hueca que tiene un radio interior r_1 y un radio exterior r_2 (consulte la figura). (b) Si la sección es muy delgada, ¿cuál es el factor de forma?



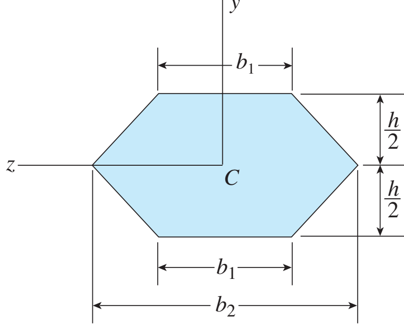
PROB. 6.10.2

Flexión elastoplástica

Los problemas para la sección 6.10 se deben resolver suponiendo que el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia σ_Y.

6.10.1 Determine el factor de forma f para una sección transversal de un trapezoide doble que tiene las dimensiones que se muestran en la figura.

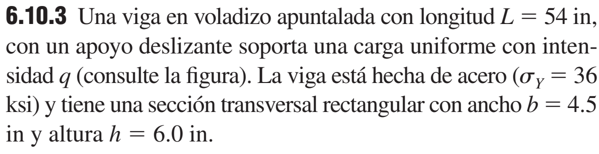
Además, verifique su resultado para los casos especiales de un rombo ($b_1 = 0$) y un rectángulo ($b_1 = b_2$).



PROB. 6.10.1

6.10.3 Una viga en voladizo apuntalada con longitud $L = 54$ in, con un apoyo deslizante soporta una carga uniforme con intensidad q (consulte la figura). La viga está hecha de acero ($\sigma_Y = 36$ ksi) y tiene una sección transversal rectangular con ancho $b = 4.5$ in y altura $h = 6.0$ in.

¿Qué intensidad de carga q producirá una condición completamente plástica en la viga?

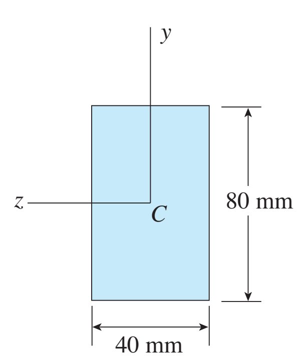


PROB. 6.10.3

6.10.4 Una viga de acero con sección transversal rectangular tiene un ancho de 40 mm y un peralte de 80 mm (consulte la figura). El esfuerzo de fluencia del acero es 210 MPa.

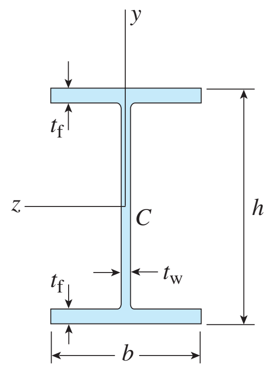
(a) ¿Qué porcentaje del área de la sección transversal está ocupada por el núcleo elástico si la viga se somete a un momento flexionante de 12.0 kN·m que actúa con respecto al eje z?

(b) ¿Cuál es la magnitud del momento flexionante que ocasionará que fluya 50% de la sección transversal?



PROB. 6.10.4

6.10.5 Calcule el factor de forma f para la viga de patín ancho que se muestra en la figura si h = 12.2 in, b = 8.08 in, t_f = 0.64 in y t_w = 0.37 in.



PROBS. 6.10.5 y 6.10.6

6.10.6 Resuelva el problema anterior para una viga de patín ancho con h = 404 mm, b = 140 mm, t_f = 11.2 mm y t_w = 6.99 mm.

6.10.7 Determine el módulo plástico Z y el factor de forma f para una viga de patín ancho W 12 × 14. (*Nota:* obtenga las dimensiones de la sección transversal y el módulo de sección de la viga de la tabla E.1a en el apéndice E.)

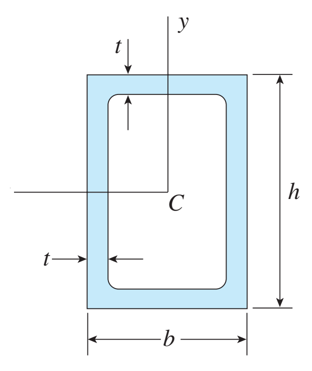
6.10.8 Resuelva el problema anterior para una viga de patín ancho W 250 × 89. (*Nota:* obtenga las dimensiones de la sección transversal y el módulo de sección de la viga de la tabla E.1b en el apéndice E.)

6.10.9 Determine el momento de fluencia M_Y, el momento plástico M_P y el factor de forma f para una viga de patín ancho W 16 × 100 si σ_Y = 36 ksi. (*Nota:* obtenga las dimensiones de la sección transversal y el módulo de sección de la viga de la tabla E.1a en el apéndice E.)

6.10.10 Resuelva el problema anterior para una viga de patín ancho W 410 × 85. Suponga que σ_Y = 250 MPa. (*Nota:* obtenga las dimensiones de la sección transversal y el módulo de sección de la viga de la tabla E.1b en el apéndice E.)

6.10.11 En la figura se muestra una viga de caja hueca con altura h = 16 in, ancho b = 8 in y espesor de pared constante t = 0.75 in. La viga está construida de acero con esfuerzo de fluencia σ_Y = 32 ksi.

Determine el momento de fluencia M_Y, el momento plástico M_P y el factor de forma f.

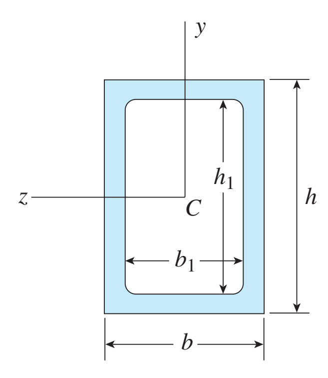


PROBS. 6.10.11 y 6.10.12

6.10.12 Resuelva el problema anterior para una viga de caja con dimensiones $h = 0.5$ m, $b = 0.18$ m y $t = 22$ mm. El esfuerzo de fluencia del acero es 210 MPa.

6.10.13 En la figura se muestra una viga de caja hueca con altura $h = 9.5$ in, altura interior $h_1 = 8.0$ in, ancho $b = 5.25$ in y ancho interior $b_1 = 4.5$ in.

Si se supone que la viga está construida de acero con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 42$ ksi, calcule el momento de fluencia M_Y, el momento plástico M_P y el factor de forma f.



PROBS. 6.10.13 a 6.10.16

6.10.14 Resuelva el problema anterior para una viga de caja con dimensiones $h = 200$ mm, $h_1 = 160$ mm, $b = 150$ mm y $b_1 = 130$ mm. Suponga que la viga está construida de acero con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 220$ MPa.

6.10.15 La viga de caja hueca que se muestra en la figura está sometida a un momento flexionante M de tal magnitud que los patines fluyen pero las almas permanecen linealmente elásticas.

(a) Calcule la magnitud del momento M si las dimensiones de la sección transversal son $h = 15$ in, $h_1 = 12.75$ in, $b = 9$ in y $b_1 = 7.5$ in. Además, el esfuerzo de fluencia es $\sigma_Y = 33$ ksi.

(b) ¿Qué porcentaje del momento M es producido por el núcleo elástico?

6.10.16 Resuelva el problema anterior para una viga de caja con dimensiones $h = 400$ mm, $h_1 = 360$ mm, $b = 200$ mm, $b_1 = 160$ mm y esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 220$ MPa.

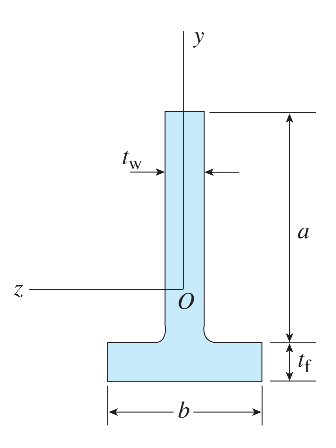
6.10.17 Una viga de patín ancho W 10 × 60 está sometida a un momento flexionante M de tal magnitud que los patines fluyen pero el alma permanece linealmente elástica.

(a) Calcule la magnitud del momento M si el esfuerzo de fluencia es $\sigma_Y = 36$ ksi.

(b) ¿Qué porcentaje del momento M es producido por el núcleo elástico?

6.10.18 Una viga T simétrica (consulte la figura) tiene dimensiones en su sección transversal $b = 140$ mm, $a = 190.8$ mm, $t_w = 6.99$ mm y $t_f = 11.2$ mm.

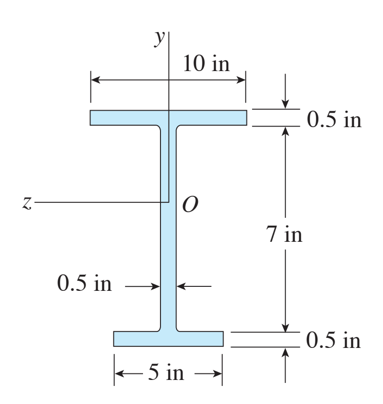
Calcule el módulo plástico Z y el factor de forma f.



PROB. 6.10.18

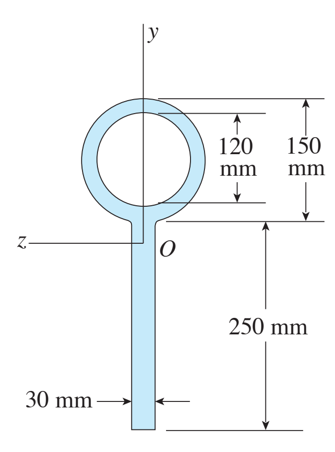
***6.10.19** Una viga de patín ancho con sección transversal asimétrica tiene las dimensiones que se muestran en la figura.

Determine el momento plástico M_P si $\sigma_Y = 36$ ksi.

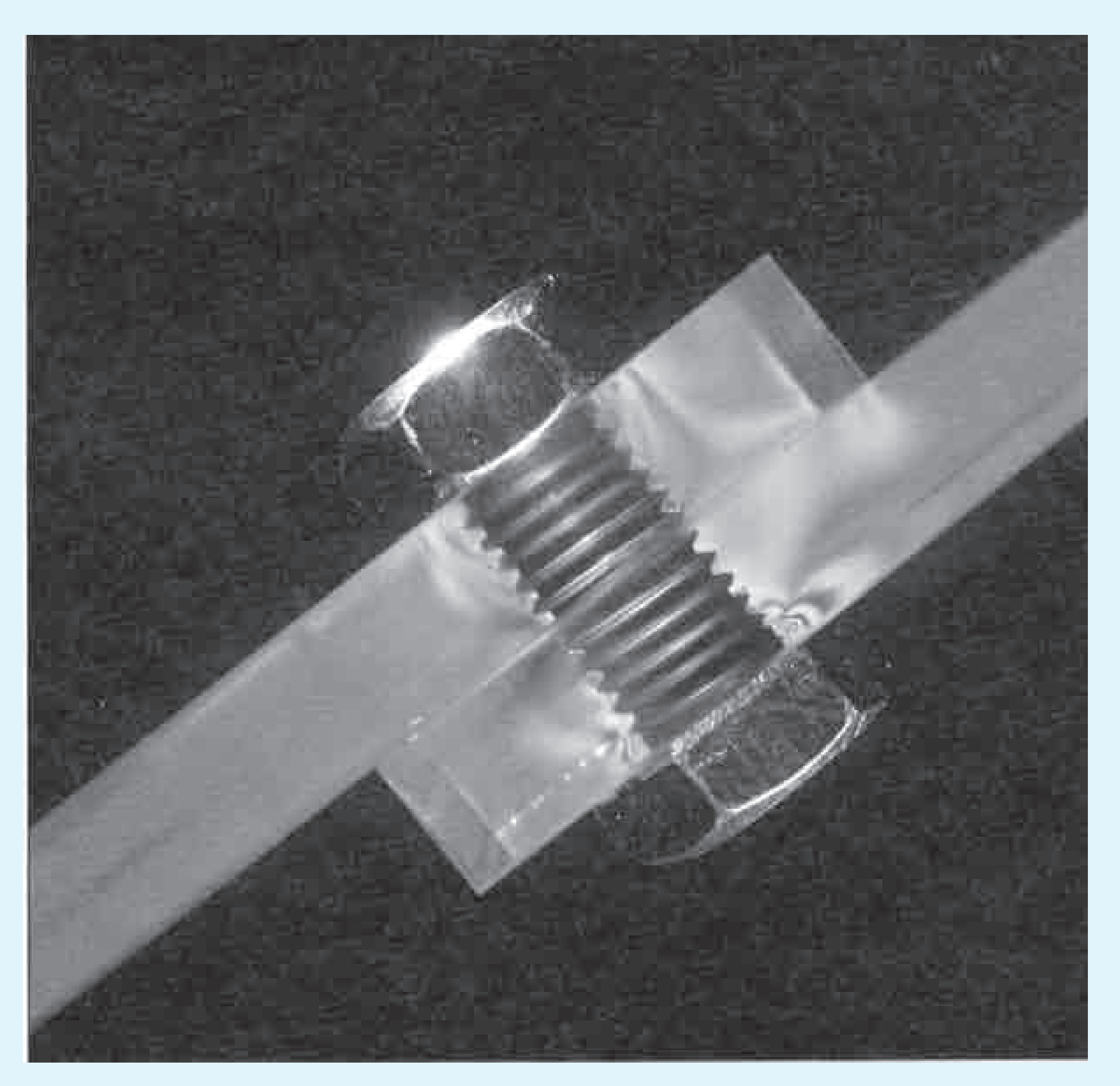


PROB. 6.10.19

***6.10.20** Determine el momento plástico M_P para una viga que tiene la sección transversal que se muestra en la figura si $\sigma_Y = 210$ MPa.



PROB. 6.10.20



La fotoelasticidad es un método experimental que se emplea para encontrar el estado complejo de esfuerzo cerca de un perno que conecta dos placas.

7

Análisis de esfuerzo y deformación unitaria

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata la determinación de los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre secciones inclinadas cortadas a través de un elemento porque pueden ser mayores que los correspondientes a un elemento de esfuerzo alineado con la sección transversal. En dos dimensiones, un elemento de esfuerzo representa el estado de *esfuerzo plano* en un punto (esfuerzos normales σ_x, σ_y y esfuerzo cortante τ_{xy}) (sección 7.2) y se necesitan ecuaciones de transformación (sección 7.3) para encontrar los esfuerzos que actúan sobre un elemento que gira en algún ángulo θ desde esa posición. Las expresiones resultantes para los esfuerzos normales y cortantes se pueden reducir a las ya examinadas en la sección 2.6 para esfuerzo uniaxial ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$) y en la sección 3.5 para cortante puro ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} \neq 0$). Para el diseño se necesitan los valores máximos de los esfuerzos, y se pueden emplear las ecuaciones de transformación para determinar estos *esfuerzos principales* y los planos sobre los que actúan (sección 7.3). No hay esfuerzos cortantes en acción sobre los planos principales, pero se puede hacer un análisis separado para encontrar el esfuerzo cortante máximo ($\tau_{máx}$) así como el plano inclinado sobre el que actúa. Se demuestra que el esfuerzo cortante máximo es igual a la mitad de la diferencia entre los esfuerzos normales principales (σ_1, σ_2). Una representación gráfica de las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano, conocida como círculo de Mohr, proporciona una forma conveniente para calcular los esfuerzos sobre cualquier plano inclinado de interés y en particular aquellos sobre planos principales, (sección 7.4). El círculo de Mohr también se puede emplear para representar deformaciones unitarias (sección 7.7) y momentos de inercia. En la sección 7.5 se estudian las deformaciones unitarias normales y por cortante (ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}), y se deduce la *ley de Hooke para esfuerzo plano*, que relaciona los módulos elásticos E y G y la relación de Poisson ν para materiales homogéneos e isotrópicos. Las expresiones generales para la ley de Hooke se pueden simplificar a las relaciones esfuerzo-deformación unitaria para esfuerzo biaxial, esfuerzo uniaxial y cortante puro. Un análisis adicional de las deformaciones unitarias conduce a una expresión para el cambio en volumen unitario (o *dilatación e*), así como la densidad de energía de deformación en esfuerzo plano (sección 7.5). A continuación se analiza el *esfuerzo triaxial* (sección 7.6). Luego se explican los casos especiales de esfuerzo triaxial, conocido como *esfuerzo esférico* y *esfuerzo*

hidrostático: para esfuerzo esférico, los tres esfuerzos normales son iguales y de tensión, en tanto que para esfuerzo hidrostático, son iguales y de compresión. Por último, se deducen las ecuaciones de transformación para *deformación unitaria plana* (sección 7.7), que relacionan las deformaciones unitarias sobre secciones inclinadas con aquellas en las direcciones de los ejes de referencia, y luego se comparan con el *esfuerzo plano*. Las ecuaciones de transformación de deformación unitaria plana son necesarias para evaluar las mediciones de la deformación unitaria obtenida mediante deformímetros en experimentos de laboratorio con estructuras reales.

Los temas en el capítulo 7 están organizados de la siguiente manera:

7.1 INTRODUCCIÓN

Los esfuerzos normales y cortantes en vigas, ejes y barras se pueden calcular con las fórmulas básicas analizadas en los capítulos anteriores. Por ejemplo, los esfuerzos en una viga están dados por la fórmula de la flexión y las fórmulas del cortante ($\sigma = My/I$ y $\tau = VQ/Ib$) y los esfuerzos en un eje por la fórmula de la torsión ($\tau = T\rho/I_P$). Los esfuerzos calculados con estas fórmulas actúan sobre secciones transversales de los elementos, pero pueden ocurrir esfuerzos mayores sobre **secciones inclinadas**. Por tanto, iniciaremos nuestro análisis de esfuerzos y deformaciones unitarias estudiando los métodos para determinar los esfuerzos normales y las cortantes que actúan sobre secciones inclinadas cortadas a través de un elemento.

Ya hemos deducido las expresiones para los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre secciones inclinadas tanto en *esfuerzo uniaxial* como en *cortante puro* (consulte las secciones 2.6 y 3.5, respectivamente). En el caso del esfuerzo uniaxial, determinamos que los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre planos inclinados a 45° con respecto al eje, mientras que los esfuerzos normales máximos ocurren sobre las secciones transversales. En el caso del cortante puro, determinamos que los esfuerzos máximos de tensión y compresión ocurren sobre planos a 45°. De una manera análoga, los esfuerzos sobre secciones inclinadas cortadas a través de una viga pueden ser mayores que los que actúan sobre una sección transversal. Para calcular esos esfuerzos necesitamos determinar los que actúan sobre planos inclinados conforme a un estado de esfuerzo más general conocido como **esfuerzo plano** (sección 7.2).

En nuestro análisis de esfuerzo plano utilizaremos los **elementos de esfuerzo** para representar el estado de esfuerzo en un punto en un cuerpo. Los elementos de esfuerzo se analizaron con anterioridad en un contexto especializado (consulte las secciones 2.6 y 3.5), pero ahora los emplearemos de una manera más formalizada. Comenzaremos nuestro análisis al considerar un elemento sobre el cual se conocen los esfuerzos y luego deduciremos las **ecuaciones de transformación** que dan los esfuerzos que actúan sobre los lados de un elemento orientado en una dirección diferente.

Al trabajar con elementos de esfuerzo siempre debemos tener en cuenta que sólo existe un **estado de esfuerzo** intrínseco en un punto en un cuerpo sometido a esfuerzos, sin importar la orientación del elemento que se emplee para representar dicho estado de esfuerzo. Cuando se tienen dos elementos con orientaciones distintas en el mismo punto en un cuerpo, los esfuerzos que actúan sobre las caras de los dos elementos son diferentes, pero aún representan el mismo estado de esfuerzo, a saber, el esfuerzo en el punto en consideración. Esta situación es análoga a la representación de un vector fuerza mediante sus componentes; aunque éstos sean diferentes cuando los ejes coordenados se giran a una posición nueva, la fuerza es la misma.

Además, siempre debemos tener en cuenta que los esfuerzos *no* son vectores; este hecho algunas veces puede ser confuso, ya que por costumbre representamos los esfuerzos con flechas al igual que representamos los vectores fuerza con flechas. *Si bien las flechas empleadas para representar esfuerzos tienen magnitud y sentido, no son vectores debido a que no se combinan de acuerdo con la ley de la adición del paralelogramo*. Más bien, los esfuerzos son cantidades mucho más complejas que los vectores y en matemáticas se denominan **tensores**. Otras cantidades tensoriales en la mecánica son las deformaciones unitarias y los momentos de inercia.

7.2 ESFUERZO PLANO

Las condiciones de esfuerzo que encontramos en los capítulos anteriores, cuando analizamos barras en tensión y compresión, los ejes en torsión y las vigas en flexión son ejemplos de un estado de esfuerzo llamado **esfuerzo plano**. Para explicarlo consideraremos el elemento de esfuerzo que se muestra en la figura 7.1a. Este elemento tiene tamaño infinitesimal y se puede dibujar como un cubo o bien como un paralelepípedo rectangular. Los ejes *xyz* son paralelos a los bordes del elemento y sus caras se designan según las direcciones de sus normales hacia fuera, como se explicó en la sección 1.6. Por ejemplo, a la cara derecha del elemento se le refiere como la cara *x* positiva y la cara izquierda (oculta al observador) cara *x* negativa. De manera similar, la cara superior es la cara *y* positiva y la cara frontal es la cara *z* positiva.

Cuando el material está en esfuerzo plano en el plano *xy*, sólo las caras *x* y *y* del elemento están sometidas a esfuerzos y todos actúan paralelos a los ejes *x* y *y,* como se muestra en la figura 7.1a. Esta condición de esfuerzo es muy común debido a que está presente en la superficie de cualquier cuerpo sometido a esfuerzo, excepto en los puntos donde actúa la carga externa sobre la superficie. Cuando el elemento que se muestra en la figura 7.1a está ubicado en la superficie libre de un cuerpo, el eje *z* es normal a la superficie y la cara *z* está en el plano de la superficie.

Los símbolos para los esfuerzos que se muestran en la figura 7.1a tienen los siguientes significados. Un **esfuerzo normal** σ tiene un subíndice que identifica la cara sobre la cual actúa; por ejemplo, el esfuerzo σ_x actúa sobre la cara *x* del elemento y el esfuerzo σ_y actúa sobre la cara *y* del elemento. Como el elemento tiene un tamaño infinitesimal, los esfuerzos normales que actúan sobre las caras opuestas son iguales. La **convención de signos para los esfuerzos normales** es la usual, es decir, la tensión es positiva y la compresión es negativa.

Un **esfuerzo cortante** τ tiene dos subíndices; el primero denota la cara sobre la cual actúa el esfuerzo y el segundo da la dirección sobre esa cara. Así entonces, el esfuerzo τ_{xy} actúa sobre la cara *x* en la dirección del eje *y* (figura 7.1a) y el esfuerzo τ_{yx} actúa sobre la cara *y* en la dirección del eje *x*.

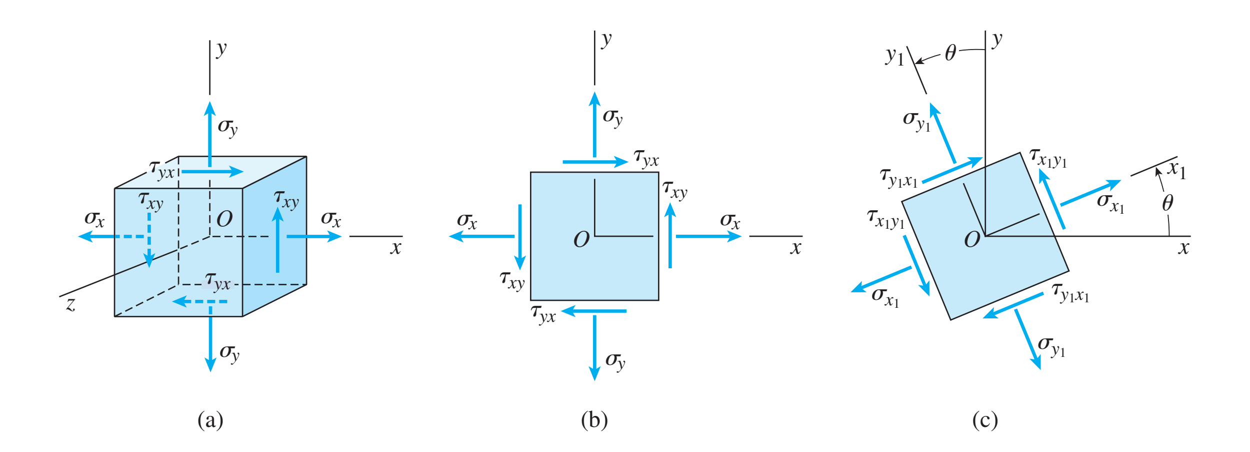


FIGURA 7.1 Elementos en esfuerzo plano: (a) vista tridimensional de un elemento orientado con respecto a los ejes *xyz*, (b) vista bidimensional del mismo elemento y (c) vista bidimensional de un elemento orientado con respecto a los ejes $x_1y_1z_1$.

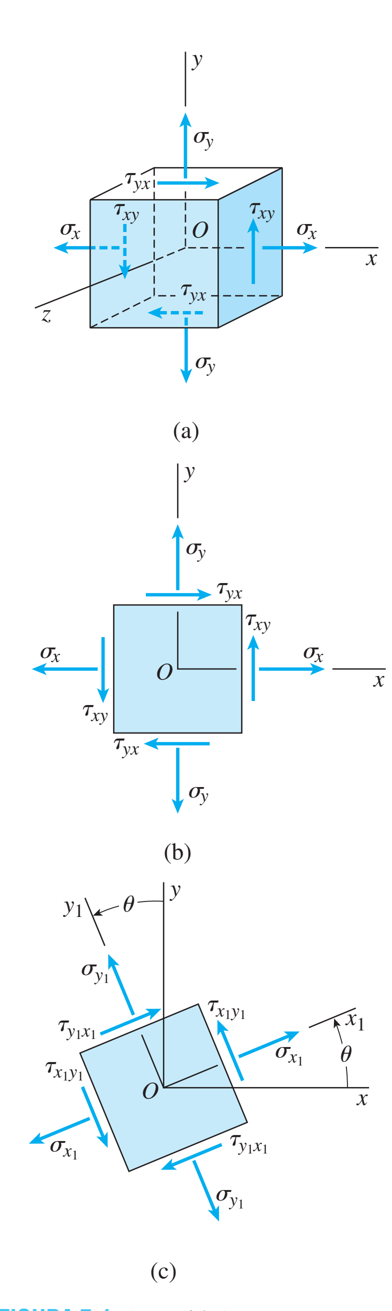


FIGURA 7.1 (Repetida.)

La **convención de signos para los esfuerzos cortantes** es la que sigue. Un esfuerzo cortante es positivo cuando actúa sobre una cara positiva de un elemento en la dirección positiva de un eje, y negativo cuando actúa sobre una cara positiva de un elemento en la dirección negativa de un eje. Por tanto, los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} que se muestran en las caras x y y positivas en la figura 7.1a son esfuerzos cortantes positivos. De manera similar, sobre una cara negativa del elemento, un esfuerzo cortante es positivo cuando actúa en la dirección negativa del eje. De aquí, los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} que se muestran sobre las caras x y y negativas del elemento también son positivos.

Esta convención de signos para los esfuerzos cortantes es fácil de recordar si la enunciamos de la siguiente manera:

Un esfuerzo cortante es positivo cuando las direcciones asociadas con sus subíndices son más-más o menos-menos; el esfuerzo es negativo cuando las direcciones son más-menos o menos-más.

La convención de signos anterior para los esfuerzos cortantes es consistente con el equilibrio del elemento, ya que sabemos que los esfuerzos cortantes sobre caras opuestas de un elemento infinitesimal deben ser iguales en magnitud y con dirección opuesta. De aquí que, de acuerdo con nuestra convención de signos, un esfuerzo positivo τ_{xy} actúa hacia arriba sobre la cara positiva (figura 7.1a) y hacia abajo sobre la cara negativa. De manera similar, los esfuerzos τ_{yx} que actúan sobre las caras superior e inferior del elemento son positivos aunque tienen direcciones opuestas.

También sabemos que los esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares son iguales en magnitud y tienen direcciones tales que los dos esfuerzos apuntan hacia la línea de intersección de las caras o alejándose de ella. Puesto que τ_{xy} y τ_{yx} son positivos en las direcciones que se muestran en la figura, son consistentes con esta observación. Por tanto, observamos que

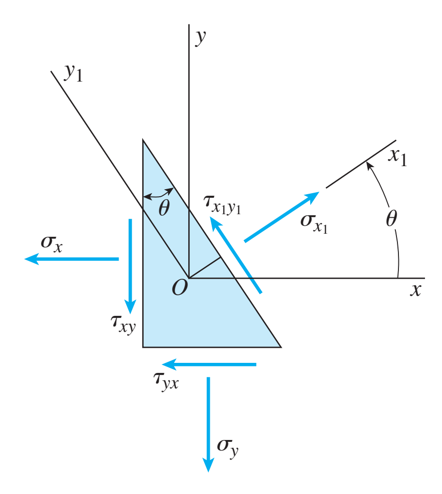
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{7.1}$$

Esta relación se dedujo antes del equilibrio del elemento (consulte la sección 1.6).

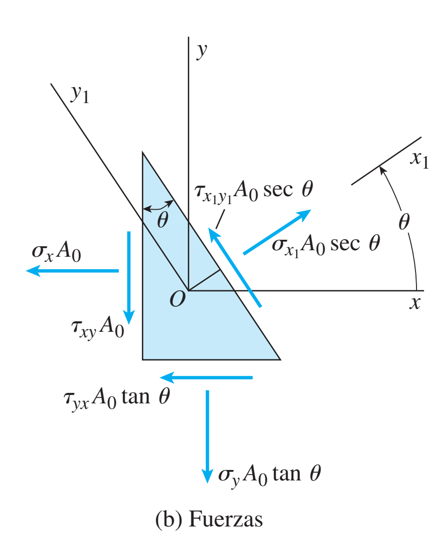
Por conveniencia, al trazar elementos de esfuerzo plano es usual que dibujemos una vista bidimensional del elemento, como se muestra en la figura 7.1b. Si bien una figura de este tipo es adecuada para mostrar todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento, aún debemos tener en cuenta que el elemento es un cuerpo sólido con espesor perpendicular al plano de la figura.

Esfuerzos sobre secciones inclinadas

Ahora podemos considerar los esfuerzos que actúan sobre secciones inclinadas suponiendo que conocemos los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} (figuras 7.1a y b). Para representar los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada, consideramos un nuevo elemento de esfuerzo (figura 7.1c) que está ubicado en el mismo punto en el material que el elemento original (figura 7.1b). Sin embargo, el nuevo elemento tiene caras que son paralelas y perpendiculares a la dirección inclinada. Asociados con este nuevo elemento se tienen los ejes x_1, y_1 y z_1, tales que el eje z_1 coincide con el eje z y los ejes x_1y_1 están



(a) Esfuerzos



(b) Fuerzas

FIGURA 7.2 Elemento de esfuerzo en forma de cuña en esfuerzo plano: (a) esfuerzos que actúan sobre el elemento y (b) fuerzas que actúan sobre el elemento (diagrama de cuerpo libre).

girados en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ con respecto a los ejes xy.

Los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre este nuevo elemento se denotan σ_{x_1}, σ_{y_1}, $\tau_{x_1y_1}$ y $\tau_{x_1y_1}$ empleando las mismas designaciones con subíndices y convenciones de signos descritas antes para los esfuerzos que actúan sobre el elemento xy. Las conclusiones anteriores relativas a los esfuerzos cortantes aún son aplicables, de manera que

$$\tau_{x_1y_1} = \tau_{y_1x_1} \tag{7.2}$$

A partir de esta ecuación y del equilibrio del elemento, observamos que *los esfuerzos cortantes que actúan sobre los cuatro lados de un elemento en esfuerzo plano se conocen si determinamos el esfuerzo cortante que actúa sobre cualquiera de los lados*.

Los esfuerzos que actúan sobre el elemento inclinado x_1y_1 (figura 7.1c) pueden expresarse en términos de los esfuerzos sobre el elemento xy (figura 7.1b) al utilizar ecuaciones de equilibrio. Para este fin elegimos un **elemento de esfuerzo con forma de cuña** (figura 7.2a) que tiene una cara inclinada que es igual que la cara x_1 del elemento inclinado que se muestra en la figura 7.1c. Los otros dos lados de la cuña son paralelos a los ejes x y y.

A fin de escribir las ecuaciones de equilibrio para la cuña, necesitamos elaborar un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas que actúan sobre las caras. Denotemos el área de la cara izquierda (es decir, la cara x negativa) como A_0. Entonces las fuerzas normal y cortante que actúan sobre esa cara son $\sigma_x A_0$ y $\tau_{xy}A_0$, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 7.2b. El área de la cara inferior (o cara y negativa) es $A_0 \tan\theta$ y el área de la cara inclinada (o cara x_1 positiva) es $A_0 \sec\theta$. Por tanto, las fuerzas normales y cortantes que actúan sobre estas caras tienen las magnitudes y direcciones que se muestran en la figura 7.2b.

Las fuerzas que actúan sobre las caras izquierda e inferior se pueden descomponer en componentes ortogonales que actúan en las direcciones x_1 y y_1. Luego podemos obtener dos ecuaciones de equilibrio al sumar fuerzas en estas direcciones. La primera ecuación, obtenida sumando fuerzas en la dirección x_1, es

$$\sigma_{x_1}A_0 \sec\theta - \sigma_x A_0 \cos\theta - \tau_{xy}A_0 \operatorname{sen}\theta$$
$$- \sigma_y A_0 \tan\theta \operatorname{sen}\theta - \tau_{yx}A_0 \tan\theta \cos\theta = 0$$

De la misma manera, al sumar fuerzas en la dirección y_1 da

$$\tau_{x_1y_1}A_0 \sec\theta + \sigma_x A_0 \operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}A_0 \cos\theta$$
$$- \sigma_y A_0 \tan\theta \cos\theta + \tau_{yx}A_0 \tan\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

Al utilizar la relación $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ y también al simplificar y reacomodar términos, obtenemos las dos siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad (7.3a)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad (7.3b)$$

Las ecuaciones (7.3a) y (7.3b) dan los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre el plano x_1 en términos del ángulo θ y los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre los planos x y y.

Para el caso especial cuando $\theta = 0$, observamos que las ecuaciones (7.3a) y (7.3b) dan $\sigma_{x_1} = \sigma_x$ y $\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy}$, como se esperaba. Además, cuando $\theta = 90°$, las ecuaciones dan $\sigma_{x_1} = \sigma_y$ y $\tau_{x_1y_1} = -\tau_{xy} = -\tau_{yx}$. En el último caso, como el eje x_1 es vertical cuando $\theta = 90°$, el esfuerzo $\tau_{x_1y_1}$ será positivo cuando actúe hacia la izquierda. Sin embargo, el esfuerzo τ_{yx} actúa hacia la derecha y por tanto, $\tau_{x_1y_1} = -\tau_{yx}$.

Ecuaciones de transformación para esfuerzo plano

Las ecuaciones (7.3a) y (7.3b) para los esfuerzos sobre una sección inclinada pueden expresarse de una manera más conveniente introduciendo las siguientes identidades trigonométricas (consulte el apéndice C):

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

Al hacer estas sustituciones, las ecuaciones se transforman en

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.4a)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \qquad (7.4b)$$

Estas ecuaciones se conocen como **ecuaciones de transformación para esfuerzo plano** debido a que transforman las componentes de esfuerzo de un conjunto de ejes en otro. No obstante, como ya se explicó, el estado de esfuerzo intrínseco en el punto en consideración es el mismo, ya sea que lo representen esfuerzos que actúan sobre el elemento xy (figura 7.1b) o sobre el elemento inclinado x_1y_1 (figura 7.1c).

Dado que las ecuaciones de transformación se dedujeron únicamente del equilibrio de un elemento, son aplicables a esfuerzos en cualquier tipo de material, ya sea lineal o no lineal, elástico o inelástico.

Es posible hacer una observación importante relativa a los esfuerzos normales que se obtienen con las ecuaciones de transformación. Como punto preliminar, observamos que el esfuerzo normal σ_{y_1} que actúa sobre la cara y_1 del elemento inclinado (figura 7.1c) puede obtenerse de la ecuación (7.4a) sustituyendo θ con $\theta + 90°$. El resultado es la ecuación siguiente para σ_{y_1}:

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.5}$$

Al sumar las ecuaciones para σ_{x_1} y σ_{y_1} (ecuaciones 7.4a y 7.5), obtenemos la siguiente ecuación para el esfuerzo plano:

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y \tag{7.6}$$

Esta ecuación muestra que la suma de los esfuerzos normales que actúan sobre caras perpendiculares de elementos de esfuerzo (en un punto dado en un cuerpo sometido a esfuerzo) es constante e independiente del ángulo θ.

La manera en que varían los esfuerzos normales y cortantes se muestra en la figura 7.3, que es una gráfica de σ_{x_1} y $\tau_{x_1 y_1}$ en función del ángulo θ (de las ecuaciones 7.4a y 7.4b). La gráfica está trazada para el caso particular de $\sigma_y = 0.2\sigma_x$ y $\tau_{xy} = 0.8\sigma_x$, donde observamos que los esfuerzos varían continuamente conforme cambia la orientación del elemento. En ciertos ángulos el esfuerzo normal alcanza un valor máximo o mínimo; en otros se vuelve cero. Una investigación detallada de esos valores máximo y mínimo se hace en la sección 7.3.

Casos especiales de esfuerzo plano

El caso general de esfuerzo plano se reduce a estados de esfuerzo más simples en condiciones especiales. Por ejemplo, si todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento xy (figura 7.1b) son cero excepto para el esfuerzo

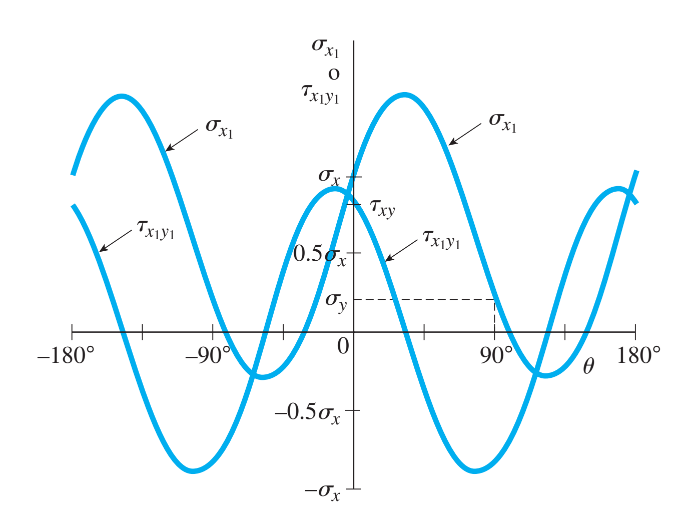


FIGURA 7.3 Gráfica del esfuerzo normal σ_{x_1} y del esfuerzo cortante $\tau_{x_1 y_1}$ en función del ángulo θ (para $\sigma_y = 0.2\sigma_x$ y $\tau_{xy} = 0.8\sigma_x$).

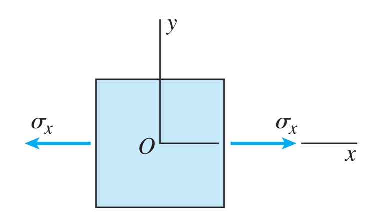


FIGURA 7.4 Elemento en esfuerzo uniaxial.

normal σ_x, entonces el elemento está en **esfuerzo uniaxial** (figura 7.4). Las ecuaciones de transformación correspondientes, obtenidas igualando σ_y y τ_{xy} a cero en las ecuaciones (7.4a) y (7.4b), son

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x}{2}(\text{sen } 2\theta) \qquad (7.7\text{a,b})$$

Estas ecuaciones concuerdan con las que se dedujeron antes en la sección 2.6 (consulte las ecuaciones 2.29a y 2.29b), excepto que ahora empleamos una notación más generalizada para los esfuerzos que actúan sobre un plano inclinado.

Otro caso especial es el de **cortante puro** (figura 7.5), para el cual las ecuaciones de transformación se obtienen sustituyendo $\sigma_x = 0$ y $\sigma_y = 0$ en las ecuaciones (7.4a) y (7.4b):

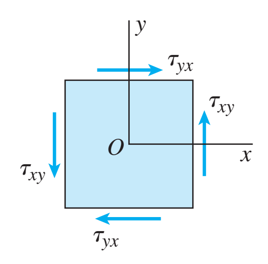


FIGURA 7.5 Elemento en cortante puro.

$$\sigma_{x_1} = \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta \qquad \tau_{x_1y_1} = \tau_{xy} \cos 2\theta \qquad (7.8\text{a,b})$$

De nuevo, estas ecuaciones corresponden a las obtenidas antes (consulte las ecuaciones 3.30a y 3.30b en la sección 3.5).

Por último, observamos el caso especial de **esfuerzo biaxial,** en el cual el elemento *xy* está sometido a esfuerzos normales en las direcciones *x* y *y* pero sin esfuerzos cortantes (figura 7.6). Las ecuaciones para esfuerzo biaxial se obtienen de las ecuaciones (7.4a) y (7.4b) al eliminar simplemente los términos que contienen τ_{xy}, como se muestra:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta \qquad (7.9\text{a})$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\text{ sen } 2\theta \qquad (7.9\text{b})$$

El esfuerzo biaxial ocurre en muchos tipos de estructuras, incluyendo los recipientes a presión de pared delgada (consulte las secciones 8.2 y 8.3).

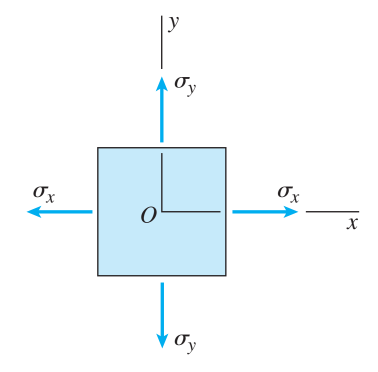


FIGURA 7.6 Elemento en esfuerzo biaxial.

Ejemplo 7.1

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos σ_x = 16,000 psi, σ_y = 6000 psi y $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ = 4000 psi, como se muestra en la figura 7.7a.

Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento inclinado a un ángulo θ = 45°.

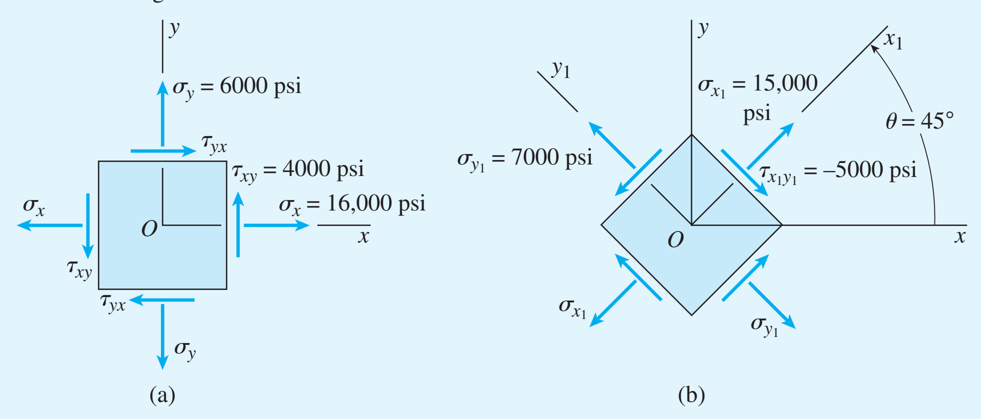


FIGURA 7.7 Ejemplo 7.1. (a) Elemento en esfuerzo plano y (b) elemento inclinado a un ángulo θ = 45°.

Solución

Ecuaciones de transformación. Para determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento inclinado utilizaremos las ecuaciones de transformación (ecuaciones 7.4a y 7.4b). Al sustituir en estas ecuaciones los datos numéricos dados, obtenemos los siguientes valores

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 11{,}000 \text{ psi} \qquad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 5000 \text{ psi} \qquad \tau_{xy} = 4000 \text{ psi}$$

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } 90° = 1 \qquad \cos 2\theta = \cos 90° = 0$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones (7.4a) y (7.4b), obtenemos

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen } 2\theta$$

$$= 11{,}000 \text{ psi} + (5000 \text{ psi})(0) + (4000 \text{ psi})(1) = 15{,}000 \text{ psi}$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen } 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -(5000 \text{ psi})(1) + (4000 \text{ psi})(0) = -5000 \text{ psi}$$

Además, el esfuerzo θ_{y_1} se puede obtener con la ecuación (7.5):

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\text{sen } 2\theta$$

$$= 11{,}000 \text{ psi} - (5000 \text{ psi})(0) - (4000 \text{ psi})(1) = 7000 \text{ psi}$$

Elementos de esfuerzo. A partir de estos resultados es fácil obtener los esfuerzos que actúan sobre todos los lados de un elemento orientado a θ = 45°, como se muestra en la figura 7.7b. Las flechas muestran las direcciones reales en que actúan. Observe en especial las direcciones de los esfuerzos cortantes, que tienen todos la misma magnitud. También observe que la suma de los esfuerzos normales permanece constante e igual a 22,000 psi (consulte la ecuación 7.6).

Nota: los esfuerzos que se muestran en la figura 7.7b representan el mismo estado de esfuerzo intrínseco que los esfuerzos que se ilustran en la figura 7.7a. Sin embargo, los esfuerzos tienen valores diferentes debido a que los elementos sobre los que actúan tienen orientaciones distintas.

Ejemplo 7.2

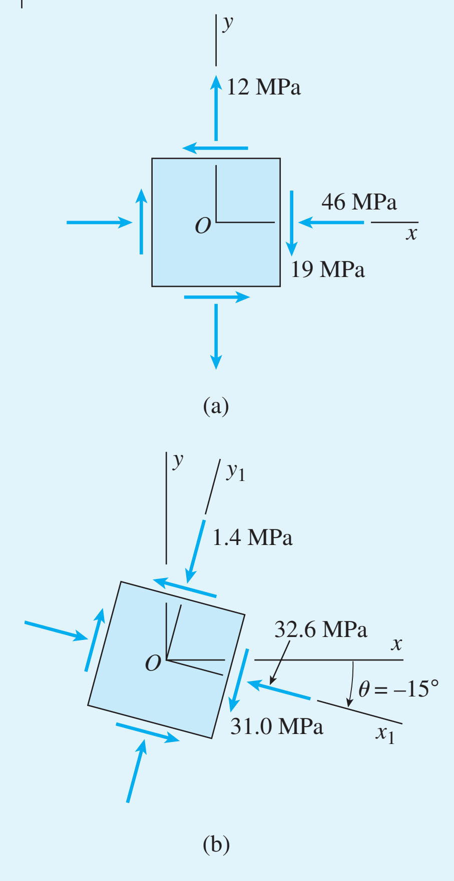


FIGURA 7.8 Ejemplo 7.2. (a) Elemento en esfuerzo plano y (b) elemento a un ángulo $\theta = -15°$.

Se tiene una condición de esfuerzo plano en un punto sobre la superficie de una estructura cargada, donde los esfuerzos tienen las magnitudes y direcciones que se muestran sobre el elemento de esfuerzo de la figura 7.8a.

Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento que está orientado a un ángulo de 15° en el sentido de las manecillas del reloj con respecto al elemento original.

Solución

Los esfuerzos que actúan sobre el elemento original (figura 7.8a) tienen los siguientes valores:

$$\sigma_x = -46 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 12 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -19 \text{ MPa}$$

Un elemento orientado a un ángulo de 15° en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 7.8b, donde el eje x_1 está a un ángulo $\theta = -15°$ con respecto al eje x. (Como alternativa, el eje x_1 se podría ubicar en un ángulo positivo $\theta = 75°$).

Ecuaciones de transformación de esfuerzos. Podemos calcular con facilidad los esfuerzos sobre la cara x_1 del elemento orientado a $\theta = -15°$ al emplear las ecuaciones de transformación (ecuaciones 7.4a y 7.4b). Los cálculos son:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -17 \text{ MPa} \qquad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = -29 \text{ MPa}$$

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } (-30°) = -0.5 \qquad \cos 2\theta = \cos(-30°) = 0.8660$$

Al sustituir en las ecuaciones de transformación obtenemos

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\text{sen } 2\theta$$

$$= -17 \text{ MPa} + (-29 \text{ MPa})(0.8660) + (-19 \text{ MPa})(-0.5)$$

$$= -32.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\text{sen } 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -(-29 \text{ MPa})(-0.5) + (-19 \text{ MPa})(0.8660)$$

$$= -31.0 \text{ MPa}$$

El esfuerzo normal que actúa sobre la cara y_1 (ecuación 7.5) es

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\text{sen } 2\theta$$

$$= -17 \text{ MPa} - (-29 \text{ MPa})(0.8660) - (-19 \text{ MPa})(-0.5)$$

$$= -1.4 \text{ MPa}$$

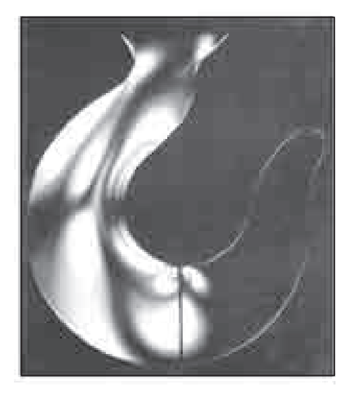
Este esfuerzo puede verificarse al sustituir $\theta = 75°$ en la ecuación (7.4a). Como verificación adicional de los resultados, observamos que $\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$.

Los esfuerzos que actúan sobre el elemento inclinado se muestran en la figura 7.8b, donde las flechas indican las direcciones verdaderas de los esfuerzos. De nuevo observe que los dos elementos de esfuerzo que se muestran en la figura 7.8 representan el mismo estado de esfuerzo.

7.3 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS



(a) Fotografía de un gancho de una grúa



(b) Patrón de borde fotoelástico

FIGURA 7.9 Patrón de borde fotoelástico que representa los esfuerzos principales en un modelo de un gancho de grúa.

Las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano muestran que los esfuerzos normales σ_{x_1} y los esfuerzos cortantes $\tau_{x_1 y_1}$ varían continuamente conforme se giran los ejes a través de un ángulo θ. Esta variación se representa en la figura 7.3 para una combinación particular de esfuerzos. En la figura observamos que los esfuerzos normales y los cortantes alcanzan valores máximos y mínimos en intervalos de 90°. Estos valores máximos y mínimos suelen requerirse para fines de diseño. Por ejemplo, las fallas por fatiga de estructuras como máquinas y aeronaves a menudo se asocian con los esfuerzos máximos, y de aquí que sus magnitudes y orientaciones se deban determinar como parte del proceso de diseño (consulte la figura 7.9).

Esfuerzos principales

Los esfuerzos normales máximo y mínimo, denominados **esfuerzos principales**, se pueden determinar a partir de la ecuación de transformación para el esfuerzo normal σ_{x_1} (ecuación 7.4a). Al derivar σ_{x_1} con respecto a θ y al igualar a cero, obtenemos una ecuación para la cual podemos encontrar los valores de θ para los que σ_{x_1} es un máximo o un mínimo. La ecuación para la derivada es

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0 \qquad (7.10)$$

de donde obtenemos

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (7.11)$$

El subíndice p indica que el ángulo θ_p define la orientación de los **planos principales**, es decir, los planos sobre los que actúan los esfuerzos principales.

Con la ecuación (7.11) se pueden encontrar dos valores del ángulo $2\theta_p$ en el intervalo de 0 a 360°. Estos valores difieren en 180°, con un valor entre 0 y 180° y el otro entre 180° y 360°. Por tanto, el ángulo θ_p tiene dos valores que difieren en 90°, un valor entre 0 y 90° y el otro entre 90° y 180°. Los dos valores de θ_p se conocen como los **ángulos principales**. Para uno de estos ángulos el esfuerzo normal σ_{x_1} es un esfuerzo principal *máximo*; para el otro, es un esfuerzo principal *mínimo*. Dado que los ángulos principales difieren en 90°, observamos que *los esfuerzos principales ocurren sobre planos mutuamente perpendiculares*.

Los esfuerzos principales se pueden calcular al sustituir cada uno de los dos valores de θ_p en la primera ecuación de transformación (ecuación 7.4a) y despejando σ_{x_1}. Al determinar los esfuerzos principales de esta manera, no sólo obtenemos los valores de los esfuerzos principales, sino que también aprendemos qué esfuerzo principal está asociado con qué ángulo principal.

También podemos obtener fórmulas generales para los esfuerzos principales. Para hacer esto nos referimos al triángulo rectángulo en la figura

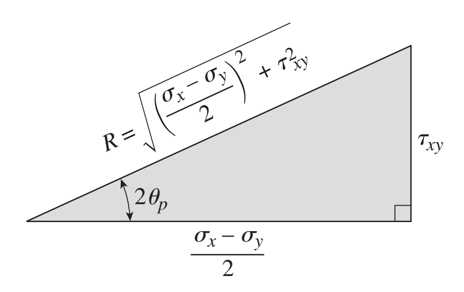


FIGURA 7.10 Representación geométrica de la ecuación (7.11).

7.10, que está elaborado a partir de la ecuación (7.11). Observe que la hipotenusa del triángulo, obtenida con el teorema de Pitágoras, es

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.12}$$

La cantidad R siempre es un número positivo y, al igual que los otros dos lados del triángulo, tiene unidades de esfuerzo. Del triángulo obtenemos dos relaciones adicionales:

$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad \text{sen } 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R} \tag{7.13a,b}$$

Ahora sustituimos estas expresiones para $\cos 2\theta_p$ y $\text{sen } 2\theta_p$ en la ecuación (7.4a) y obtenemos el más grande algebraicamente de los dos esfuerzos principales, denotado por σ_1:

$$\sigma_1 = \sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta_p + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta_p$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\tau_{xy}}{R}\right)$$

Después de sustituir el valor de R de la ecuación (7.12) y de realizar algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.14}$$

El menor de los esfuerzos principales, denotado σ_2, se puede encontrar a partir de la condición de que la suma de los esfuerzos normales sobre planos perpendiculares es constante (consulte la ecuación 7.6):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \tag{7.15}$$

Al sustituir la expresión para σ_1 en la ecuación (7.15) y despejando σ_2, obtenemos

$$\sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_1$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación para σ_1 pero difiere por la presencia del signo menos antes de la raíz cuadrada.

Las fórmulas anteriores para σ_1 y σ_2 se pueden combinar en una sola fórmula para los **esfuerzos principales:**

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.17}$$

El signo más da el esfuerzo principal algebraicamente mayor y el signo menos el esfuerzo principal algebraicamente menor.

Ángulos principales

Denotemos ahora los dos ángulos que definen los planos principales como θ_{p_1} y θ_{p_2}, que corresponden a los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, respectivamente. Los dos ángulos se pueden determinar a partir de la ecuación para tan $2\theta_p$ (ecuación 7.11). Sin embargo, no podemos saber con base en esa ecuación qué ángulo es θ_{p_1} y qué ángulo es θ_{p_2}. Un procedimiento simple para hacer esta determinación es tomar uno de los valores y sustituirlo en la ecuación para σ_{x_1} (ecuación 7.4a). El valor resultante de σ_{x_1} será reconocido como σ_1 o σ_2 (suponiendo que ya determinamos σ_1 y σ_2 con la ecuación 7.17), para correlacionar así los dos ángulos principales con los dos esfuerzos principales.

Otro método para correlacionar los ángulos principales con los esfuerzos principales es emplear las ecuaciones (7.13a) y (7.13b) para encontrar θ_p, puesto que el único ángulo que satisface *las dos* ecuaciones es θ_{p_1}. Por tanto, podemos reescribir estas ecuaciones como se muestra:

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad \operatorname{sen} 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R} \tag{7.18a,b}$$

Sólo existe un ángulo entre 0 y 360° que satisface las dos ecuaciones. Entonces, el valor de θ_{p_1} se puede determinar únicamente a partir de las ecuaciones (7.18a) y (7.18b). El ángulo θ_{p_2}, que corresponde a σ_2, define un plano que es perpendicular al plano definido por θ_{p_1}. Por tanto, θ_{p_2} se puede tomar como mayor o menor que θ_{p_1} por 90°.

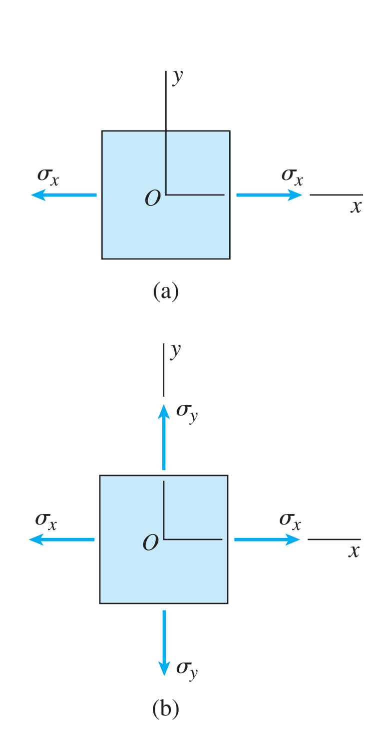


FIGURA 7.11 Elementos en esfuerzo uniaxial y biaxial.

Esfuerzos cortantes sobre los planos principales

Se puede obtener una característica importante de los planos principales a partir de la ecuación de transformación para los esfuerzos cortantes (ecuación 7.4b). Si igualamos el esfuerzo cortante $\tau_{x_1y_1}$ a cero, obtenemos una ecuación que es igual que la ecuación (7.10). Por tanto, si despejamos el ángulo 2θ en esa ecuación, obtenemos la misma expresión para tan 2θ dada por la ecuación (7.11). En otras palabras, los ángulos con respecto a los planos de esfuerzo cortante cero son los mismos que los ángulos con respecto a los planos principales.

Así pues, podemos hacer la siguiente observación importante: *los esfuerzos cortantes son cero sobre los planos principales*.

Casos especiales

Los planos principales para elementos en **esfuerzo uniaxial** y **esfuerzo biaxial** son los mismos planos x y y (figura 7.11), debido a que tan $2\theta_p = 0$ (consulte la ecuación 7.11) y los dos valores de θ_p son 0 y 90°. También sabemos que los planos x y y son los planos principales por el hecho de que los esfuerzos cortantes son cero sobre ellos.

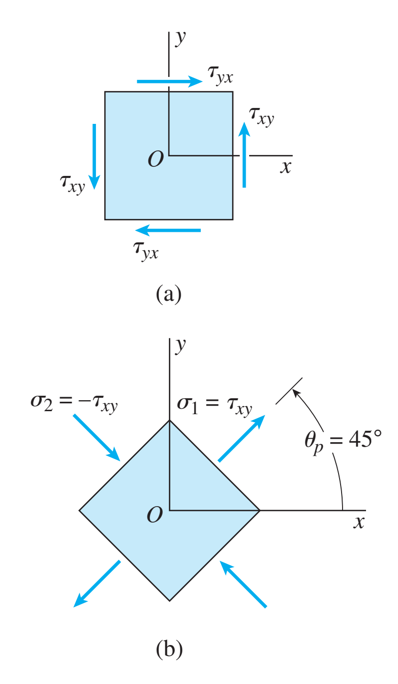


FIGURA 7.12 (a) Elemento en cortante puro y (b) esfuerzos principales.

Para un elemento en **cortante puro** (figura 7.12a), los planos principales están orientados a 45° con respecto al eje x (figura 7.12b), debido a que tan $2\theta_p$ es infinita y los dos valores de θ_p están a 45° y 135°. Si τ_{xy} es positivo, los esfuerzos principales son $\sigma_1 = \tau_{xy}$ y $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ (consulte la sección 3.5 para ver un análisis de cortante puro).

El tercer esfuerzo principal

El análisis anterior de esfuerzos principales se refiere sólo a rotación de ejes en el plano xy, es decir, rotación con respecto al eje z (figura 7.13a). Por tanto, los dos esfuerzos principales determinados con la ecuación (7.17) se denominan **esfuerzos principales en el plano.** Sin embargo, no debemos pasar por alto el hecho de que el elemento de esfuerzo en realidad es tridimensional y tiene tres (no dos) esfuerzos principales que actúan sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

Al realizar un análisis tridimensional más completo, se puede demostrar que los tres planos principales para un elemento de esfuerzo plano son los dos planos principales ya descritos más la cara z del elemento. Estos planos principales se muestran en la figura 7.13b, donde el elemento de esfuerzo está orientado en el ángulo principal θ_{p1}, que corresponde al esfuerzo principal σ_1. Los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 están dados por la ecuación (7.17) y el tercer esfuerzo principal (σ_3) es igual a cero.

Por definición, σ_1 es algebraicamente mayor que σ_2, pero σ_3 puede ser algebraicamente mayor o menor que σ_1 y σ_2 o tener un valor que esté entre los dos. Por supuesto, también es posible que algunos o todos los esfuerzos principales sean iguales. Observe de nuevo que no hay esfuerzos cortantes sobre ninguno de los planos principales.*

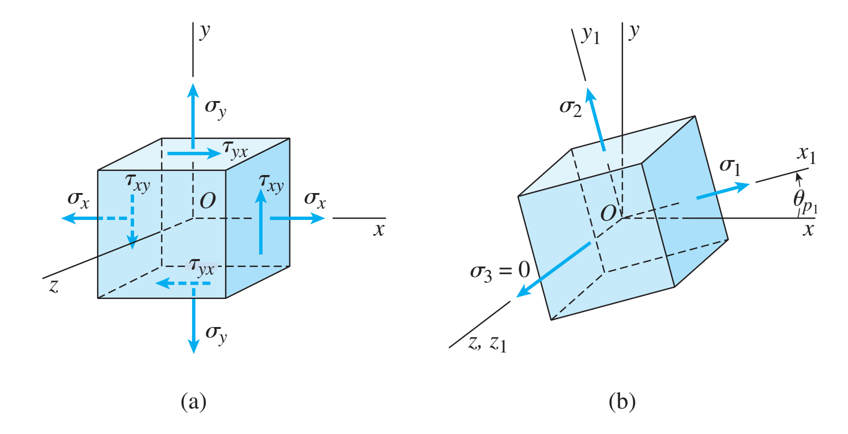


FIGURA 7.13 Elementos en esfuerzo plano: (a) elemento original y (b) elemento orientado con respecto a los tres planos principales y los tres esfuerzos principales.

---

*La determinación de los esfuerzos principales es un ejemplo de un tipo de análisis matemático conocido como *análisis del valor propio*, que se describe en libros sobre álgebra matricial. Las ecuaciones de transformación de esfuerzos y el concepto de esfuerzos principales se deben a los matemáticos franceses A. L. Cauchy (1789-1857) y Barré de Saint-Venant (1797-1886) y al científico e ingeniero escocés W. J. M. Rankine (1820-1872); consulte las referencias 7.1, 7.2 y 7.3, respectivamente.

Esfuerzos cortantes máximos

Ya encontrados los esfuerzos principales y sus direcciones para un elemento en esfuerzo plano, ahora consideramos la determinación de los esfuerzos cortantes máximos y los planos sobre los que actúan. Los esfuerzos cortantes $\tau_{x_1y_1}$ que actúan sobre planos inclinados están dados por la segunda ecuación de transformación (ecuación 7.4b). Al derivar $\tau_{x_1y_1}$ con respecto a θ e igualando a cero, obtenemos

$$\frac{d\tau_{x_1y_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = \qquad (7.19)$$

de donde

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (7.20)$$

El subíndice s indica que el ángulo θ_s define la orientación de los planos de esfuerzos cortantes máximos positivos y negativos.

La ecuación (7.20) proporciona un valor de θ_s entre 0 y 90° y otro entre 90° y 180°. Además, estos dos valores difieren en 90° y, por tanto, los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre planos perpendiculares. Dado que los esfuerzos cortantes sobre planos perpendiculares son iguales en valor absoluto, los esfuerzos cortantes máximos positivos y negativos difieren sólo en signo.

Al comparar la ecuación (7.20) para θ_s con la ecuación (7.11) para θ_p muestra que

$$\tan 2\theta_s = -\frac{1}{\tan 2\theta_p} = -\cot 2\theta_p \qquad (7.21)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener una relación entre los ángulos θ_s y θ_p. Primero reescribimos la ecuación anterior en la forma siguiente:

$$\frac{\text{sen}\,2\theta_s}{\cos 2\theta_s} + \frac{\cos 2\theta_p}{\text{sen}\,2\theta_p} = 0$$

Al multiplicar por los términos en el denominador, obtenemos

$$\text{sen}\,2\theta_s\,\text{sen}\,2\theta_p + \cos 2\theta_s \cos 2\theta_p = 0$$

que es equivalente a la siguiente expresión (consulte el apéndice C):

$$\cos(2\theta_s - 2\theta_p) = 0$$

Por tanto,

$$2\theta_s - 2\theta_p = \pm 90°$$

y

$$\theta_s = \theta_p \pm 45° \qquad (7.22)$$

Esta ecuación muestra que *los planos de esfuerzo cortante máximo ocurren a 45° con respecto a los planos principales*.

El plano de esfuerzo cortante máximo positivo $\tau_{máx}$ está definido por el ángulo θ_{s_1}, para el cual son aplicables las siguientes ecuaciones:

$$\cos 2\theta_{s_1} = \frac{\tau_{xy}}{R} \qquad \operatorname{sen} 2\theta_{s_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad (7.23a,b,)$$

en donde R está dado por la ecuación (7.12). Además, el ángulo θ_{s_1} está relacionado con el ángulo θ_{p_1} (consulte las ecuaciones 7.18a y 7.18b) de la manera siguiente:

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45° \qquad (7.24)$$

El esfuerzo cortante máximo correspondiente se obtiene al sustituir las expresiones para cos θ_{s_1} y sen θ_{p_1} en la segunda ecuación de transformación (ecuación 7.4b), produce que

$$\tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (7.25)$$

El esfuerzo cortante máximo negativo $\tau_{máx}$ tiene la misma magnitud pero signo opuesto.

Otra expresión para el esfuerzo cortante máximo se puede obtener a partir de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, que están dados por la ecuación (7.17). Si restamos la expresión para σ_2 de la expresión para σ_1 y luego la comparamos con la ecuación (7.25), observamos que

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (7.26)$$

Por tanto, *el esfuerzo cortante máximo es igual a la mitad de la diferencia de los esfuerzos principales*.

Los planos de esfuerzo cortante máximo también contienen esfuerzos normales. El **esfuerzo normal** que actúa sobre los planos de esfuerzos cortante máximo positivo se puede determinar al sustituir las expresiones para el ángulo θ_{s_1} (ecuaciones 7.23a y 7.23b) en la ecuación para σ_{x_1} (ecuación 7.4a). El esfuerzo resultante es igual al promedio de los esfuerzos normales sobre los planos x y y:

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (7.27)$$

Este mismo esfuerzo normal actúa sobre los planos de esfuerzo cortante máximo negativo.

En los casos particulares de **esfuerzo uniaxial** y **esfuerzo biaxial** (figura 7.11), los planos de esfuerzo cortante máximo ocurren a 45° con respecto

a los ejes x y y. En el caso de **cortante puro** (figura 7.12), los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre los planos x y y.

Esfuerzos cortantes en el plano y fuera del plano

El análisis anterior ha tratado sólo con **esfuerzos cortantes en el plano**, es decir, aquellos que actúan en el plano xy. Para obtener los esfuerzos cortantes máximos en el plano (ecuaciones 7.25 y 7.26), consideramos los elementos que se obtuvieron girando los ejes xyz con respecto al eje z, que es un eje principal (figura 7.13a). Determinamos que los esfuerzos cortantes máximos ocurren en planos a 45° con respecto a los planos principales; los planos principales para el elemento de la figura 7.13a se muestran en la figura 7.13b, donde σ_1 y σ_2 son los esfuerzos principales. Por tanto, los esfuerzos cortantes máximos en el plano se determinan de un elemento obtenido al girar los ejes $x_1y_1z_1$ (figura 7.13b) con respecto al eje z_1 un ángulo de 45°. Esos esfuerzos están dados por la ecuación (7.25) o la (7.26).

También podemos obtener esfuerzos cortantes máximos mediante rotaciones de 45° con respecto a otros dos ejes principales (los ejes x_1 y y_1 en la figura 7.13b). Como resultado, obtenemos tres conjuntos de **esfuerzos cortantes máximos positivos y negativos** (compare con la ecuación 7.26):

$$(\tau_{\text{máx}})_{x_1} = \pm\frac{\sigma_2}{2} \quad (\tau_{\text{máx}})_{y_1} = \pm\frac{\sigma_1}{2} \quad (\tau_{\text{máx}})_{z_1} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \text{(7.28a,b,c)}$$

en donde los subíndices indican los ejes principales con respecto a los cuales tiene lugar la rotación de 45°. Los esfuerzos obtenidos por rotaciones con respecto a los ejes x_1 y y_1 se denominan **esfuerzos cortantes fuera de plano**.

Los valores algebraicos de σ_1 y σ_2 determinan cuál de las expresiones anteriores da el esfuerzo cortante numéricamente más grande. Si σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo, entonces una de las primeras dos expresiones es numéricamente mayor; si tienen signos opuestos, la última expresión es la mayor.

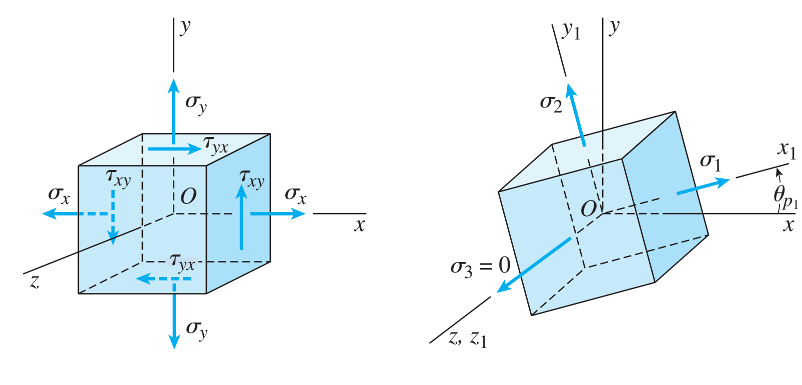


FIGURA 7.13 (Repetida.)

Ejemplo 7.3

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos σ_x = 12,300 psi, σ_y = −4200 psi y τ_{xy} = −4700 psi, como se muestra en la figura 7.14a.

(a) Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

(b) Determine los esfuerzos cortantes máximos y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada. (Considere sólo los esfuerzos en el plano.)

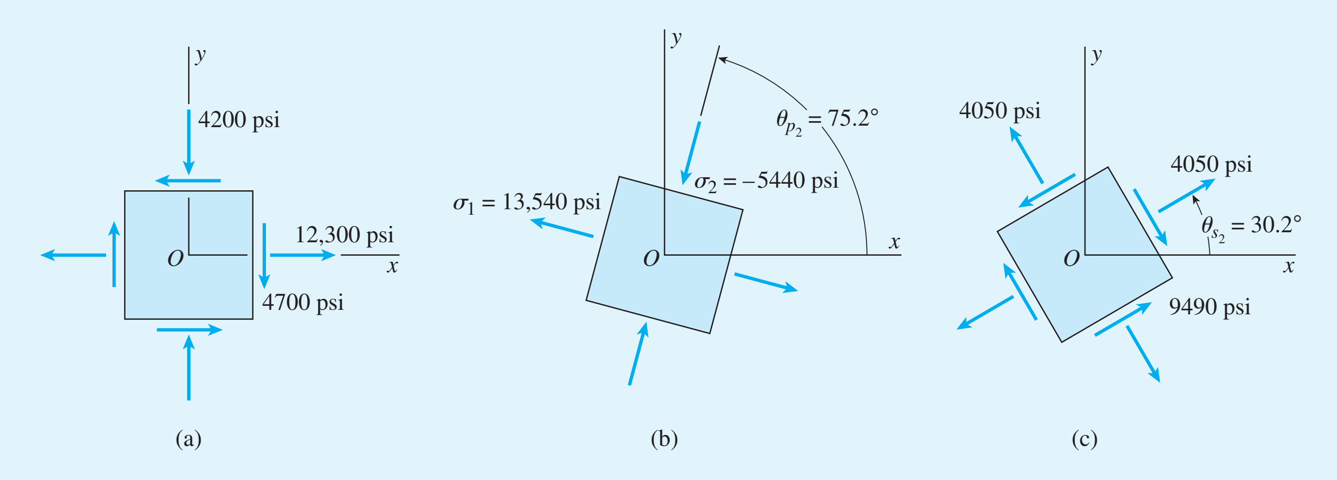


FIGURA 7.14 Ejemplo 7.3. (a) Elemento en esfuerzo plano, (b) esfuerzos principales y (c) esfuerzos cortantes máximos.

Solución

(a) *Esfuerzos principales*. Los ángulos principales θ_p que pueden ubicar los planos principales se pueden obtener a partir de la ecuación (7.11):

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-4700 \text{ psi})}{12{,}300 \text{ psi} - (-4200 \text{ psi})} = -0.5697$$

Al despejar los ángulos, obtenemos los dos conjuntos de valores siguientes:

$$2\theta_p = 150.3° \quad \text{y} \quad \theta_p = 75.2°$$

$$2\theta_p = 330.3° \quad \text{y} \quad \theta_p = 165.2°$$

Los esfuerzos principales se pueden obtener sustituyendo los dos valores de $2\theta_p$ en la ecuación de transformación para σ_{x_1} (ecuación 7.4a). Como cálculo preliminar, determinamos las siguientes cantidades:

continúa

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{12{,}300 \text{ psi} - 4200 \text{ psi}}{2} = 4050 \text{ psi}$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{12{,}300 \text{ psi} + 4200 \text{ psi}}{2} = 8250 \text{ psi}$$

Ahora sustituimos el primer valor de $2\theta_p$ en la ecuación (7.4a) y obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ &= 4050 \text{ psi} + (8250 \text{ psi})(\cos 150.3°) - (4700 \text{ psi})(\operatorname{sen} 150.3°) \\ &= -5440 \text{ psi}\end{aligned}$$

De manera similar, sustituimos el segundo valor de $2\theta_p$ y obtenemos $\theta_{p_1} = 13{,}540$ psi. Por tanto, los esfuerzos principales y sus ángulos principales correspondientes son

$$\sigma_1 = 13{,}540 \text{ psi} \quad \text{y} \quad \theta_{p_1} = 165.2°$$

$$\sigma_2 = -5440 \text{ psi} \quad \text{y} \quad \theta_{p_2} = 75.2°$$

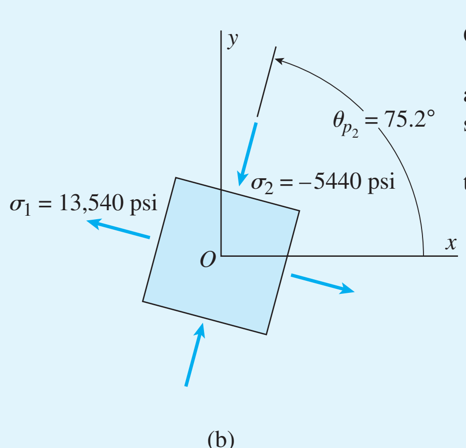


FIGURA 7.14b (Repetida.)

Observe que θ_{p_1} y θ_{p_2} difieren en 90° y que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$.

Los esfuerzos principales se muestran en un elemento orientado de manera apropiada en la figura 7.14b. Por supuesto que los esfuerzos cortantes no actúan sobre los planos principales.

Solución alternativa para los esfuerzos principales. Los esfuerzos principales también se pueden calcular directamente con la ecuación (7.17):

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 4050 \text{ psi} \pm \sqrt{(8250 \text{ psi})^2 + (-4700 \text{ psi})^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_{1,2} = 4050 \text{ psi} \pm 9490 \text{ psi}$$

Por tanto,

$$\sigma_1 = 13{,}540 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = -5440 \text{ psi}$$

El ángulo θ_{p_1} con respecto al plano sobre el cual actúa σ_1 se obtiene con las ecuaciones (7.18a) y (7.18b):

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} = \frac{8250 \text{ psi}}{9490 \text{ psi}} = 0.869$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R} = \frac{-4700 \text{ psi}}{9490 \text{ psi}} = -0.495$$

en donde R está dado por la ecuación (7.12) y es igual al término de la raíz cuadrada en el cálculo anterior para los esfuerzos principales σ_1 y σ_2.

El único ángulo entre 0 y 360° que tiene el seno y coseno especificados es $2\theta_{p_1} = 330.3°$, de aquí, $2\theta_{p_1} = 165.2°$. Este ángulo está asociado con el esfuerzo principal algebraicamente más grande $\sigma_1 = 13{,}540$ psi. El otro ángulo es 90° mayor o menor que θ_{p_1}; de aquí, $\theta_{p_2} = 75.2°$. Este ángulo corresponde al esfuerzo principal menor $\sigma_2 = -5440$ psi. Observe que estos resultados para los esfuerzos principales y ángulos principales concuerdan con los que se determinaron antes.

(b) *Esfuerzos cortantes máximos*. Los esfuerzos cortantes máximos en el plano están dados por la ecuación (7.25):

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{(8250 \text{ psi})^2 + (-4700 \text{ psi})^2} = 9490 \text{ psi}$$

El ángulo θ_{p_2} con respecto al plano que tiene el esfuerzo cortante máximo positivo se calculó con la ecuación (7.24):

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45° = 165.2° - 45° = 120.2°$$

De donde se deduce que el esfuerzo cortante máximo negativo actúa sobre el plano para el cual $\theta_{s_2} = 120.2° - 90° = 30.2°$.

Los esfuerzos cortantes que actúan sobe los planos de esfuerzos cortantes máximos se calculan con la ecuación (7.27):

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 4050 \text{ psi}$$

Por último, los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados se muestran en el elemento de esfuerzo de la figura 7.14c.

Como procedimiento alternativo para encontrar los esfuerzos cortantes máximos podemos emplear la ecuación (7.20) para determinar los dos valores de los ángulos θ_s y luego utilizar la segunda ecuación de transformación (ecuación 7.4b) para obtener los esfuerzos cortantes correspondientes.

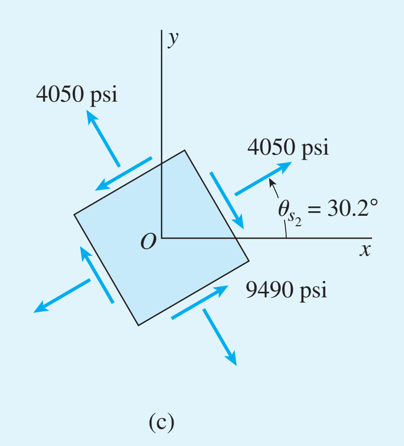


FIGURA 7.14c (Repetida.)

7.4 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZO PLANO

Las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano se pueden representar en forma gráfica mediante un trazo conocido como **círculo de Mohr.** Esta representación gráfica es muy útil ya que permite visualizar las relaciones entre los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre varios planos inclinados en un punto de un cuerpo sometido a esfuerzos. También proporciona un medio para calcular esfuerzos principales, esfuerzos cortantes máximos y esfuerzos sobre planos inclinados. Además, el círculo de Mohr es válido no sólo para esfuerzos sino también para otras cantidades de naturaleza matemática similar, incluyendo deformaciones unitarias y momentos de inercia.*

Ecuaciones del círculo de Mohr

Las ecuaciones del círculo de Mohr se pueden deducir a partir de ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (ecuaciones 7.4a y 7.4b). Las dos ecuaciones se repiten aquí, pero con un reacomodo ligero de la primera ecuación:

$$\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.29a)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \qquad (7.29b)$$

De la geometría analítica, podríamos reconocer que estas dos ecuaciones son las de un círculo en forma paramétrica. El ángulo 2θ es el parámetro y los esfuerzos σ_{x_1} y $\tau_{x_1 y_1}$ son las coordenadas. Sin embargo, no es necesario reconocer la naturaleza de las ecuaciones en esta etapa, si eliminamos el parámetro, la importancia de las ecuaciones será aparente.

Para eliminar el parámetro 2θ, elevamos al cuadrado los dos lados de cada ecuación y luego sumamos las dos ecuaciones. La ecuación que resulta es

$$\left(\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (7.30)$$

Esta ecuación se puede escribir en una forma más simple al emplear la notación de la sección 7.3 (consulte las ecuaciones 7.27 y 7.12, respectivamente):

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (7.31a,b)$$

Ahora la ecuación (7.30) se convierte en

$$(\sigma_{x_1} - \sigma_{\text{prom}})^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = R^2 \qquad (7.32)$$

---

*El círculo de Mohr se llama así en honor del famoso ingeniero civil alemán Otto Christian Mohr (1835-1918), quien la desarrolló en 1882 (referencia 7.4).

que es la ecuación de un círculo en forma algebraica estándar. Las coordenadas son σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$, el radio es R y el centro del círculo tiene coordenadas $\sigma_{x_1} = \sigma_{\text{prom}}$ y $\tau_{x_1y_1} = 0$.

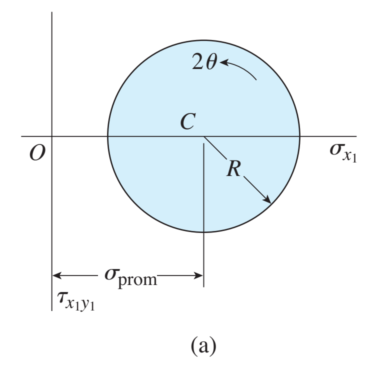
Dos formas del círculo de Mohr

El círculo de Mohr puede trazarse a partir de las ecuaciones (7.29) y (7.32) en cualquiera de dos formas. En la primera trazamos el esfuerzo normal σ_{x_1} positivo hacia la derecha y el esfuerzo cortante $\tau_{x_1y_1}$ positivo hacia abajo, como se muestra en la figura 7.15a. La ventaja de trazar los esfuerzos cortantes positivos hacia abajo es que el ángulo 2θ en el círculo de Mohr será positivo cuando vaya en sentido contrario a las manecillas del reloj, lo que concuerda con la dirección positiva de 2θ en la deducción de las ecuaciones de transformación (consulte las ecuaciones 7.1 y 7.2).

En la segunda forma $\tau_{x_1y_1}$ se traza positivo hacia arriba pero el ángulo 2θ ahora es positivo en el sentido de las manecillas del reloj (figura 7.15b), que es opuesto a su dirección positiva usual.

Las dos formas del círculo de Mohr son matemáticamente correctas y cualquiera puede utilizarse. Sin embargo, es más fácil visualizar la orientación del elemento de esfuerzo si la dirección positiva del ángulo 2θ es la misma en el círculo de Mohr y en el elemento. Además, una rotación contraria a la de las manecillas del reloj concuerda con la regla de la mano derecha acostumbrada para la rotación.

Por tanto, elegiremos la primera forma del círculo de Mohr (figura 7.15a) en donde el *esfuerzo cortante positivo se traza hacia abajo y un ángulo positivo 2θ se traza en sentido contrario al de las manecillas del reloj*.



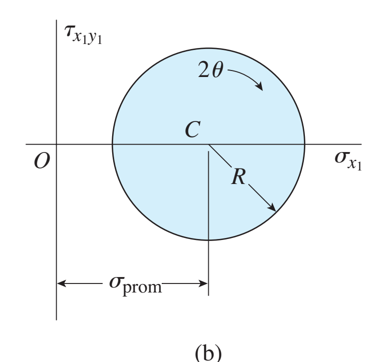


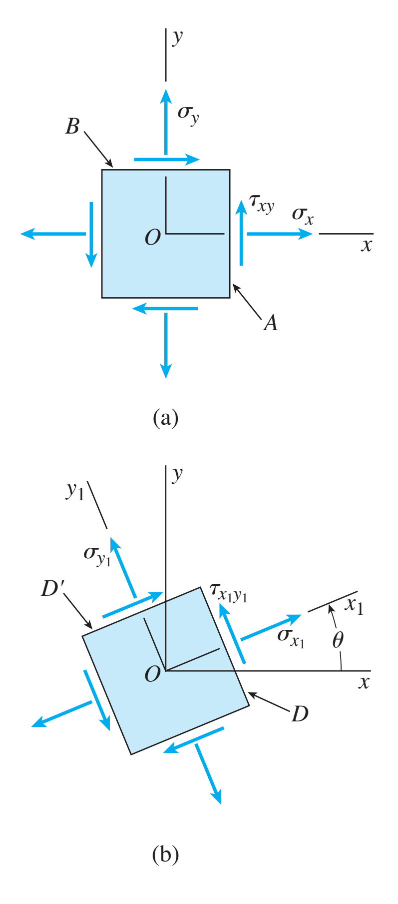
FIGURA 7.15 Dos formas del círculo de Mohr: (a) $\tau_{x_1y_1}$ es positivo hacia abajo y el ángulo 2θ es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj y (b) $\tau_{x_1y_1}$ es positivo hacia arriba y el ángulo 2θ es positivo en el sentido de las manecillas del reloj. (*Nota:* en este libro se utiliza la primera forma.)

Trazo del círculo de Mohr

El círculo de Mohr se puede trazar en una variedad de formas, dependiendo de cuáles esfuerzos se conozcan y cuáles se deban encontrar. Para nuestro fin inmediato, que es mostrar las propiedades básicas del círculo, supongamos que conocemos los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre los planos x y y de un elemento en esfuerzo plano (figura 7.16a). Como veremos, esta información es suficiente para trazar el círculo. Luego, ya con el trazo del círculo podemos determinar los esfuerzos σ_{x_1}, σ_{y_1} y $\tau_{x_1y_1}$ que actúan sobre un elemento inclinado (figura 7.16b). También podemos obtener los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos a partir del círculo.

Si se conocen σ_x, σ_y y τ_{xy}, el **procedimiento para trazar el círculo de Mohr** es como se indica (consulte la figura 7.16c):

1. Trace un conjunto de ejes coordenados con σ_{x_1} como abscisa (positiva hacia la derecha) y $\tau_{x_1y_1}$ como ordenada (positiva hacia abajo).
2. Ubique el centro C del círculo en el punto que tenga las coordenadas $\sigma_{x_1} = \sigma_{\text{prom}}$ y $\tau_{x_1y_1} = 0$ (consulte las ecuaciones 7.31 y 7.32).
3. Ubique el punto A, que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara x del elemento que se muestra en la figura 7.16a trazando sus coordenadas $\sigma_{x_1} = \sigma_x$ y $\tau_{x_1y_1} = \tau_{xy}$. Observe que el punto A en el círculo corresponde a $\theta = 0$. También observe que la cara x del elemento (figura 7.16a) está identificada "A" para mostrar su correspondencia con el punto A en el círculo.
4. Ubique el punto B, que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara y del elemento que se muestra en la figura 7.16a, trazando sus co-



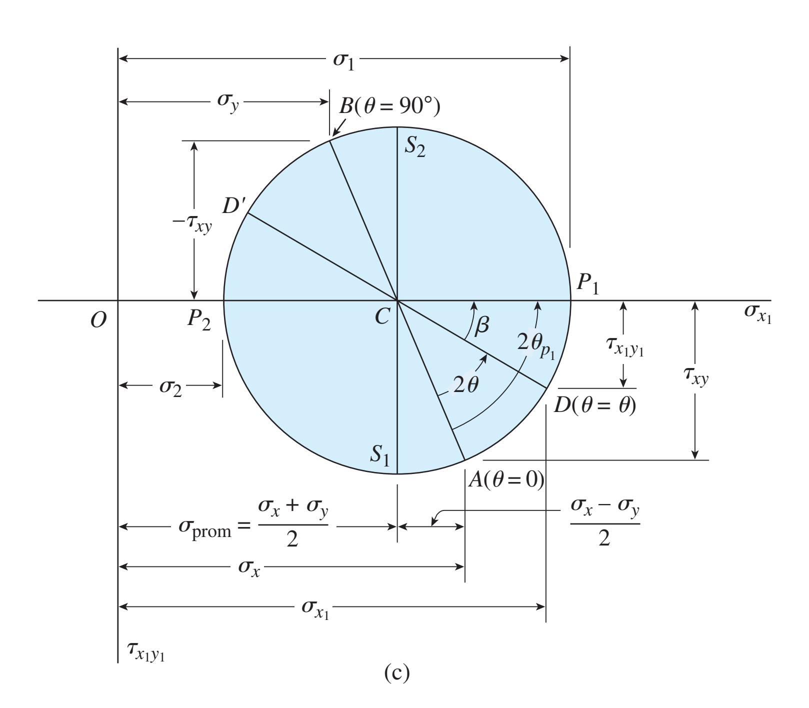
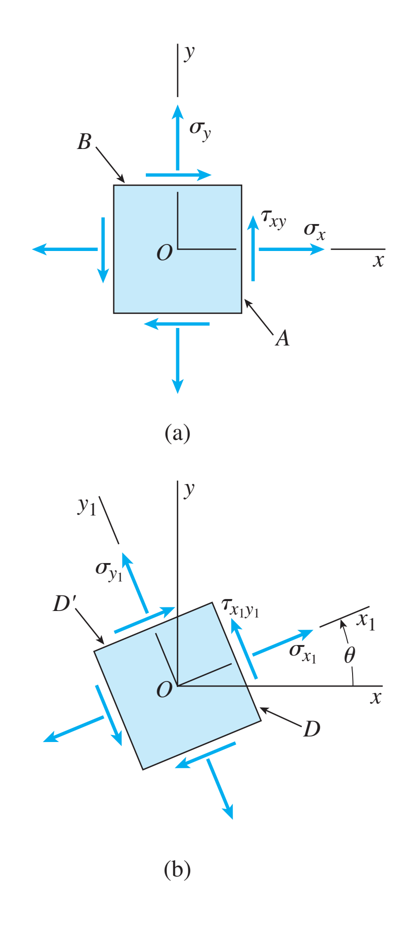


FIGURA 7.16 Trazo del círculo de Mohr para esfuerzo plano.



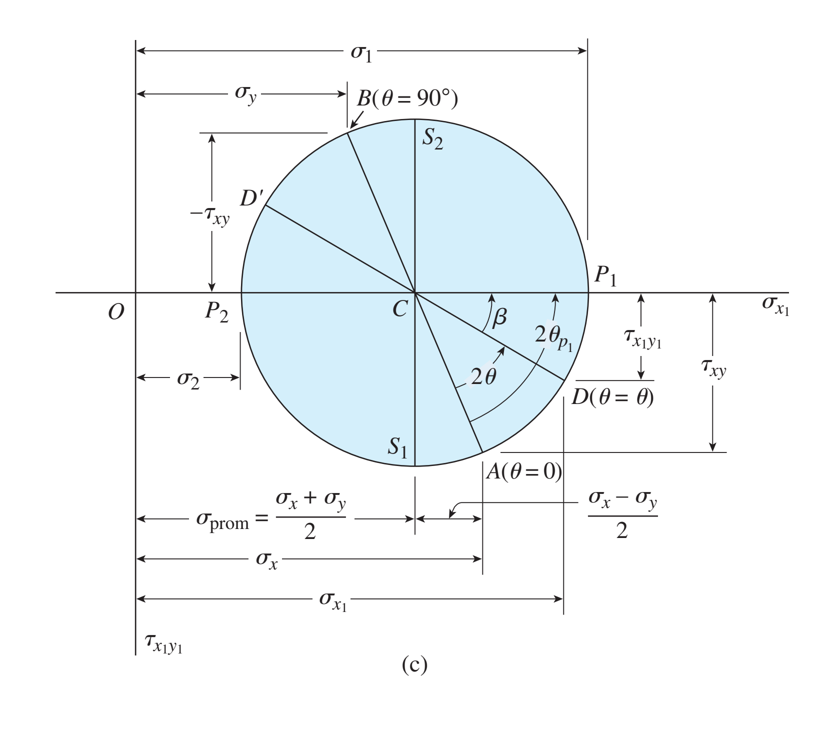


FIGURA 7.16 (Repetida.)

ordenadas $\sigma_{x_1} = \sigma_y$ y $\tau_{x_1y_1} = -\tau_{xy}$. Observe que el punto *B* en el círculo corresponde a $\theta = 90°$. Además, la cara *y* del elemento (figura 7.16a) está identificada con "*B*" para mostrar su correspondencia con el punto *B* en el círculo.

5. Trace una línea desde el punto *A* hasta el punto *B*. Ésta es un diámetro del círculo y pasa por el centro *C*. Los puntos *A* y *B*, que representan los esfuerzos sobre planos a 90° entre sí (figura 7.16a), son los extremos opuestos del diámetro y, por tanto están separados 180° en el círculo.

6. Utilizando el punto *C* como centro, trace el círculo de Mohr por los puntos *A* y *B*. El círculo trazado de esta manera tiene radio *R* (ecuación 7.31b), como se muestra en el siguiente párrafo.

Ahora que ya trazamos el círculo, podemos verificar mediante geometría que las líneas *CA* y *CB* son radios y tienen longitudes iguales a *R*. Observamos que las abscisas de los puntos *C* y *A* son $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ y σ_x, respectivamente. La diferencia en estas abscisas es $(\sigma_x - \sigma_y)/2$, como están dimensionadas en la figura. Además, la ordenada hasta el punto *A* es τ_{xy}. Por tanto, la línea *CA* es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un lado con longitud $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ y el otro lado con longitud τ_{xy}. Sacando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de estos dos lados da el radio *R*:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

que es igual que la ecuación (7.31b). Mediante un procedimiento similar podemos demostrar que la longitud de la línea *CB* también es igual al radio *R* del círculo.

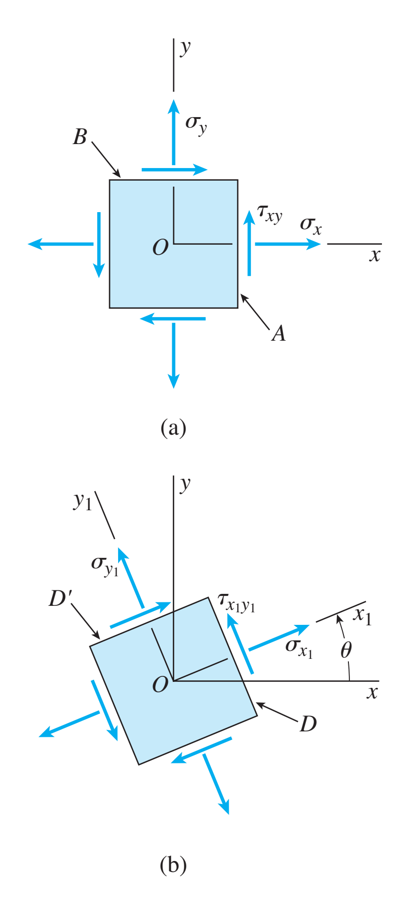
Esfuerzos sobre un elemento inclinado

Ahora consideraremos los esfuerzos σ_{x_1}, σ_{y_1}, y $\tau_{x_1 y_1}$ que actúan sobre las caras de un elemento de esfuerzo plano orientado a un ángulo θ del eje x (figura 7.16b). Si se conoce el ángulo θ, estos esfuerzos se pueden determinar a partir el círculo de Mohr. El procedimiento es el siguiente.

En el círculo (figura 7.16c), medimos un ángulo 2θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el radio *CA*, debido a que el punto *A* corresponde a $\theta = 0$ y es el punto de referencia desde el cual medimos ángulos. El ángulo 2θ ubica el punto *D* en el círculo, que (como se demuestra en el párrafo siguiente) tiene coordenadas σ_{x_1} y $\tau_{x_1 y_1}$. Por tanto, el punto *D* representa los esfuerzos sobre la cara x_1 del elemento de la figura 7.16b. En consecuencia, esta cara del elemento está identificada como "*D*" en la figura 7.16b.

Observe que un ángulo 2θ en el círculo de Mohr corresponde a un ángulo θ en el elemento de esfuerzo. Por ejemplo, el punto *D* en el círculo está a un ángulo 2θ desde el punto *A*, pero la cara x_1 del elemento que se muestra en la figura 7.16b (la cara identificada "*D*") está a un ángulo θ desde la cara x del elemento que se muestra en la figura 7.16a (la cara identificada "*A*"). De manera similar, los puntos *A* y *B* están separados 180° en el círculo, pero las caras correspondientes del elemento (figura 7.16a) están separadas 90°.

Para demostrar que las coordenadas σ_{x_1} y $\tau_{x_1 y_1}$ del punto *D* en el círculo están, en efecto, dadas por las ecuaciones de transformación de esfuerzo



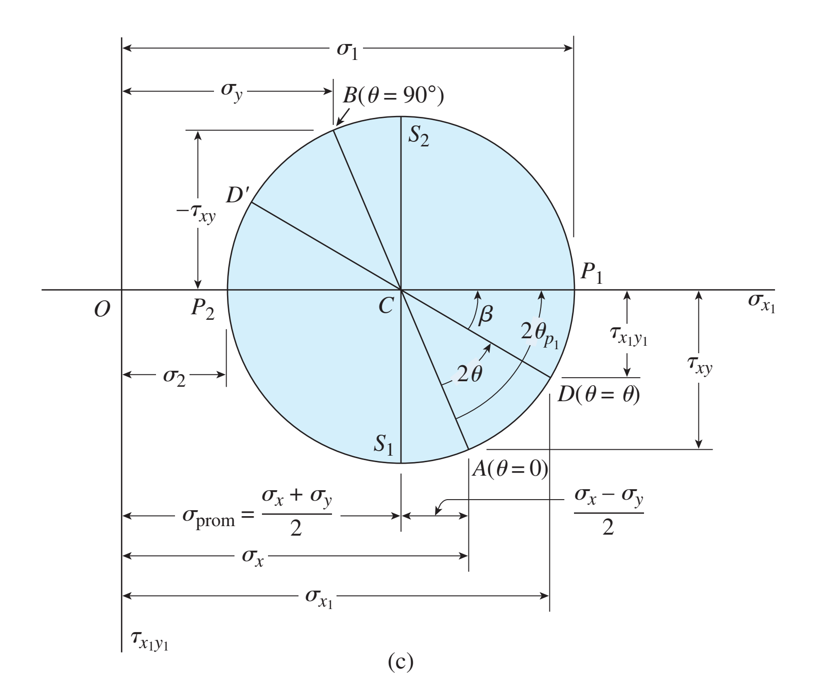


FIGURA 7.16 (Repetida.)

(ecuaciones 7.4a y 7.4b), de nuevo empleamos la geometría del círculo. Sea β el ángulo entre la línea radial CD y el eje $\tau_{x_1y_1}$. Entonces, de la geometría de la figura obtenemos las expresiones siguientes para las coordenadas del punto D:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos\beta \qquad \tau_{x_1y_1} = R\,\text{sen}\,\beta \qquad (7.33\text{a,b})$$

Luego, si observamos que el ángulo entre el radio CA y el eje horizontal es $2\theta + \beta$, obtenemos

$$\cos(2\theta + \beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad \text{sen}\,(2\theta + \beta) = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Al desarrollar las expresiones para el seno y el coseno (consulte el apéndice C) da

$$\cos 2\theta \cos\beta - \text{sen}\,2\theta\ \text{sen}\,\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad (\text{a})$$

$$\text{sen}\,2\theta \cos\beta + \cos 2\theta\,\text{sen}\,\beta = \frac{\tau_{xy}}{R} \qquad (\text{b})$$

Al multiplicar la primera de estas ecuaciones por $\cos 2\theta$ y la segunda por $\text{sen}\,2\theta$ y luego sumando, obtenemos

$$\cos\beta = \frac{1}{R}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\ \text{sen}\,2\theta\right) \qquad (\text{c})$$

Además, al multiplicar la ecuación (a) por $\text{sen}\,2\theta$ y la ecuación (b) por $\cos 2\theta$ y luego restar, obtenemos

$$\text{sen}\,\beta = \frac{1}{R}\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right) \qquad (\text{d})$$

Al sustituir estas expresiones para $\cos\beta$ y $\text{sen}\,\beta$ en las ecuaciones (7.33a) y (7.33b), obtenemos las ecuaciones de transformación de esfuerzos para σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ (ecuaciones 7.4a y 7.4b). Por tanto, demostramos que el punto D en el círculo de Mohr, definido por el ángulo 2θ, representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara x_1 del elemento de esfuerzo definido por el ángulo θ (figura 7.16b).

El punto D', que está diametralmente opuesto al punto D en el círculo, está ubicado por un ángulo 2θ (medido desde la línea CA) que es 180° mayor que el ángulo 2θ hasta el punto D. Por tanto, el punto D' en el círculo representa los esfuerzos sobre una cara del elemento de esfuerzo (figura 7.16b) a 90° desde la cara representada por el punto D. Por tanto, el punto

D' en el círculo proporciona los esfuerzos σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ sobre la cara y_1 del elemento de esfuerzo (la cara identificada "D" en la figura 7.16b).

De este análisis vemos cómo están relacionados los esfuerzos representados por puntos en el círculo de Mohr con los esfuerzos que actúan sobre un elemento. Los esfuerzos sobre un plano inclinado definido por el ángulo θ (figura 7.16b) se determinan en el círculo en el punto donde el ángulo desde el punto de referencia (punto A) es 2θ. Entonces, conforme giramos los ejes x_1y_1 en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ (figura 7.16b), el punto en el círculo de Mohr correspondiente a la cara x_1 se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo 2θ. De manera similar, si giramos los ejes en el sentido de las manecillas del reloj un ángulo, el punto en el círculo también se mueve en sentido de las manecillas del reloj un ángulo dos veces mayor.

Esfuerzos principales

La determinación de los esfuerzos principales es probablemente la aplicación más importante del círculo de Mohr. Observe que conforme nos movemos alrededor del círculo de Mohr (figura 7.16c), encontramos el punto P_1 donde el esfuerzo normal alcanza su valor algebraicamente mayor y el esfuerzo cortante es cero. De aquí, el punto P_1 representa un **esfuerzo principal** y un **plano principal**. La abscisa σ_1 del punto P_1 da el esfuerzo principal algebraicamente mayor y su ángulo $2\theta_{p_1}$ desde el punto de referencia A (donde $\theta = 0$) da la orientación del plano principal. El otro plano principal, asociado con el esfuerzo normal algebraicamente menor, está representado por el punto P_2, diametralmente opuesto al punto P_1.

De la geometría del círculo observamos que el esfuerzo principal algebraicamente mayor es

$$\sigma_1 = \overline{OC} + \overline{CP_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

que, al sustituir la expresión para R (ecuación 7.31b), concuerda con la ecuación anterior para este esfuerzo (ecuación 7.14). De manera similar, podemos verificar la expresión para el esfuerzo principal algebraicamente menor σ_2.

El ángulo principal θ_{p_1} entre el eje x (figura 7.16a) y el plano del esfuerzo principal algebraicamente más grande es la mitad del ángulo $2\theta_{p_1}$, que es el ángulo en el círculo de Mohr entre los radios CA y CP_1. El coseno y el seno del ángulo $2\theta_{p_1}$ se pueden obtener por inspección del círculo:

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad \text{sen } 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Estas ecuaciones concuerdan con las ecuaciones (7.18a) y (7.18b) y, por tanto, una vez más vemos que la geometría del círculo concuerda con las ecuaciones deducidas antes. En el círculo, el ángulo $2\theta_{p_2}$ hasta el otro punto

principal (punto P_2) es 180° mayor que $2\theta_{p_1}$; por tanto, $\theta_{p_2} = \theta_{p_1} + 90°$ como se esperaba.

Esfuerzos cortantes máximos

Los puntos S_1 y S_2 que representan los planos de esfuerzos cortantes máximo positivo y máximo negativo, respectivamente, están ubicados en la parte superior e inferior del círculo de Mohr (figura 7.16c). Estos puntos están en los ángulos $2\theta = 90°$ desde los puntos P_1 y P_2, lo que concuerda con el hecho que los planos de esfuerzo cortante máximo están orientados a 45° con respecto a los planos principales.

Los esfuerzos cortantes máximos son numéricamente iguales al radio R del círculo (compare la ecuación 7.31b para R con la ecuación 7.25 para $\tau_{máx}$). Además, los esfuerzos normales sobre los planos de esfuerzo cortante máximo son iguales a la abscisa del punto C, que es el esfuerzo normal promedio σ_{prom} (consulte la ecuación 7.31a).

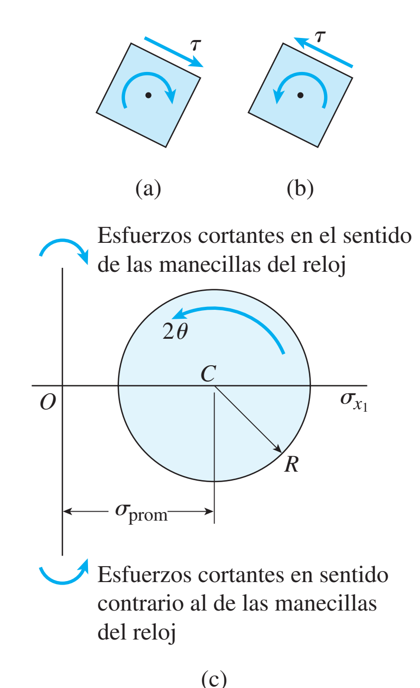


FIGURA 7.17 Convención de signos alternativa para esfuerzos cortantes: (a) esfuerzo cortante en el sentido de las manecillas del reloj, (b) esfuerzo cortante en sentido contrario al de las manecillas del reloj y (c) ejes para el círculo de Mohr. (Observe que los esfuerzos cortantes en sentido de las manecillas del reloj están trazados hacia arriba y los esfuerzos cortantes en el sentido contrario están trazados hacia abajo.)

Convención de signos alternativa para esfuerzos cortantes

Algunas veces al trazar el círculo de Mohr se utiliza una convención de signos alternativa para esfuerzos cortantes. En ésta, la dirección de un esfuerzo cortante que actúa sobre un elemento del material se indica por el sentido de la rotación que tiende a producir (figuras 7.17a y b). Si el esfuerzo cortante τ tiende a girar el elemento de esfuerzo en el sentido de las manecillas del reloj, se denomina *esfuerzo cortante en el sentido de las manecillas del reloj*, y si tiende a girarlo en sentido contrario, se denomina *esfuerzo en sentido contrario al de las manecillas del reloj*. Entonces, al trazar el círculo de Mohr, los esfuerzos en sentido de las manecillas del reloj se trazan hacia arriba y los contrarios se trazan hacia abajo (figura 7.17c).

Es importante aclarar que *la convención de signos alternativa produce un círculo que es idéntico al círculo ya descrito* (figura 7.16c). La razón es que un esfuerzo cortante positivo $\tau_{x_1y_1}$ también es un esfuerzo cortante en sentido contrario al de las manecillas del reloj y los dos se trazan hacia abajo. Además, un esfuerzo cortante negativo $\tau_{x_1y_1}$ es un esfuerzo cortante en el sentido de las manecillas del reloj y los dos se trazan hacia arriba.

Por tanto, la convención de signos alternativa solamente proporciona un punto de vista diferente. En lugar de considerar al eje vertical como si tuviera esfuerzos cortantes negativos trazados hacia arriba y los esfuerzos cortantes positivos trazados hacia abajo (lo que es un poco incómodo), podemos considerar al eje vertical como si tuviera esfuerzos cortantes en el sentido de las manecillas del reloj trazados hacia arriba y esfuerzos cortantes en sentido contrario trazados hacia abajo (figura 7.17c).

Comentarios generales sobre el círculo de Mohr

De los análisis anteriores en esta sección, es aparente que a partir del círculo de Mohr podemos encontrar los esfuerzos que actúan sobre cualquier plano inclinado, así como los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes

máximos. Sin embargo, sólo se consideran rotaciones de ejes en el plano *xy* (es decir, rotaciones con respecto al eje *z*) y, por tanto, *todos los esfuerzos en el círculo de Mohr son esfuerzos en el plano*.

Por conveniencia, el círculo de la figura 7.16 se trazó con σ_x, σ_y y τ_{xy} como esfuerzos positivos, pero los mismos procedimientos se pueden seguir si uno o más de los esfuerzos es negativo. Si uno de los esfuerzos normales es negativo, una parte del círculo o todo él estará ubicado a la izquierda del origen, como se ilustra en el ejemplo 7.6.

El punto *A* en la figura 7.16c, que representa los esfuerzos sobre el plano $\theta = 0$, puede estar en cualquier parte alrededor del círculo. Sin embargo, el ángulo 2θ siempre se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el radio *CA*, sin importar donde esté situado el punto *A*.

En los casos especiales de *esfuerzo uniaxial, esfuerzo biaxial* y *cortante puro*, la elaboración del círculo de Mohr es más simple en el caso general de esfuerzo plano. Estos casos especiales se ilustran en el ejemplo 7.4 y en los problemas 7.4.1 a 7.4.9.

Además de emplear el círculo de Mohr para obtener los esfuerzos sobre planos inclinados cuando se conocen los esfuerzos sobre los planos *x* y *y*, también podemos utilizar el círculo de la manera opuesta. Si conocemos los esfuerzos σ_{x_1}, σ_{y_1} y $\tau_{x_1y_1}$ que actúan sobre un elemento inclinado orientado en un ángulo conocido θ, con facilidad podemos trazar el círculo y determinar los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} para $\theta = 0$. El procedimiento es ubicar los puntos *D* y *D′* a partir de los ezfuerzos conocidos y luego dibujar el círculo emplando la línea *DD′* como un diámetro. Al medir el ángulo 2θ en un sentido negativo desde el radio *CD*, podemos localizar el punto *A*, que corresponde a la cara *x* del elemento. Luego podemos ubicar el punto *B* trazando un diámetro desde *A*. Por último, podemos determinar las coordenadas de los puntos *A* y *B* y de esta manera obtener los esfuerzos que actúan sobre el elemento para el cual $\theta = 0$.

Si se quiere, se puede trazar el círculo de Mohr a escala y medir valores de esfuerzo en el dibujo. Sin embargo, es usual que se prefiera obtener los esfuerzos mediante cálculos numéricos, ya sea de manera directa con las varias ecuaciones o bien empleando trigonometría y geometría del círculo.

El círculo de Mohr hace posible visualizar las relaciones entre los esfuerzos que actúan sobre planos en varios ángulos y también sirve como dispositivo simple de memoria para calcular esfuerzos. Si bien muchas técnicas gráficas ya no se utilizan en el trabajo ingenieril, el círculo de Mohr sigue siendo muy valioso ya que proporciona una representación simple y clara de un análisis que es complicado de otra manera.

El círculo de Mohr también aplicable a las transformaciones para deformación unitaria simple y a momentos de inercia de áreas planas, dado que estas cantidades siguen las mismas leyes de transformación que los esfuerzos (consulte las secciones 7.7, 12.8 y 12.9).

Ejemplo 7.4

En un punto en la superficie de un cilindro a presión, el material está sometido a esfuerzos biaxiales $\sigma_x = 90$ MPa y $\sigma_y = 20$ MPa, como se muestra sobre el elemento de esfuerzo de la figura 7.18a.

Utilice el círculo de Mohr para determinar los esfuerzos que actúan sobre un elemento inclinado a un ángulo $\theta = 30°$. (Considere sólo los esfuerzos en el plano y muestre los resultados en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.)

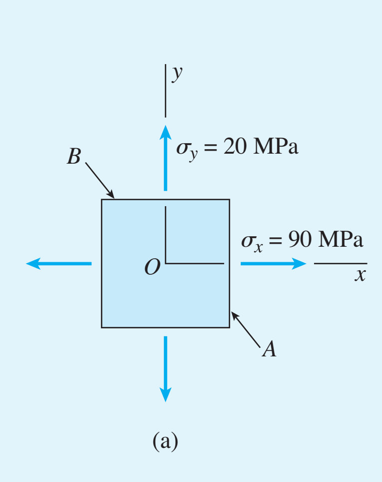
Solución

Trazo del círculo de Mohr. Iniciamos estableciendo los ejes para los esfuerzos normales y cortantes, con σ_{x_1} positivo hacia la derecha y $\tau_{x_1y_1}$ positivo hacia abajo, como se muestra en la figura 7.18b. Luego colocamos el centro C del círculo en el eje σ_{x_1} en el punto donde el esfuerzo es igual al esfuerzo normal promedio (ecuación 7.31a):

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{90\text{ MPa} + 20\text{ MPa}}{2} = 55\text{ MPa}$$

El punto A, que representa los esfuerzos sobre la cara x del elemento ($\theta = 0$), tiene las coordenadas

$$\sigma_{x_1} = 90\text{ MPa} \qquad \tau_{x_1y_1} = 0$$



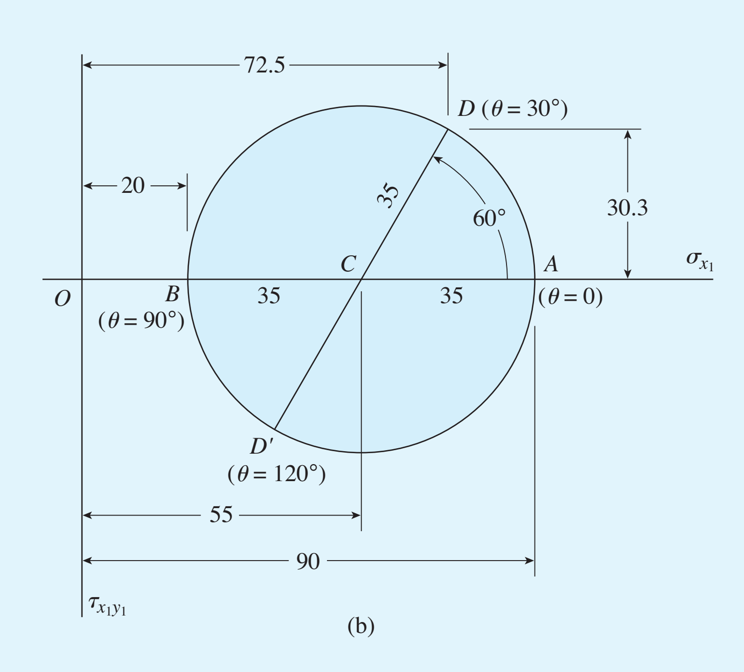


FIGURA 7.18 Ejemplo 7.4. (a) Elemento en esfuerzo plano y (b) círculo de Mohr correspondiente. (*Nota:* todos los esfuerzos en el círculo tienen unidades de MPa.)

continúa

De manera similar, las coordenadas del punto B, que representan los esfuerzos sobre la cara y ($\theta = 90°$), son

$$\sigma_{x_1} = 20 \text{ MPa} \qquad \tau_{x_1 y_1} = 0$$

Ahora trazamos el círculo por los puntos A y B con centro en C y radio R (consulte la ecuación 7.31b) igual a

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{90 \text{ MPa} - 20 \text{ MPa}}{2}\right)^2 + 0} = 35 \text{ MPa}$$

Esfuerzos sobre un elemento inclinado a $\theta = 30°$. Los esfuerzos que actúan sobre un plano orientado a un ángulo $\theta = 30°$ están dados por las coordenadas del punto D, que está a un ángulo $2\theta = 60°$ desde el punto A (figura 7.18b). Por inspección del círculo, observamos que las coordenadas del punto D son

$$\text{(Punto } D) \qquad \sigma_{x_1} = \sigma_{\text{prom}} + R \cos 60°$$

$$= 55 \text{ MPa} + (35 \text{ MPa})(\cos 60°) = 72.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -R \text{ sen } 60° = -(35 \text{ MPa})(\text{sen } 60°) = -30.3 \text{ MPa}$$

De una manera similar, podemos encontrar los esfuerzos representados por el punto D', que corresponde a un ángulo $\theta = 120°$ (o $2\theta = 240°$):

$$\text{(Punto } D') \qquad \sigma_{x_1} = \sigma_{\text{prom}} - R \cos 60°$$

$$= 55 \text{ MPa} - (35 \text{ MPa})(\cos 60°) = 37.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = R \text{ sen } 60° = (35 \text{ MPa})(\text{sen } 60°) = 30.3 \text{ MPa}$$

Estos resultados se muestran en la figura 7-19 en un diagrama de un elemento orientado a un ángulo $\theta = 30°$, con todos los esfuerzos mostrados en sus direcciones verdaderas. Observe que la suma de los esfuerzos normales sobre el elemento inclinado es igual a $\sigma_x + \sigma_y$ o 110 MPa.

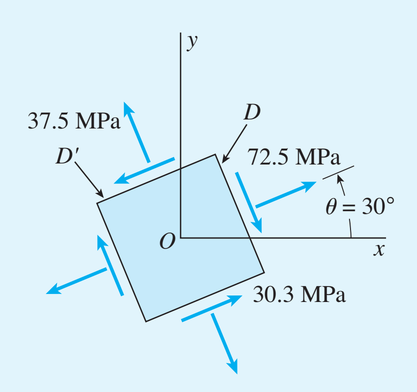
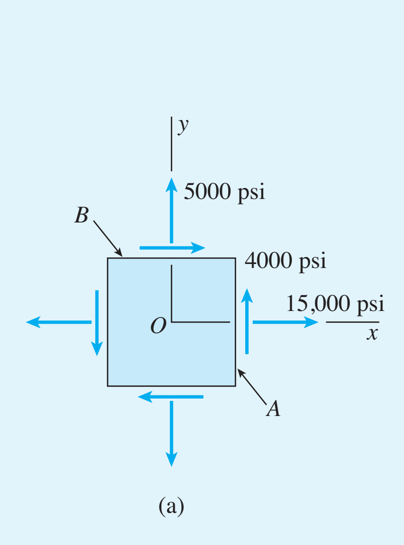


FIGURA 7.19 Ejemplo 7.4 (continuación). Esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = 30°$.

Ejemplo 7.5

Un elemento en esfuerzo plano en la superficie de una máquina grande está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 15{,}000$ psi, $\sigma_y = 5000$ psi y $\tau_{xy} = 4000$ psi, como se muestra en la figura 7.20a.

Utilice el círculo de Mohr para determinar las siguientes cantidades: (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento inclinado a un ángulo $\theta = 40°$, (b) los esfuerzos principales y (c) los esfuerzos cortantes máximos. (Considere sólo los esfuerzos en el plano y muestre los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.)



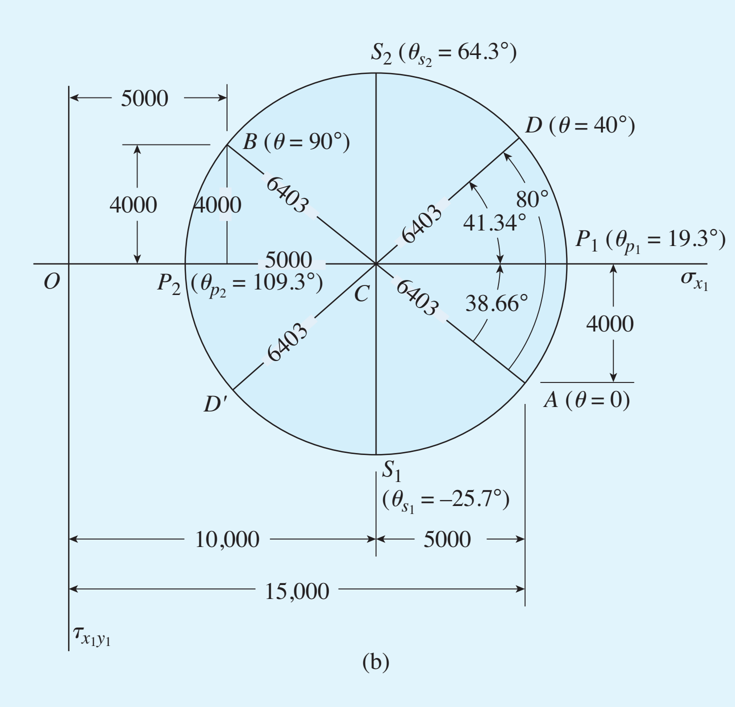


FIGURA 7.20 Ejemplo 7.5. (a) Elemento en esfuerzo plano y (b) círculo de Mohr correspondiente. (*Nota:* todos los esfuerzos en el círculo tienen unidades de psi.)

Solución

Trazo del círculo de Mohr. El primer paso en la solución es establecer los ejes para el círculo de Mohr, con σ_{x_1} positivo hacia la derecha y $\tau_{x_1y_1}$ positivo hacia abajo (figura 7.20b). El centro C del círculo está ubicado en el eje σ_{x_1} en el punto donde σ_{x_1} es igual al esfuerzo normal promedio (ecuación 7.31a):

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{15{,}000 \text{ psi} + 5000 \text{ psi}}{2} = 10{,}000 \text{ psi}$$

El punto A, que representa los esfuerzos sobre la cara x del elemento ($\theta = 0$), tiene coordenadas

$$\sigma_{x_1} = 15{,}000 \text{ psi} \qquad \tau_{x_1y_1} = 4000 \text{ psi}$$

De manera similar, las coordenadas del punto B, que representan los esfuerzos sobre la cara y ($\theta = 90°$) son

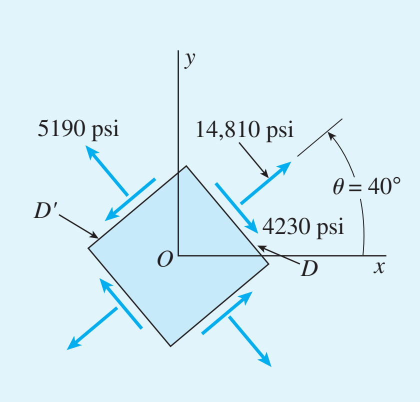
$$\sigma_{x_1} = 5000 \text{ psi} \qquad \tau_{x_1y_1} = -4000 \text{ psi}$$

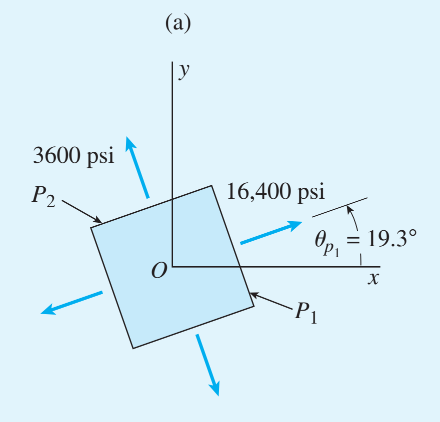
continúa

Ahora el círculo se traza por los puntos A y B con centro en C. El radio del círculo, de la ecuación (7.31b), es

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{15{,}000 \text{ psi} - 5000 \text{ psi}}{2}\right)^2 + (4000 \text{ psi})^2} = 6403 \text{ psi}$$





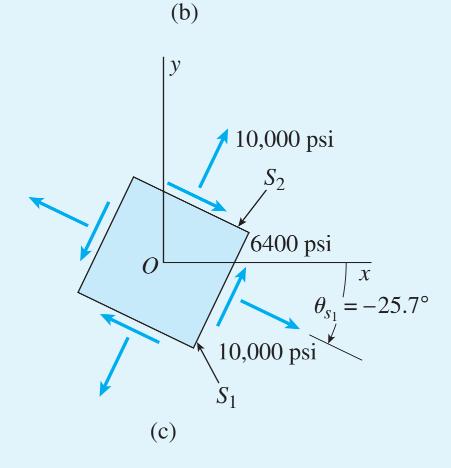


FIGURA 7.21 Ejemplo 7.5 (continuación). (a) Esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a $\theta = 40°$, (b) esfuerzos principales y (c) esfuerzos cortantes máximos.

(a) *Esfuerzos sobre un elemento inclinado a* $\theta = 40°$. Los esfuerzos que actúan sobre un elemento en un plano orientado a un ángulo $\theta = 40°$ están dados por las coordenadas del punto D, que está a un ángulo $2\theta = 80°$ desde el punto A (figura 7.20b). Para evaluar estas coordenadas necesitamos conocer el ángulo entre la línea CD y el eje σ_{x_1} (es decir, el ángulo DCP_1), lo que a su vez requiere que conozcamos el ángulo entre la línea CA y el eje σ_{x_1} (ángulo ACP_1). Estos ángulos se determinan a partir de la geometría del círculo, como se indica:

$$\tan \overline{ACP_1} = \frac{4000 \text{ psi}}{5000 \text{ psi}} = 0.8 \qquad \overline{ACP_1} = 38.66°$$

$$\overline{DCP_1} = 80° - \overline{ACP_1} = 80° - 38.66° = 41.34°$$

Al conocer estos ángulos, podemos determinar las coordenadas del punto D de manera directa a partir de la figura 7.21a:

$$\text{(Punto } D) \qquad \sigma_{x_1} = 10{,}000 \text{ psi} + (6403 \text{ psi})(\cos 41.34°) = 14{,}810 \text{ psi}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -(6403 \text{ psi})(\text{sen } 41.34°) = -4230 \text{ psi}$$

De manera análoga, podemos encontrar los esfuerzos representados por el punto D', que corresponde a un plano inclinado a un ángulo $\theta = 130°$ (o $2\theta = 260°$):

$$\text{(Punto } D') \qquad \sigma_{x_1} = 10{,}000 \text{ psi} - (6403 \text{ psi})(\cos 41.34°) = 5190 \text{ psi}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = (6403 \text{ psi})(\text{sen } 41.34°) = 4230 \text{ psi}$$

Estos esfuerzos se muestran en la figura 7-21a en un diagrama de un elemento orientado a un ángulo $\theta = 40°$ (todos los esfuerzos se muestran con sus direcciones verdaderas). Además, observe que la suma de los esfuerzos normales es igual a σ_x y σ_y o 20,000 psi.

(b) *Esfuerzos principales*. Los esfuerzos principales están representados por los puntos P_1 y P_2 en el círculo de Mohr (figura 7.20b). El esfuerzo principal algebraicamente mayor (punto P_1) es

$$\sigma_1 = 10{,}000 \text{ psi} + 6400 \text{ psi} = 16{,}400 \text{ psi}$$

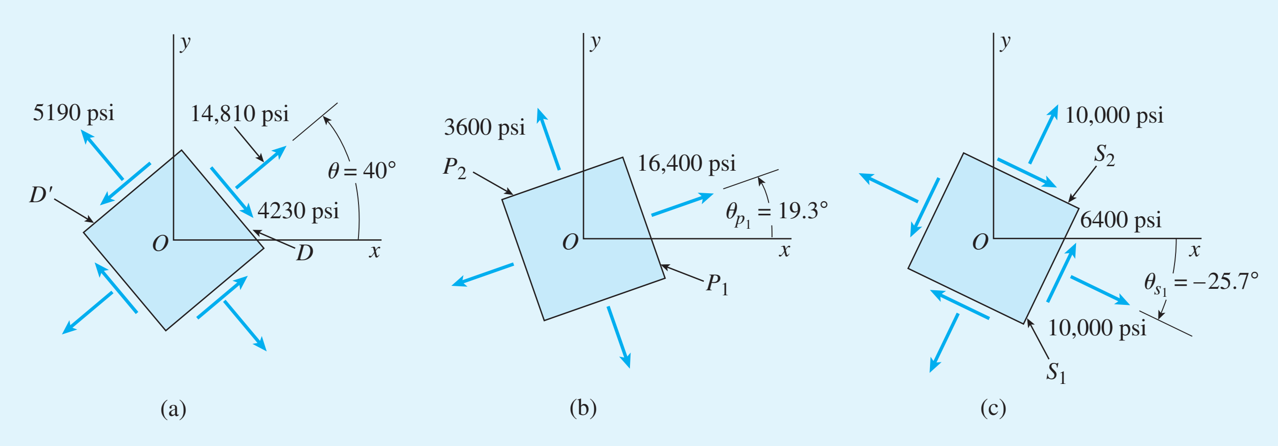


FIGURA 7.21 (Repetida.)

como se observa en el círculo. El ángulo $2\theta_1$ hasta el punto P_1 desde el punto A es el ángulo ACP_1 en el círculo, es decir,

$$\overline{ACP_1} = 2\theta_{p_1} = 38.66° \qquad \theta_{p_1} = 19.3°$$

Por tanto, el plano del esfuerzo principal algebraicamente mayor está orientado a un ángulo $\theta_{p_1} = 19.3°$, como se muestra en la figura 7.21b.

El esfuerzo principal algebraicamente menor (representado por el punto P_2) se obtiene del círculo de una manera similar:

$$\sigma_2 = 10{,}000 \text{ psi} - 6400 \text{ psi} = 3600 \text{ psi}$$

El ángulo $2\,\theta_{p_2}$ hasta el punto P_2 en el círculo es 38.66° + 180° = 218.66°; por lo que el segundo plano principal está definido por el ángulo $\theta_{p_2} = 109.3°$. Los esfuerzos principales y los planos principales se muestran en la figura 7.21b y de nuevo observamos que la suma de los esfuerzos normales es igual a 20,000 psi.

(c) *Esfuerzos cortantes máximos*. Los esfuerzos cortantes máximos están representados por los puntos S_1 y S_2 en el círculo de Mohr; por tanto, el esfuerzo cortante máximo en el plano (igual al radio del círculo de Mohr) es

$$\tau_{\text{máx}} = 6400 \text{ psi}$$

El ángulo ACS_1 desde el punto A hasta el punto S_1 es 90° – 38.66° = 51.34° y, por tanto, el ángulo θ_{s_1} para el punto S_1 es

$$2\theta_{s_1} = -51.34°$$

Este ángulo es negativo porque está medido en el sentido de las manecillas del reloj en el círculo. El ángulo θ_{s_1} con respecto al plano del esfuerzo cortante máximo positivo es la mitad de ese valor, o $\theta_{s_1} = -25.7°$, como se muestra en las figuras 7.20b y 7.21c. El esfuerzo cortante máximo negativo (punto S_2 en el círculo) tiene el mismo valor numérico que el esfuerzo máximo positivo (6400 psi).

Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzo cortante máximo son iguales a σ_{prom}, que es la abscisa del centro C del círculo (10,000 psi). Estos esfuerzos también se muestran en la figura 7.21c. Observe que los planos de esfuerzo cortante máximo están orientados a 45° con respecto a los planos principales.

Ejemplo 7.6

En un punto sobre la superficie de un eje de un generador los esfuerzos son $\sigma_x = -50$ MPa, $\sigma_y = 10$ MPa y $\tau_{xy} = -40$ MPa, como se muestra en la figura 7.22a.

Utilice el círculo de Mohr para determinar las siguientes cantidades: (a) los esfuerzos que actúan sobre un elemento inclinado a un ángulo $\theta = 45°$, (b) los esfuerzos principales y (c) los esfuerzos cortantes máximos. (Considere sólo los esfuerzos en el plano y muestre los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.)

Solución

Trazo del círculo de Mohr. Los ejes para los esfuerzos normales y cortantes se muestran en la figura 7.22b, con σ_{x_1} positivo hacia la derecha y $\tau_{x_1y_1}$ positivo hacia abajo. El centro C del círculo está ubicado en el eje σ_{x_1} en el punto donde el esfuerzo es igual al esfuerzo normal promedio (ecuación 7.31a):

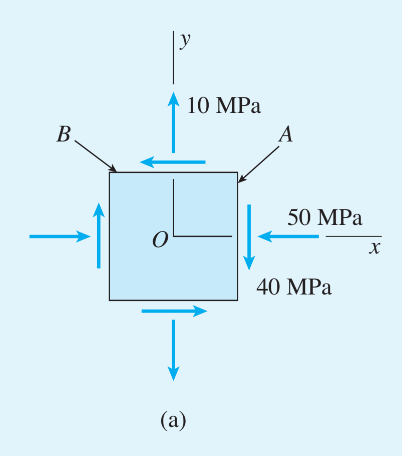
$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-50 \text{ MPa} + 10 \text{ MPa}}{2} = -20 \text{ MPa}$$

El punto A, que representa los esfuerzos sobre la cara x del elemento ($\theta = 0$), tiene las coordenadas

$$\sigma_{x_1} = -50 \text{ MPa} \qquad \tau_{x_1y_1} = -40 \text{ MPa}$$

De manera similar, las coordenadas del punto B, que representan los esfuerzos sobre la cara y ($\theta = 90°$), son

$$\sigma_{x_1} = 10 \text{ MPa} \qquad \tau_{x_1y_1} = 40 \text{ MPa}$$



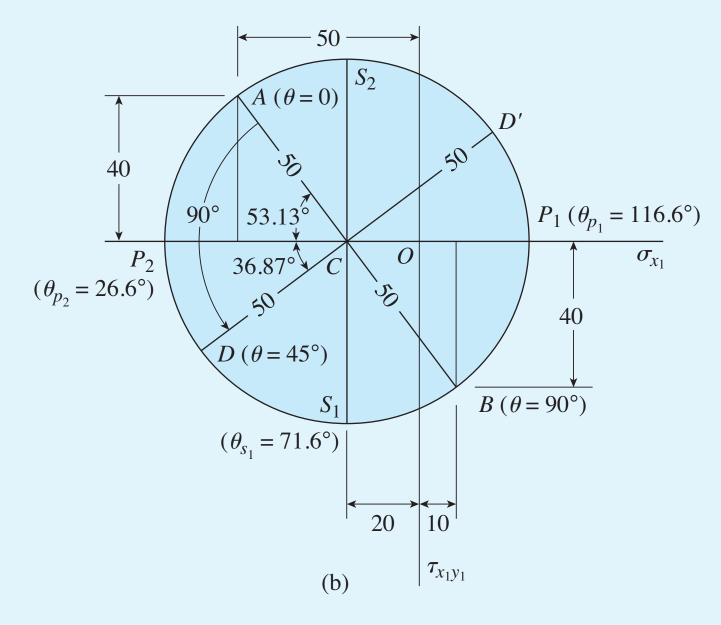


FIGURA 7.22 Ejemplo 7.6. (a) Elemento en esfuerzo plano y (b) círculo de Mohr correspondiente. (*Nota:* todos los esfuerzos en el círculo tienen unidades de MPa.)

Ahora se traza el círculo por los puntos A y B con centro en C y radio R (de la ecuación 7.31b) igual a

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-50 \text{ MPa} - 10 \text{ MPa}}{2}\right)^2 + (-40 \text{ MPa})^2} = 50 \text{ MPa}$$

(a) *Esfuerzos sobre un elemento inclinado a* $\theta = 45°$. Los esfuerzos que actúan sobre un plano orientado a un ángulo $\theta = 45°$ están dados por las coordenadas del punto D, que está a un ángulo $2\theta = 90°$ desde el punto A (figura 7.22b). Para evaluar estas coordenadas necesitamos conocer el ángulo entre la línea CD y el eje σ_{x_1} negativo (es decir, el ángulo DCP_2), lo que a su vez requiere que conozcamos el ángulo entre la línea CA y el eje σ_{x_1} negativo (ángulo ACP_2). Estos ángulos se determinan a partir de la geometría del círculo como se indica:

$$\tan \overline{ACP_2} = \frac{40 \text{ MPa}}{30 \text{ MPa}} = \frac{4}{3} \qquad \overline{ACP_2} = 53.13°$$

$$\overline{DCP_2} = 90° - \overline{ACP_2} = 90° - 53.13° = 36.87°$$

Al conocer estos ángulos podemos obtener las coordenadas del punto D de manera directa de la figura 7.23a:

$$\text{(Punto } D\text{)} \qquad \sigma_{x_1} = -20 \text{ MPa} - (50 \text{ MPa})(\cos 36.87°) = -60 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1y_1} = (50 \text{ MPa})(\text{sen } 36.87°) = 30 \text{ MPa}$$

De una manera análoga, podemos encontrar los esfuerzos representado por el punto D', que corresponde a un plano inclinado a un ángulo $\theta = 135°$ (o $2\theta = 270°$):

$$\text{(Punto } D'\text{)} \qquad \sigma_{x_1} = -20 \text{ MPa} + (50 \text{ MPa})(\cos 36.87°) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1y_1} = (-50 \text{ MPa})(\text{sen } 36.87°) = -30 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos se muestran en la figura 7.23a en un diagrama de un elemento orientado a un ángulo $\theta = 45°$ (todos los esfuerzos se muestran con sus direcciones verdaderas). También observe que la suma de los esfuerzos normales es igual a $\sigma_x + \sigma_y$, o −40 MPa.

(b) *Esfuerzos principales*. Los esfuerzos principales están representados por los puntos P_1 y P_2 en el círculo de Mohr. El esfuerzo principal algebraicamente mayor (representado por el punto P_1) es

$$\sigma_1 = -20 \text{ MPa} + 50 \text{ MPa} = 30 \text{ MPa}$$

continúa

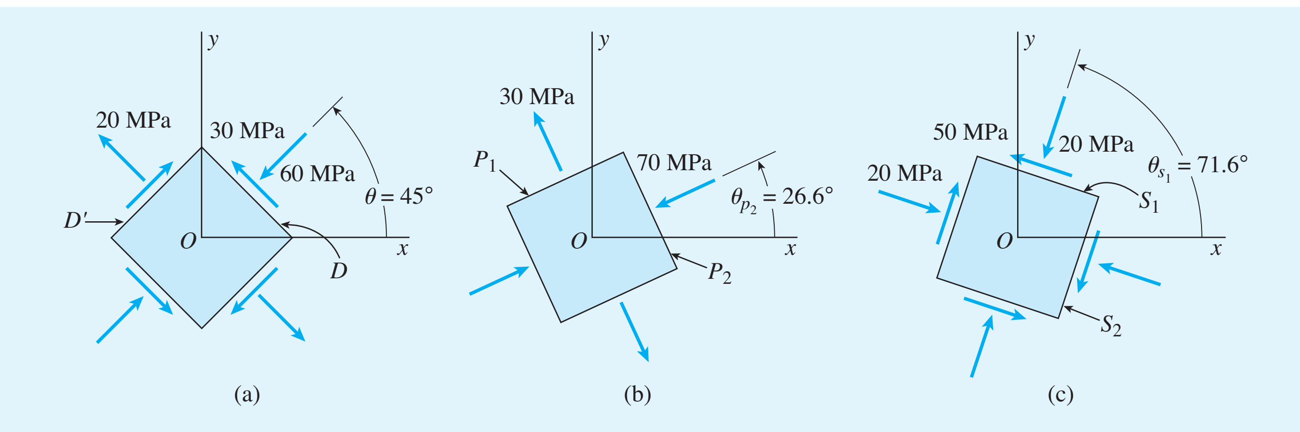


FIGURA 7.23 Ejemplo 7.6 (continuación). (a) Esfuerzo que actúa sobre un elemento orientado a $\theta = 45°$, (b) esfuerzos principales y (c) esfuerzos cortantes máximos.

como se observa por inspección del círculo. El ángulo $2\theta_{p_1}$ hasta el punto P_1 desde el punto A es el ángulo ACP_1 medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el círculo, es decir,

$$\overline{ACP_1} = 2\theta_{p_1} = 53.13° + 180° = 233.13° \qquad \theta_{p_1} = 116.6°$$

Por tanto, el plano de esfuerzo principal algebraicamente mayor está orientado a un ángulo $\theta_{p_1} = 116.6°$.

El esfuerzo principal algebraicamente menor (punto P_2) se obtiene del círculo de una manera similar:

$$\sigma_2 = -20 \text{ MPa} - 50 \text{ MPa} = -70 \text{ MPa}$$

El ángulo $2\theta_{p_2}$ hasta el punto P_2 en el círculo es 53.13°; por lo que el segundo plano principal se define por el ángulo $\theta_{p_2} = 26.6°$.

Los esfuerzos principales y los planos principales se muestran en la figura 7.23b y de nuevo observamos que la suma de los esfuerzos es igual a $\sigma_x + \sigma_y$, o –40 MPa.

(c) *Esfuerzos cortantes máximos*. Los esfuerzos cortantes máximos positivo y negativo están representados por los puntos S_1 y S_2 en el círculo de Mohr (figura 7.22b). Sus magnitudes, iguales al radio del círculo, son

$$\tau_{\text{máx}} = 50 \text{ MPa}$$

El ángulo ACS_1 desde el punto A hasta el punto S_1 es $90° + 53.13° = 143.13°$ y por tanto el ángulo $2\theta_{s_1}$ para el punto S_1 es

$$2\theta_{s_1} = 143.13°$$

El ángulo correspondiente θ_{s_1} al plano de esfuerzo cortante máximo positivo es la mitad del ese valor, o $\theta_{s_1} = 71.6°$, como se muestra en la figura 7.23c. El esfuerzo cortante máximo negativo (punto S_2 en el círculo) tiene el mismo valor numérico que el esfuerzo positivo (50 MPa).

Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzo cortante máximo son iguales a σ_{prom}, que es la coordenada del centro C del círculo (–20 MPa). Estos esfuerzos también se muestran en la figura 7.23c. Observe que los planos de esfuerzo cortante máximo están orientados a 45° con respecto a los planos principales.

7.5 LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO PLANO

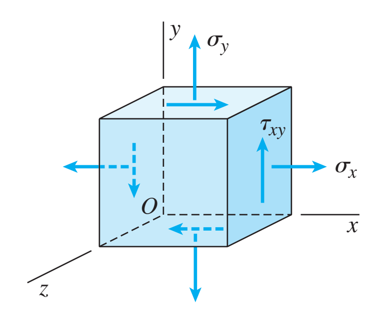


FIGURA 7.24 Elemento de material en esfuerzo plano ($\sigma_z = 0$).

Los esfuerzos que actúan sobre planos inclinados cuando el material está sometido a esfuerzo plano (figura 7.24) se analizaron en las secciones 7.2, 7.3 y 7.4. Las ecuaciones de transformación de esfuerzo deducidas en esos análisis se obtuvieron solamente del equilibrio y, por tanto, no se necesitaron las propiedades de los materiales. Ahora, en esta sección, investigaremos las *deformaciones unitarias* en el material, lo que significa que se deben considerar sus propiedades. Sin embargo, limitaremos nuestro análisis a materiales que cumplan dos condiciones importantes: primero, *el material es uniforme en todo el cuerpo y tiene las mismas propiedades en todas las direcciones* (material homogéneo e isotrópico) y segundo, *el material sigue la ley de Hooke* (material linealmente elástico). En estas condiciones es fácil obtener las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones unitarias en el cuerpo.

Iniciemos considerando las **deformaciones unitarias normales** ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z en esfuerzo plano. Los efectos de estas deformaciones se representan en la figura 7.25, que muestra los cambios en las dimensiones de un elemento pequeño que tiene bordes con longitudes *a*, *b* y *c*. En la figura las tres deformaciones unitarias se muestran positivas (alargamiento). Las deformaciones unitarias se pueden expresar en términos de los esfuerzos (figura 7.24) superponiendo los efectos de los esfuerzos individuales.

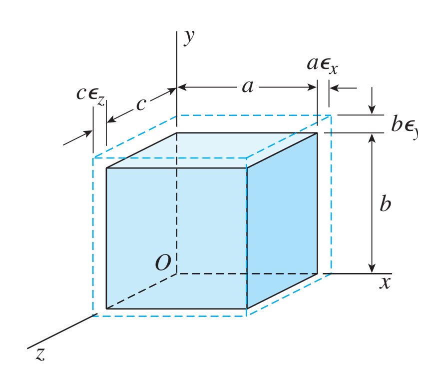


FIGURA 7.25 Elemento de material sometido a deformaciones unitarias normales ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z.

Por ejemplo, la deformación unitaria ϵ_x en la dirección *x* debida al esfuerzo σ_x es igual a σ_x/E, donde *E* es el módulo de elasticidad. Además, la deformación unitaria ϵ_x debida al esfuerzo σ_y es igual a $-\nu\sigma_y/E$, donde ν es la relación de Poisson (consulte la sección 1.5). Por supuesto, el esfuerzo cortante τ_{xy} no produce deformaciones unitarias en las direcciones *x*, *y* o *z*. Por tanto, la deformación unitaria resultante en la dirección *x* es

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \tag{7.34a}$$

De una manera similar obtenemos las deformaciones unitarias en las direcciones *y* y *z*:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.34b,c}$$

Estas ecuaciones se pueden emplear para encontrar las deformaciones unitarias normales (en esfuerzo plano) cuando se conocen los esfuerzos.

El esfuerzo cortante τ_{xy} (figura 7.24) causa una distorsión del elemento tal que la cara *z* se convierte en un rombo (figura 7.26). La **deformación unitaria por cortante** γ_{xy} es el decremento en el ángulo entre las caras *x* y *y* del elemento y está relacionada con el esfuerzo cortante por la ley de Hooke en cortante, de la siguiente manera:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{7.35}$$

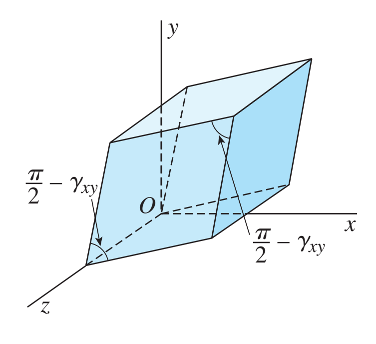


FIGURA 7.26 Deformación unitaria por cortante γ_{xy}.

donde *G* es el módulo de elasticidad en cortante. Observe que los esfuerzos normales σ_x y σ_y no tienen efecto en la deformación unitaria normal γ_{xy}. En consecuencia, las ecuaciones (7.34) y (7.35) dan las deformaciones unitarias (en esfuerzo plano) cuando todos los esfuerzos (σ_x, σ_y y τ_{xy}) actúan de manera simultánea.

Las primeras dos ecuaciones (ecuaciones 7.34a y 7.34b) dan las deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y en términos de los esfuerzos. Estas ecuaciones se pueden despejar de manera simultánea para los esfuerzos en términos de las deformaciones unitarias:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \tag{7.36a,b}$$

Además, tenemos la ecuación siguiente para el esfuerzo cortante en términos de la deformación unitaria:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{7.37}$$

Las ecuaciones (7.36) y (7.37) se pueden emplear para encontrar los esfuerzos (en esfuerzo plano) cuando se conocen las deformaciones. Por supuesto, el esfuerzo normal σ_z en la dirección z es igual a cero.

Las ecuaciones (7.34) a (7.37) se conocen de manera colectiva como **ley de Hooke para esfuerzo plano** y contienen tres constantes del material (E, G y ν), pero sólo dos son independientes debido a la relación

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{7.38}$$

que se dedujo en la sección 3.6.

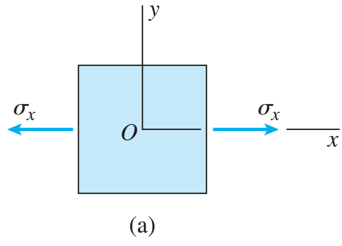
Casos especiales de la ley de Hooke

En el caso especial de **esfuerzo biaxial** (figura 7.11b), tenemos $\tau_{xy} = 0$, y por tanto la ley de Hooke para esfuerzo plano se simplifica a

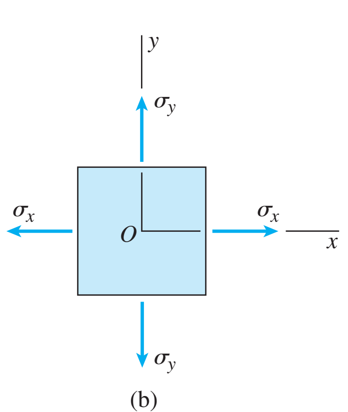
$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.39a,b,c}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \tag{7.40a,b}$$



(a)



(b)

FIGURA 7.11 (Repetida.)

Estas ecuaciones son las mismas que las ecuaciones (7.34) y (7.36) dado que los efectos de los esfuerzos normales y cortantes son independientes entre sí.

Para **esfuerzo uniaxial,** con $\sigma_y = 0$ (figura 7.11a), las ecuaciones de la ley de Hooke se simplifican aún más:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \qquad \sigma_x = E\epsilon_x \tag{7.41a,b,c}$$

Por último, consideramos **cortante puro** (figura 7.12a), que significa que $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Entonces, obtenemos

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0 \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{7.42a,b}$$

En los tres casos especiales, el esfuerzo normal σ_z es igual a cero.

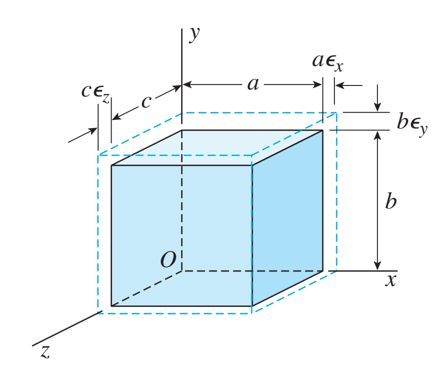


FIGURA 7.25 (Repetida.)

Cambio de volumen

Cuando un objeto sólido experimenta deformaciones unitarias, cambiarán tanto sus dimensiones como su volumen. El cambio de volumen se puede determinar si se conocen las deformaciones unitarias normales en tres direcciones perpendiculares. Para mostrar cómo se lleva a cabo esto, consideremos de nuevo el pequeño elemento de material que se muestra en la figura 7.25. El elemento original es un paralelepípedo rectangular que tiene lados con longitudes a, b y c en las direcciones x, y y z, respectivamente. Las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z producen los cambios en las dimensiones que se muestran por las líneas discontinuas. Por tanto, los aumentos en las longitudes de los lados son $a\epsilon_x$, $b\epsilon_y$ y $c\epsilon_z$.

El volumen original del elemento es

$$V_0 = abc \tag{a}$$

y su volumen final es

$$\begin{aligned} V_1 &= (a + a\epsilon_x)(b + b\epsilon_y)(c + c\epsilon_z) \\ &= abc(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) \end{aligned} \tag{b}$$

Con referencia a la ecuación (a), podemos expresar el volumen final del elemento (ecuación b) en la forma siguiente:

$$V_1 = V_0(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) \tag{7.43a}$$

Al desarrollar los términos en el miembro derecho, obtenemos la siguiente expresión equivalente:

$$V_1 = V_0(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_z + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z) \tag{7.43b}$$

Las ecuaciones anteriores para V_1 son válidas tanto para deformaciones unitarias grandes como pequeñas.

Si ahora limitamos nuestro análisis a estructuras que sólo tienen deformaciones unitarias muy pequeñas (como es el caso usual), podemos ignorar los términos en la ecuación (7.43b) que consistan de productos de deformaciones unitarias pequeñas. Esos productos son mínimos en comparación con las deformaciones unitarias individuales ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z. Entonces la expresión para el volumen final se simplifica a

$$V_1 = V_0(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \tag{7.44}$$

y el **cambio de volumen** es

$$\Delta V = V_1 - V_0 = V_0(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \tag{7.45}$$

Esta expresión se puede emplear para cualquier volumen de material *siempre que las deformaciones unitarias sean pequeñas y permanezcan constantes en todo el volumen*. También observe que el material no tiene que seguir la ley de Hooke. Además, la expresión no está limitada a esfuerzo plano, sino que es válida para cualesquiera condiciones de esfuerzo. (Como nota final, debemos mencionar que las deformaciones unitarias por cortante no producen cambio de volumen.)

El **cambio de volumen unitario** e, también conocido como **dilatación**, se define como el cambio de volumen dividido entre el volumen original; por tanto,

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (7.46)$$

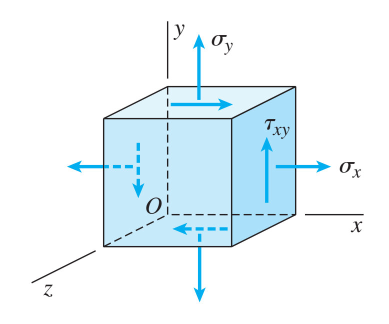


FIGURA 7.24 (Repetida.)

Al aplicar esta ecuación a un elemento diferencial de volumen y luego integrando, podemos obtener el cambio de volumen de un cuerpo aun cuando las deformaciones unitarias varíen en todo el cuerpo.

Las ecuaciones anteriores para cambios de volumen se aplican a deformaciones unitarias por tensión y compresión, puesto que las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z son cantidades algebraicas (positivas para alargamiento y negativas para acortamiento). Con esta convención de signos, los valores positivos para ΔV y e representan aumentos de volumen y los valores negativos representan decrementos.

Ahora regresemos a materiales que siguen la **ley de Hooke** y que están sometidos sólo a **esfuerzo plano** (figura 7.24). En este caso las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z están dadas por las ecuaciones (7.34a, b y c). Al sustituir esas relaciones en la ecuación (7.46), obtenemos la expresión siguiente para el cambio de volumen unitario en términos de los esfuerzos:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.47)$$

Observe que esta ecuación también se aplica a **esfuerzo biaxial**.

En el caso de una barra prismática en tensión, es decir, **esfuerzo uniaxial**, la ecuación (7.47) se simplifica a

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma_x}{E}(1 - 2\nu) \quad (7.48)$$

A partir de esta ecuación observamos que el valor máximo posible de la relación de Poisson para materiales comunes es 0.5, dado que un valor mayor significa que el volumen disminuye cuando el material está en tensión, lo cual es contrario al comportamiento físico ordinario.

Densidad de energía de deformación en esfuerzo plano

La densidad de energía de deformación u es la energía de deformación almacenada en un volumen unitario de material (consulte los análisis en las secciones 2.7 y 3.9). Para un elemento en esfuerzo plano, podemos obtener la densidad de energía de deformación con referencia a los elementos representados en las figuras 7.25 y 7.26. Como las deformaciones unitarias normales y por cortante ocurren de manera independiente, podemos sumar las energías de deformación a partir de estos dos elementos para obtener la energía total.

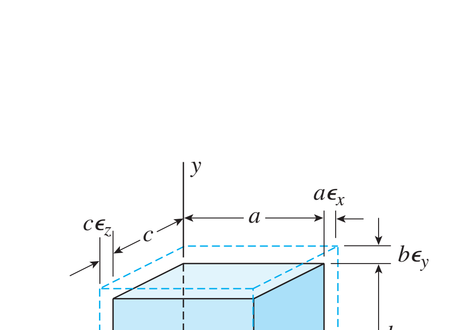


FIGURA 7.25 (Repetida.)

Iniciemos determinando la energía de deformación asociada con las deformaciones unitarias normales (figura 7.25). Puesto que el esfuerzo que actúa sobre la cara x del elemento es σ_x (consulte la figura 7.24), tenemos que la fuerza que actúa sobre la cara x del elemento (figura 7.25) es igual a $\sigma_x bc$. Por supuesto, conforme se aplican cargas a la estructura, esta fuerza aumenta gradualmente de cero a su valor máximo. Al mismo tiempo, la cara x del elemento se mueve una distancia $a\epsilon_x$. Por tanto, el trabajo realizado por esta fuerza es

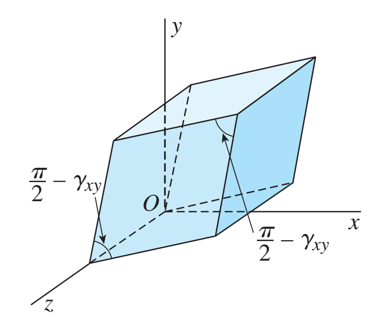


FIGURA 7.26 (Repetida.)

$$\frac{1}{2}(\sigma_x bc)(a\epsilon_x)$$

siempre que la ley de Hooke sea válida para este material, de manera similar, la fuerza $\sigma_y ac$ que actúa sobre la cara y realiza un trabajo igual a

$$\frac{1}{2}(\sigma_y ac)(b\epsilon_y)$$

La suma de estos dos términos da la energía de deformación almacenada en el elemento:

$$\frac{abc}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y)$$

Por tanto, la densidad de energía de deformación (energía de deformación por volumen unitario) debida a los esfuerzos normales y a las deformaciones unitarias normales es

$$u_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y) \qquad \text{(c)}$$

La densidad de energía de deformación asociada con las deformaciones unitarias por cortantes (figura 7.26) se evaluó antes en la sección 3.9 (consulte la ecuación d de esa sección):

$$u_2 = \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2} \qquad \text{(d)}$$

Al combinar las densidades de energía de deformación para las deformaciones unitarias normal y por cortante, obtenemos la fórmula siguiente para la **densidad de energía de deformación en esfuerzo plano:**

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}) \qquad (7.49)$$

Al sustituir las deformaciones unitarias de las ecuaciones (7.34) y (7.35), obtenemos la densidad de energía de deformación en términos sólo de los esfuerzos:

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad (7.50)$$

De manera similar, podemos sustituir los esfuerzos de las ecuaciones (7.36) y (7.37) y obtener la densidad de energía de deformación en términos sólo de las deformaciones unitarias:

$$u = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{G\gamma_{xy}^2}{2} \qquad (7.51)$$

Para obtener la densidad de energía de deformación en el caso especial de **esfuerzo biaxial,** simplemente omitimos los términos de cortante en las ecuaciones (7.49), (7.50) y (7.51).

Para el caso especial de **esfuerzo uniaxial,** sustituimos los siguientes valores:

$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \epsilon_y = -\nu\epsilon_x \qquad \gamma_{xy} = 0$$

en las ecuaciones (7.50) y (7.51) y obtenemos, respectivamente,

$$u = \frac{\sigma_x^2}{2E} \qquad u = \frac{E\epsilon_x^2}{2} \qquad \text{(e,f)}$$

Estas ecuaciones concuerdan con las ecuaciones (2.44a) y (2.44b) de la sección 2.7.

Además, para **esfuerzo cortante puro** sustituimos

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \qquad \epsilon_x = \epsilon_y = 0$$

en las ecuaciones (7.50) y (7.51) y obtenemos

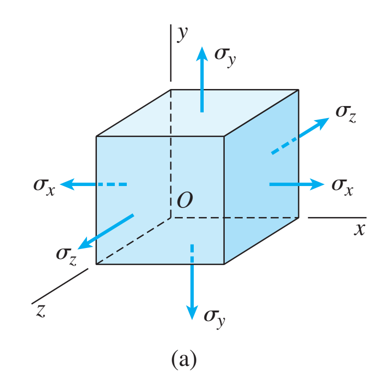
$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad u = \frac{G\gamma_{xy}^2}{2} \tag{g,h}$$

Estas ecuaciones concuerdan con las ecuaciones (3.55a) y (3.55b) de la sección 3.9.

7.6 ESFUERZO TRIAXIAL

Un elemento de material sometido a esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z que actúan en tres direcciones mutuamente perpendiculares se dice que está en un estado de **esfuerzo triaxial** (figura 7.27a). Como no hay esfuerzos cortantes sobre las caras x, y y z, los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z son los *esfuerzos principales* en el material.

Si se corta un plano inclinado paralelo al eje z a través del elemento (figura 7.27b), los únicos esfuerzos sobre la cara inclinada son el esfuerzo normal σ y el esfuerzo cortante τ, que actúan paralelos al plano xy. Estos esfuerzos son análogos a los esfuerzos σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ encontrados en nuestros análisis anteriores de esfuerzo plano (consulte, por ejemplo, la figura 7.2a). Dado que los esfuerzos σ y τ (figura 7.27b) se determinan a partir de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el plano xy, son independientes del esfuerzo normal σ_z. Por tanto, podemos utilizar las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano, así como el círculo de Mohr para esfuerzo plano, para determinar los esfuerzos σ y τ en esfuerzo triaxial. La misma conclusión general es válida para los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos inclinados cortados a través del elemento paralelos a los ejes x y y.



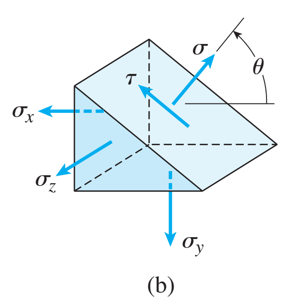


FIGURA 7.27 Elemento en esfuerzo triaxial.

Esfuerzos cortantes máximos

De nuestros análisis anteriores de esfuerzo plano, sabemos que los esfuerzos cortantes máximos ocurren en planos orientados a 45° con respecto a los planos principales. Por tanto, para un material en esfuerzo triaxial (figura 7.27a), los esfuerzos cortantes máximos ocurren sobre elementos orientados a ángulos de 45° con respecto a los ejes x, y y z. Por ejemplo, considere un elemento obtenido por una rotación de 45° con respecto al eje z. Los esfuerzos cortantes máximos positivo y negativo que actúan sobre este elemento son

$$(\tau_{\text{máx}})_z = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tag{7.52a}$$

De manera similar, podemos obtener los esfuerzos cortantes máximos siguientes mediante rotaciones de ángulos de 45° con respecto a los ejes x y y:

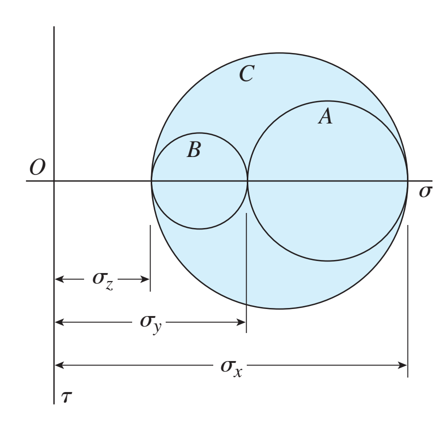


FIGURA 7.28 Círculos de Mohr para un elemento en estado triaxial.

$$(\tau_{\text{máx}})_x = \pm\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \qquad (\tau_{\text{máx}})_y = \pm\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \tag{7.25b,c}$$

El esfuerzo cortante máximo absoluto es el valor numéricamente mayor de los esfuerzos determinados mediante las ecuaciones (7.52a, b y c) y es igual a la mitad de la diferencia entre el algebraicamente mayor y el menor de los tres esfuerzos principales.

Los esfuerzos que actúan sobre elementos orientados a varios ángulos con respecto a los ejes x, y y z se pueden visualizar con la ayuda del **círculo de Mohr**. Para elementos orientados por rotaciones con respecto al eje z, el círculo correspondiente está identificado como A en la figura 7.28. Observe que este círculo está trazado para el caso en el cual $\sigma_x > \sigma_y$ y los dos esfuerzos son de tensión.

De manera similar, podemos trazar círculos B y C para elementos orientados por rotaciones con respecto a los ejes x y y, respectivamente. Los radios de los círculos representan los esfuerzos cortantes máximos dados por las ecuaciones (7.52a, b y c) y el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo mayor. Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzos cortantes máximos tienen magnitudes dadas por las abscisas de los centros de los círculos respectivos.

En el análisis anterior de esfuerzo triaxial sólo consideramos esfuerzos que actúan sobre planos obtenidos girando con respecto a los ejes x, y y z. Por tanto, cada plano considerado es paralelo a uno de los ejes. Por ejemplo, el plano inclinado de la figura 7.27b es paralelo al eje z y su normal es paralela al plano xy. Por supuesto, también podemos cortar a través del elemento en **direcciones inclinadas,** de manera que los planos inclinados resultantes estén oblicuos con respecto a los tres ejes coordenados. Los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre esos planos se pueden obtener mediante un análisis tridimensional más complicado. Sin embargo, los esfuerzos normales que actúan sobre planos inclinados tienen un valor intermedio entre los esfuerzos principales algebraicamente máximo y mínimo, y los esfuerzos cortantes sobre esos planos son menores (en valor absoluto) que el esfuerzo cortante máximo absoluto obtenido con las ecuaciones (7.52a, b y c).

Ley de Hooke para esfuerzo triaxial

Si el material sigue la ley de Hooke, podemos obtener las relaciones entre los esfuerzos normales y las deformaciones unitarias normales al emplear el mismo procedimiento que para el esfuerzo plano (consulte la sección 7.5). Las deformaciones unitarias producidas por los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z que actúan de manera independiente se superponen para obtener las deformaciones unitarias resultantes. Por tanto, con facilidad llegamos a las siguientes ecuaciones para las **deformaciones por esfuerzo triaxial**:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \tag{7.53a}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \tag{7.53b}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.53c}$$

En estas ecuaciones se utilizan las convenciones de signos estándares; es decir, el esfuerzo de tensión σ y la deformación unitaria de alargamiento ϵ, son positivas.

Las ecuaciones anteriores se pueden resolver de manera simultánea para los **esfuerzos en términos de las deformaciones unitarias:**

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\left[(1 - \nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)\right] \tag{7.54a}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\left[(1 - \nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)\right] \tag{7.54b}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\left[(1 - \nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)\right] \tag{7.54c}$$

Las ecuaciones (7.53) y (7.54) representan la **ley de Hooke para esfuerzo triaxial.**

En el caso especial de **esfuerzo biaxial** (figura 7.11b), podemos obtener las ecuaciones de la ley de Hooke al sustituir $\sigma_z = 0$ en las ecuaciones anteriores. Las ecuaciones resultantes se reducen a las ecuaciones (7.39) y (7.40) de la sección 7.5.

Cambio de volumen unitario

El cambio de volumen unitario (o *dilatación*) para un elemento en esfuerzo triaxial se obtiene de la misma manera que para esfuerzo plano (consulte la sección 7.5). Si el elemento está sometido a las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z, podemos emplear la ecuación (7.46) para el cambio de volumen unitario:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{7.55}$$

Esta ecuación es válida para cualquier material siempre que las deformaciones unitarias sean pequeñas.

Si la ley de Hooke es válida para el material, podemos sustituir las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z de las ecuaciones (7.53a, b y c) y obtener

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{7.56}$$

Las ecuaciones (7.55) y (7.56) dan el cambio de volumen unitario en esfuerzo triaxial en términos de las deformaciones unitarias y los esfuerzos, respectivamente.

Densidad de energía de deformación

La densidad de energía de deformación para un elemento en esfuerzo triaxial se obtiene mediante el mismo método empleado para esfuerzo plano. Cuando los esfuerzos σ_x y σ_y actúan solos (esfuerzo biaxial), la densidad de energía de deformación (de la ecuación 7.49 al eliminar el término de cortante) es

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y)$$

Cuando el elemento está en esfuerzo triaxial y se somete a esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z, la expresión para la densidad de la energía de deformación se convierte en

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z) \quad (7.57a)$$

Al sustituir las deformaciones unitarias de las ecuaciones (7.53a, b y c), obtenemos la densidad de energía de deformación en términos de los esfuerzos:

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \quad (7.57b)$$

De manera similar, pero al emplear las ecuaciones (7.54a, b y c), podemos expresar la densidad de la energía de deformación en términos de las deformaciones unitarias:

$$u = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + 2\nu(\epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_z + \epsilon_y\epsilon_z)] \quad (7.57c)$$

Al realizar cálculos con estas expresiones, debemos estar seguros de sustituir los esfuerzos y las deformaciones unitarias con sus signos algebraicos apropiados.

Esfuerzo esférico

Un tipo especial de esfuerzo triaxial, denominado **esfuerzo esférico**, ocurre cuando los tres esfuerzos normales son iguales (figura 7.29):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0 \quad (7.58)$$

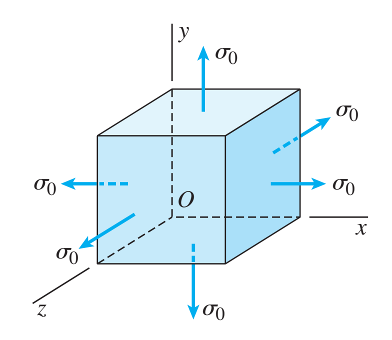


FIGURA 7.29 Elemento en esfuerzo esférico.

En estas condiciones de esfuerzo, *cualquier* plano cortado a través del elemento estará sometido al mismo esfuerzo normal σ_0 y estará libre de esfuerzo cortante. Por tanto, tenemos esfuerzos normales iguales en cada dirección y sin esfuerzos cortantes en ninguna parte del material. Cada plano es un plano principal y los tres círculos de Mohr que se muestran en la figura 7.28 se reducen a un solo punto.

Las deformaciones unitarias normales en esfuerzo esférico también son las mismas en todas las direcciones, siempre que el material sea homogéneo e isotrópico. Si es aplicable la ley de Hooke, las deformaciones unitarias normales son

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}(1 - 2\nu) \quad (7.59)$$

como resulta de las ecuaciones (7.53a, b y c).

Como no hay deformaciones unitarias por cortante, un elemento con forma de cubo cambia de tamaño pero permanece siendo un cubo. En general, cualquier cuerpo sometido a esfuerzo esférico mantendrá sus proporciones relativas pero expandirá o contraerá su volumen dependiendo de si σ_0 es de tensión o de compresión.

La expresión para el cambio de volumen unitario se puede obtener con la ecuación (7.55) al sustituir las deformaciones unitarias de la ecuación (7.59). El resultado es

$$e = 3\epsilon_0 = \frac{3\sigma_0(1 - 2\nu)}{E} \quad (7.60)$$

Es usual que la ecuación (7.60) se exprese en forma más compacta al sustituir una cantidad nueva K denominada **módulo de elasticidad volumétrico** o **módulo de elasticidad de volumen,** que se define de la siguiente manera:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (7.61)$$

Con esta notación, la expresión para el cambio de volumen unitario se convierte en

$$e = \frac{\sigma_0}{K} \qquad (7.62)$$

y el módulo volumétrico es

$$K = \frac{\sigma_0}{e} \qquad (7.63)$$

Entonces, el módulo volumétrico se puede definir como la razón entre el esfuerzo volumétrico y la deformación unitaria volumétrica, que es análoga a la definición del módulo E en esfuerzo uniaxial. Observe que las fórmulas anteriores para e y K se basan en las suposiciones de que *las deformaciones unitarias son pequeñas y la ley de Hooke es válida para el material*.

De la ecuación (7.61) para K, observamos que si la relación de Poisson ν es igual a 1/3, los módulos K y E son numéricamente iguales. Si $\nu = 0$, entonces K tiene el valor $E/3$ y si $\nu = 0.5$, K se vuelve infinito, lo que corresponde a un material rígido que no tiene cambio de volumen (es decir, el material es incompresible).

Las fórmulas anteriores para esfuerzo esférico se dedujeron para un elemento sometido a tensión uniforme en todas las direcciones, pero, por supuesto, las fórmulas también se aplican a un elemento en compresión uniforme. En el caso de compresión uniforme, los esfuerzos y las deformaciones unitarias tienen signos negativos. La compresión uniforme ocurre cuando el material está sometido a presión uniforme en todas las direcciones; por ejemplo, un objeto sumergido en agua o una roca a gran profundidad en el suelo. Este estado de esfuerzo con frecuencia se denomina **esfuerzo hidrostático.**

Si bien la compresión uniforme es relativamente común, un estado de tensión uniforme es difícil de lograr, pero se puede alcanzar calentando uniformemente de manera repentina la superficie exterior de una esfera sólida metálica, de manera que las capas exteriores estén a una temperatura mayor que el interior. La tendencia de las capas exteriores a dilatarse produce tensión uniforme en todas las direcciones en el centro de la esfera.

7.7 DEFORMACIÓN UNITARIA PLANA

Las deformaciones unitarias en un punto en una estructura cargada varían de acuerdo con la orientación de los ejes, de manera similar a la de los esfuerzos. En esta sección deduciremos las ecuaciones de transformación que relacionan las deformaciones unitarias en direcciones inclinadas con respecto a las deformaciones unitarias en las direcciones de referencia. Estas ecuaciones de transformación se usan ampliamente en investigaciones de laboratorio y de campo que comprenden mediciones de deformaciones unitarias.

Las deformaciones unitarias suelen medirse con *deformímetros*; por ejemplo, éstos se colocan en aeronaves para medir el comportamiento estructural durante el vuelo y en edificios para medir los efectos de los sismos. Dado que cada deformímetro mide la deformación unitaria en una dirección particular, por lo general, es necesario calcular las deformaciones unitarias en otras direcciones mediante las ecuaciones de transformación.

Deformación unitaria plana contra esfuerzo plano

Iniciemos explicando qué significa deformación unitaria plana y cómo se relaciona con el esfuerzo plano. Considere un elemento pequeño de material que tiene lados con longitudes a, b y c en las direcciones x, y y z, respectivamente (figura 7.30a). Si las únicas deformaciones son en el plano xy, entonces pueden existir tres componentes de la deformación unitaria: la deformación unitaria normal ϵ_x en la dirección x (figura 7.30b), la deformación unitaria ϵ_y en la dirección y (figura 7.30c) y la deformación unitaria por cortante γ_{xy} (figura 7.30d). Un elemento de material sometido a estas deformaciones unitarias (y *sólo* a éstas) se dice que está en un estado de **deformación unitaria plana**.

Se deduce que un elemento en deformación unitaria plana no tiene deformación unitaria normal ϵ_z en la dirección z y no tiene deformaciones unitarias γ_{xz} y γ_{yz} en los planos xz y yz, respectivamente. Por tanto, la deformación unitaria plana se define mediante las condiciones siguientes:

$$\epsilon_z = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0 \tag{7.64a,b,c}$$

Las deformaciones unitarias restantes (ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}) pueden tener valores diferentes de cero.

De la definición anterior, observamos que la deformación unitaria plana ocurre cuando las caras anterior y posterior de un elemento de material (figura 7.30a) están completamente restringidas contra desplazamientos en la dirección z —una condición idealizada que es poco común que se alcance en estructuras reales—. Sin embargo, esto no quiere decir que las ecuaciones de transformación de deformación unitaria plana no sean útiles. Resulta que son extremadamente útiles debido a que también se aplican a las deformaciones unitarias en esfuerzo plano, como se explica en los siguientes párrafos.

La definición de deformación unitaria plana (ecuaciones 7.64a, b y c) es análoga a la de esfuerzo plano. En esfuerzo plano, los siguientes esfuerzos deben ser cero:

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0 \tag{7.65a,b,c}$$

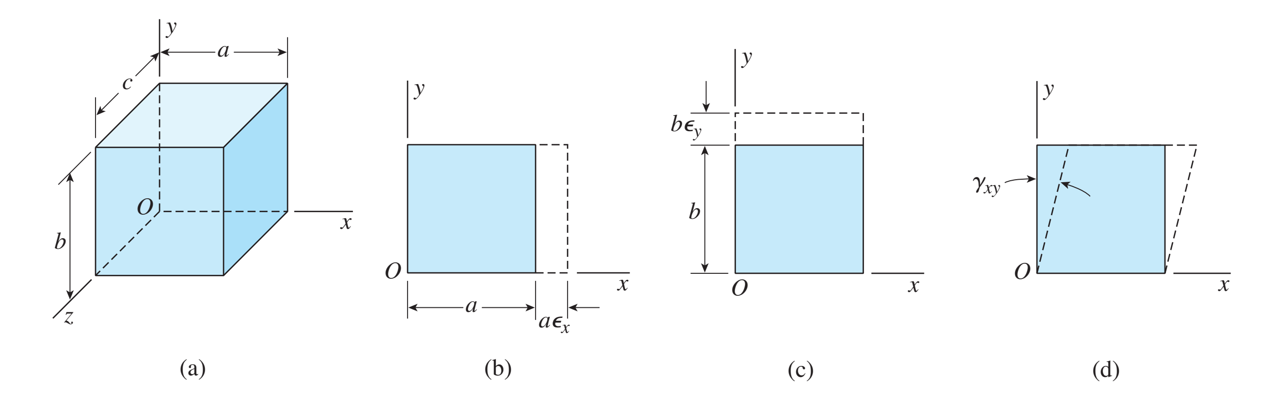


FIGURA 7.30 Componentes de deformación unitaria ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} en el plano xy (deformación unitaria plana).

en tanto que los esfuerzos restantes (σ_x, σ_y y τ_{xy}) pueden tener valores diferentes de cero. Una comparación de los esfuerzos y las deformaciones unitarias en esfuerzo plano y deformación unitaria plana se da en la figura 7.31.

No debe inferirse de las similitudes en las definiciones de esfuerzo plano y deformación unitaria plana que las dos ocurren de manera simultánea. En general, un elemento en esfuerzo plano experimentará una deformación unitaria en la dirección z (figura 7.31); de manera que *no* es una deformación unitaria plana. Además, un elemento en deformación unitaria plana en general tendrá esfuerzos σ_z que actúan sobre él debido al requerimiento de $\epsilon_z = 0$; por tanto, *no* es un esfuerzo plano. Entonces, en condiciones ordinarias el esfuerzo plano y la deformación unitaria plana no ocurren simultáneamente.

Se tiene una excepción cuando un elemento en esfuerzo plano se somete a esfuerzos normales iguales y opuestos (es decir, cuando $\sigma_x = -\sigma_y$) y la ley de Hooke es válida para el material. En este caso especial no hay deformación unitaria normal en la dirección z, como se demuestra con la ecuación (7.34c), y por lo tanto el elemento está en un estado de deformación unitaria plana así como en esfuerzo plano. Otro caso especial, si bien hipotético, es cuando un material tiene una relación de Poisson igual a cero ($\nu = 0$); entonces cada elemento de esfuerzo plano también está en deformación unitaria plana debido a que $\epsilon_z = 0$ (ecuación 7.34c).*

	Esfuerzo plano	**Deformación unitaria plana**
	y, σ_y, τ_{xy}, σ_x, O, x, z	y, ϵ_y, γ_{xy}, ϵ_x, O, x, z
Esfuerzos	$\sigma_z = 0$ $\tau_{xz} = 0$ $\tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y y τ_{xy} pueden tener valores diferentes de cero	$\tau_{xz} = 0$ $\tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y, σ_z y τ_{xy} pueden tener valores diferentes de cero
Deformaciones unitarias	$\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z y γ_{xy} pueden tener valores diferentes de cero	$\epsilon_z = 0$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} pueden tener valores diferentes de cero

FIGURA 7.31 Comparación de esfuerzo plano con deformación unitaria plana.

*En el análisis de este capítulo hemos omitido los efectos de cambios de temperatura y deformaciones previas, que producen deformaciones unitarias adicionales que pueden modificar algunas de nuestras conclusiones.

Aplicación de las ecuaciones de transformación

Las ecuaciones de transformación de esfuerzo deducidas para esfuerzo plano en el plano xy (ecuaciones 7.4a y 7.4b) son válidas aun cuando esté presente un esfuerzo normal σ_z. La explicación se basa en el hecho que el esfuerzo σ_z no entra en la ecuaciones de equilibrio empleadas al deducir las ecuaciones (7.4a) y (7.4b). Por tanto, *las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano también se pueden emplear para los esfuerzos en deformación unitaria plana*.

Existe una situación análoga para deformación unitaria plana. Aunque deduciremos las ecuaciones de transformación de deformación unitaria para el caso de deformación unitaria plana en el plano xy, las ecuaciones son válidas aun cuando exista una deformación unitaria ϵ_z. La razón es lo suficientemente simple: la deformación unitaria ϵ_z no afecta las relaciones geométricas utilizadas en las deducciones. Por tanto, *las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana también se pueden emplear para las deformaciones unitarias en esfuerzo plano*.

Por último, debemos recordar que las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano se dedujeron únicamente del equilibrio y por tanto son válidas para cualquier material, ya sea linealmente elástico o no. La misma conclusión se aplica a las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana, dado que se dedujeron únicamente de la geometría *son independientes de las propiedades del material*.

Ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana

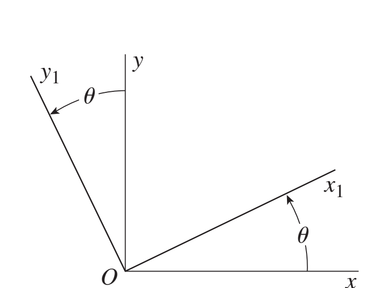


FIGURA 7.32 Ejes x_1 y y_1 girados un ángulo θ desde los ejes xy.

En la deducción de las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana emplearemos los ejes coordenados que se muestran en la figura 7.32. Supondremos que se conocen las deformaciones unitarias normales ϵ_x y ϵ_y, y la deformación unitaria por cortante γ_{xy} asociadas con los ejes xy (figura 7.30). Los objetivos de nuestro análisis son determinar la deformación unitaria normal ϵ_{x_1} y la deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ asociadas con los ejes x_1y_1, que están girados en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ desde los ejes xy. (No es necesario deducir una ecuación separada para las deformaciones unitarias normales ϵ_{y_1} debido a que se puede obtener a partir de la ecuación para ϵ_{x_1} sustituyendo θ con $\theta + 90°$.)

Deformación unitaria normal ϵ_{x_1}. Para determinar la deformación unitaria normal ϵ_{x_1} en la dirección x_1, consideramos un elemento pequeño de material seleccionado de manera que el eje x_1 esté a lo largo de una diagonal de la cara z del elemento y los ejes x y y estén a lo largo de los lados del elemento (figura 7.33a). En la figura se muestra una vista bidimensional del elemento, con el eje z hacia el lector. Por supuesto, el elemento en realidad es tridimensional, como en la figura 7.30a, con una dimensión en la dirección z.

Considere primero la deformación unitaria ϵ_x en la dirección x (figura 7.33a). Esta deformación unitaria normal produce un alargamiento en la dirección x igual a $\epsilon_x dx$, donde dx es la longitud del lado correspondiente del elemento. Como resultado de este alargamiento, la diagonal del elemento aumenta su longitud en una cantidad

$$\epsilon_x dx \cos\theta \qquad \text{(a)}$$

como se muestra en la figura 7.33a.

A continuación considere la deformación unitaria ϵ_y en la dirección y (figura 7.33b). Esta deformación unitaria produce un alargamiento en la dirección y igual a $\epsilon_y dy$, donde dy es la longitud del lado del elemento paralela al eje y. Como resultado de este alargamiento, la diagonal del elemento aumenta su longitud en una cantidad

$$\epsilon_y \, dy \operatorname{sen} \theta \tag{b}$$

que se muestra en la figura 7.33b.

Por último, considere la deformación unitaria por cortante γ_{xy} en el plano xy (figura 7.33c). Esta deformación unitaria produce una distorsión del elemento de manera que el ángulo en la esquina inferior izquierda del elemento disminuye en una cantidad igual a la deformación unitaria por cortante. En consecuencia, la cara superior del elemento se mueve hacia la derecha (con respecto a la cara inferior) en una cantidad $\gamma_{xy}dy$. Esta deformación resulta en un aumento en la longitud de la diagonal igual a

$$\gamma_{xy} \, dy \cos \theta \tag{c}$$

como se muestra en la figura 7.33c.

El incremento total Δd en la longitud de la diagonal es la suma de las tres ecuaciones anteriores; por tanto,

$$\Delta d = \epsilon_x \, dx \cos \theta + \epsilon_y \, dy \operatorname{sen} \theta + \gamma_{xy} \, dy \cos \theta \tag{d}$$

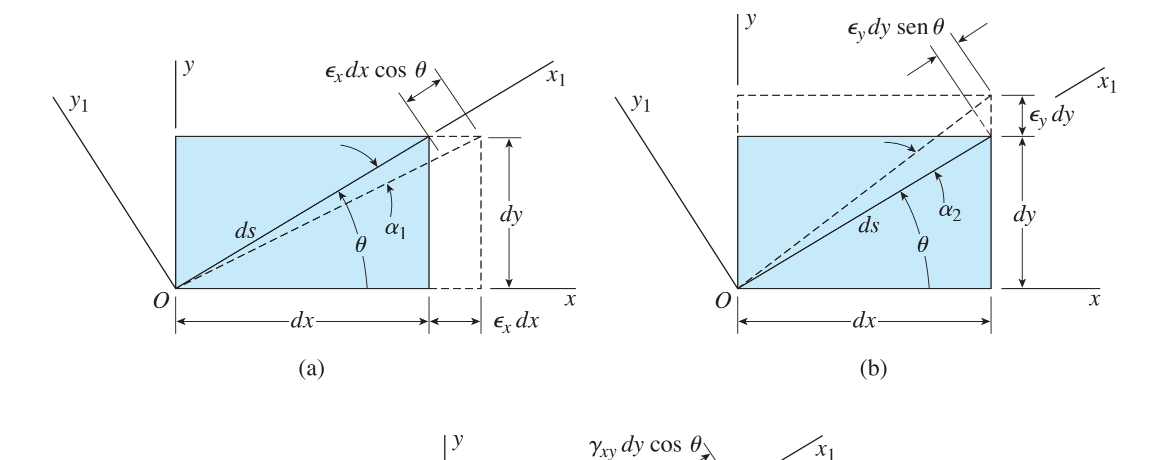


FIGURA 7.33 Deformaciones de un elemento en deformación unitaria plana debidas a (a) deformación unitaria normal ϵ_x, (b) deformación unitaria normal ϵ_y y (c) deformación unitaria por cortante γ_{xy}.

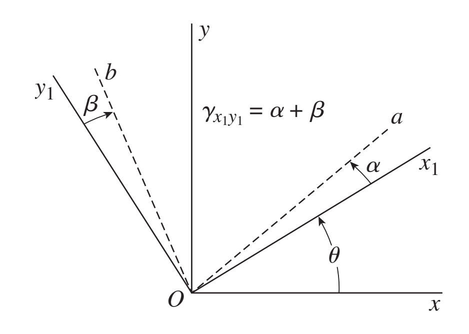


FIGURA 7.34 Deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ asociada con los ejes x_1y_1.

La deformación unitaria normal ϵ_{x_1} en la dirección x_1 es igual a este incremento de longitud dividido entre la longitud inicial ds de la diagonal:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\Delta d}{ds} = \epsilon_x \frac{dx}{ds}\cos\theta + \epsilon_y \frac{dy}{ds}\operatorname{sen}\theta + \gamma_{xy}\frac{dy}{ds}\cos\theta \qquad \text{(e)}$$

Dado que $dx/ds = \cos\theta$ y $dy/ds = \operatorname{sen}\theta$, obtenemos la ecuación siguiente para la **deformación unitaria normal:**

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad (7.66)$$

Por tanto, obtuvimos una expresión para la deformación unitaria normal en la dirección x_1 en términos de las deformaciones ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes xy.

Como ya se mencionó, la deformación unitaria normal ϵ_{y_1} en la dirección y_1 se obtiene con la ecuación anterior sustituyendo θ con $\theta + 90°$.

Deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$. Ahora recurrimos a la deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ relacionada con los ejes x_1y_1. Esta deformación unitaria es igual al decremento en el ángulo entre las líneas en el material que inicialmente estaban a lo largo de los ejes x_1 y y_1. Para aclarar esta idea, considere la figura 7.34, que muestra los ejes xy y x_1y_1, con el ángulo θ entre ellos. Sea Oa una línea en el material que *inicialmente* estaba a lo largo del eje x_1 (es decir, a lo largo de la diagonal del elemento en la figura 7.33). Las alteraciones en la forma causadas por las deformaciones ϵ_y, ϵ_y y γ_{xy} (figura 7.33) causan que la línea Oa gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo α desde el eje x_1 hasta la posición que se muestra en la figura 7.34. De manera similar, la línea Ob estaba originalmente a lo largo del eje y_1, pero debido a las deformaciones gira un ángulo β en el sentido de las manecillas del reloj. La deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ es el decremento en el ángulo entre las dos líneas que originalmente estaban en un ángulo recto; por tanto,

$$\gamma_{x_1y_1} = \alpha + \beta \qquad (7.67)$$

Por tanto, a fin de encontrar la deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ debemos determinar los ángulos α y β.

El ángulo α puede encontrarse a partir de las deformaciones representadas en la figura 7.33 como sigue. La deformación unitaria ϵ_x (figura 7.33a) produce una rotación en el sentido de las manecillas del reloj de la diagonal del elemento. Denotemos este ángulo de rotación con α_1, que es igual a la distancia $\epsilon_x dx$ sen θ dividida entre la longitud ds de la diagonal:

$$\alpha_1 = \epsilon_x \frac{dx}{ds}\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(f)}$$

De manera similar, la deformación unitaria ϵ_x produce una rotación de la diagonal en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, un ángulo α_2 (figura 7.33b). Este ángulo es igual a la distancia $\epsilon_y dy$ cos θ dividida entre ds:

$$\alpha_2 = \epsilon_y \frac{dy}{ds} \cos\theta \qquad \text{(g)}$$

Por último, la deformación unitaria γ_{xy} produce una rotación en el sentido de las manecillas del reloj de un ángulo α_3 (figura 7.33c) igual a la distancia $\gamma_{xy}\,dy$ sen θ dividida entre ds:

$$\alpha_3 = \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(h)}$$

Por tanto, la rotación resultante en sentido contrario al de las manecillas del reloj de la diagonal (figura 7.33), igual al ángulo α que se muestra en la figura 7.34, es

$$\begin{aligned}\alpha &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ &= -\epsilon_x \frac{dx}{ds} \operatorname{sen}\theta + \epsilon_y \frac{dy}{ds} \cos\theta - \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

Observando de nuevo que $dx/ds = \cos\theta$ y $dy/ds = \operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$\alpha = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \gamma_{xy}\operatorname{sen}^2\theta \qquad \text{(7.68)}$$

La rotación de la línea Ob (figura 7-34), que inicialmente estaba a 90° con respecto a la línea Oa, puede determinarse al sustituir θ con $\theta + 90°$ en la expresión para α. La expresión que resulta es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando es positiva (debido a que α va en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando es positiva), por tanto es igual al negativo del ángulo β (debido a que β es positivo cuando va en el sentido de las manecillas del reloj). Por tanto,

$$\begin{aligned}\beta &= (\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}(\theta + 90°)\cos(\theta + 90°) + \gamma_{xy}\operatorname{sen}^2(\theta + 90°) \\ &= -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos^2\theta \end{aligned} \qquad \text{(7.69)}$$

Al sumar α y β se obtiene la deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ (consulte la ecuación 7.67):

$$\gamma_{x_1y_1} = -2(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad \text{(j)}$$

Para poner la ecuación en una forma más útil, dividimos cada término entre 2:

$$\frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad \text{(7.70)}$$

Ahora tenemos una expresión para la **deformación unitaria por cortante** $\gamma_{x_1y_1}$ asociada con los ejes x_1y_1 en términos de las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} relacionadas con los ejes xy.

Ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana. Las ecuaciones para deformación unitaria plana (ecuaciones 7.66 y 7.70) se pueden expresar en términos del ángulo 2θ utilizando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

TABLA 7.1 VARIABLES CORRESPONDIENTES EN LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN PARA ESFUERZO PLANO (ECUACIONES 7.4a Y b) Y DEFORMACIÓN UNITARIA PLANA (ECUACIONES 7.71a Y b)

Esfuerzos	Deformaciones unitarias
σ_x	ϵ_x
σ_y	ϵ_y
τ_{xy}	$\gamma_{xy}/2$
σ_{x_1}	ϵ_{x_1}
$\tau_{x_1 y_1}$	$\gamma_{x_1 y_1}/2$

$$\text{sen } \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta$$

Entonces, las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana se convierten en

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen } 2\theta \qquad (7.71a)$$

y

$$\frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \text{sen } 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \qquad (7.71b)$$

Estas ecuaciones son las contrapartes de las ecuaciones (7.4a) y (7.4b) para esfuerzo plano.

Al comparar los dos conjuntos de ecuaciones, observe que ϵ_{x_1} corresponde a σ_{x_1}, $\gamma_{x_1 y_1}/2$ corresponde a $\tau_{x_1 y_1}$, ϵ_x corresponde a σ_x, ϵ_y corresponde a σ_y y $\gamma_{x_1 y_1}/2$ corresponde a τ_{xy}. Las variables correspondientes en los dos conjuntos de ecuaciones de transformación se dan en la tabla 7.1.

La analogía entre las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano y las de deformación unitaria plana muestra que todas las observaciones hechas en las secciones 7.2, 7.3 y 7.4 relativas al esfuerzo plano, esfuerzos principales, esfuerzos cortantes máximos y círculo de Mohr tienen sus contrapartes en la deformación unitaria plana. Por ejemplo, la suma de las deformaciones unitarias normales en direcciones perpendiculares es una constante (compárela con la ecuación 7.6):

$$\epsilon_{x_1} + \epsilon_{y_1} = \epsilon_x + \epsilon_y \qquad (7.72)$$

Esta cantidad se puede verificar fácilmente al sustituir las expresiones para ϵ_{x_1} (de la ecuación 7.71a) y ϵ_{y_1} (de la ecuación 7.71a con θ reemplazada con $\theta + 90°$).

Deformaciones unitarias principales

Las deformaciones unitarias principales existen sobre planos perpendiculares con los ángulos principales θ_p calculados con la siguiente ecuación (compárela con la ecuación 7.11):

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \qquad (7.73)$$

Las deformaciones unitarias principales se calculan con la ecuación

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (7.74)$$

que corresponde a la ecuación (7.17) para los esfuerzos principales. Las dos deformaciones unitarias principales (en el plano *xy*) se pueden correlacionar con las dos direcciones principales empleando la técnica descrita en la sección 7.3 para los esfuerzos principales. (Esta técnica se ilustra más adelante en el ejemplo 7.7). Por último, observe que en deformación unitaria plana la tercera deformación unitaria principal es $\epsilon_z = 0$. Además, las deformaciones unitarias por cortante son cero sobre los planos principales.

Deformaciones unitarias por cortante máximas

Las deformaciones unitarias por cortante máximas en el plano *xy* están asociadas con ejes a 45° con respecto a las direcciones de las deformaciones unitarias principales. La deformación unitaria por cortante máxima (en el plano *xy*) está dada por la siguiente ecuación (compárela con la ecuación 7.25):

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7.75}$$

La deformación unitaria por cortante mínima tiene la misma magnitud pero es negativa. En las direcciones de deformación unitaria por cortante máxima, las deformaciones unitarias normales son

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \tag{7.76}$$

que es análoga a la ecuación (7.27) para esfuerzos. Las deformaciones por cortante máximas fuera del plano, es decir, las deformaciones unitarias por cortante en los planos *xz* y *yz*, se pueden obtener de ecuaciones análogas a la ecuación (7.75).

Un elemento en esfuerzo plano que está orientado con respecto a las direcciones principales de esfuerzo (consulte la figura 7.13b) no tiene esfuerzos cortantes que actúen sobre sus caras. Por tanto, la deformación unitaria por cortante $\gamma_{x_1y_1}$ para este elemento es cero. Entonces se deduce que las deformaciones unitarias normales en este elemento son las principales. Por tanto, en un punto dado en un cuerpo sometido a esfuerzos, *las deformaciones unitarias principales y los esfuerzos principales ocurren en la misma dirección*.

Círculo de Mohr para deformación unitaria normal

El círculo de Mohr para deformación unitaria normal se elabora de la misma manera que en el caso del esfuerzo plano, como se ilustra en la figura 7.35. La deformación unitaria normal ϵ_{x_1} se traza como la abscisa (positiva hacia la derecha) y la mitad de la deformación unitaria por cortante ($\gamma_{x_1y_1}/2$) como la ordenada (positiva hacia abajo). El centro *C* del círculo tiene una abscisa igual a ϵ_{prom} (ecuación 7.76).

El punto *A*, que representa las deformaciones unitarias asociadas con la dirección *x* ($\theta = 0$), tiene coordenadas ϵ_x y $\gamma_{xy}/2$. El punto *B*, en el extremo opuesto de un diámetro desde *A*, tiene coordenadas ϵ_y y $-\gamma_{xy}/2$, que representan las deformaciones unitarias asociadas con un par de ejes girados un ángulo $\theta = 90°$.

Las deformaciones relacionadas con los ejes girados un ángulo θ están dadas por el punto D, que se ubica en el círculo midiendo un ángulo 2θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el radio CA. Las deformaciones unitarias principales están representadas por los puntos P_1 y P_2, y las deformaciones unitarias por cortante máximas por los puntos S_1 y S_2. Todas estas deformaciones unitarias se pueden determinar a partir de la geometría del círculo o bien con las ecuaciones de transformación.

Mediciones de deformación unitaria

Un **deformímetro** de resistencia eléctrica es un dispositivo para medir deformaciones unitarias normales en la superficie de un objeto sometido a esfuerzos. Los deformímetros son muy pequeños, con longitudes comunes que varían de un octavo a media pulgada. Los deformímetros se adhieren firmemente a la superficie del objeto de modo que cambian de longitud en proporción con las deformaciones unitarias del propio objeto.

Cada deformímetro consiste en una rejilla metálica que se alarga o acorta cuando el objeto se somete a esfuerzos en el punto donde está colocado el deformímetro. La rejilla es equivalente a un alambre continuo que va y viene de un extremo de la rejilla al otro, con lo cual incrementa efectivamente su longitud (figura 7.36). La resistencia eléctrica del alambre se altera cuando éste se alarga o se acorta; luego, este cambio en la resistencia se convierte en una medición de deformación unitaria. Los deformímetros son mucho muy sensitivos y pueden medir deformaciones unitarias tan pequeñas como 1×10^{-6}.

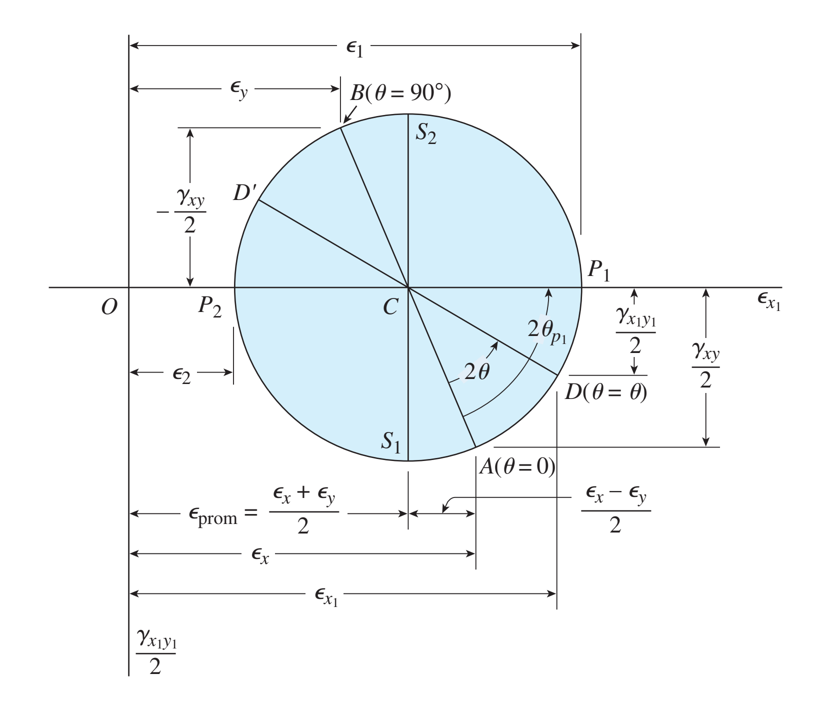


FIGURA 7.35 Círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

Dado que cada deformímetro mide la deformación unitaria normal sólo en una dirección y puesto que es usual que se conozcan las direcciones de los esfuerzos principales, es necesario emplear una combinación de tres deformímetros, cada uno para medir la deformación unitaria en una dirección diferente. A partir de las tres mediciones es posible calcular las deformaciones unitarias en cualquier dirección, como se ilustra en el ejemplo 7.8.

Un grupo de tres deformímetros en un patrón particular se denomina **roseta de deformaciones.** Puesto que está montada sobre la superficie del cuerpo, donde el material está en esfuerzo plano, podemos emplear las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana para calcular las deformaciones unitarias en varias direcciones. (Como se explicó antes en esta sección, las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana también se pueden usar para las deformaciones unitarias en esfuerzo plano.)

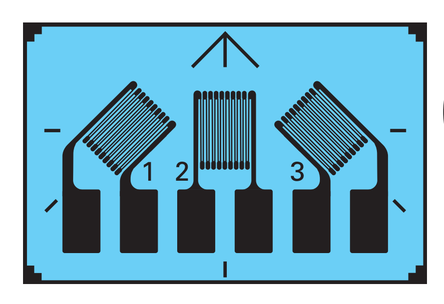
Cálculo de los esfuerzos a partir de las deformaciones unitarias

Las ecuaciones de deformación unitaria presentadas en esta sección se deducen únicamente de la geometría, como ya se destacó. Por tanto, se aplican a cualquier material, ya sea lineal o no lineal, elástico o inelástico. Sin embargo, si se quieren determinar los esfuerzos a partir de deformaciones unitarias, se deben tomar en cuenta las propiedades del material.

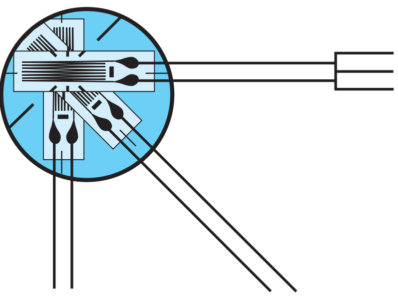
Si el material sigue la ley de Hooke, podemos encontrar los esfuerzos empleando las ecuaciones apropiadas de esfuerzo-deformación unitaria ya sea de la sección 7.5 (para esfuerzo plano) o bien de la sección 7.6 (para esfuerzo triaxial).

Como primer ejemplo, suponga que el material está en esfuerzo plano y que conocemos las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, quizá de mediciones con deformímetros. Entonces podemos utilizar las ecuaciones esfuerzo-deformación unitaria para esfuerzo plano (ecuaciones 7.36 y 7.37) para obtener los esfuerzos en el material.

Ahora considere un segundo ejemplo. Suponga que determinamos las tres deformaciones unitarias principales ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 para un elemento de material (si el elemento está en deformación unitaria normal, entonces $\epsilon_3 = 0$). Al conocer estas deformaciones unitarias podemos determinar los esfuerzos principales empleando la ley de Hooke para esfuerzo triaxial (consulte las ecuaciones 7.54a, b y c). Una vez conocidos los esfuerzos principales, podemos encontrar los esfuerzos sobre planos inclinados empleando las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (consulte los análisis al inicio de la sección 7.6).



(a) Roseta de deformímetros con tres elementos a 45°



(b) Rosetas de deformímetros con tres elementos precableada

FIGURA 7.36 Tres deformímetros de resistencia eléctrica configurados como una roseta de deformaciones a 45° (vista amplificada).

Ejemplo 7.7

Un elemento de material en deformación unitaria plana experimenta las deformaciones unitarias siguientes:

$$\epsilon_x = 340 \times 10^{-6} \qquad \epsilon_y = 110 \times 10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6}$$

Estas deformaciones unitarias se muestran muy exageradas en la figura 7.37a, que muestra la deformación de un elemento con dimensiones unitarias. Dado que los bordes del elemento tienen longitudes unitarias, los cambios en las dimensiones lineales tienen las mismas magnitudes que las deformaciones unitarias normales ϵ_x y ϵ_y. La deformación unitaria por cortante γ_{xy} es el decremento en el ángulo en la esquina inferior izquierda del elemento.

Determine las cantidades siguientes: (a) las deformaciones unitarias para un elemento orientado a un ángulo $\theta = 30°$, (b) las deformaciones unitarias principales y (c) las deformaciones unitarias por cortante máximas. (Considere sólo las deformaciones unitarias en el plano y muestre todos los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.)

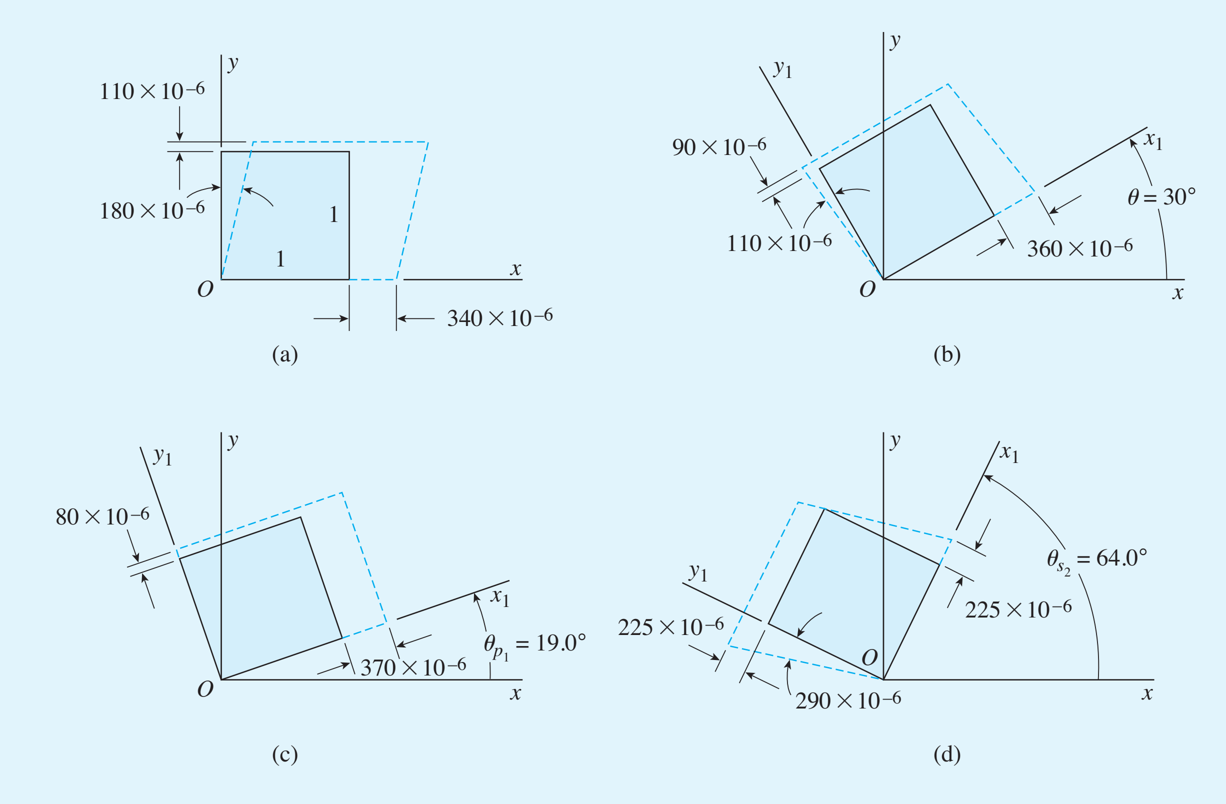


FIGURA 7.37 Ejemplo 7.7. Elemento de material en deformación unitaria plana: (a) elemento orientado con respecto a los ejes *x* y *y*, (b) elemento orientado a un ángulo $\theta = 30°$, (c) deformaciones unitarias principales. (d) deformaciones unitarias por cortante máximas (*Nota:* los bordes de los elementos tienen longitudes unitarias.)

continúa

Solución

(a) *Elemento orientado a un ángulo* $\theta = 30°$. Las deformaciones para un elemento orientado a un ángulo θ con respecto al eje x se pueden determinar con las ecuaciones de transformación (7.71a y 7.71b). Como punto preliminar, hacemos los siguientes cálculos:

$$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{(340 + 110)10^{-6}}{2} = 225 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} = \frac{(340 - 110)10^{-6}}{2} = 115 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = 90 \times 10^{-6}$$

Ahora sustituimos en las ecuaciones (7.71a) y (7.71b), y obtenemos

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$= (225 \times 10^{-6}) + (115 \times 10^{-6})(\cos 60°) + (90 \times 10^{-6})(\operatorname{sen} 60°)$$

$$= 360 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$= -(115 \times 10^{-6})(\operatorname{sen} 60°) + (90 \times 10^{-6})(\cos 60°)$$

$$= -55 \times 10^{-6}$$

Por tanto, la deformación unitaria por cortante es

$$\gamma_{x_1 y_1} = -110 \times 10^{-6}$$

La deformación unitaria ϵ_{x_1} se puede obtener con la ecuación (7.72), como se indica:

$$\epsilon_{y_1} = \epsilon_x + \epsilon_y - \epsilon_{x_1} = (340 + 110 - 360)10^{-6} = 90 \times 10^{-6}$$

Las deformaciones unitarias ϵ_{x_1}, ϵ_{x_2} y $\gamma_{x_1 y_1}$ se muestran en la figura 7.37b para un elemento orientado a $\theta = 30°$. Observe que el ángulo en la esquina inferior izquierda del elemento aumenta debido a que $\gamma_{x_1 y_1}$ es negativa.

(b) *Deformaciones unitarias principales*. Las deformaciones unitarias principales se determinan con facilidad a partir de la ecuación (7.74), como se muestra:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= 225 \times 10^{-6} \pm \sqrt{(115 \times 10^{-6})^2 + (90 \times 10^{-6})^2}$$

$$= 225 \times 10^{-6} \pm 146 \times 10^{-6}$$

Por tanto, las deformaciones unitarias principales son

$$\epsilon_1 = 370 \times 10^{-6} \qquad \epsilon_2 = 80 \times 10^{-6}$$

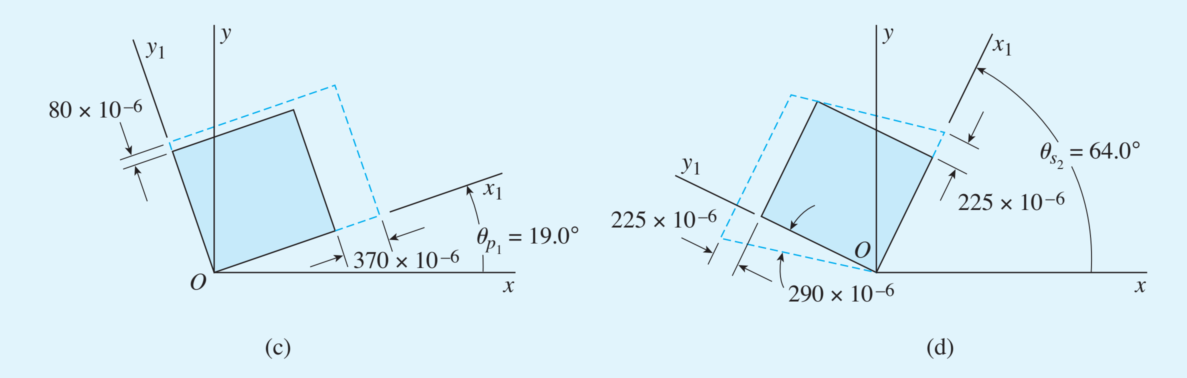


FIGURA 7.37c y d (Repetida.)

en donde ϵ_1 denota la deformación unitaria principal algebraicamente mayor y ϵ_2 denota la deformación unitaria algebraicamente menor. (Recuerde que en este ejemplo estamos considerando sólo deformaciones unitarias en el plano.)

Los ángulos con respecto a las direcciones principales se pueden obtener con la ecuación (7.73):

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{180}{340 - 110} = 0.7826$$

Los valores de $2\theta_p$ entre 0 y 360° son 38.0° y 218.0° y, por tanto, los ángulos con respecto a las direcciones principales son

$$\theta_p = 19.0° \text{ y } 109.0°$$

Para determinar el valor de θ_p asociado con cada deformación unitaria principal, sustituimos $\theta_p = 19.0°$ en la primera ecuación de transformación (ecuación 7.71a) y despejamos la deformación unitaria:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{ sen } 2\theta$$

$$= (225 \times 10^{-6}) + (115 \times 10^{-6})(\cos 38.0°) + (90 \times 10^{-6})(\text{sen } 38.0°)$$

$$= 370 \times 10^{-6}$$

Este resultado muestra que la deformación unitaria principal mayor ϵ_1 está a un ángulo $\theta_{p_1} = 19.0°$. La deformación unitaria menor ϵ_2 actúa a 90° desde esa dirección ($\theta_{p_2} = 109.0°$). Por tanto,

$$\epsilon_1 = 370 \times 10^{-6} \quad \text{y} \quad \theta_{p_1} = 19.0°$$

$$\epsilon_2 = 80 \times 10^{-6} \quad \text{y} \quad \theta_{p_2} = 109.0°$$

Observe que $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_x + \epsilon_y$.

Las deformaciones unitarias principales se representan en la figura 7.37c. Por supuesto, no hay deformaciones unitarias por cortante sobre los planos principales.

continúa

(c) *Deformación unitaria por cortante máxima*. La deformación unitaria por cortante máxima es calculada de la ecuación (7.75):

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 146 \times 10^{-6} \qquad \gamma_{\text{máx}} = 290 \times 10^{-6}$$

El elemento que tiene la deformación unitaria por cortante máxima está orientado a 45° con respecto a las direcciones principales; por tanto, $\theta_s = 19.0° + 45° = 64.0°$ y $2\theta_s = 128.0°$. Al sustituir este valor de $2\theta_s$ en la segunda ecuación de transformación (ecuación 7.71b), podemos determinar el signo de la deformación unitaria por cortante asociada con esta dirección. Los cálculos son los siguientes

$$\frac{\gamma_{x_1y_1}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$= -(115 \times 10^{-6})(\operatorname{sen} 128.0°) + (90 \times 10^{-6})(\cos 128.0°)$$

$$= -146 \times 10^{-6}$$

Este resultado muestra que un elemento orientado a un ángulo $\theta_{s_2} = 64.0°$ tiene la deformación unitaria por cortante máxima negativa.

Podemos llegar al mismo resultado al observar que el ángulo θ_{s_1} con respecto a la dirección de deformación unitaria por cortante máxima siempre es 45° menor que θ_{p_1}. Por tanto,

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} - 45° = 19.0° - 45° = -26.0°$$

$$\theta_{s_2} = \theta_{s_1} + 90° = 64.0°$$

Las deformaciones unitarias por cortante correspondientes a θ_{s_1} y θ_{s_2} son $\gamma_{\text{máx}} = 290 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{\text{mín}} = -290 \times 10^{-6}$, respectivamente.

Las deformaciones unitarias normales en el elemento que tiene las deformaciones unitarias por cortante máxima y mínima son

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 225 \times 10^{-6}$$

Un diagrama del elemento con las deformaciones por cortante máximas en el plano se muestra en la figura 7.37d.

En este ejemplo, determinamos las deformaciones unitarias empleando las ecuaciones de transformación. Sin embargo, todos los resultados se pueden obtener con la misma facilidad con el círculo de Mohr.

Ejemplo 7.8

Una roseta de deformación a 45° (también denominada *roseta rectangular*) consiste de tres deformímetros de resistencia eléctrica dispuestos para medir deformaciones unitarias en dos direcciones perpendiculares y también a un ángulo de 45° entre ellos, como se muestra en la figura 7.38a. La roseta se pega a la superficie de la estructura antes de aplicar cargas. Los deformímetros A, B y C miden las deformaciones unitarias normales ϵ_a, ϵ_b y ϵ_c en las direcciones de las líneas Oa, Ob y Oc, respectivamente.

Explique cómo obtener las deformaciones unitarias ϵ_{x_1}, ϵ_{y_1} y $\gamma_{x_1y_1}$ asociadas con un elemento orientado a un ángulo θ con respecto a los ejes xy (figura 7.38b).

Solución

En la superficie del objeto sometido a esfuerzo, el material está en esfuerzo plano. Como las ecuaciones de transformación de deformación unitaria (ecuaciones 7.71a y 7.71b) se aplican a esfuerzo plano así como a deformación unitaria plana, podemos usarlas para determinar las deformaciones unitarias en cualquier dirección deseada.

Deformaciones unitarias asociadas con los ejes xy. Iniciamos determinando las deformaciones unitarias asociadas con los ejes xy. Debido a que los deformímetros A y C están alineados con los ejes x y y, respectivamente, proporcionan las deformaciones unitarias ϵ_x y ϵ_y, directamente:

$$\epsilon_x = \epsilon_a \qquad \epsilon_y = \epsilon_c \tag{7.77a,b}$$

Para obtener la deformación unitaria por cortante γ_{xy}, utilizamos la ecuación de transformación para deformaciones unitarias normales (ecuación 7.71a):

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

Para un ángulo $\theta = 45°$, sabemos que $\epsilon_{x_1} = \epsilon_b$ (figura 7.38a); por tanto, la ecuación anterior da

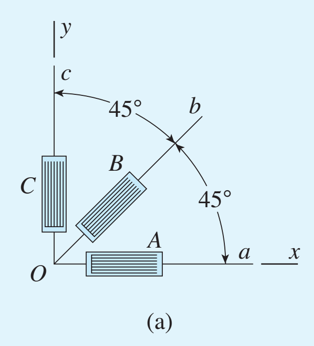
$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2}(\cos 90°) + \frac{\gamma_{xy}}{2}(\operatorname{sen} 90°)$$

Despejando γ_{xy}, obtenemos

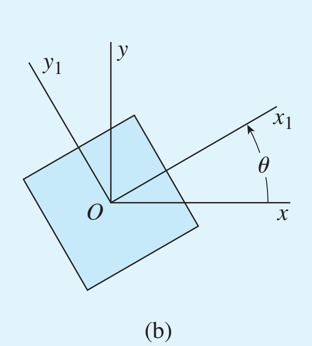
$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c \tag{7.78}$$

Por tanto, las deformaciones ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} se determinan fácilmente a partir de las lecturas obtenidas con los deformímetros.

Deformaciones unitarias asociadas con los ejes x_1y_1. Conocidas las deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, podemos calcular las deformaciones unitarias para un elemento orientado a cualquier ángulo θ (figura 7.38b) mediante las ecuaciones de transformación de deformación unitaria (ecuaciones 7.71a y 7.71b) o bien con el círculo de Mohr. También podemos calcular las deformaciones unitarias normales y las deformaciones unitarias por cortante máximas con las ecuaciones (7.74) y (7.75), respectivamente.



(a)



(b)

FIGURA 7.38 Ejemplo 7.8. (a) Roseta de deformación unitaria a 45° y (b) elemento orientado a un ángulo θ con respecto a los ejes xy.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo investigamos el *estado de esfuerzo* en un punto sobre un cuerpo sometido a esfuerzo y luego lo representamos sobre un elemento de esfuerzo. Se analizó el *esfuerzo plano* en dos dimensiones y se dedujeron las ecuaciones de transformación que dan expresiones diferentes pero equivalentes del estado de los esfuerzos normales y cortantes en ese punto. Se concluyó que los *esfuerzos normales principales* y el *esfuerzo cortante máximo* y sus orientaciones son la información más importante para el diseño. Se determinó que una representación gráfica de las ecuaciones de transformación, *círculo de Mohr*, es una forma conveniente para explorar varias representaciones del estado de esfuerzo en ese punto, incluidas las orientaciones del elemento de esfuerzo en el cual ocurren los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Más adelante se introdujeron las deformaciones unitarias y se dedujo la *ley de Hooke para esfuerzo plano* (para materiales homogéneos e isotrópicos) y luego en especial para obtener relaciones esfuerzo-deformación unitaria para esfuerzo biaxial, esfuerzo uniaxial y cortante puro. Después se introdujo el estado de esfuerzo en tres dimensiones, referido como esfuerzo triaxial, junto con la ley de Hooke para esfuerzo triaxial. Se definieron el esfuerzo esférico y el esfuerzo hidrostático como casos especiales de esfuerzo triaxial. Por último, se definió la deformación unitaria simple para emplearla en el análisis experimental de esfuerzos y se comparó con el esfuerzo plano. Los conceptos más importantes que se presentaron en este capítulo se pueden resumir como sigue:

1. Los esfuerzo sobre secciones inclinadas cortadas a través de un cuerpo, como una viga, pueden ser mayores que los esfuerzos que actúan sobre un elemento de esfuerzo alineado con la sección transversal.
2. Los esfuerzos son tensores, no vectores, por lo que empleamos el equilibrio de un elemento en forma de cuña para transformar las componentes de esfuerzo de un conjunto de ejes a otro. Dado que las ecuaciones de transformación se dedujeron únicamente a partir de equilibrio de un elemento, se aplican a esfuerzos en cualquier tipo de material, ya sea lineal, no lineal, elástico o inelástico.
3. Si utilizamos dos elementos con orientaciones diferentes para representar el estado de **esfuerzo plano** en el mismo punto de un cuerpo, los esfuerzos que actúan sobre las caras de los dos elementos son distintos, pero aún representan el mismo estado intrínseco de esfuerzo en ese punto.
4. A partir del equilibrio, demostramos que los esfuerzos cortantes que actúan sobre los cuatro lados de un elemento de esfuerzo en esfuerzo plano se conocen si determinamos el esfuerzo cortante que actúa sobre cualquiera de ellos.
5. La suma de los esfuerzos normales que actúan sobre caras perpendiculares de elementos de esfuerzo plano (en un punto dado en el cuerpo sometido a esfuerzo) es constante e independiente del ángulo θ.
6. Los esfuerzos normales máximos y mínimos (denominados **esfuerzos principales**) se pueden determinar con la ecuación de transformación para esfuerzo normal. También podemos encontrar los planos principales, en una orientación θ_p, sobre la que actúan. Los esfuerzos cortantes son cero sobre los planos principales, los planos de esfuerzo cortante máximo ocurren a 45° con respecto a los planos principales y el esfuerzo cortante máximo es igual a la mitad de la diferencia de los esfuerzos principales.
7. Las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano se pueden representar mediante una gráfica conocida como **círculo de Mohr** que representa la relación entre los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre varios planos inclinados en un punto de un cuerpo sometido a esfuerzos. También se emplea para calcular los esfuerzos principales, los esfuerzos cortantes máximos y las orientaciones sobre las que actúan.

8. La ley de Hooke para esfuerzo plano proporciona las relaciones entre deformaciones unitarias normales y esfuerzos normales para materiales homogéneos e isotrópicos que siguen la ley de Hooke. Estas relaciones contienen tres constantes del material (E, G y ν).

9. El **cambio de volumen unitario e,** o la **dilatación** de un cuerpo sólido, se define como el cambio de volumen dividido entre el volumen original y es igual a la suma de las deformaciones unitarias normales en tres direcciones perpendiculares.

10. La densidad de energía de deformación para esfuerzo plano, o la energía de deformación almacenada en un volumen unitario del material, se calcula como la mitad de la suma de los productos del esfuerzo por la deformación unitaria correspondiente, siempre que la ley de Hooke sea válida para el material.

11. Existe un estado de **esfuerzo triaxial** en un elemento si éste se somete a esfuerzos normales en tres direcciones mutuamente perpendiculares y no hay esfuerzos cortantes sobre las caras del elemento; se determina que los esfuerzos son los principales en el material. Un tipo especial de esfuerzo triaxial (denominado **esfuerzo esférico**) ocurre cuando los tres esfuerzos normales son iguales y de tensión. Si los tres esfuerzos son iguales y de compresión, al estado de esfuerzo triaxial se le denomina **esfuerzo hidrostático**.

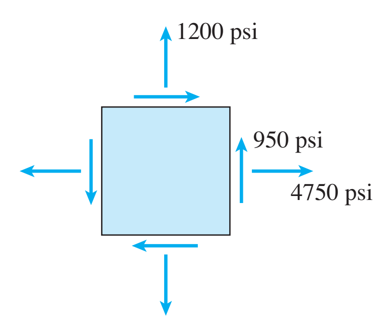
12. Por último, las ecuaciones de transformación para **deformación unitaria plana** se pueden deducir para usarlas en la interpretación de mediciones experimentales hechas con deformímetros. Las deformaciones unitarias planas en cualquier orientación se pueden representar de forma gráfica empleando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana. El esfuerzo plano y la deformación unitaria plana se comparan en la figura 7.31 y en condiciones ordinarias no ocurren de manera simultánea. Las ecuaciones de transformación para deformación unitaria plana se dedujeron únicamente de la geometría y son independientes de las propiedades del material. En un punto dado de un cuerpo sometido a esfuerzo, las deformaciones unitarias principales y los esfuerzos principales ocurren en la misma dirección. Finalmente, las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano también se pueden usar para los esfuerzos en deformación unitaria plana y las ecuaciones de transformación para de deformación unitaria plana también se pueden emplear para las deformaciones unitarias en esfuerzo plano.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 7

Esfuerzo plano

7.2.1 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos σ_x = 4750 psi, σ_y = 1200 psi y τ_{xy} = 950 psi, como se muestra en la figura.

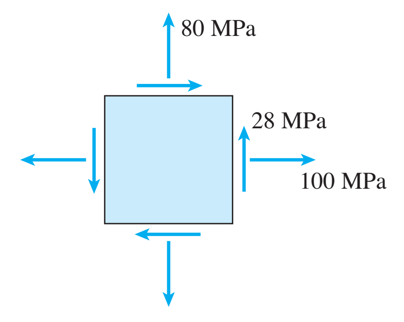
Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo θ = 60° desde el eje x, donde el ángulo θ es positivo cuando va en el sentido de las manecillas del reloj. Muestre que estos esfuerzos en un diagrama de un elemento orientado según el ángulo θ.



PROB. 7.2.1

7.2.2 Resuelva el problema anterior para un elemento en *esfuerzo plano* sometido a esfuerzos σ_x = 100 MPa, σ_y = 80 MPa y τ_{xy} = 28 MPa, como se muestra en la figura.

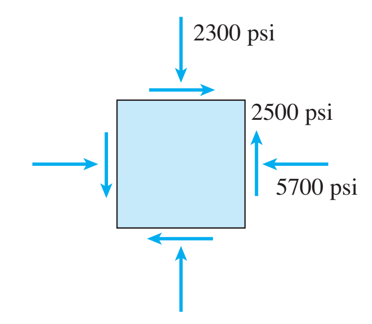
Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo θ = 30° desde el eje x, donde el ángulo θ es positivo cuando va en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento orientado según el ángulo θ.



PROB. 7.2.2

7.2.3 Resuelva el problema 7.2.1 para un elemento en *esfuerzo plano* sometido a esfuerzos σ_x = –5700 psi, σ_y = –2300 psi y τ_{xy} = 2500 psi, como se muestra en la figura.

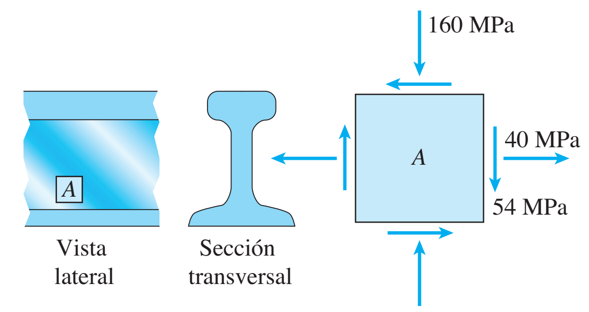
Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo θ = 50° desde el eje x, donde el ángulo θ es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento orientado según el ángulo θ.



PROB. 7.2.3

7.2.4 Los esfuerzos que actúan sobre el elemento A en el alma de un riel de tren se determinó qu eran de 40 MPa en tensión en la dirección horizontal y de 160 MPa de compresión en la dirección vertical (consulte la figura). Además, también actúan esfuerzos cortantes con una magnitud de 54 MPa en las direcciones que se muestran.

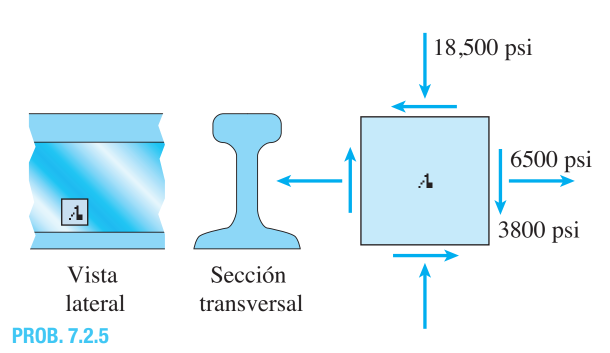
Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj de 52° desde la horizontal. Muestre estos esfuerzos en un bosquejo de un elemento orientado en este ángulo.



PROB. 7.2.4

7.2.5 Resuelva el problema anterior si los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el elemento A son 6500 psi, 18,500 psi y 3800 psi (en las direcciones que se muestran en la figura).

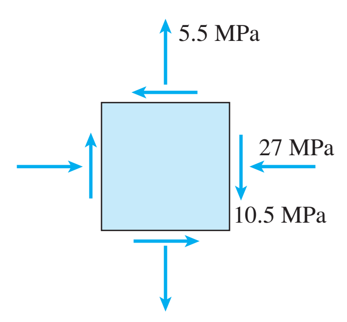
Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj de 30° desde la horizontal. Muestre estos esfuerzos en un bosquejo de un elemento orientado según este ángulo.



PROB. 7.2.5

7.2.6 Un elemento en *esfuerzo plano* del fuselaje de un avión está sometido a esfuerzos de compresión de 27 MPa en la dirección horizontal y a esfuerzos de tensión de 5.5 MPa en la dirección vertical (consulte la figura). Además también actúan esfuerzos cortantes de 10.5 MPa en las direcciones que se muestran.

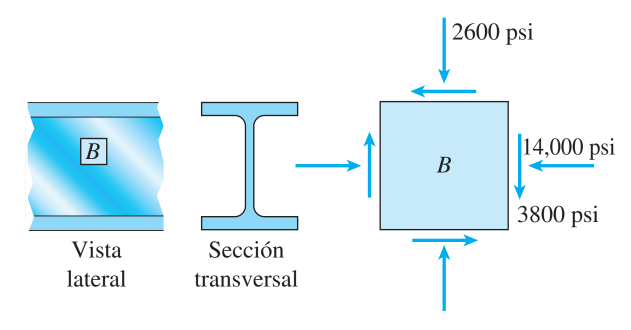
Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo en el sentido de las manecillas del reloj de 35° desde la horizontal. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento orientado según este ángulo.



PROB. 7.2.6

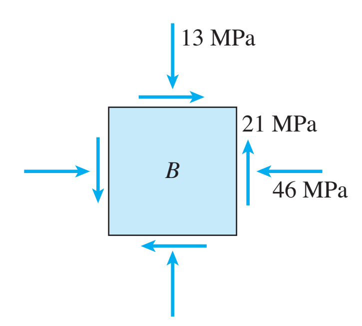
7.2.7 Los esfuerzos que actúan sobre el elemento *B* en el alma de una viga de patín ancho son 14,000 psi en compresión en la dirección horizontal y 2600 psi en compresión en la dirección vertical (consulte la figura). Además también actúan esfuerzos cortantes de 3800 psi en las direcciones que se muestran.

Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj de 40° desde la horizontal. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento orientado según este ángulo.



PROB. 7.2.7

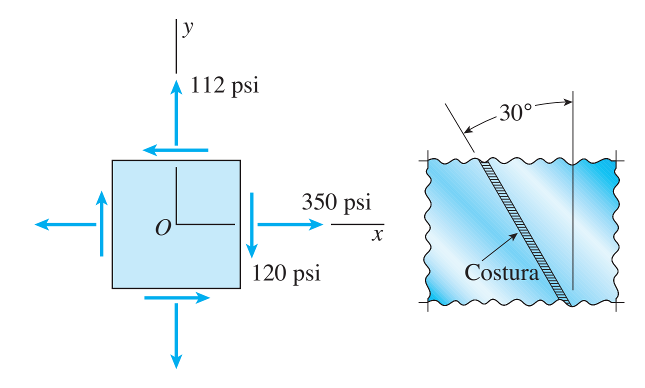
7.2.8 Resuelva el problema anterior si los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el elemento *B* son 46 MPa, 13 MPa y 21 MPa (en las direcciones que se muestran en la figura) y el ángulo es 42.5° (en el sentido de las manecillas del reloj).



PROB. 7.2.8

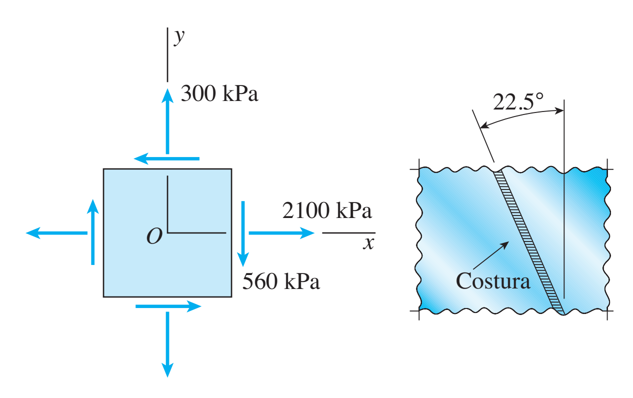
7.2.9 El recubrimiento de polietileno de un estanque de asentamiento está sometido a esfuerzos σ_x = 350 psi, σ_y = 12 psi y τ_{xy} = –120 psi, como se muestra mediante el elemento en esfuerzo plano en la primera parte de la figura.

Determine los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre una costura orientada a un ángulo de 30° con respecto al elemento, como se muestra en la segunda parte de la figura. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento con sus lados paralelos y perpendiculares a la costura.



PROB. 7.2.9

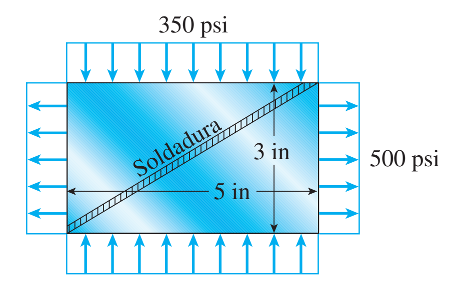
7.2.10 Resuelva el problema anterior si los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el elemento son σ_x = 2100 kPa, σ_y = 300 kPa y τ_{xy} = –560 kPa, y la costura está orientada a un ángulo de 22.5° con respecto al elemento.



PROB. 7.2.10

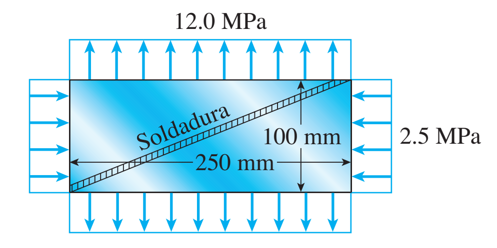
7.2.11 Una placa rectangular con dimensiones 3.0 in × 5.0 in se forma soldando dos placas rectangulares (consulte la figura). La placa está sometida a un esfuerzo de tensión de 500 psi en la dirección larga y a uno de compresión de 350 psi en la dirección corta.

Determine el esfuerzo normal σ_w que actúa perpendicular a la línea de la soldadura y el esfuerzo cortante τ_w que actúa paralelo a la soldadura. (Suponga que el esfuerzo normal σ_w es positivo cuando actúa en tensión contra la soldadura y el esfuerzo cortante τ_w es positivo cuando actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj contra la soldadura.)



PROB. 7.2.11

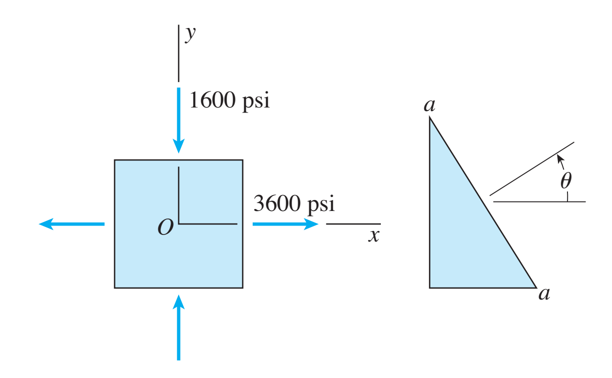
7.2.12 Resuelva el problema anterior para una placa de dimensiones 100 mm × 250 mm sometida a un esfuerzo de compresión de 2.5 MPa en la dirección larga y a uno de tensión de 12.0 MPa en la dirección corta (consulte la figura).



PROB. 7.2.12

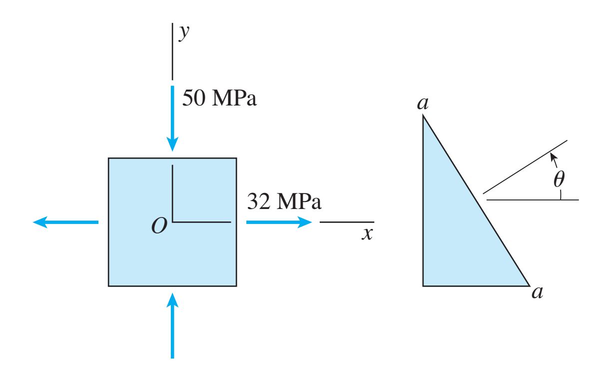
7.2.13 En un punto en la superficie de una máquina el material está en *esfuerzo biaxial* con σ_x = 3600 psi y σ_y = –1600 psi, como se muestra en la primera parte de la figura. La segunda parte de la figura muestra un plano inclinado *aa* cortado a través del mismo punto en el material pero orientado en un ángulo θ.

Determine el valor del ángulo θ entre cero y 90° de manera que no actúen esfuerzos normales sobre el plano *aa*. Elabore un diagrama de un elemento de esfuerzo con el plano *aa* como uno de sus lados y muestre todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento.



PROB. 7.2.13

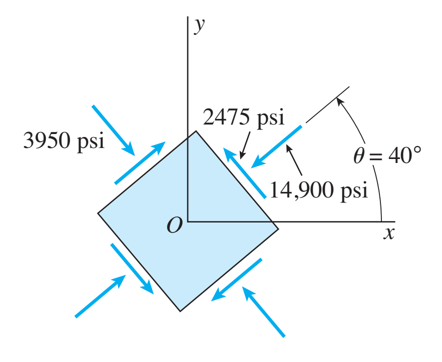
7.2.14 Resuelva el problema anterior para σ_x = 32 MPa y σ_y = –50 MPa (consulte la figura).



PROB. 7.2.14

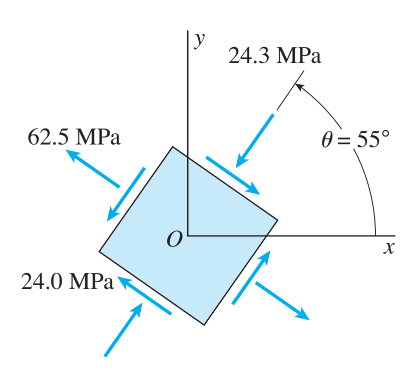
7.2.15 Un elemento en *esfuerzo plano* del chasis de un automóvil de carreras está orientado a un ángulo conocido θ (consulte la figura). En este elemento inclinado los esfuerzos normales y cortantes tienen las magnitudes y las direcciones que se muestran en la figura.

Determine los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre un elemento cuyos lados son paralelos a los ejes *xy*, es decir, determine σ_x, σ_y y τ_{xy}. Muestre los resultados en un diagrama de un elemento orientado a θ = 0°.



PROB. 7.2.15

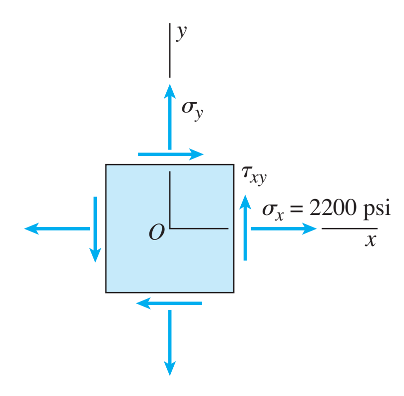
7.2.16 Resuelva el problema anterior para el elemento que se muestra en la figura.



PROB. 7.2.16

7.2.17 Una placa en *esfuerzo plano* está sometida a esfuerzos normales σ_x y σ_y y a un *esfuerzo cortante* τ_{xy}, como se muestra en la figura. A ángulos en sentido contrario al de las manecillas del reloj $\theta = 35°$ y $\theta = 75°$ desde el eje x, el esfuerzo normal es de tensión igual a 4800 psi.

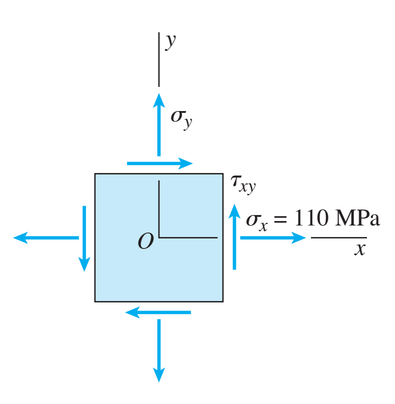
Si el esfuerzo σ_x es igual a 2200 psi en tensión, ¿cuáles son los esfuerzos σ_y y τ_{xy}?



PROB. 7.2.17

7.2.18 La superficie del ala de un avión está sometida a *esfuerzo plano* con esfuerzos normales σ_x y σ_y y a un esfuerzo cortante τ_{xy}, como se muestra en la figura. A un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj $\theta = 32°$ desde el eje x, el esfuerzo normal es de tensión igual a 37 MPa y a un ángulo $\theta = 48°$ es de 12 MPa de compresión.

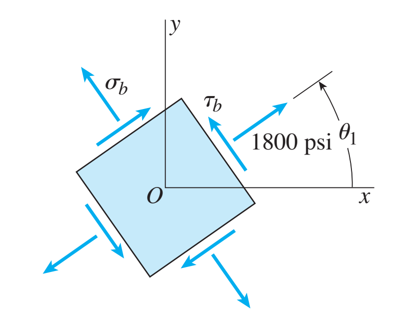
Si el esfuerzo σ_x es igual a 110 MPa en tensión, ¿cuáles son los esfuerzos σ_y y τ_{xy}?



PROB. 7.2.18

7.2.19 En un punto en una estructura sometida a *esfuerzo plano*, los esfuerzos son $\sigma_x = -4100$ psi, $\sigma_y = 2200$ psi y $\tau_{xy} = 2900$ psi (la convención de signos para estos esfuerzos se muestra en la figura 7.1). Un elemento de esfuerzo ubicado en el mismo punto en la estructura (pero orientado a un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj θ_1 con respecto al eje x) está sometido a los esfuerzos que se muestran en la figura (σ_b, τ_b y 1800 psi).

Suponiendo que el ángulo θ_1 está entre cero y 90° calcule el esfuerzo normal σ_b, el esfuerzo cortante τ_b y el ángulo θ_1.



PROB. 7.2.19

Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos

Al resolver los problemas para la sección 7.3 considere sólo los esfuerzos en el plano (los esfuerzos en el plano xy).

7.3.1 Un elemento en esfuerzo plano está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 4750$ psi, $\sigma_y = 1200$ psi y $\tau_{xy} = 950$ psi (consulte la figura para el problema 7.2-1).

Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

7.3.2 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_y = 80$ MPa y $\tau_{xy} = 28$ MPa (consulte la figura para el problema 7.2.2).

Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

7.3.3 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -5700$ psi, $\sigma_y = -2300$ psi y $\tau_{xy} = 2500$ psi (consulte la figura para el problema 7.2.3).

Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera adecuada.

7.3.4 Los esfuerzos que actúan sobe el elemento *A* en el alma de un riel de ferrocarril son 40 MPa de tensión en la dirección horizontal y 160 MPa de compresión en la dirección vertical (consulte la figura). Además también actúan esfuerzos cortantes de 54 MPa en las direcciones que se muestran (consulte la figura para el problema 7.2.4).

Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

7.3.5 Los esfuerzos normales y cortante que actúan sobre el elemento *A* son 6500 psi, 18,500 psi y 3800 psi (en las direcciones que se muestran en la figura para el problema 7.2.5).

Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un bosquejo de un elemento orientado de manera apropiada.

7.3.6 Un elemento en *esfuerzo plano* del fuselaje de un avión está sometido a esfuerzos de compresión de 27 MPa en la dirección horizontal y a esfuerzos de tensión de 5.5 MPa en la dirección vertical. Además también actúan esfuerzos cortantes de 10.5 MPa en las direcciones que se muestran (consulte la figura para el problema 7.2.6).

Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

7.3.7 Los esfuerzos que actúan sobre el elemento *B* en el alma de una viga de patín ancho son 14,000 psi en compresión en la dirección horizontal y 2600 psi en compresión en la dirección vertical. Además también actúan esfuerzos de 3800 psi en las direcciones que se muestran (consulte la figura para el problema 7.2.7).

Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un bosquejo de un elemento orientado de manera apropiada.

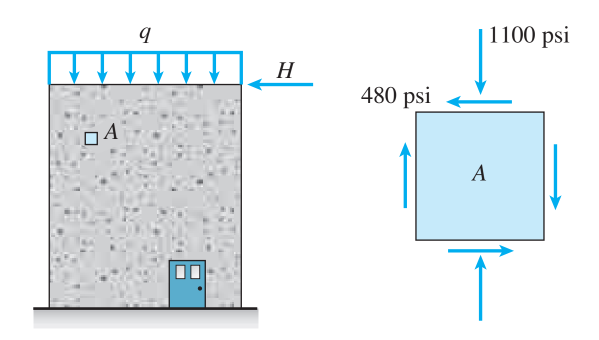
7.3.8 Los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre el elemento *B* son $\sigma_x = -46$ MPa, $\sigma_y = -13$ MPa y $\tau_{xy} = 21$ MPa (consulte la figura para el problema 7.2.8).

Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

7.3.9 Un muro de cortante en un edificio de concreto reforzado está sometido a una carga uniforme vertical con intensidad q y a una fuerza horizontal H, como se muestra en la primera parte de la figura. (La fuerza H representa los efectos de las cargas por viento y por sismo). Como consecuencia de estas cargas, los esfuerzos en el punto *A* sobre la superficie del muro tienen los valores que se muestran en la segunda parte de la figura (el esfuerzo de compresión es igual a 1100 psi y el esfuerzo cortante es igual a 480 psi).

(a) Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

(b) Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

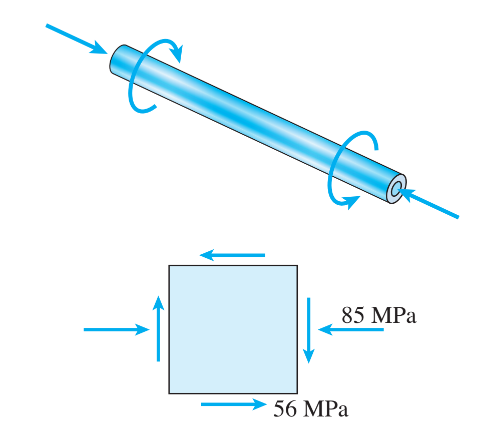


PROB. 7.3.9

7.3.10 Un eje de una hélice sometido a torsión y empuje axial combinados está diseñado para resistir un esfuerzo cortante de 56 MPa y un esfuerzo de compresión de 85 MPa (consulte la figura).

(a) Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

(b) Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

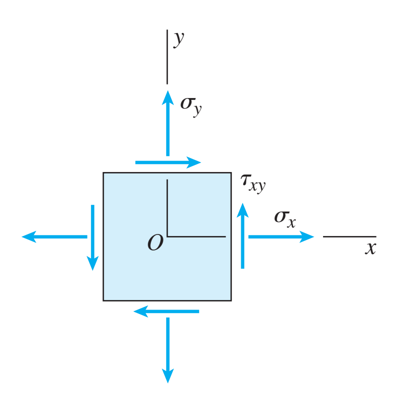


PROB. 7.3.10

7.3.11 a 7.3.16 Un elemento en *esfuerzo plano* (consulte la figura) está sometido a esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy}.

(a) Determine los esfuerzos principales y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

(b) Determine los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados y muéstrelos en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.



PROBS. 7.3.11 a 7.3.16

7.3.11 σ_x = 2500 psi, σ_y = 1020 psi, τ_{xy} = −900 psi

7.3.12 σ_x = 2150 kPa, σ_y = 375 kPa, τ_{xy} = −460 kPa

7.3.13 σ_x = 14,500 psi, σ_y = 1070 psi, τ_{xy} = 1900 psi

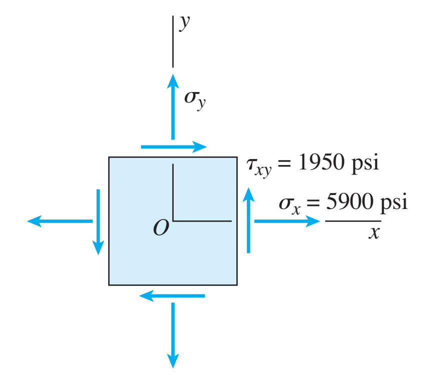
7.3.14 σ_x = 16.5 MPa, σ_y = −91 MPa, τ_{xy} = −39 MPa

7.3.15 σ_x = −3300 psi, σ_y = −11,000 psi, τ_{xy} = 4500 psi

7.3.16 σ_x = −108 MPa, σ_y = 58 MPa, τ_{xy} = −58 MPa

7.3.17 En un punto en la superficie de un componente de una máquina, los esfuerzos que actúan sobre la cara *x* de un elemento de esfuerzo son σ_x = 5900 psi y τ_{xy} = 1950 psi (consulte la figura).

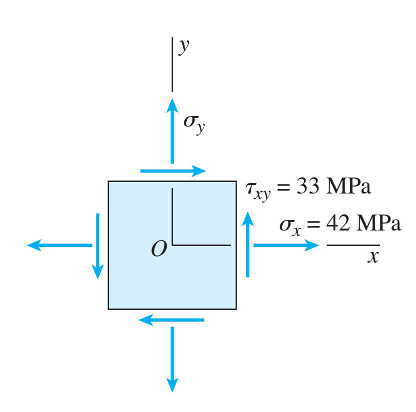
¿Cuál es el rango de valores permisible para el esfuerzo σ_y si el esfuerzo cortante máximo está limitado a τ_0 = 2500 psi?



PROB. 7.3.17

7.3.18 En un punto en la superficie de un componente de una máquina los esfuerzos que actúan sobre la cara *x* de un elemento de esfuerzo son σ_x = 42 MPa y τ_{xy} = 33 MPa (consulte la figura).

¿Cuál es el rango de valores permisible para el esfuerzo si σ_y si el esfuerzo cortante máximo está limitado a τ_0 = 35 MPa?

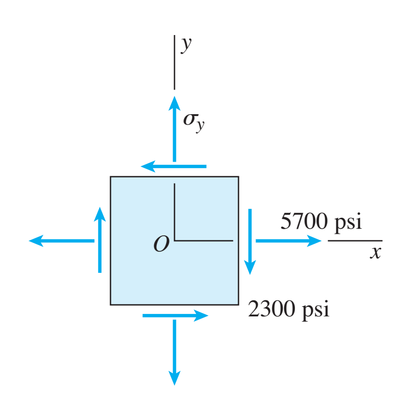


PROB. 7.3.18

7.3.19 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos σ_x = 5700 psi y τ_{xy} = –2300 psi (consulte la figura). Se sabe que uno de los esfuerzos principales es igual a 6700 psi en tensión.

(a) Determine el esfuerzo σ_y.

(b) Determine el otro esfuerzo principal y la orientación de los planos principales, luego muestre los esfuerzos principales en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.

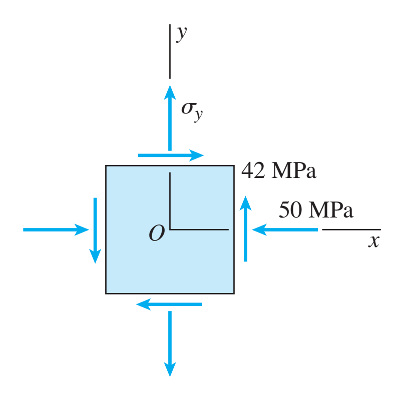


PROB. 7.3.19

7.3.20 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -50$ MPa y $\tau_{xy} = 42$ MPa (consulte la figura). Se sabe que uno de los esfuerzos principales es igual a 33 MPa en tensión.

(a) Determine el esfuerzo σ_y.

(b) Determine el otro esfuerzo principal y la orientación de los planos principales, luego muestre los esfuerzos principales en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.



PROB. 7.3.20

Círculo de Mohr

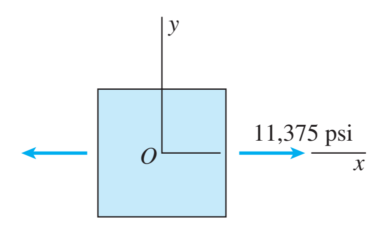
Los problemas para la sección 7.4 se deben resolver empleando el círculo de Mohr. Considere sólo los esfuerzos en el plano (los esfuerzos en el plano xy).

7.4.1 Un elemento en *esfuerzo uniaxial* está sometido a esfuerzos de tensión $\sigma_x = 11{,}375$ psi, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = 24°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x.

(b) Los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados.

Muestre todos los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.



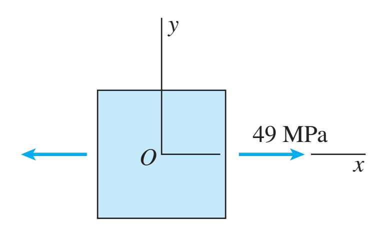
PROB. 7.4.1

7.4.2 Un elemento en *esfuerzo uniaxial* está sometido a esfuerzos de tensión $\sigma_x = 49$ MPa, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = -27°$ desde el eje x (menos significa en el sentido de las manecillas del reloj).

(b) Los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados.

Muestre todos los resultados en bosquejos de elementos orientados de manera apropiada.



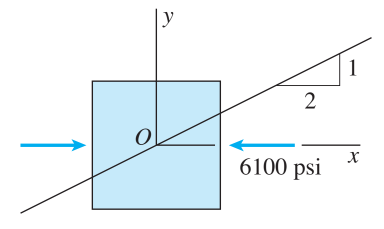
PROB. 7.4.2

7.4.3 Un elemento en *esfuerzo uniaxial* está sometido a esfuerzos de compresión con una magnitud de 6100 psi, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado en una pendiente de 1 a 2 (consulte la figura).

(b) Los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados.

Muestre todos los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.



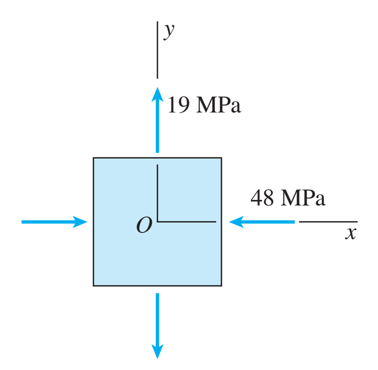
PROB. 7.4.3

7.4.4 Un elemento en *esfuerzo biaxial* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -48$ MPa y $\sigma_y = 10$ MPa, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = 25°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x.

(b) Los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados.

Muestre todos los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.



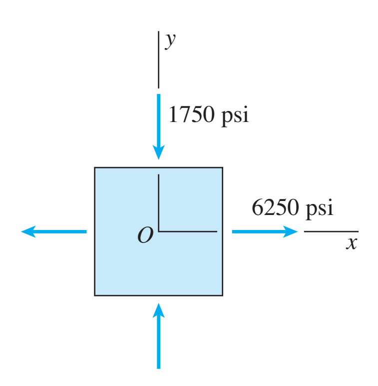
PROB. 7.4.4

7.4.5 Un elemento en *esfuerzo biaxial* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = 6250$ psi y $\sigma_y = -1750$ psi, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = 55°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje *x*.

(b) Los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados.

Muestre todos los resultados en bosquejos de elementos orientados de manera apropiada.



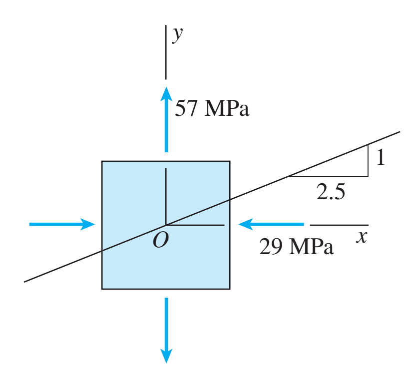
PROB. 7.4.5

7.4.6 Un elemento en *esfuerzo biaxial* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -29$ MPa y $\sigma_y = 57$ MPa, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a una pendiente de 1 a 2.5 (consulte la figura).

(b) Los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados.

Muestre todos los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.



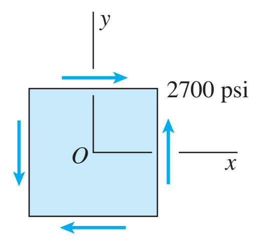
PROB. 7.4.6

7.4.7 Un elemento en *cortante puro* está sometido a esfuerzos $\tau_{xy} = 2700$ psi, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = 52°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje *x*.

(b) Los esfuerzos principales.

Muestre todos los resultados en bosquejos de elementos orientados de manera apropiada.



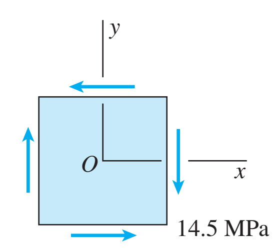
PROB. 7.4.7

7.4.8 Un elemento en *cortante puro* está sometido a esfuerzos $\tau_{xy} = -14.5$ MPa, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo $\theta = 22.5°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

(b) Los esfuerzos principales.

Muestre todos los resultados en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.



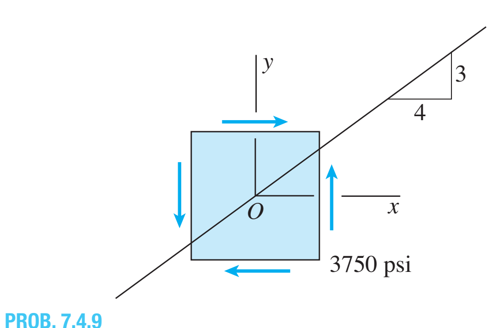
PROB. 7.4.8

7.4.9 Un elemento en *cortante puro* está sometido a esfuerzos τ_{xy} = 3750 psi, como se muestra en la figura. Utilizando el círculo de Mohr, determine:

(a) Los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a una pendiente de 3 a 4 (consulte la figura).

(b) Los esfuerzos principales.

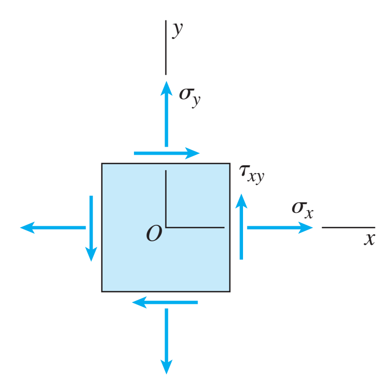
Muestre todos los resultados en diagrama de elementos orientados de manera apropiada.



PROB. 7.4.9

7.4.10 a 7.4.15 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} (consulte la figura).

Utilizando el círculo de Mohr determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento orientado a un ángulo θ desde el eje x. Muestre estos esfuerzos en un diagrama de un elemento orientado según el ángulo θ. (*Nota:* el ángulo θ es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj y negativo en el sentido de las manecillas del reloj.)



PROBS. 7.4.10 a 7.4.15

7.4.10 σ_x = 27 MPa, σ_y = 14 MPa, τ_{xy} = 6 MPa, θ = 40°

7.4.11 σ_x = 3500 psi, σ_y = 12,200 psi, τ_{xy} = −3300 psi, θ = −51°

7.4.12 σ_x = −47 MPa, σ_y = −186 MPa, τ_{xy} = −29 MPa, θ = −33°

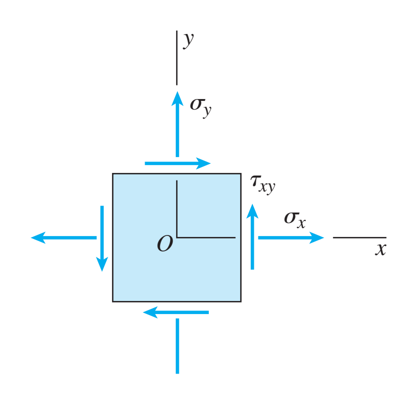
7.4.13 σ_x = −1720 psi, σ_y = −680 psi, τ_{xy} = 320 psi, θ = 14°

7.4.14 σ_x = 33 MPa, σ_y = −9 MPa, τ_{xy} = 29 MPa, θ = 35°

7.4.15 σ_x = −5700 psi, σ_y = 950 psi, τ_{xy} = −2100 psi, θ = 65°

7.4.16 a 7.4.23 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} (consulte la figura).

Utilice el círculo de Mohr y determine (a) los esfuerzos principales y (b) los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados. Muestre todos los resultados en diagrama de elementos orientados de manera apropiada.



PROBS. 7.4.16 a 7.4.23

7.4.16 σ_x = −29.5 MPa, σ_y = 29.5 MPa, τ_{xy} = 27 MPa

7.4.17 σ_x = 7300 psi, σ_y = 0 psi, τ_{xy} = 1300 psi

7.4.18 σ_x = 0 MPa, σ_y = −23.4 MPa, τ_{xy} = −9.6 MPa

7.4.19 σ_x = 2050 psi, σ_y = 6100 psi, τ_{xy} = 2750 psi

7.4.20 σ_x = 2900 kPa, σ_y = 9100 kPa, τ_{xy} = −3750 kPa

7.4.21 σ_x = −11,500 psi, σ_y = −18,250 psi, τ_{xy} = −7200 psi

7.4.22 σ_x = −3.3 MPa, σ_y = 8.9 MPa, τ_{xy} = −14.1 MPa

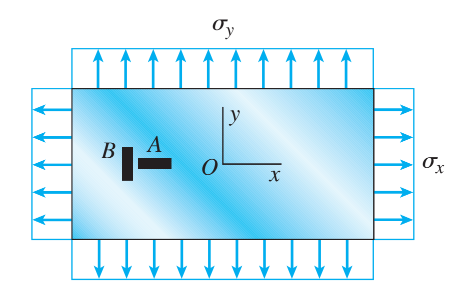
7.4.23 σ_x = 800 psi, σ_y = −2200 psi, τ_{xy} = 2900 psi

Ley de Hooke para esfuerzo plano

Al resolver los problemas para la sección 7.5 suponga que el material es linealmente elástico con módulo de elasticidad E y relación de Poisson ν.

7.5.1 Una placa rectangular de acero con espesor t = 0.25 in está sometida a esfuerzos normales uniformes σ_x y σ_y, como se muestra en la figura. En la placa se colocan deformímetros A y B, orientados en las direcciones x y y, respectivamente. Las lecturas de los deformímetros dan deformaciones unitarias normales ϵ_x = 0.0010 (alargamiento) y ϵ_y = –0.007 (acortamiento).

Sabiendo que $E = 30 \times 10^6$ psi y ν = 0.3, determine los esfuerzos σ_x y σ_y y el cambio Δt en el espesor de la placa.



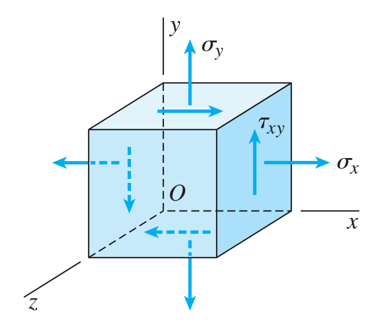
PROBS. 7.5.1 y 7.5.2

7.5.2 Resuelva el problema anterior si el espesor de la placa de acero es $t = 10$ mm, las lecturas de los deformímetros son $\epsilon_x = 480 \times 10^{-6}$ (alargamiento) y $\epsilon_y = 130 \times 10^{-6}$ (alargamiento), el módulo es $E = 200$ GPa y la relación de Poisson es $\nu = 0.30$.

7.5.3 Suponga que las deformaciones unitarias normales ϵ_x y ϵ_y para un elemento en *esfuerzo plano* (consulte la figura) se miden con deformímetros.

(a) Obtenga una fórmula para la deformación unitaria normal ϵ_z en la dirección z en términos de ϵ_x, ϵ_y y la relación de Poisson ν.

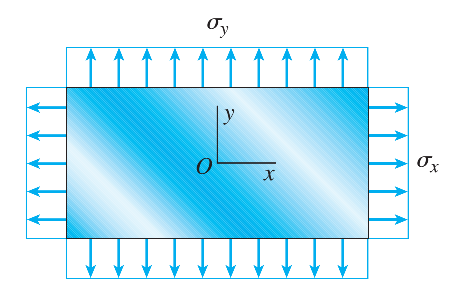
(b) Obtenga una fórmula para la dilatación e en términos de ϵ_x, ϵ_y y la relación de Poisson ν.



PROB. 7.5.3

7.5.4 Una placa de magnesio en *esfuerzo biaxial* está sometida a esfuerzos de tensión $\sigma_x = 24$ MPa y $\sigma_y = 12$ MPa (consulte la figura). Las deformaciones unitarias correspondientes en la placa son $\epsilon_x = 440 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = 80 \times 10^{-6}$.

Determine la relación de Poisson ν y el módulo de elasticidad E para el material.



PROBS. 7.5.4 a 7.5.7

7.5.5 Resuelva el problema anterior para una placa de acero con $\sigma_x = 10{,}800$ psi (tensión), $\sigma_y = -5400$ psi (compresión), $\epsilon_x = 420 \times 10^{-6}$ (alargamiento) y $\epsilon_y = -300 \times 10^{-6}$ (acortamiento).

7.5.6 Una placa rectangular en *esfuerzo biaxial* (consulte la figura) está sometida a esfuerzos normales $\sigma_x = 90$ MPa (tensión) y $\sigma_y = -20$ MPa (compresión). La placa tiene dimensiones $400 \times 800 \times 20$ mm y está hecha de acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$.

(a) Determine la deformación unitaria por cortante en el plano $\gamma_{\text{máx}}$ en la placa.

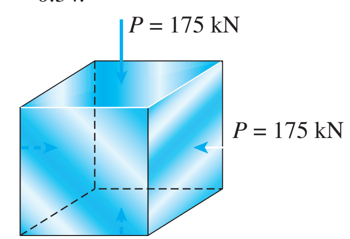
(b) Determine el cambio Δt en el espesor de la placa.

(c) Determine le cambio ΔV en el volumen de la placa.

7.5.7 Resuelva el problema anterior para una placa de aluminio con $\sigma_x = 12{,}000$ psi (tensión), $\sigma_y = -3000$ psi (compresión), dimensiones $20 \times 30 \times 0.5$ in, $E = 10.5 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.33$.

7.5.8 Un cubo de latón con lados de 50 mm está comprimido en dos direcciones perpendiculares por fuerzas $P = 175$ kN (consulte la figura).

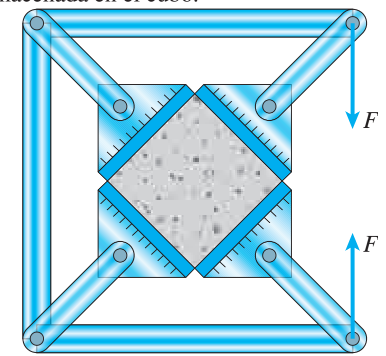
Calcule el cambio ΔV en el volumen del cubo y la energía de deformación U almacenada en el cubo, suponiendo $E = 100$ GPa y $\nu = 0.34$.



PROB. 7.5.8

7.5.9 Un cubo de concreto de 0.4 in ($E = 3.0 \times 10^6$ psi, $\nu = 0.1$) está comprimido en *esfuerzo biaxial* por medio de un marco de pruebas que está cargado como se muestra en la figura.

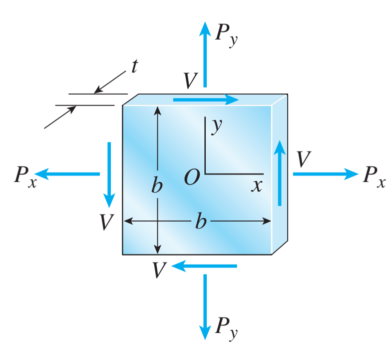
Suponiendo que cada carga F es igual a 20 k, determine el cambio ΔV en el volumen del cubo y la energía de deformación U almacenada en el cubo.



PROB. 7.5.9

7.5.10 Una placa cuadrada con ancho b y espesor t está cargada por fuerzas normales P_x y P_y, y por fuerzas cortantes V, como se muestra en la figura. Estas fuerzas producen esfuerzos uniformemente distribuidos que actúan sobre las caras de la placa.

Calcule el cambio ΔV en el volumen de la placa y la energía de deformación U almacenada en ella si las dimensiones son $b = 600$ mm y $t = 40$ mm, la placa está hecha de magnesio con $E = 45$ GPa y $\nu = 0.35$, y las fuerzas son $P_x = 480$ kN, $P_y = 180$ kN y $V = 120$ kN.

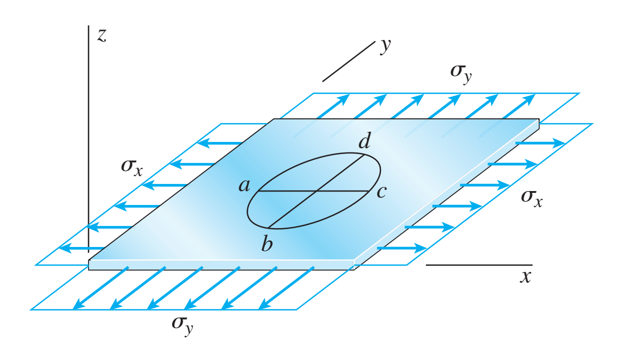


PROBS. 7.5.10 y 7.5.11

7.5.11 Resuelva el problema anterior para una placa de aluminio $b = 12$ in, $t = 1.0$ in, $E = 10{,}600$ ksi, $\nu = 0.33$, $P_x = 90$ k, $P_y = 20$ k y $V = 15$ k.

***7.5.12** Un círculo con diámetro $d = 200$ mm está grabado sobre una placa de latón (consulte la figura). La placa tiene dimensiones 400 × 400 × 20 mm. Se aplican fuerzas a la placa, que producen esfuerzos normales distribuidos uniformemente $\sigma_x = 42$ MPa y $\sigma_y = 14$ MPa.

Calcule las cantidades siguientes: (a) el cambio de longitud Δac del diámetro ac; (b) el cambio de longitud Δbd del diámetro bd; (c) el cambio Δt en el volumen de la placa y (e) la energía de deformación U almacenada en la placa. (Suponga $E = 100$ GPa y $\nu = 0.34$.)



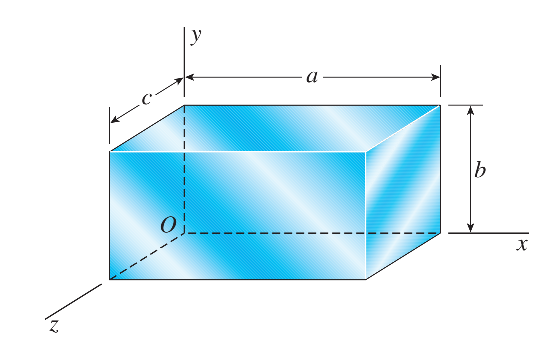
PROB. 7.5.12

Esfuerzo triaxial

Al resolver los problemas para la sección 7.6 suponga que el material es linealmente elástico con módulo de elasticidad E y relación de Poisson ν.

7.6.1 Un elemento de aluminio con forma de un paralelepípedo rectangular (consulte la figura) con dimensiones $a = 6.0$ in, $b = 4.0$ in y $c = 3.0$ in está sometido a *esfuerzos triaxiales* $\sigma_x = 12{,}000$ psi, $\sigma_y = -4000$ psi y $\sigma_z = -1000$ psi que actúan sobre las caras x, y y z, respectivamente.

Determine las cantidades siguientes: (a) el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el material; (b) los cambios Δa, Δb y Δc en las dimensiones del elemento; (c) el cambio ΔV en el volumen y (d) la energía de deformación U almacenada en el elemento. (Suponga $E = 10{,}400$ ksi y $\nu = 0.33$.)

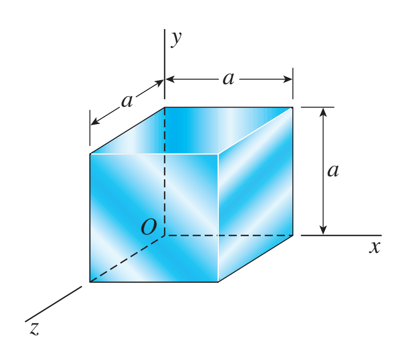


PROBS. 7.6.1 y 7.6.2

7.6.2 Resuelva el problema anterior si el elemento es acero ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.30$) con dimensiones $a = 300$ mm, $b = 150$ mm y $c = 150$ mm, y los esfuerzos son $\sigma_x = -60$ MPa, $\sigma_y = -40$ MPa y $\sigma_z = -40$ MPa.)

7.6.3 Un cubo de fundición gris con lados $a = 4.0$ in (consulte la figura) se prueba en un laboratorio sometiéndolo a *esfuerzo triaxial*. (Deformímetros montados en la máquina de pruebas muestran que las deformaciones unitarias por compresión en el material son $\epsilon_x = -225 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = \epsilon_z = -37.5 \times 10^{-6}$.)

Determine las cantidades siguientes: (a) los esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z que actúan sobre las caras x, y y z del cubo; (b) el cambio ΔV en el volumen del cubo y (d) la energía de deformación U almacenada en el cubo. (Suponga $E = 14{,}000$ ksi y $\nu = 0.25$.)

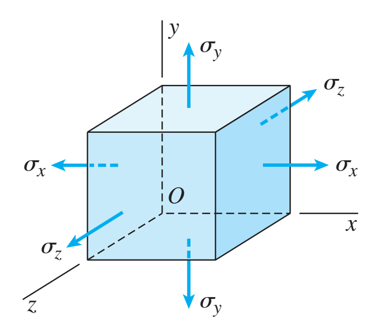


PROBS. 7.6.3 y 7.6.4

7.6.4 Resuelva el problema anterior si el cubo es de granito (E = 60 GPa, ν = 0.25) con dimensiones a = 75 mm y deformaciones unitarias por compresión $\epsilon_x = -720 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = \epsilon_z = -270 \times 10^{-6}$.

7.6.5 Un elemento de aluminio en *esfuerzo triaxial* (consulte la figura) está sometido a esfuerzos σ_x = 5200 psi (tensión), σ_y = −4750 psi (compresión) y σ_z = −3090 psi (compresión). También se sabe que las deformaciones unitarias normales en las direcciones x y y son $\epsilon_x = 713.8 \times 10^{-6}$ (alargamiento) y $\epsilon_y = -502.3 \times 10^{-6}$ (acortamiento).

¿Cuál es el módulo volumétrico K para el aluminio?



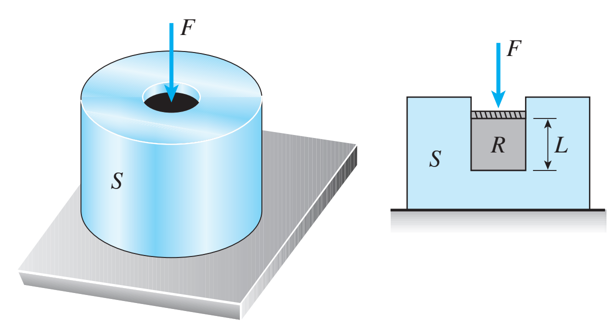
PROBS. 7.6.5 y 7.6.6

7.6.6 Resuelva el problema anterior si el material es nailon sometido a esfuerzos de compresión σ_x = −4.5 MPa, σ_y = –3.6 MPa y σ_z = −2.1 MPa, y las deformaciones unitarias normales son $\epsilon_x = -740 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = -320 \times 10^{-6}$ (acortamientos).

7.6.7 Un cilindro de caucho R con longitud L y área de sección transversal A está comprimido dentro de un cilindro de acero S por una fuerza F que aplica un presión distribuida uniformemente al caucho (consulte la figura).

(a) Deduzca una fórmula para la presión lateral p entre el caucho y el acero. (No tome en cuenta la fricción entre ambos materiales y suponga que el cilindro de acero es rígido cuando se compara con el caucho).

(b) Deduzca una fórmula para el acortamiento δ del cilindro de caucho.



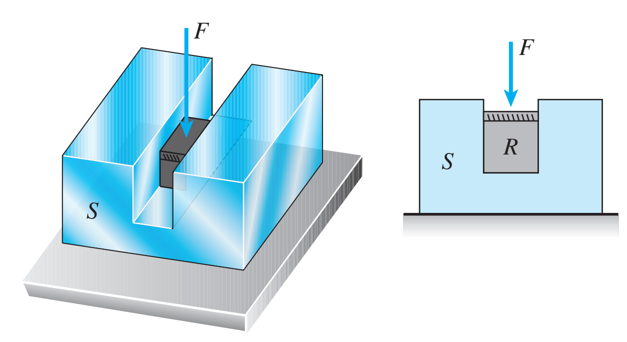
PROB. 7.6.7

7.6.8 Un bloque R de caucho está confinado entre las paredes planas paralelas de un bloque de acero S (consulte la figura). Una presión distribuida uniformemente p_0 se aplica a la parte superior del bloque de caucho por una fuerza F.

(a) Deduzca una fórmula para la presión lateral p entre el caucho y el acero. (No tome en cuenta la fricción entre ambos materiales y suponga que el bloque de acero es rígido cuando se compara con el caucho).

(b) Deduzca una fórmula para la dilatación e del caucho.

(c) Deduzca una fórmula para la densidad de energía de deformación U del caucho.



PROB. 7.6.8

7.6.9 Una bola esférica sólida de latón ($E = 15 \times 10^6$ psi, ν = 0.34) se sumerge en el océano a una profundidad de 10,000 ft. El diámetro de la bola es 11.0 in.

Determine el decremento Δd en el diámetro, el decremento ΔV en el volumen y la energía de deformación U de la bola.

7.6.10 Una esfera sólida de acero (E = 210 GPa, ν = 0.3) está sometida a una presión hidrostática p tal que su volumen se reduce en 0.4%.

(a) Calcule la presión p.

(b) Calcule el módulo de elasticidad volumétrico K para el acero.

(c) Calcule la energía de deformación U almacenada en la esfera si su diámetro es d = 150 mm.

7.6.11 Una esfera sólida de bronce (módulo de elasticidad volumétrico $K = 14.5 \times 10^6$ psi) se calienta repentinamente alrededor de su superficie exterior. La tendencia de la parta calentada de la esfera a dilatarse produce tensión uniforme en todas las direcciones en el centro de la esfera.

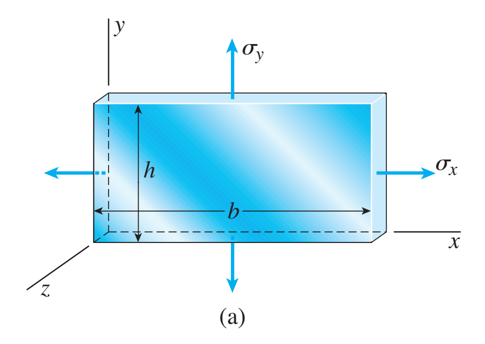
Si el esfuerzo en el centro es 12,000 psi, ¿cuál es la deformación unitaria? Además, calcule el cambio de volumen unitario e y la densidad de energía de deformación U en el centro.

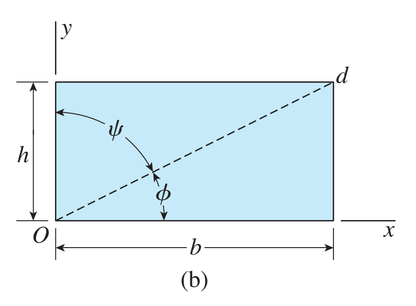
Deformación unitaria plana

Al resolver los problemas para la sección 7.7 considere sólo las deformaciones unitarias en el plano (las deformaciones unitarias en el plano xy) a menos que se indique lo contrario. Utilice las ecuaciones de transformación de deformación unitaria plana excepto cuando se especifique emplear el círculo de Mohr (problemas 7.7.23 a 7.7.28).

7.7.1 Una placa rectangular delgada en *esfuerzo biaxial* está sometida a esfuerzos σ_x y σ_y, como se muestra en la parte (a) de la figura. El ancho y la altura de la placa son b = 8.0 in y h = 4.0 in, respectivamente. Mediciones muestran que las deformaciones unitarias normales en las direcciones x y y son $\epsilon_x = 195 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = -125 \times 10^{-6}$, respectivamente.

Con referencia a la parte (b) de la figura, que muestra una vista bidimensional de la placa, determine las cantidades siguientes: (a) el incremento Δd en la longitud de la diagonal Od; (b) el cambio $\Delta\phi$ en el ángulo ϕ entre la diagonal Od y el eje x y (c) el cambio $\Delta\psi$ en el ángulo ψ entre la diagonal Od y el eje y.



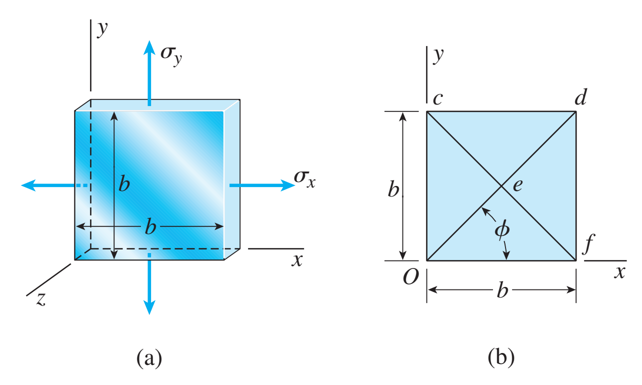


PROBS. 7.7.1 y 7.7.2

7.7.2 Resuelva el problema anterior si b = 160 mm, h = 60 mm, $\epsilon_x = 410 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = -320 \times 10^{-6}$.

7.7.3 Una placa cuadrada delgada en *esfuerzo biaxial* está sometida a esfuerzos σ_x y σ_y, como se muestra en la parte (a) de la figura. El ancho de la placa es b = 12.0 in. Las mediciones muestran que las deformaciones unitarias normales en las direcciones x y y son $\epsilon_x = 427 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = 113 \times 10^{-6}$, respectivamente.

Con referencia a la parte (b) de la figura, que muestra una vista bidimensional de la placa, determine las cantidades siguientes: (a) el incremento Δd en la longitud de la diagonal Od; (b) el cambio $\Delta\phi$ en el ángulo ϕ entre la diagonal Od y el eje x y (c) la deformación unitaria por cortante γ asociada con las diagonales Od y cf (es decir, encuentre el decremento del ángulo ced).

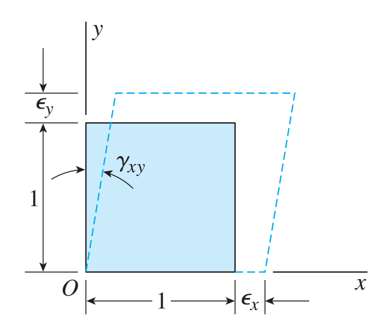


PROBS. 7.7.3 y 7.7.4

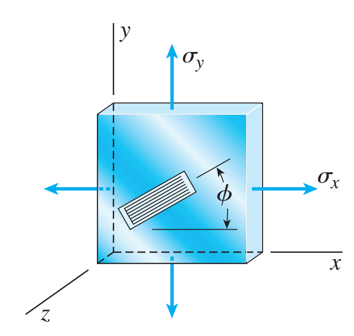
7.7.4 Resuelva el problema anterior si b = 225 mm, $\epsilon_x = 845 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = 211 \times 10^{-6}$.

7.7.5 Un elemento de material sometido a *deformación unitaria plana* (consulte la figura) tiene las deformaciones unitarias siguientes: $\epsilon_x = 220 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 480 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6}$.

Calcule las deformaciones unitarias para un elemento orientado a un ángulo $\theta = 50°$ y muestre estas deformaciones unitarias en un diagrama de un elemento orientado de manera apropiada.



PROBS. 7.7.5 a 7.7.10



PROBS. 7.7.11 y 7.7.12

7.7.6 Resuelva el problema anterior para los datos siguientes: $\epsilon_x = 420 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -170 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = 310 \times 10^{-6}$ y $\theta = 37.5°$.

7.7.7 Las deformaciones unitarias para un elemento de material en *deformación unitaria plana* (consulte la figura) son las siguientes: $\epsilon_x = 480 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 140 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -350 \times 10^{-6}$.

Determine las deformaciones unitarias principales y las deformaciones unitarias por cortante máximas, y muestre estas deformaciones en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.

7.7.8 Resuelva el problema anterior para las deformaciones unitarias siguientes: $\epsilon_x = 120 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -450 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -360 \times 10^{-6}$.

7.7.9 Un elemento de material en *deformación unitaria plana* (consulte la figura) está sometido a deformaciones unitarias $\epsilon_x = 480 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 70 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 420 \times 10^{-6}$.

Determine las siguientes cantidades: (a) las deformaciones unitarias para un elemento orientado a un ángulo $\theta = 75°$, (b) las deformaciones unitarias principales y (c) las deformaciones unitarias máximas. Muestre los resultados en diagramas de elementos orientado de manera apropiada.

7.7.10 Resuelva el problema anterior para los siguientes datos: $\epsilon_x = -1120 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -430 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = 780 \times 10^{-6}$ y $\theta = 45°$.

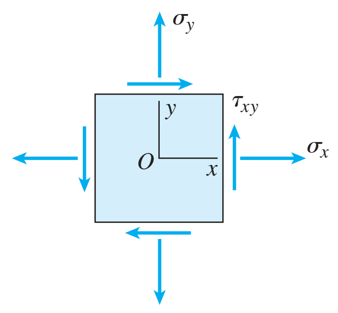
7.7-11 Una placa de acero con módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ psi y relación de Poisson $\nu = 0.30$ está cargada en *esfuerzo biaxial* por esfuerzos normales σ_x y σ_y (consulte la figura). Un deformímetro está adherido a la placa en un ángulo $\phi = 30°$.

Si el esfuerzo σ_x es 18,000 psi y la deformación unitaria medida por el deformímetro es $\epsilon = 407 \times 10^{-6}$, ¿cuáles es el esfuerzo cortante máximo $(\tau_{máx})_{xy}$ y la deformación unitaria por cortante $(\gamma_{máx})_{xz}$ en el plano xz? ¿Cuál es la deformación unitaria por cortante máxima $(\gamma_{máx})_{yz}$ en el plano yz?

7.7.12 Resuelva el problema anterior si la placa está hecha de aluminio con $E = 72$ GPa y $\nu = 1/3$, el esfuerzo σ_x es 86.4 MPa, el ángulo ϕ es 21° y la deformación unitaria es ϵ es 946×10^{-6}.

7.7.13 Un elemento en *esfuerzo plano* está sometido a esfuerzos $\sigma_x = -8400$ psi, $\sigma_y = 1100$ psi y $\tau_{xy} = -1700$ psi (consulte la figura). El material es aluminio con módulo de elasticidad $E = 10\,000$ ksi y relación de Poisson $\nu = 0.33$.

Determine las siguientes cantidades: (a) las deformaciones unitarias para un elemento orientado a un ángulo $\theta = 30°$, (b) las deformaciones unitarias principales y (c) las deformaciones unitarias por cortante. Muestre los resultados en bosquejos de elementos orientados de manera apropiada.

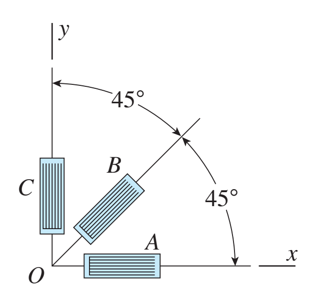


PROBS. 7.7.13 y 7.7.14

7.7-14 Resuelva el problema anterior para los datos siguientes: $\sigma_x = -150$ MPa, $\sigma_y = -210$ MPa, $\tau_{xy} = -16$ MPa y $\theta = 50°$. El material es latón con $E = 100$ GPa y $\nu = 0.34$.

7.7.15 Durante una prueba de una ala de un avión, las lecturas de los deformímetros de roseta a 45° (consulte la figura) son las siguientes: deformímetro A, 520×10^{-6}; deformímetro B, 360×10^{-6} y deformímetro C, -80×10^{-6}.

Determine las deformaciones unitarias principales y las deformaciones unitarias por cortante máximas y muéstrelas en diagramas de elementos orientados de manera adecuada.



PROBS. 7.7.15 y 7.7.16

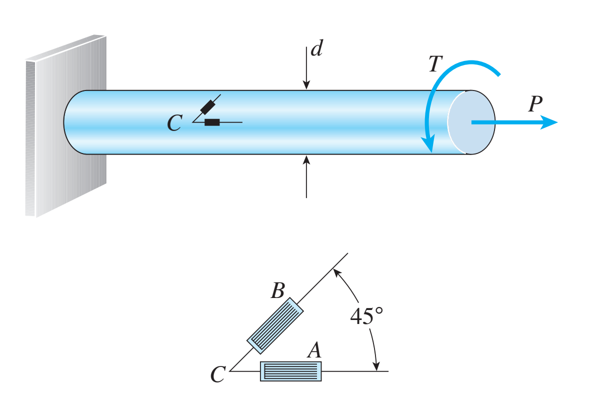
7.7.16 Una roseta de deformaciones a 45° (consulte la figura) montada sobre la superficie del chasis de un automóvil da las lecturas siguientes: deformímetro A, 310×10^{-6}; deformímetro B, 180×10^{-6} y deformímetro C, -160×10^{-6}.

Determine las deformaciones unitarias principales y las deformaciones unitarias por cortante y muéstrelas en bosquejos de elementos orientados de manera apropiada.

7.7.17 Una barra sólida circular con diámetro $d = 1.5$ in está sometida a una fuerza axial P y a un par de torsión T (consulte la figura). Deformímetros montados sobre la superficie de la barra dan las lecturas siguientes: $\epsilon_a = 100 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_b = -55 \times 10^{-6}$. La barra está hecha de acero que tiene $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

(a) Determine la fuerza axial P y el par de torsión T.

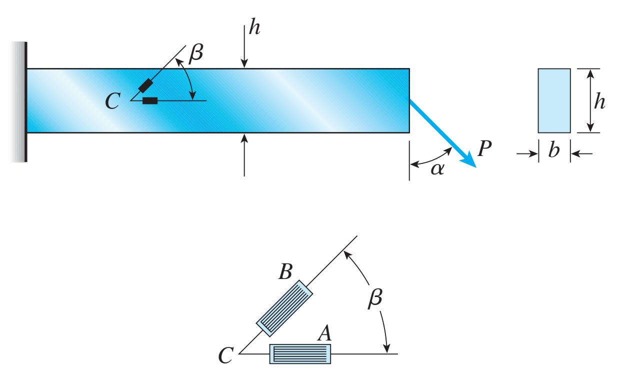
(b) Determine la deformación unitaria por cortante máxima $\gamma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en la barra.



PROB. 7.7.17

7.7.18 Una viga en voladizo con sección transversal rectangular (ancho $b = 25$ mm, peralte $h = 100$ mm) está cargada por una fuerza P que actúa en la mitad de la altura de la viga y está inclinada a un ángulo α con respecto a la vertical (consulte la figura). Dos deformímetros están colocados en el punto C, que también está a la mitad de la altura de la viga. El deformímetro A mide la deformación unitaria en la dirección horizontal y el deformímetro B mide la deformación unitaria a un ángulo $\beta = 60°$ con respecto a la horizontal. Las deformaciones unitarias medidas son $\epsilon_a = 125 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_b = -375 \times 10^{-6}$.

Determine la fuerza P y el ángulo α, suponga que el material es acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 1/3$.

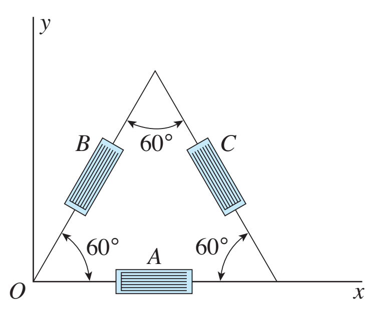


PROBS. 7.7.18 y 7.7.19

7.7.19 Resuelva el problema anterior si las dimensiones de la sección transversal son $b = 1.0$ in y $h = 3.0$ in, el ángulo de calibración es $\beta = 75°$, las deformaciones unitarias medidas son $\epsilon_a = 171 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_b = -266 \times 10^{-6}$, y el material es una aleación de magnesio con módulo $E = 6.0 \times 10^6$ psi y relación de Poisson $\nu = 0.35$.

7.7.20 Una roseta de deformaciones a 60°, o *roseta delta*, consiste de tres deformímetros de resistencia eléctrica como se muestra en la figura. El deformímetro A mide la deformación unitaria normal ϵ_a en la dirección del eje x. Los deformímetros B y C miden las deformaciones unitarias ϵ_b y ϵ_c en las direcciones inclinadas mostradas.

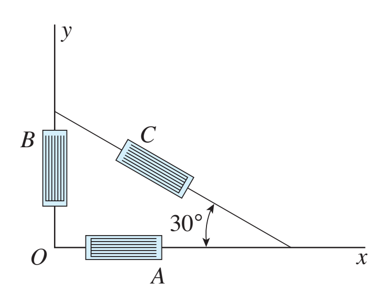
Obtenga ecuaciones para las deformaciones ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes xy.



PROB. 7.7.20

7.7.21 Sobre la superficie de un componente estructural en un vehículo espacial, las deformaciones unitarias se controlan por medio de tres deformímetros configurados como se muestra en la figura. Durante una cierta maniobra se registraron las deformaciones unitarias siguientes: $\epsilon_a = 1100 \times 10^{-6}$, $\epsilon_b = 200 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_c = 200 \times 10^{-6}$.

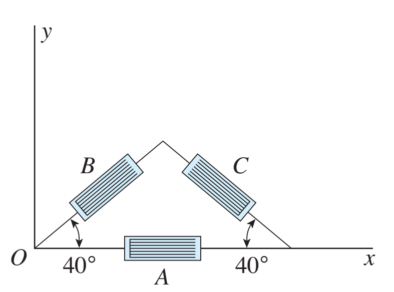
Determine las deformaciones unitarias principales y los esfuerzos principales en el material, que es una aleación de magnesio para la cual $E = 6000$ ksi y $\nu = 0.35$. (Muestre las deformaciones unitarias principales y los esfuerzos principales en diagramas de elementos orientados de manera apropiada.)



PROB. 7.7.21

7.7.22 Las deformaciones unitarias en la superficie de un dispositivo experimental hecho de aluminio puro ($E = 70$ GPa, $\nu = 0.33$) y probado en el transbordador espacial se midieron por medio de deformímetros, que estaban orientados como se muestra en la figura y las deformaciones unitarias medidas fueron $\epsilon_a = 1100 \times 10^{-6}$, $\epsilon_b = 1496 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_c = -39.44 \times 10^{-6}$.

¿Cuál es el esfuerzo σ_x en la dirección x?



PROB. 7.7.22

7.7.23 Resuelva el problema 7.7.5 utilizando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

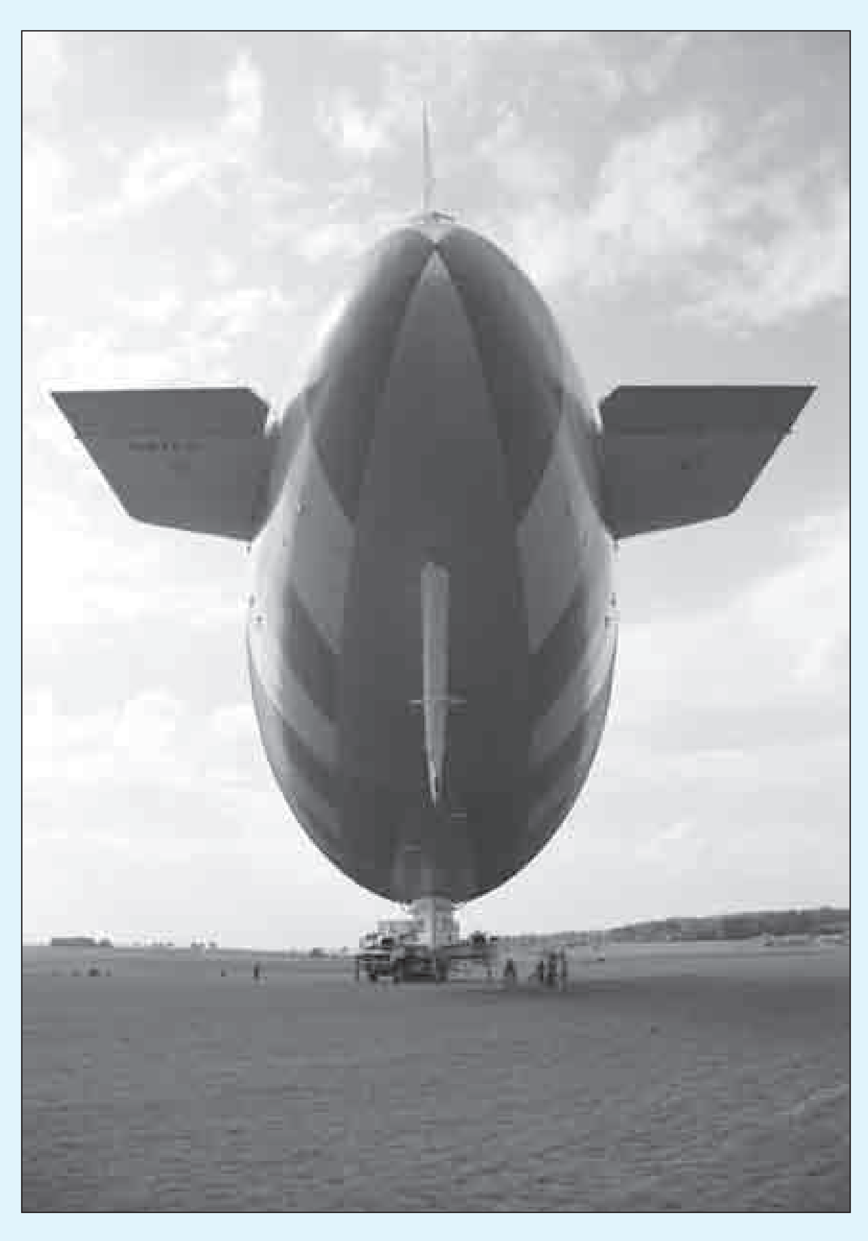
7.7.24 Resuelva el problema 7.7.6 utilizando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

7.7.25 Resuelva el problema 7.7.7 utilizando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

7.7.26 Resuelva el problema 7.7.8 utilizando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

7.7.27 Resuelva el problema 7.7.9 utilizando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

7.7.28 Resuelva el problema 7.7.10 utilizando el círculo de Mohr para deformación unitaria plana.



Las aeronaves como este dirigible dependen de la presión interna para mantener su forma, al emplear un gas más ligero que el aire para obtener su sustentación boyante.

8

Aplicaciones del esfuerzo plano (recipientes a presión, vigas y cargas combinadas)

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Este capítulo trata de una de las aplicaciones del esfuerzo plano, un tema analizado con detalle en las secciones 7.2 a 7.5 del capítulo anterior. El esfuerzo plano es una condición común de esfuerzo que existe en todas las estructuras ordinarias, incluidos edificios, máquinas, vehículos y aeronaves. Primero se presenta la teoría de cascarones de pared delgada, que describe el comportamiento de recipientes a presión esféricos (sección 8.2) y cilíndricos (sección 8.3) ante la presión interna y que tienen paredes cuyos espesores t son pequeños comparados con el radio r de la sección transversal (es decir, $r/t > 10$). Determinaremos los esfuerzos y las deformaciones en las paredes de estas estructuras debidas a las presiones internas de gases comprimidos o líquidos. Se considerará sólo la presión interna positiva (no los efectos de las cargas externas, las reacciones, el peso del contenido y el de la estructura). Se supone comportamiento lineal elástico y las fórmulas para esfuerzos en membranas en recipientes esféricos y esfuerzos de aro y axiales en recipientes cilíndricos sólo son válidos en regiones del recipiente alejadas de concentraciones de esfuerzos causadas por aberturas y ménsulas o patas de soporte. Luego, se investiga la variación en los esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos en vigas (sección 8.4), con base en los análisis de esfuerzos en vigas en el capítulo 5. La variación en estas cantidades a través de la viga se pueden representar empleando trayectorias de esfuerzo o contornos de esfuerzo. Las trayectorias de esfuerzo dan las direcciones de los esfuerzos principales, en tanto que los contornos de esfuerzo conectan puntos con esfuerzo principal igual en puntos en toda la viga. Por último, se evalúan los esfuerzos en puntos de interés en estructuras sometidas a cargas combinadas (axial, cortante, torsión, flexión y posiblemente presión interna) (sección 8.5). Nuestro objetivo es determinar los esfuerzos normal máximo y cortante máximo en varios puntos en estas estructuras. Se supone comportamiento lineal elástico de manera que se puede emplear superposición para combinar esfuerzos normales y cortantes debidos a varias cargas, todo lo cual contribuye al estado de esfuerzo plano en ese punto.

Este capítulo está organizado como sigue:

8.1 INTRODUCCIÓN

Ahora investigaremos algunos ejemplos prácticos de estructuras y componentes en estados de esfuerzo plano o deformación plana, con base en los conceptos presentados en el capítulo 7. Primero examinaremos los esfuerzos y las deformaciones en las paredes de recipientes de pared delgada a presión. Luego consideramos las variaciones en los esfuerzos en varios puntos de interés en vigas. Por último, evaluamos estructuras sometidas a cargas combinadas para determinar los esfuerzos normales y cortantes máximos que gobiernan su diseño.

8.2 RECIPIENTES ESFÉRICOS A PRESIÓN



Recipiente esférico a presión de pared delgada empleado para almacenar propano en una refinería petrolera

Los **recipientes a presión** son estructuras cerradas que contienen líquidos o gases a presión. Algunos ejemplos conocidos son tanques, tubos y cabinas presurizadas en aeronaves y vehículos espaciales. Cuando los recipientes tienen paredes delgadas en comparación con sus dimensiones globales, se les incluye en una categoría más general conocida como **cascarones**. Otros ejemplos de cascarones son los domos de techos, las alas de aviones y los cascos de submarinos.

En esta sección consideramos los recipientes a presión de pared delgada con forma esférica, como el tanque de aire comprimido que se muestra en la figura 8.1. El término **pared delgada** no es preciso, pero como regla general, los recipientes a presión se consideran que son de pared delgada cuando la razón entre el radio r y el espesor de pared t (figura 8.2) es mayor que 10. Cuando esta condición se cumple, podemos determinar los esfuerzos en las paredes con precisión razonable empleando sólo la estática.

En los siguientes análisis suponemos que la presión interna p (figura 8.2) excede la presión que actúa sobre el exterior del cascarón. De lo contrario, el recipiente puede desplomarse debido al pandeo.

Una esfera es la forma ideal teórica para un recipiente que resiste una presión interna. Sólo necesitamos contemplar la familiar burbuja de jabón para reconocer que una esfera es la forma "natural" para este propósito. Para determinar los esfuerzos en un recipiente esférico, cortemos a través de la esfera sobre un plano diametral vertical (figura 8.3a) y aislemos la mitad del cascarón *y su contenido de fluido* como un solo cuerpo libre (figura 8.3b). En este cuerpo libre actúan los esfuerzos de tensión σ en la pared del recipiente y la presión del fluido p. Esta presión actúa en sentido horizontal contra el área circular plana de fluido que permanece dentro del hemisferio. Como la presión es uniforme, la fuerza de presión resultante P (figura 8.3b) es

$$P = p(\pi r^2) \qquad \text{(a)}$$

donde r es el diámetro interior de la esfera.

Observe que la presión p no es la presión absoluta dentro del recipiente, sino que es la presión interna neta, o la **presión manométrica.** Ésta es la presión interna *mayor* que la presión que actúa sobre el exterior del recipiente. Si las presiones interna y externa son iguales, no se desarrollan esfuerzos en la pared del recipiente; sólo el exceso de presión interna con respecto a la presión externa tiene algún efecto sobre estos esfuerzos.

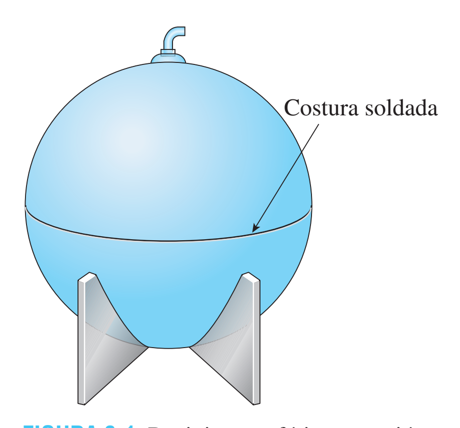


FIGURA 8.1 Recipiente esférico a presión.

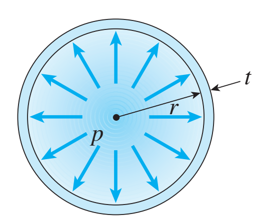


FIGURA 8.2 Sección transversal de un recipiente esférico a presión en la que se muestra el radio interno r, el espesor de pared t y la presión interna p.

Debido a la simetría del recipiente y de su carga (figura 8.3b), el esfuerzo de tensión σ es uniforme alrededor de la circunferencia. Además, como la pared es delgada, podemos suponer con buena precisión que el esfuerzo está distribuido uniformemente a través del espesor t. La precisión de esta aproximación aumenta conforme el cascarón es más delgado y disminuye a medida que es más grueso.

La resultante de los esfuerzos de tensión σ en la pared es una fuerza horizontal igual al esfuerzo σ multiplicado por el área sobre la que actúa, o

$$\sigma(2\pi r_m t)$$

donde t es el espesor de la pared y r_m es el radio medio:

$$r_m = r + \frac{t}{2} \qquad \text{(b)}$$

Por tanto, el equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal (figura 8.3b) da

$$\sum F_{\text{horiz}} = 0 \qquad \sigma(2\pi r_m t) - p(\pi r^2) = 0 \qquad \text{(c)}$$

de la cual obtenemos el *esfuerzo de tensión* en la pared del recipiente:

$$\sigma = \frac{pr^2}{2r_m t} \qquad \text{(d)}$$

Dado que nuestro análisis es válido sólo para cascarones delgados, podemos descartar la diferencia pequeña entre los dos radios que aparecen en la ecuación (d) y reemplazar r_m con r o reemplazar r con r_m. Si bien cualquier opción es satisfactoria para este análisis aproximado, resulta que los esfuerzos están más cercanos a los esfuerzos teóricamente exactos si usamos el radio interno r en lugar del radio medio r_m. Por tanto, adoptaremos la fórmula siguiente para calcular los **esfuerzos de tensión en la pared de un cascarón esférico:**

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \qquad \text{(8.1)}$$

Como es evidente de la simetría de un cascarón esférico, obtenemos la misma ecuación para los esfuerzos de tensión cuando cortamos un plano por el centro de la esfera en cualquier dirección. De esta manera, llegamos a la conclusión siguiente: *la pared de un recipiente esférico presurizado está sometida a esfuerzos de tensión uniformes σ en todas direcciones*. Esta condición de esfuerzo se representa en la figura 8.3c mediante el elemento de esfuerzo pequeño con esfuerzos σ que actúan en direcciones mutuamente perpendiculares.

Los esfuerzos que actúan en sentido tangencial a la superficie del cascarón, como los esfuerzos σ que se muestran en la figura 8.3c, se conocen como **esfuerzos de membrana.** El nombre se origina del hecho que son los únicos esfuerzos que existen en membranas verdaderas, como películas de jabón.

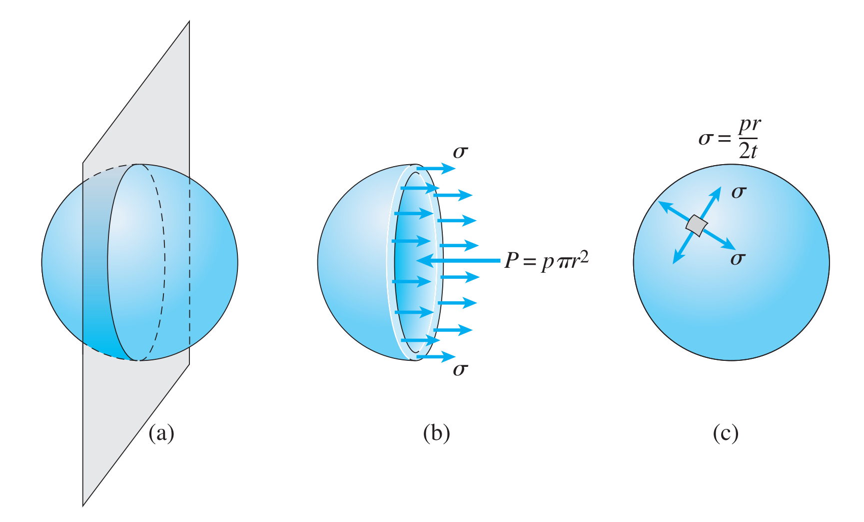
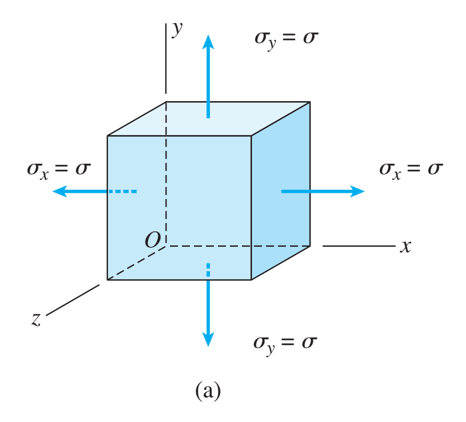


FIGURA 8.3 Esfuerzos de tensión σ en la pared de un recipiente esférico a presión.



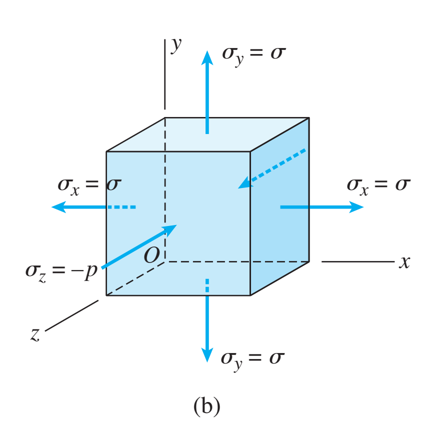


FIGURA 8.4 Esfuerzos en un recipiente esférico a presión en (a) la superficie exterior y (b) la superficie interior.

Esfuerzos en la superficie exterior

La superficie exterior de un recipiente esférico a presión por lo general está libre de la acción de cargas. Por tanto, el elemento que se muestra en la figura 8.3c está en *esfuerzo biaxial*. Para ayudar en el análisis de los esfuerzos que actúan sobre este elemento, lo mostramos de nuevo en la figura 8.4a, donde un conjunto de ejes coordenados está orientado paralelo a los lados del elemento. Los ejes x y y son tangenciales a la superficie de la esfera y el eje z es perpendicular a la superficie. Por tanto, los esfuerzos normales σ_x y σ_y son iguales que los esfuerzos de membrana σ y el esfuerzo normal σ_z es cero. No actúan esfuerzos cortantes sobre los lados de este elemento.

Si analizamos el elemento de la figura 8.4a mediante las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (consulte la figura 7.1 y las ecuaciones 7.4a y 7.4b de la sección 7.2), obtenemos

$$\sigma_{x_1} = \sigma \quad \text{y} \quad \tau_{x_1 y_1} = 0$$

como se esperaba. En otras palabras, cuando consideramos elementos obtenidos al girar los ejes con respecto al eje z, los esfuerzos normales permanecen constantes y no hay esfuerzos cortantes. *Cada plano es un plano principal y cada dirección es una dirección principal*. Por tanto, los **esfuerzos principales** para el elemento son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad \sigma_3 = 0 \tag{8.2a,b}$$

Los esfuerzos σ_1 y σ_2 se encuentran en el plano xy y el esfuerzo σ_3 actúa en la dirección z.

Para obtener los **esfuerzos cortantes máximos,** debemos considerar rotaciones fuera del plano, es decir, rotaciones con respecto a los ejes x y y (debido a que todos los esfuerzos cortantes en el plano son cero). Los elementos orientados haciendo rotaciones de 45° con respecto a los ejes x y y tienen esfuerzos cortantes máximos iguales a $\sigma/2$ y esfuerzos normales iguales a $\sigma/2$. Por tanto,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma}{2} = \frac{pr}{4t} \tag{8.3}$$

Estos son los esfuerzos cortantes máximos en el elemento.

Esfuerzos en la superficie interior

En la superficie interior de la pared de un recipiente esférico, un elemento de esfuerzo (figura 8.4b) tiene los mismos esfuerzos de membrana σ_x y σ_y que un elemento en las superficie exterior (figura 8.4a). Además, un esfuerzo de compresión σ_z es igual a la presión p que actúa en la dirección z (figura 8.4b). Este esfuerzo de compresión disminuye de p en la superficie interior de la esfera a cero en la superficie exterior.

El elemento que se muestra en la figura 8-4b está en estado triaxial con esfuerzos principales

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad \sigma_3 = -p \tag{e,f}$$

Los esfuerzos cortantes en el plano son cero, pero el esfuerzo cortante máximo fuera del plano (obtenido por una rotación de 45° con respecto al eje x o y) es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma + p}{2} = \frac{pr}{4t} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{r}{2t} + 1\right) \tag{g}$$

Cuando el recipiente es de pared delgada y la razón r/t es grande, podemos omitir el número 1 en comparación con el término $r/2t$. En otras palabras, el esfuerzo principal σ_3 en la dirección z es pequeño cuando se compara con los esfuerzos principales σ_1 y σ_2. En consecuencia, podemos considerar que el estado de esfuerzo en la superficie interior es igual que el de la superficie exterior (esfuerzo biaxial). Esta aproximación es consistente con la naturaleza aproximada de la teoría del cascarón delgado, y por lo tanto emplearemos las ecuaciones (8.1), (8.2) y (8.3) para obtener los esfuerzos en la pared de un recipiente esférico a presión.

Comentarios generales

Los recipientes a presión suelen tener aberturas en sus paredes (que sirven como entradas y salidas del fluido) así como accesorios y soportes que ejercen fuerzas sobre el cascarón (figura 8.1). Estos dispositivos resultan en discontinuidades en la distribución de esfuerzos, o *concentraciones de esfuerzos*, que no se pueden analizar mediante las fórmulas elementales dadas aquí. Por lo que se necesitan métodos de análisis más avanzados. Otros factores que afectan el diseño de los recipientes a presión son corrosión, impactos accidentales y cambios de temperatura.

Algunas de las limitantes de la teoría de los cascarones delgados cuando se aplica a recipientes de pared delgada son las siguientes:

1. El espesor de la pared debe ser pequeño en comparación con las otras dimensiones (la razón r/t debe ser 10 o mayor).
2. La presión interna debe ser mayor que la presión externa (para evitar el pandeo hacia dentro).

3. El análisis que se presenta en esta sección se basa sólo en los efectos de la presión interna (no se consideran los efectos de las cargas externas, las reacciones, el peso del contenido del recipiente y el peso propio de la estructura).

4. Las fórmulas deducidas en esta sección son válidas en toda la pared del recipiente *excepto* cerca de puntos de concentraciones de esfuerzos.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se utilizan los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes en el análisis de un cascarón esférico.

Ejemplo 8.1

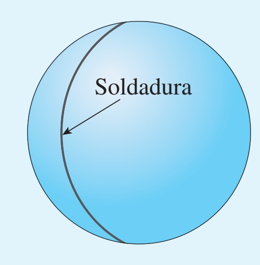


FIGURA 8.5 Ejemplo 8.1. Recipiente esférico a presión. (No se muestran los accesorios y soportes.)

Un tanque de aire comprimido con diámetro interior de 18 in y espesor de pared de 1/4 de in se forma soldando dos hemisferios de acero (figura 8.5).

(a) Si el esfuerzo de tensión permisible en el acero es 14,000 psi, ¿cuál es la presión p_a máxima permisible del aire en el recipiente?

(b) Si el esfuerzo cortante permisible en el acero es 5700 psi, ¿cuál es la presión p_b máxima permisible?

(c) Si la deformación normal en la superficie exterior del recipiente no debe sobrepasar 0.0003, ¿cuál es la presión p_c máxima permisible? (Suponga que la ley de Hooke es válida y que el módulo de elasticidad para el acero es 29×10^6 psi y la relación de Poisson es 0.28).

(d) Pruebas del cordón de soldadura muestran que la falla ocurre cuando la carga de tensión sobrepasa 8.1 kips por pulgada de soldadura. Si el factor de seguridad requerido contra la falla de la soldadura es 2.5, ¿cuál es la presión p_d máxima permisible?

(e) Considerando los cuatro factores anteriores, ¿cuál es la presión permisible p_{perm} en el recipiente?

Solución

(a) *Presión permisible con base en el esfuerzo de tensión en el acero*. El esfuerzo de tensión máximo en la pared del recipiente está dado por la fórmula $\sigma = pr/2t$ (consulte la ecuación 8.1). Al despejar de esta ecuación la presión en términos del esfuerzo permisible, obtenemos

$$p_a = \frac{2t\sigma_{perm}}{r} = \frac{2(0.25 \text{ in})(14{,}000 \text{ psi})}{9.0 \text{ in}} = 777.8 \text{ psi}$$

Por tanto, la presión máxima permisible con base en la tensión en la pared del recipiente es $p_a = 777$ psi. (Observe que en un cálculo de este tipo redondeamos hacia abajo, no hacia arriba).

(b) *Presión permisible con base en el esfuerzo cortante en el acero*. El esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente está dado por la ecuación (8.3), de la cual obtenemos la ecuación siguiente para la presión:

$$p_b = \frac{4t\tau_{perm}}{r} = \frac{4(0.25 \text{ in})(5700 \text{ psi})}{9.0 \text{ in}} = 633.3 \text{ psi}$$

Por tanto, la presión permisible con base en el cortante es $p_b = 633$ psi.

(c) *Presión permisible con base en la deformación normal en el acero*. La deformación normal se obtiene de la ley de Hooke para esfuerzo biaxial (ecuación 7.39a):

continúa

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \text{(h)}$$

Al sustituir $\sigma_x = \sigma_y = \sigma = pr/2t$ (consulte la figura 8.4a), obtenemos

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1 - \nu) = \frac{pr}{2tE}(1 - \nu) \qquad (8.4)$$

En esta ecuación podemos despejar la presión p_c:

$$p_c = \frac{2tE\epsilon_{\text{perm}}}{r(1 - \nu)} = \frac{2(0.25 \text{ in})(29 \times 10^6 \text{ psi})(0.0003)}{(9.0 \text{ in})(1 - 0.28)} = 671.3 \text{ psi}$$

Por tanto, la presión permisible con base en la deformación normal en la pared es $p_c = 671$ psi.

(d) *Presión permisible con base en la tensión en la costura soldada*. La carga de tensión permisible sobre la costura soldada es igual a la carga de falla dividida entre el factor de seguridad:

$$T_{\text{perm}} = \frac{T_{\text{falla}}}{n} = \frac{8.1 \text{ k/in}}{2.5} = 3.24 \text{ k/in} = 3240 \text{ lb/in}$$

El esfuerzo de tensión permisible correspondiente es igual a la carga permisible sobre una pulgada lineal de soldadura dividida entre el área de la sección transversal de una pulgada de soldadura:

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{T_{\text{perm}}(1.0 \text{ in})}{(1.0 \text{ in})(t)} = \frac{(3240 \text{ lb/in})(1.0 \text{ in})}{(1.0 \text{ in})(0.25 \text{ in})} = 12{,}960 \text{ psi}$$

Por último, despejamos la presión interna de la ecuación (8.1):

$$p_d = \frac{2t\sigma_{\text{perm}}}{r} = \frac{2(0.25 \text{ in})(12{,}960 \text{ psi})}{9.0 \text{ in}} = 720.0 \text{ psi}$$

Este resultado da la presión permisible con base en la tensión en la costura soldada.

(e) *Presión permisible*. Al comparar los resultados anteriores para p_a, p_b, p_c y p_d, observamos que el esfuerzo cortante en la pared gobierna y que la presión permisible en el recipiente es

$$p_{\text{perm}} = 633 \text{ psi}$$

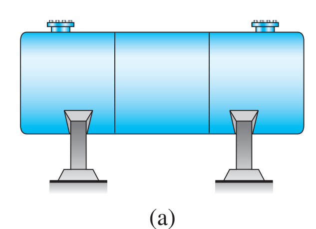
Este ejemplo ilustra cómo varios esfuerzos y deformaciones entran en el diseño de un recipiente esférico a presión.

Nota: cuando la presión interna alcanza el valor máximo permisible (633 psi), los esfuerzos de tensión en el cascarón son

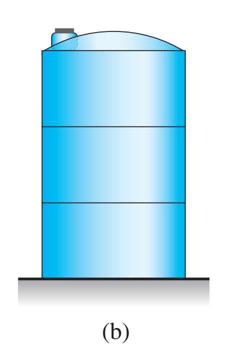
$$\sigma = \frac{pr}{2t} = \frac{(633 \text{ psi})(9.0 \text{ in})}{2(0.25 \text{ in})} = 11{,}400 \text{ psi}$$

Por tanto, en la superficie interna del cascarón (figura 8.4b), la razón entre el esfuerzo principal en la dirección z (633 psi) y los esfuerzos principales en el plano (12,000 psi) es sólo 0.056. Por tanto, se justifica nuestra suposición anterior de que podemos descartar el esfuerzo principal σ_3 en la dirección z y de considerar todo el cascarón en esfuerzo biaxial.

8.3 RECIPIENTES CILÍNDRICOS A PRESIÓN



(a)



(b)

FIGURA 8.6 Recipientes cilíndricos a presión con sección transversal circular.

Los recipientes cilíndricos a presión con sección transversal circular (figura 8.6) se encuentran en instalaciones industriales (tanques de aire comprimido y motores de cohetes), en casas (extinguidores de fuego y latas rociadoras) y en granjas (tanques de propano y silos para granos). Los tubos a presión, como los de suministro de agua y las tuberías forzadas, también se clasifican como recipientes cilíndricos a presión.

Iniciamos nuestro análisis de recipientes cilíndricos al determinar los esfuerzos normales en un *tanque circular de pared delgada AB* sometido a presión interna (figura 8.7a), donde sobre la pared se muestra un *elemento de esfuerzo* con sus caras paralelas y perpendiculares al eje del recipiente. Los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 que actúan sobre las caras de este elemento son los esfuerzos de membrana en la pared. No actúan esfuerzos cortantes sobre estas caras debido a la simetría del recipiente y a su carga. Por tanto, los esfuerzos σ_1 y σ_2 son principales.

Debido a las direcciones de estos esfuerzos principales, el esfuerzo σ_1 se denomina **esfuerzo circunferencial** o **esfuerzo de aro** y el esfuerzo σ_2 se denomina **esfuerzo longitudinal** o **esfuerzo axial** y cada uno se puede calcular a partir del equilibrio empleando diagramas de cuerpo libre apropiados.

Esfuerzo circunferencial



Tanques cilíndricos de almacenamiento en una planta petroquímica

Para determinar el esfuerzo circunferencial σ_1, hacemos dos cortes (*mn* y *pq*) perpendiculares al eje longitudinal y separados una distancia *b* (figura 8.7a). Luego hacemos un tercer corte en un plano vertical a través del eje longitudinal del recipiente, con lo cual resulta el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 8.7b. Este cuerpo libre no sólo consiste de la parte semicircular del recipiente sino también del fluido contenido dentro de los cortes. Sobre el corte longitudinal (plano *mpqn*) actúan los esfuerzos circunferenciales σ_1 y la presión interna *p*.

También actúan esfuerzos y presiones sobre las caras izquierda y derecha del cuerpo libre. Sin embargo, éstos no se muestran en la figura debido a que no entran en la ecuación de equilibrio que utilizaremos. Al igual que en nuestro análisis de un recipiente esférico, no tomaremos en cuenta el peso del recipiente y de su contenido.

Los esfuerzos circunferenciales σ_1 que actúan en la pared del recipiente tienen una resultante igual a $\sigma_1(2bt)$, donde *t* es el espesor de la pared. Además, la fuerza resultante P_1 de la presión interna es igual a $2pbr$, donde *r* es el radio interior del cilindro. De aquí, tenemos la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\sigma_1(2bt) - 2pbr = 0$$

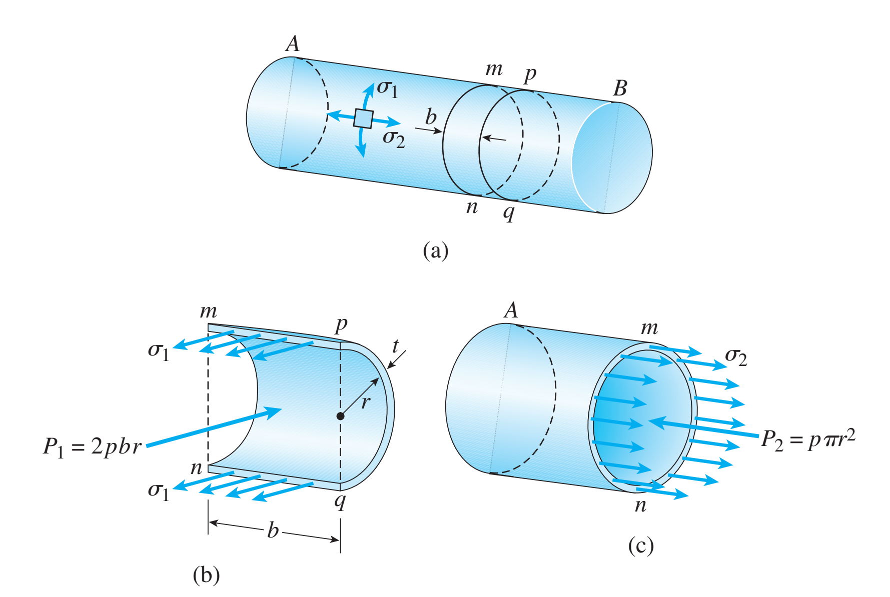


FIGURA 8.7 Esfuerzos en un recipiente circular cilíndrico a presión.

A partir de esta ecuación obtenemos la siguiente fórmula para el *esfuerzo circunferencial en un cilindro presurizado*:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{8.5}$$

Este esfuerzo está distribuido uniformemente sobre el espesor de la pared, siempre que el espesor sea pequeño comparado con el radio.

Esfuerzo longitudinal

El esfuerzo longitudinal σ_2 se obtiene del equilibrio de un cuerpo libre de la parte del recipiente a la izquierda de la sección transversal *mn* (figura 8.7c). De nuevo, el cuerpo libre no sólo incluye parte del recipiente sino también su contenido. Los esfuerzos σ_2 actúan en sentido longitudinal y tienen una fuerza resultante igual a $\sigma_2(2\pi rt)$. Observe que estamos empleando el radio interior del cascarón en lugar del radio medio, como se explicó en la sección 8.2.

La fuerza resultante P_2 de la presión interna es igual a $p\pi r^2$. Por tanto, la ecuación de equilibrio para el cuerpo libre es

$$\sigma_2(2\pi rt) - p\pi r^2 = 0$$

Despejamos σ_2 de esta ecuación y obtenemos la fórmula siguiente para el *esfuerzo longitudinal* en un recipiente cilíndrico a presión:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{8.6}$$

Este esfuerzo es igual al esfuerzo de membrana en un recipiente esférico (ecuación 8.1).

Al comparar las ecuaciones (8.5) y (8.6), observamos que el esfuerzo circunferencial en un recipiente cilíndrico es igual al doble del esfuerzo longitudinal:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \tag{8.7}$$

De este resultado observamos que una costura longitudinal soldada en un recipiente presurizado debe ser el doble de fuerte que una costura circunferencial.

Esfuerzos en la superficie exterior

Los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 en la superficie exterior de un recipiente cilíndrico se muestran en el elemento de esfuerzo de la figura 8.8a. Dado que el tercer esfuerzo principal (que actúa en la dirección z) es cero, el elemento está en *esfuerzo biaxial*.

Los *esfuerzos cortantes máximos en el plano* ocurren sobre planos que están girados 45° con respecto al eje z; estos esfuerzos son

$$(\tau_{\text{máx}})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = \frac{pr}{4t} \tag{8.8}$$

Los *esfuerzos cortantes máximos fuera del plano* se obtienen mediante rotaciones de 45° con respecto a los ejes x y y, respectivamente; por tanto,

$$(\tau_{\text{máx}})_x = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t} \qquad (\tau_{\text{máx}})_y = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{pr}{4t} \tag{8.9a,b}$$

Al comparar los resultados anteriores observamos que el *esfuerzo cortante máximo absoluto* es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t} \tag{8.10}$$

Este esfuerzo ocurre sobre un plano que ha girado 45° con respecto al eje x.

Esfuerzos en la superficie interior

Las condiciones de esfuerzo en la superficie interior de la pared del recipiente se muestran en la figura 8.8b. Los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad \sigma_3 = -p \tag{a,b,c}$$

Los tres esfuerzos cortantes máximos, obtenidos mediante rotaciones de 45° con respecto a los ejes x, y y z, son

$$(\tau_{\text{máx}})_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pr}{2t} + \frac{p}{2} \qquad (\tau_{\text{máx}})_y = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{pr}{4t} + \frac{p}{2} \tag{d,e}$$

$$(\tau_{\text{máx}})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{pr}{4t} \tag{f}$$

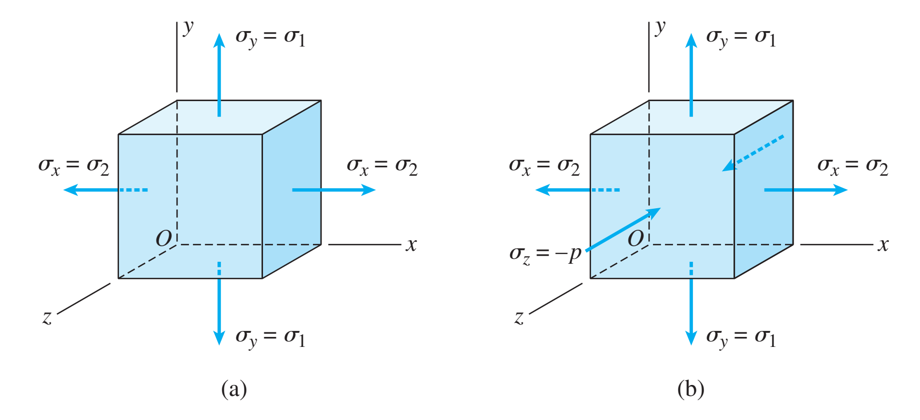


FIGURA 8.8 Esfuerzos en un recipiente circular cilíndrico en (a) la superficie exterior y (b) la superficie interior.

El primero de estos esfuerzos es el mayor. Sin embargo, como se explica en el análisis de esfuerzos cortantes en un cascarón esférico, podemos cancelar el término adicional $p/2$ en las ecuaciones (d) y (e) cuando el cascarón es de pared delgada. Entonces las ecuaciones (d), (e) y (f) se convierten en las ecuaciones (8.9) y (8.8), respectivamente.

Por tanto, en todos nuestros ejemplos y problemas relacionados con recipiente cilíndricos a presión, *no tomaremos en cuenta la presencia del esfuerzo de compresión en la dirección z*. (Este esfuerzo de compresión varía de p en la superficie interior a cero en la superficie exterior). Con esta aproximación, los esfuerzos en la superficie interior se vuelven iguales que los esfuerzos en la superficie exterior (esfuerzo biaxial). Como se explica en el análisis de recipientes esféricos a presión, este procedimiento es satisfactorio cuando consideramos las otras numerosas aproximaciones en esta teoría.

Comentarios generales

Las fórmulas anteriores para esfuerzos en un cilindro circular son válidas en partes del cilindro alejadas de cualesquiera discontinuidades que ocasionen concentraciones de esfuerzos, como se analizó para cascarones esféricos. Una discontinuidad obvia existe en los extremos de un cilindro donde se unen las cabezas, debido a que la geometría de la estructura cambia abruptamente. Otras concentraciones de esfuerzos se presentan en aberturas, en puntos de apoyo y cuando objetos o accesorios se colocan en el cilindro. Los esfuerzos en estos puntos no se pueden determinar sólo con las ecuaciones de equilibrio; se deben emplear métodos de análisis más avanzados (como la teoría de cascarones y el análisis del elemento finito).

Algunas de las limitaciones de la teoría elemental para cascarones de pared delgada se dan en la sección 8.2.

Ejemplo 8.2

Un recipiente cilíndrico a presión está hecho de una placa larga y angosta de acero envuelta alrededor de un mandril y luego soldada a lo largo de sus bordes para formar una junta helicoidal (figura 8.9). La soldadura helicoidal forma un ángulo σ = 55° con el eje longitudinal. El recipiente tiene un radio interior r = 1.8 m y espesor de pared t = 20 mm. El material es acero con módulo E = 200 GPa y relación de Poisson ν = 0.30. La presión interna p es 800 kPa.

Calcule las cantidades siguientes para la parte cilíndrica del recipiente: (a) los esfuerzos circunferencial y longitudinal σ_1 y σ_2, respectivamente; (b) los esfuerzos cortantes máximos en el plano y fuera del plano; (c) las deformaciones circunferencial y longitudinal ϵ_1 y ϵ_2, respectivamente y (d) el esfuerzo normal σ_w y el esfuerzo cortante τ_w que actúan en sentido perpendicular y paralelo, respectivamente, a la costura soldada.

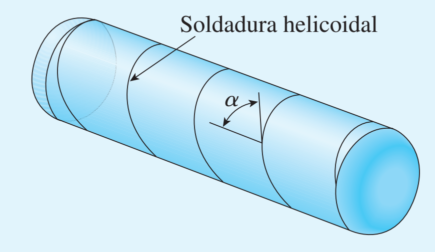
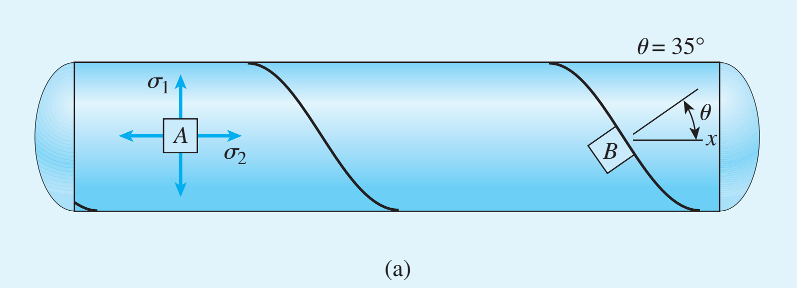


FIGURA 8.9 Ejemplo 8.2. Recipiente cilíndrico a presión con soldadura helicoidal.

Solución

(a) *Esfuerzos circunferencial y longitudinal*. Los esfuerzos circunferencial y longitudinal σ_1 y σ_2, respectivamente, están representados en la figura 8.10a, donde se muestran actuando sobre un elemento de esfuerzo en el punto A en la pared del recipiente. Las magnitudes de los esfuerzos se pueden calcular con las ecuaciones (8.5) y (8.6):

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(800 \text{ kPa})(1.8 \text{ m})}{20 \text{ mm}} = 72 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{\sigma_1}{2} = 36 \text{ MPa}$$



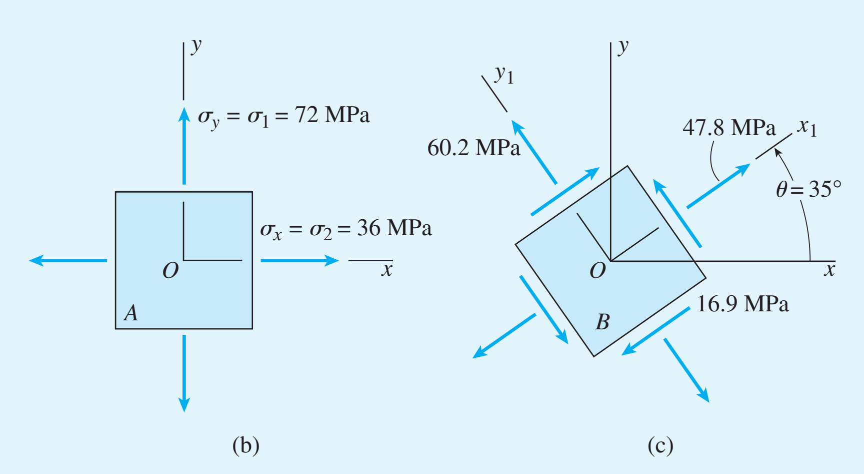


FIGURA 8.10 Solución del ejemplo 8.2.

continúa

El elemento de esfuerzo en el punto A se muestra de nuevo en la figura 8.10b, donde el eje x es en la dirección longitudinal del cilindro y el eje y es en la dirección circunferencial. Como no hay esfuerzo en la dirección z ($\sigma_3 = 0$), el elemento está en esfuerzo biaxial.

Observe que la razón entre la presión interna (800 kPa) y el esfuerzo principal menor en el plano (36 MPa) es 0.022. Por tanto, se justifica nuestra suposición de que no podemos tomar en cuenta ningún esfuerzo en la dirección z y de considerar todos los elementos en el cascarón cilíndrico, incluso aquellos en la superficie interior, como en estado biaxial.

(b) *Esfuerzos cortantes máximos*. El esfuerzo cortante máximo en el plano se obtiene con la ecuación (8.8):

$$(\tau_{\text{máx}})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = \frac{pr}{4t} = 18 \text{ MPa}$$

Dado que no estamos tomando en cuenta el esfuerzo normal en la dirección z, el esfuerzo cortante máximo fuera del plano se obtiene con la ecuación (8.9a):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{pr}{2t} = 36 \text{ MPa}$$

Este último es el esfuerzo cortante máximo absoluto en la pared del recipiente.

(c) *Deformaciones circunferencial y longitudinal*. Como los esfuerzos máximos son menores que el esfuerzo de fluencia del acero (consulte la tabla H.3, apéndice H), podemos suponer que la ley de Hooke se aplica a la pared del recipiente, luego podemos obtener las deformaciones en las direcciones x y y (figura 8.10b) con las ecuaciones (7.39a) y (7.39b) para esfuerzo biaxial:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \text{(g,h)}$$

Donde observamos que la deformación ϵ_x es igual que la deformación principal ϵ_2 en la dirección longitudinal y que la deformación ϵ_y es igual que la deformación principal ϵ_1 en la dirección circunferencial. Además, el esfuerzo σ_x es igual que el esfuerzo σ_2 y el esfuerzo σ_y es igual que el esfuerzo σ_1. Por tanto, las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir en las formas siguientes:

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}(1 - 2\nu) = \frac{pr}{2tE}(1 - 2\nu) \qquad \text{(8.11a)}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{2E}(2 - \nu) = \frac{pr}{2tE}(2 - 2\nu) \qquad \text{(8.11b)}$$

Al sustituir valores numéricos, obtenemos

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}(1 - 2\nu) = \frac{(36 \text{ MPa})[1 - 2(0.30)]}{200 \text{ GPa}} = 72 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{2E}(2 - \nu) = \frac{(72 \text{ MPa})(2 - 0.30)}{2(200 \text{ GPa})} = 306 \times 10^{-6}$$

Estas son las deformaciones longitudinal y circunferencial en el cilindro.

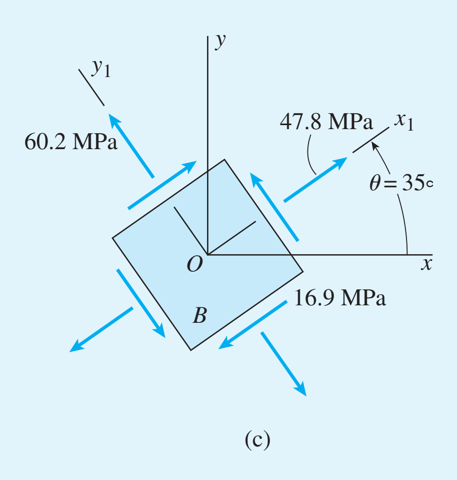


FIGURA 8.10c (Repetida.)

(d) *Esfuerzos normal y cortante que actúan sobre la costura soldada*. El elemento de esfuerzo en el punto B en la pared del cilindro (figura 8.10a) está orientado de manera que los lados son paralelos y perpendiculares a la soldadura. El ángulo θ para el elemento es

$$\theta = 90° - \alpha = 35°$$

como se muestra en la figura 8.10c. Se pueden emplear las ecuaciones de transformación de esfuerzos o bien el círculo de Mohr para obtener los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre las caras laterales de este elemento.

Ecuaciones de transformación de esfuerzos. El esfuerzo normal σ_{x_1} y el esfuerzo cortante $\tau_{x_1y_1}$ que actúan sobre la cara x_1 del elemento (figura 8.10c) se obtienen con las ecuaciones (7.4a) y (7.4b), que se repiten a continuación:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{8.12a}$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{8.12b}$$

Al sustituir $\sigma_x = \sigma_2 = pr/2t$, $\sigma_y = \sigma_1 = pr/t$ y $\tau_{xy} = 0$. Obtenemos

$$\sigma_{x_1} = \frac{pr}{4t}(3 - \cos 2\theta) \qquad \tau_{x_1y_1} = \frac{pr}{4t}\,\text{sen}\,2\theta \tag{8.13a,b}$$

Estas ecuaciones dan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre un plano inclinado orientado a un ángulo θ con el eje longitudinal del cilindro.

Sustituyendo $pr/4t = 18$ MPa y $\theta = 35°$ en las ecuaciones (8.13a) y (8.13b), obtenemos

$$\sigma_{x_1} = 47.8\text{ MPa} \qquad \tau_{x_1y_1} = 16.9\text{ MPa}$$

Estos esfuerzos se muestran en el elemento de esfuerzo de la figura 8.10c.

Para completar el elemento de esfuerzo podemos calcular el esfuerzo normal σ_{y_1} que actúa sobre la cara y_1 del elemento con la suma de los esfuerzos normales sobre caras perpendiculares (ecuación 7.6):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} \tag{8.14}$$

Sustituyendo valores numéricos, obtenemos

$$\sigma_{y_1} = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_{x_1} = 72\text{ MPa} + 36\text{ MPa} - 47.8\text{ MPa} = 60.2\text{ MPa}$$

como se muestra en la figura 8.10c.

continúa

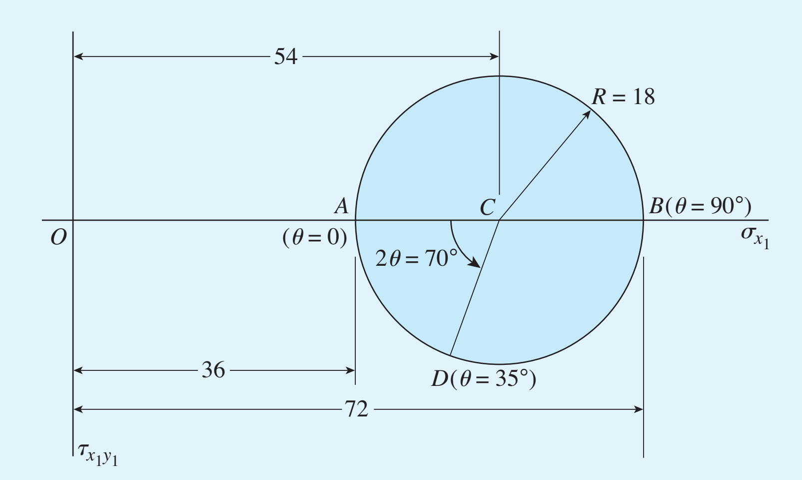


FIGURA 8.11 Círculo de Mohr para el elemento de esfuerzo biaxial de la figura 8.10b. (*Nota:* todos los esfuerzos en el círculo tienen unidades de MPa.)

De la figura, observamos que los esfuerzos normal y cortante que actúan en forma perpendicular y paralela, respectivamente, a la costura soldada son

$$\sigma_w = 47.8 \text{ MPa} \qquad \tau_w = 16.9 \text{ MPa}$$

Círculo de Mohr. El trazo del círculo de Mohr para el elemento de esfuerzo biaxial de la figura 8.10b se muestra en la figura 8.11. El punto A representa el esfuerzo $\sigma_2 = 36$ MPa sobre la cara x ($\theta = 0$) del elemento y el punto B representa el esfuerzo $\sigma_1 = 72$ MPa sobre la cara y ($\theta = 90°$). El centro C del círculo está a un esfuerzo de 54 MPa y el radio del círculo es

$$R = \frac{72 \text{ MPa} - 36 \text{ MPa}}{2} = 18 \text{ MPa}$$

El ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj $2\theta = 70°$ (medido en el círculo desde punto A) ubica el punto D, que corresponde a los esfuerzos sobre la cara x_1 ($\theta = 35°$) del elemento. Las coordenadas del punto D (de la geometría del círculo) son

$$\sigma_{x_1} = 54 \text{ MPa} - R\cos 70° = 54 \text{ MPa} - (18 \text{ MPa})(\cos 70°) = 47.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = R \text{ sen } 70° = (18 \text{ MPa})(\text{sen } 70°) = 16.9 \text{ MPa}$$

Estos resultados son los mismos que se determinaron antes con las ecuaciones de transformación de esfuerzos.

Nota: cuando se observa de manera lateral, una **hélice** sigue la forma de una curva seno (figura 8.12). El paso de la hélice es

$$p = \pi d \tan \theta \tag{8.15}$$

donde d es el diámetro del cilindro circular y θ es el ángulo entre una normal a la hélice y una línea longitudinal. El ancho de la placa plana que se envuelve en la forma cilíndrica es

$$w = \pi d \text{ sen } \theta \tag{8.16}$$

Entonces, si se conocen el diámetro del cilindro y el ángulo θ, se establecen el paso y el ancho de la placa. Por razones prácticas, el ángulo θ suele encontrarse en el rango de 20° a 35°.

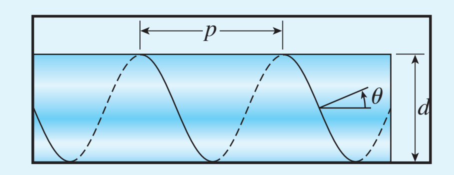


FIGURA 8.12 Vista lateral de una hélice.

8.4 ESFUERZOS MÁXIMOS EN VIGAS

El análisis de esfuerzos de una viga es usual que se comience determinando los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre secciones transversales. Por ejemplo, cuando es válida la ley de Hooke, podemos determinar los esfuerzos normal y cortante con las **fórmulas de la flexión y del cortante** (ecuaciones 5.13 y 5.38, respectivamente, del capítulo 5):

$$\sigma = -\frac{My}{I} \qquad \tau = \frac{VQ}{Ib} \tag{8.17a,b}$$

En la fórmula de la flexión, σ es el esfuerzo normal que actúa sobre la sección transversal, M es el momento flexionante, y es la distancia desde el eje neutro e I es el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje neutro. (Las convenciones de signos para M y y en la fórmula de la flexión se muestran en las figuras 5.9 y 5.10 del capítulo 5).

En el caso de la fórmula del cortante, τ es el esfuerzo cortante en cualquier punto en la sección transversal, V es la fuerza cortante, Q es el primer momento del área de la sección transversal fuera del punto en la sección transversal donde se busca el esfuerzo y b es el ancho de la sección transversal. (La fórmula del cortante se suele escribir sin considerar los signos debido a que las direcciones de los esfuerzos cortantes son obvias de las direcciones de las cargas.)

Los esfuerzos normales obtenidos con la fórmula de la flexión tienen sus valores máximos a las distancias más alejadas desde el eje neutro, en tanto que los esfuerzos cortantes obtenidos con la fórmula del cortante en general tienen sus valores máximos en el eje neutro. Los esfuerzos normales se calculan en la sección transversal de momento flexionante máximo y los esfuerzos cortantes se calculan en la sección transversal de fuerza cortante máxima. En la mayor parte de las circunstancias, estos son los únicos esfuerzos que se necesitan para fines de diseño.

Sin embargo, para obtener una representación más completa de los esfuerzos en una viga, necesitamos determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en varios puntos de la misma. Iniciaremos analizando los esfuerzos en una viga rectangular.

Vigas con sección transversal rectangular

Podemos comprender cómo varían los esfuerzos en una viga considere que ésta es simple con sección transversal rectangular como se muestra en la figura 8.13a. Para fines de este análisis, elegimos una sección transversal a la izquierda de la carga y luego seleccionamos cinco puntos (A, B, C, D y E) en el lado de la viga. Los puntos A y E están en la parte superior e inferior de la viga, respectivamente, el punto C se encuentra a la mitad de la altura de la viga y los puntos B y D se encuentran en posiciones intermedias.

Si es aplicable la ley de Hooke, los esfuerzos normal y cortante en cada uno de estos cinco puntos se pueden calcular con facilidad a partir de las fórmulas de la flexión y del cortante. Como estos esfuerzos actúan sobre la sección transversal, los podemos representar en elementos de esfuerzo con caras vertical y horizontal, como se muestra en la figura 8.13b. Observe que todos los elementos están en esfuerzo plano, dado que no hay esfuerzos que actúen en sentido perpendicular al plano de la figura.

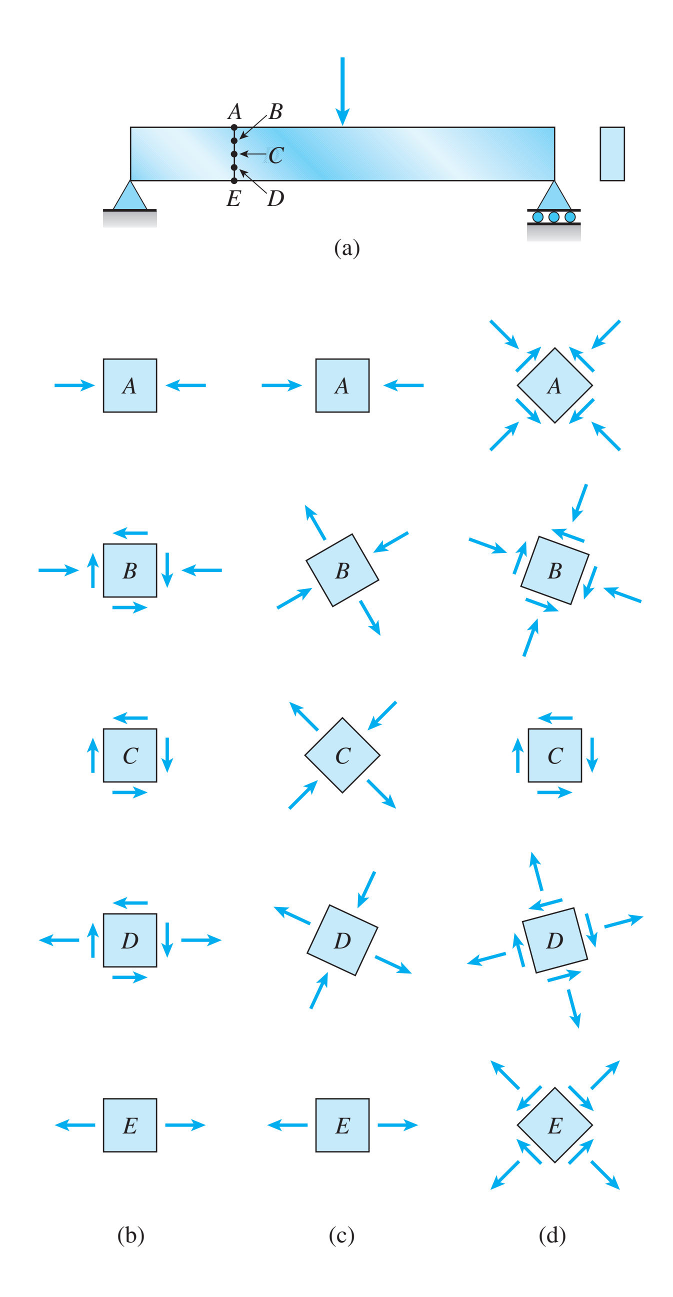


FIGURA 8.13 Esfuerzos en una viga con sección transversal rectangular: (a) viga simple con puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* sobre el lado de la viga; (b) esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre elementos de esfuerzo en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*; (c) esfuerzos principales y (d) esfuerzos cortantes máximos.

En el punto *A*, el esfuerzo normal es de compresión y no hay esfuerzos cortantes. De manera similar, en el punto *E* el esfuerzo normal es de tensión y de nuevo no hay esfuerzos cortantes. Por tanto, los elementos en estas ubicaciones están en esfuerzo uniaxial. En el eje neutro (punto *C*) el elemento está en cortante puro; en las otras dos ubicaciones (puntos *B* y *D*), los esfuerzos normales y cortantes actúan sobre los elementos de esfuerzo.

Para encontrar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en cada punto, podemos emplear las ecuaciones de transformación de esfuerzo plano o bien el círculo de Mohr. Las direcciones de los esfuerzos principales se muestran en la figura 8.13c y las direcciones de los esfuer-

zos cortantes máximos se muestran en la figura 8.13d. (Observe que sólo estamos considerando los esfuerzos en el plano.)

Ahora examinemos los **esfuerzos principales** con más detalle. De los bosquejos en la figura 8.13c, observamos cómo cambian los esfuerzos principales conforme vamos de la parte superior a la inferior de la viga. Iniciemos con el esfuerzo principal de compresión. En el punto *A*, el esfuerzo de compresión actúa en la dirección horizontal y el otro esfuerzo principal es cero. Conforme nos movemos hacia el eje neutro el esfuerzo principal de compresión se inclina y el eje neutro (punto *C*) actúa a 45° con respecto a la horizontal. En el punto *D* el esfuerzo principal de compresión está aún más inclinado desde la horizontal y en la parte inferior de la viga su dirección se hace vertical (excepto que ahora su magnitud es cero).

Así, entonces, la dirección y magnitud del esfuerzo principal de compresión varía continuamente desde la parte superior a la inferior de la viga. Si la sección transversal elegida está ubicada en una región con momento flexionante grande, el esfuerzo principal de compresión máximo ocurre en la parte superior de la viga (punto *A*) y el esfuerzo principal de compresión mínimo (cero) se presenta en la parte inferior de la viga (punto E). Si la sección transversal está ubicada en una región con momento flexionante pequeño y fuerza cortante grande, entonces el esfuerzo principal de compresión está en el eje neutro.

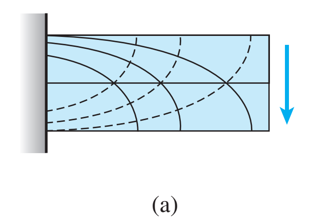
Comentarios análogos son aplicables al esfuerzo principal de tensión, que también varía tanto en magnitud como en dirección conforme nos movemos del punto *A* al *E*. En el punto *A* el esfuerzo de tensión es cero y en el punto *E* tiene su valor máximo. (En la figura 8.19 del ejemplo 8.3 se presentan gráficas que muestran cómo varía la magnitud de los esfuerzos principales para una viga y una sección transversal particulares).

El **esfuerzo cortante máximo** (figura 8.13d) en la parte superior e inferior de la viga ocurre en planos a 45° (debido a que los elementos están en esfuerzo uniaxial). En el eje neutro el esfuerzo cortante máximo ocurre sobre planos vertical y horizontal (dado que el elemento está en cortante puro). En todos los puntos, el esfuerzo cortante máximo se presenta sobre planos orientados a 45° con respecto a los planos principales. En regiones con momento flexionante elevado, los esfuerzos cortantes máximos se tienen en la parte superior e inferior de la viga; en regiones con momento flexionante bajo y fuerza cortante elevada, los esfuerzos cortantes máximos se tienen en el eje neutro.

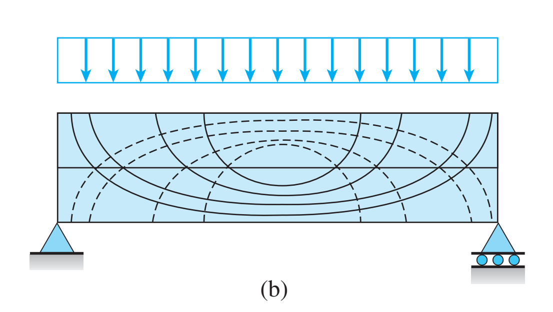
Al investigar los esfuerzos en muchas secciones transversales de la viga, podemos determinar cómo varían los esfuerzos principales en toda ella. Luego podemos trazar dos sistemas de curvas ortogonales, denominadas **trayectorias de esfuerzos,** que proporcionan las direcciones de los esfuerzos principales. En la figura 8.14 se dan ejemplos de trayectorias de esfuerzos para vigas rectangulares. En la parte (a) de la figura se muestra una viga en voladizo con una carga que actúa en el extremo libre y en la parte (b) se muestra una viga simple con una carga uniforme. Se emplean líneas continuas para esfuerzos principales de tensión y líneas discontinuas para esfuerzos principales de compresión. Las curvas para los esfuerzos principales de tensión y compresión siempre se cruzan en ángulos rectos y cada trayectoria cruza el eje longitudinal a 45°. En las superficies superior e inferior de la viga, donde el esfuerzo cortante es cero, las trayectorias son horizontales o bien verticales.*

---

*Las trayectorias de esfuerzos las ideó el ingeniero Karl Culmann (1821-1881); consulte la referencia 8.1.



(a)



(b)

FIGURA 8.14 Trayectorias de esfuerzos principales para vigas con sección transversal rectangular: (a) viga en voladizo y (b) viga simple. (Las líneas continuas representan esfuerzos principales de tensión y las discontinuas esfuerzos principales de compresión.)

Otro tipo de curva que se puede trazar a partir de los esfuerzos principales es un **contorno de esfuerzos,** que es una curva que une puntos con esfuerzo principal igual. Los contornos de esfuerzos para una viga en voladizo con sección transversal rectangular se muestran en la figura 8.15 (sólo para esfuerzos principales de tensión). El contorno de esfuerzo máximo está en la parte superior izquierda de la figura. Conforme nos movemos hacia abajo en la figura, los esfuerzos de tensión representados por los contornos disminuyen cada vez más. La línea de contorno de esfuerzo de tensión cero está en el borde inferior de la viga. Por tanto, el esfuerzo de tensión máximo ocurre en el apoyo, donde el momento flexionante tiene su valor mayor.

Observe que las trayectorias de esfuerzos (figura 8.14) dan las direcciones de los esfuerzos principales pero no proporcionan información sobre sus magnitudes. En general, las magnitudes de los esfuerzos principales varían conforme nos movemos a lo largo de una trayectoria. En contraste, las magnitudes de los esfuerzos principales son constantes conforme nos movemos a lo largo de un contorno de esfuerzo (figura 8.15), pero los contornos no dan información sobre las direcciones de los esfuerzos. En particular, los esfuerzos principales no son paralelos ni perpendiculares a un contorno de esfuerzo.

Las trayectorias y los contornos de esfuerzo de las figuras 8.14 y 8.15 se trazaron a partir de las fórmulas de la flexión y del cortante (ecuaciones 8.17a y b). Al trazar estas figuras no se tomaron en cuenta las concentraciones de esfuerzos cerca de los apoyos y cerca de cargas concentradas, ni los esfuerzos de compresión directos causados por la carga uniforme apoyada sobre la parte superior de la viga (figura 8.14b).

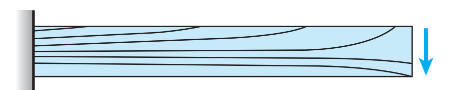


FIGURA 8.15 Contornos de esfuerzo para una viga en voladizo (se muestran sólo esfuerzos principales de tensión).

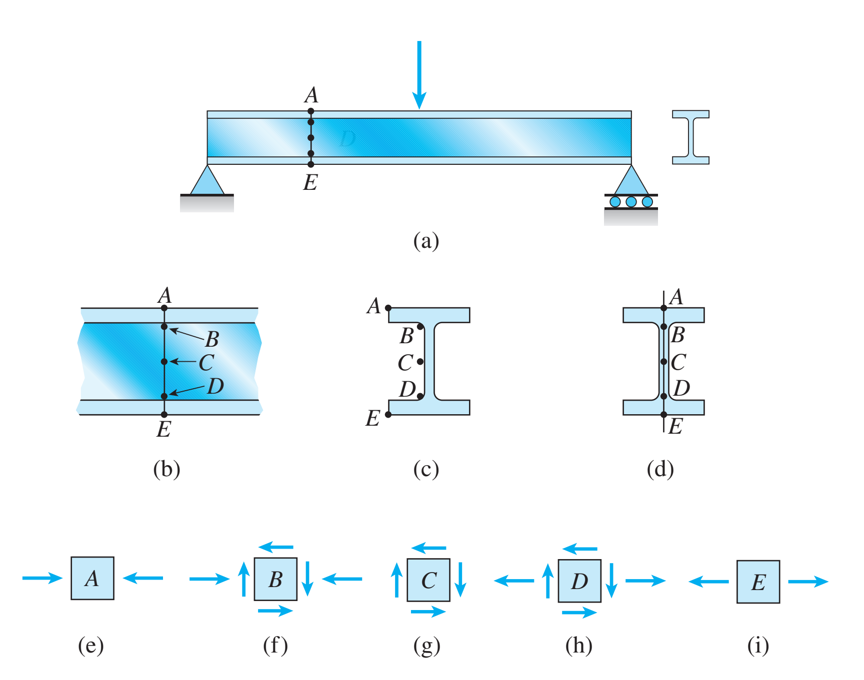


FIGURA 8.16 Esfuerzos en una viga de patín ancho.

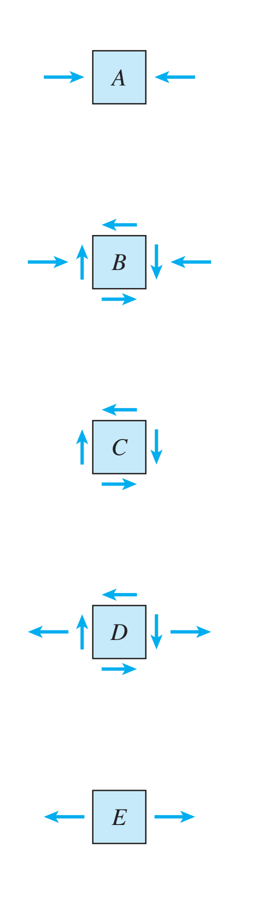


FIGURA 8.13b (Repetida.)

Vigas de patín ancho

Los esfuerzos principales de vigas que tienen otras formas de sección transversal, como las vigas de patín ancho, se pueden analizar de una manera similar a la descrita antes para vigas rectangulares. Por ejemplo, considere la viga de patín ancho simplemente apoyada que se muestra en la figura 8.16a. Procedemos igual que para una viga rectangular, identificamos los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* desde la parte superior a la inferior de la viga (figura 8.16b). Los puntos *B* y *D* están en el alma, donde se une al patín, y el punto *C* está en el eje neutro. Podemos considerar estos puntos como ubicados sobre el lado de la viga (figuras 8.16b y c) o bien dentro de la viga a lo largo de un eje vertical de simetría (figura 8.16d). Los esfuerzos determinados con las fórmulas de la flexión y del cortante son las mismos en los dos conjuntos de puntos.

Los elementos de esfuerzo en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* (según una vista lateral de la viga) se muestran en las partes (e) a (i) de la figura 8.16. Estos elementos tienen la misma apariencia general que los de una viga rectangular (figura 8.13b).

Los **esfuerzos principales** máximos por lo general ocurren en la parte superior e inferior de la viga (puntos *A* y *E*) donde los esfuerzos obtenidos con la fórmula de la flexión tienen sus valores máximos. Sin embargo, dependiendo de las magnitudes relativas del momento flexionante y de la fuerza cortante, los esfuerzos máximos algunas veces ocurren en la unión del alma con el patín (puntos *B* y *D*). La explicación se basa en el hecho de que los esfuerzos normales en los puntos *B* y *D* sólo son ligeramente menores que los de los puntos *A* y *E*, en tanto que los esfuerzos cortantes (que son cero en los puntos *A* y *E*) pueden ser significativos en los puntos *B* y *D* debido al alma delgada. (*Nota:* en la figura 5.38 del capítulo 5 se muestra cómo varían los esfuerzos cortantes en el alma de una viga de patín ancho).

Los **esfuerzos cortantes máximos** que actúan sobre una sección transversal de una viga de patín ancho siempre ocurren en el eje neutro, como se muestra por la fórmula del cortante (ecuación 8.17b). Sin embargo, los esfuerzos cortantes máximos que actúan sobre planos inclinados por lo general ocurren en la parte superior o inferior de la viga (puntos *A* y *E*) o donde el alma se une al patín (puntos *B* y *D*) debido a la presencia de esfuerzos normales.

Al analizar una viga de patín ancho para determinar los esfuerzos máximos, recuerde que pueden existir esfuerzos elevados cerca de los apoyos, puntos de carga, filetes y orificios. Esas *concentraciones de esfuerzos* están confinadas a la región muy cercana a la discontinuidad y no se pueden calcular mediante fórmulas elementales para vigas.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en una sección transversal seleccionada en una viga rectangular. Los procedimientos para una viga de patín ancho son similares.

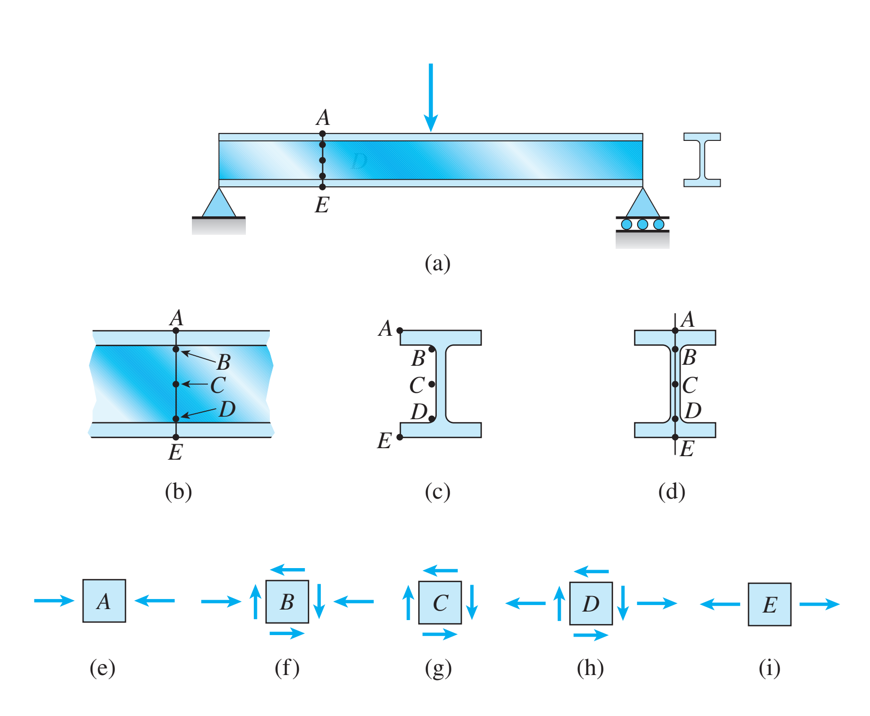


FIGURA 8.16 (Repetida.)

Ejemplo 8.3

Una viga simple AB con longitud L = 6 ft soporta una carga concentrada P = 10,800 lb que actúa a una distancia c = 2 ft desde el apoyo derecho (figura 8.17). La viga está hecha de acero y tiene una sección rectangular con ancho b = 2 in y altura h = 6 in.

Determine los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en la sección transversal mn, ubicada a la distancia x = 9 in desde el extremo A de la viga. (Considere sólo los esfuerzos en el plano.)

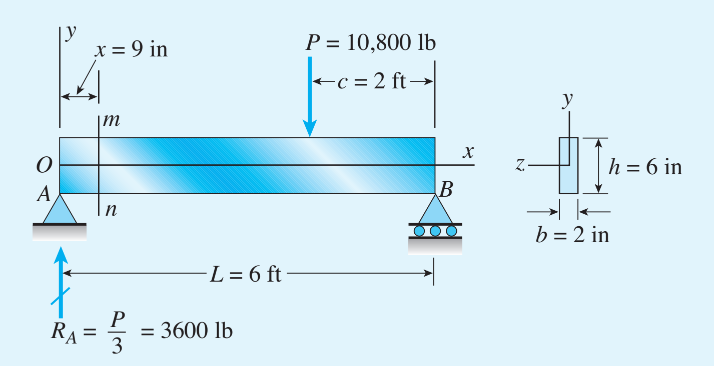


FIGURA 8.17 Ejemplo 8.3. Viga con sección transversal rectangular.

Solución

Iniciamos al emplear las formulas de la flexión y del cortante para calcular los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal mn. Al conocer estos esfuerzos, podemos determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos con las ecuaciones de esfuerzo plano. Por último, podemos trazar gráficas de estos esfuerzos para mostrar cómo varían sobre la altura de la viga.

Como punto preliminar, observamos que la reacción de la viga en el apoyo A es $R_A = P/3$ = 3600 lb y, por tanto, el momento flexionante y la fuerza cortante en la sección mn son

$$M = R_A x = (3600 \text{ lb})(9 \text{ in}) = 32{,}400 \text{ lb-in} \qquad V = R_A = 3600 \text{ lb}$$

Esfuerzos normales sobre la sección transversal mn. Estos esfuerzos se determinan con la fórmula de la flexión (ecuación 8.17a), como se indica:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} = -\frac{12My}{bh^3} = -\frac{12(32{,}400 \text{ lb-in})y}{(2 \text{ in})(6 \text{ in})^3} = -900y \qquad \text{(a)}$$

en donde y tiene unidades de pulgadas (in) y σ_x tiene unidades de libras por pulgada cuadrada (psi). Los esfuerzos calculados con la ecuación (a) son positivos cuando son de tensión y negativos cuando son de compresión. Por ejemplo, observe que un valor positivo de y (mitad superior de la viga) da un esfuerzo negativo, como se esperaba.

En la figura 8.18 se muestra un elemento de esfuerzo cortado del lado de la viga en la sección transversal mn (figura 8.17). Para fines de referencia, un conjunto de ejes xy se muestra asociado con el elemento. El esfuerzo normal σ_x y el esfuerzo cortante τ_{xy} se muestran actuando sobre el elemento en sus direcciones positivas. (Observe que en este ejemplo no hay esfuerzo normal σ_y que actúe sobre el elemento.)

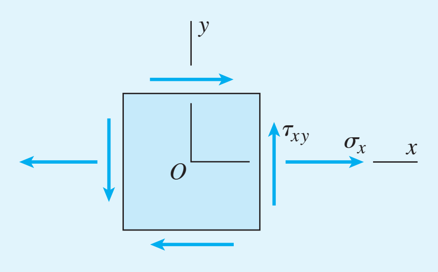


FIGURA 8.18 Elemento de esfuerzo plano en la sección transversal mn de la viga de la figura 8.17 (ejemplo 8.3).

continúa

Esfuerzos cortantes sobre la sección transversal mn. Los esfuerzos cortantes están dados por la fórmula del cortante (ecuación 8.17b) en donde el momento estático Q para una sección transversal rectangular es

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(y + \frac{h/2 - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{8.18}$$

Así entonces, la fórmula del cortante se convierte en

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{12V}{(bh^3)(b)}\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{8.19}$$

Los esfuerzos cortantes τ_{xy} que actúan sobre la cara x del elemento de esfuerzo (figura 8.18) son positivos hacia arriba, en tanto que los esfuerzos cortantes reales τ (ecuación 8.19) actúan hacia abajo. Por tanto, los esfuerzos cortantes τ_{xy} están dados por la siguiente fórmula:

$$\tau_{xy} = -\frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{8.20}$$

Al sustituir valores numéricos en esta ecuación da

$$\tau_{xy} = -\frac{6(3600 \text{ lb})}{(2 \text{ in})(6 \text{ in})^3}\left(\frac{(6 \text{ in})^2}{4} - y^2\right) = -50(9 - y^2) \tag{b}$$

en donde y tiene unidades de pulgadas (in) y τ_{xy} tiene unidades de libras por pulgada cuadrada (psi).

Cálculo de los esfuerzos. Con objeto de calcular los esfuerzos en la sección transversal *mn*, dividimos la altura de la viga en seis intervalos iguales e identificamos los puntos correspondientes de *A* a *G*, como se muestra en la vista lateral de la viga (figura 8.19a). Las coordenadas y de estos puntos aparecen en la columna 2 de la tabla 8.1 y los esfuerzos correspondientes σ_x y τ_{xy} (calculados con las ecuaciones a y b, respectivamente) se presentan en las columnas 3 y 4. Estos esfuerzos están trazados en las figuras 8.19b y 8.19c. Los esfuerzos normales varían linealmente de un esfuerzo de compresión de –2700 psi en la parte superior de la viga (punto *A*) a un esfuerzo de tensión de 2700 psi en la parte inferior de la viga (punto *G*). Los esfuerzos cortantes tienen una distribución parabólica con el esfuerzo máximo en el eje neutro (punto *D*).

Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos. Los esfuerzos principales en cada uno de los siete puntos *A* a *G* se pueden determinar con la ecuación (7.17):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8.21}$$

Como no hay esfuerzo normal en la dirección y (figura 8.18), esta ecuación se simplifica a

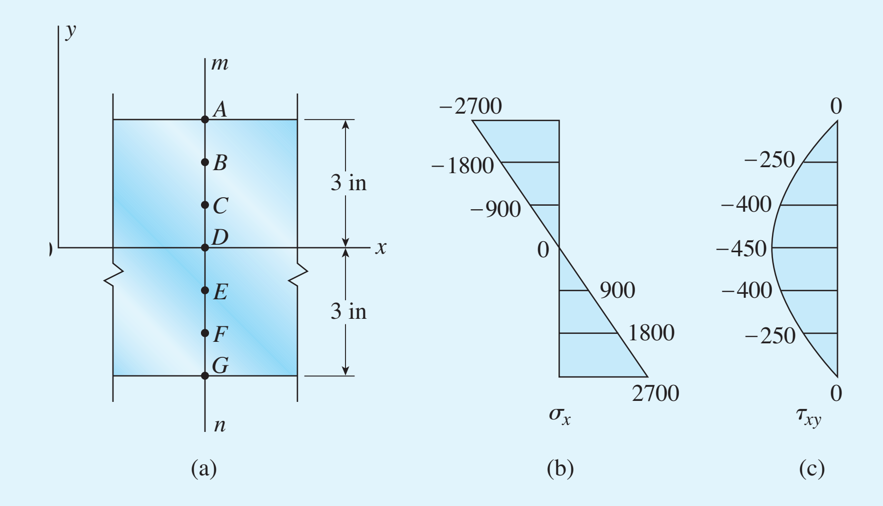
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8.22}$$

Además, los esfuerzos cortantes máximos (de la ecuación 7.25) son

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8.23}$$

que se simplifica a

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8.24}$$



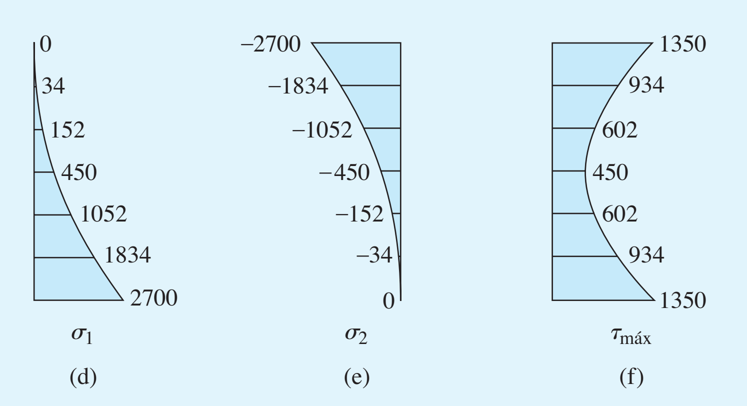


FIGURA 8.19 Esfuerzos en la viga de la figura 8.17 (ejemplo 8.3). (a) Puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G* en la sección transversal *mn*; (b) esfuerzos normales σ_x que actúan sobre la sección *mn*; (c) esfuerzos cortantes τ_{xy} que actúan sobre la sección transversal *mn*; (d) esfuerzos principales de tensión σ_1; (e) esfuerzos principales de compresión σ_2 y (f) esfuerzos cortantes máximos $\tau_{máx}$. (*Nota:* todos los esfuerzos tienen unidades de psi.)

TABLA 8.1 ESFUERZOS EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL *mn* EN LA VIGA DE LA FIGURA 8.17

(1) Punto	(2) y (in)	(3) σ_x (psi)	(4) τ_{xy} (psi)	(5) σ_1 (psi)	(6) σ_2 (psi)	(7) $\tau_{máx}$ (psi)
A	3	−2700	0	0	−2700	1350
B	2	−1800	−250	34	−1834	934
C	1	−900	−400	152	−1052	602
D	0	0	−450	450	−450	450
E	−1	900	−400	1052	−152	602
F	−2	1800	−250	1834	−34	934
G	−3	2700	0	2700	0	1350

continúa

Entonces, al sustituir los valores de σ_x y τ_{xy} (de la tabla 8.1) en las ecuaciones (8.22) y (8.24), podemos calcular los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$. Estas cantidades se presentan en las últimas tres columnas de la tabla 8.1 y se trazan en las figuras 8.19d, e y f.

Los esfuerzos principales de tensión σ_1 aumentan desde cero en la parte superior de la viga hasta un máximo de 2700 psi en la parte inferior (figura 8.19d). Las direcciones de los esfuerzos también cambian, variando de vertical en la parte superior a horizontal en la parte inferior. A la mitad de la altura, el esfuerzo σ_1 actúa sobre un plano a 45°. Comentarios similares se aplican al esfuerzo principal de compresión σ_2, excepto que a la inversa. Por ejemplo, el esfuerzo es máximo en la parte superior de la viga y cero en la parte inferior (figura 8.19e).

Los esfuerzos cortantes máximos en la sección transversal *mn* ocurren sobre planos a 45° en la parte superior e inferior de la viga. Estos esfuerzos son iguales a la mitad de los esfuerzos normales σ_x en los mismos puntos. En el eje neutro, donde el esfuerzo normal σ_x es cero, el esfuerzo cortante máximo se tiene sobre los planos horizontal y vertical.

Nota 1: si consideramos otras secciones transversales de la viga, los esfuerzos normales y cortantes máximos serán diferentes de los que se muestran en la figura 8.19. Por ejemplo, en una sección transversal entre la sección *mn* y la carga concentrada (figura 8.17), los esfuerzos normales σ_x son mayores que los que se muestran en la figura 8.19b debido a que el momento flexionante es mayor. Sin embargo, los esfuerzos cortantes τ_{xy} son iguales que los que se muestran en la figura 8.19c dado que la fuerza cortante no cambia en esa región de la viga. En consecuencia, los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y los esfuerzos cortantes máximos $\tau_{máx}$ variarán de la misma manera general como se muestra en las figuras 8.19d, e y f pero con valores numéricos diferentes.

El esfuerzo de tensión máximo en cualquier parte de la viga es el esfuerzo normal en la parte inferior de la misma en la sección transversal de momento flexionante máximo. Este esfuerzo es

$$(\sigma_{tens})_{máx} = 14{,}400 \text{ psi}$$

El esfuerzo de compresión máximo tiene el mismo valor numérico y ocurre en la parte superior de la viga en la misma sección transversal.

El esfuerzo cortante máximo τ_{xy} que actúa sobre una sección transversal de la viga se tiene a la derecha de la carga P (figura 8.17) debido a que la fuerza cortante es mayor en esa región de la viga ($V = R_B = 7200$ lb). Por tanto, el valor máximo de τ_{xy}, que ocurre en el eje neutro, es

$$(\tau_{xy})_{máx} = 900 \text{ psi}$$

El esfuerzo cortante máximo en la viga ocurre sobre planos a 45° ya sea en la parte superior o en la inferior de la viga en la sección transversal de momento flexionante máximo:

$$\tau_{máx} = \frac{14{,}400 \text{ psi}}{2} = 7200 \text{ psi}$$

Nota 2: en el diseño práctico de vigas ordinarias, los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos rara vez se calculan; más bien, en el diseño se utilizan los esfuerzos de tensión y de compresión que se calculan con la fórmula de la flexión en la sección transversal de momento flexionante máximo y el esfuerzo cortante de diseño se calcula con la fórmula del cortante en la sección transversal de fuerza cortante máxima.

8.5 CARGAS COMBINADAS

En capítulos anteriores analizamos elementos estructurales sometidos a un solo tipo de carga. Por ejemplo, analizamos barras cargadas axialmente en los capítulos 1 y 2, ejes en torsión en el capítulo 3 y vigas en flexión en los capítulos 4, 5 y 6. También analizamos recipientes a presión antes en este capítulo. Para cada tipo de carga desarrollamos métodos para determinar esfuerzos y deformaciones.

Sin embargo, en muchas estructuras se requiere que los elementos resistan más de un tipo de carga. Por ejemplo, una viga puede someterse a la acción simultánea de momentos flexionantes y fuerzas axiales (figura 8.20a), un recipiente a presión puede estar soportado de manera que también opera como una viga (figura 8.20b), o un eje en torsión puede soportar una carga de flexión (figura 8.20c). Conocidas como **cargas combinadas**, situaciones similares a las que se muestran en la figura 8.20 ocurren en una gran variedad de máquinas, edificios, vehículos, herramientas, equipo y muchos otros tipos de estructuras.

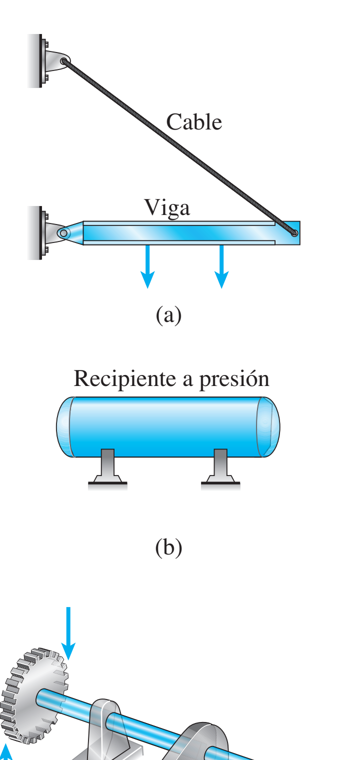


FIGURA 8.20 Ejemplos de estructuras sometidas a cargas combinadas: (a) viga de patín ancho soportada por un cable (flexión y carga axial combinadas), (b) recipiente cilíndrico a presión apoyado como una viga y (c) eje en torsión y flexión combinadas.

Un elemento estructural sometido a cargas combinadas con frecuencia se puede analizar superponiendo los esfuerzos y las deformaciones causadas por cada carga en acción por separado. Sin embargo, la superposición de esfuerzos y deformaciones se permite sólo en ciertas condiciones, como se explicó en capítulos anteriores. Un requisito es que los esfuerzos y las deformaciones deben ser funciones lineales de las cargas aplicadas, lo que a su vez requiere que el material siga la ley de Hooke y que los desplazamientos sean pequeños.

Un segundo requisito es que no debe haber interacción entre las diversas cargas, es decir, los esfuerzos y las deformaciones debidas a una carga no se deben ver afectadas por la presencia de las otras cargas. La mayor parte de las estructuras ordinarias satisfacen estas dos condiciones y, por tanto, emplear la superposición es muy común en el trabajo de ingeniería.

Método de análisis

Si bien hay muchos métodos para analizar una estructura sometida a más de un tipo de carga, el procedimiento, en general, incluye los siguientes pasos:

1. Seleccione un punto en la estructura donde se determinarán los esfuerzos y las deformaciones. (Es usual que el punto se seleccione en una sección transversal donde los esfuerzos son grandes, como en una sección transversal donde el momento flexionante tiene su valor máximo).
2. Para cada carga sobre la estructura, determine los esfuerzos resultantes en la sección transversal que contiene el punto seleccionado. (Las resultantes de esfuerzos posibles son una carga axial, un momento de torsión, un momento flexionante y una fuerza cortante.)
3. Calcule los esfuerzos normal y cortante en el punto seleccionado debidos a cada una de las resultantes de esfuerzos. Además, si la estructura es un recipiente a presión, determine los esfuerzos debidos a la presión interna. (Los esfuerzos se determinan con las fórmulas deducidas con anterioridad; por ejemplo, $\sigma = P/A$, $\tau = T\rho/I_P$, $\sigma = My/I$, $\tau = VQ/Ib$ y $\sigma = pr/t$.)
4. Combine los esfuerzos individuales para obtener los esfuerzos resultantes en el punto seleccionado. En otras palabras, obtenga los esfuerzos

σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre un elemento de esfuerzo en el punto. (Observe que en este capítulo sólo estamos tratando con elementos en esfuerzo plano.)

5. Determine los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en el punto seleccionado, utilizando las ecuaciones de transformación de esfuerzos o bien el círculo de Mohr. Si es necesario, determine los esfuerzos que actúan sobre otros planos inclinados.
6. Determine las deformaciones en el punto con ayuda de la ley de Hooke para esfuerzo plano.
7. Seleccione puntos adicionales y repita el proceso. Continúe hasta que disponga de suficiente información sobre el esfuerzo y la deformación que satisfaga los fines del análisis.

Ilustración del método

Para ilustrar el procedimiento para analizar un elemento sometido a cargas combinadas, examinaremos en términos generales los esfuerzos en la barra en voladizo con sección transversal que se muestra en la figura 8.21a. Esta barra está sometida a dos tipos de carga: un par de torsión T y una carga vertical P, que actúan en el extremo libre de la barra.

Iniciemos seleccionando de manera arbitraria dos puntos A y B para su investigación (figura 8.21a). El punto A está ubicado en la parte superior de la barra y el punto B se encuentra a un lado. Los dos puntos están ubicados en la misma sección transversal.

Las resultantes de esfuerzos que actúan en la sección transversal (figura 8.21b) son un momento de torsión igual al par de torsión T, un momento flexionante M igual a la carga P multiplicada por la distancia b desde el extremo libre de la barra hasta la sección transversal y una fuerza cortante V igual a la carga P.

Los esfuerzos que actúan en los puntos A y B se muestran en la figura 8.21c. El momento de torsión T produce esfuerzos cortantes de torsión

$$\tau_1 = \frac{Tr}{I_P} = \frac{2T}{\pi r^3} \quad \text{(a)}$$

en donde r es el radio de la barra e $I_P = \pi r^4/2$ es el momento polar de inercia del área de la sección transversal. El esfuerzo τ_1 actúa en sentido horizontal hacia la izquierda en el punto A y en sentido vertical hacia abajo en el punto B, como se muestra en la figura.

El momento flexionante M produce un esfuerzo de tensión en el punto A:

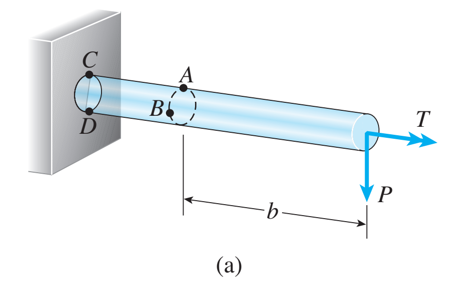
$$\sigma_A = \frac{Mr}{I} = \frac{4M}{\pi r^3} \quad \text{(b)}$$

en donde $I = \pi r^4/4$ es el momento de inercia con respecto al eje neutro. Sin embargo, el momento flexionante no produce esfuerzo en el punto B, debido a que B está ubicado en el eje neutro.

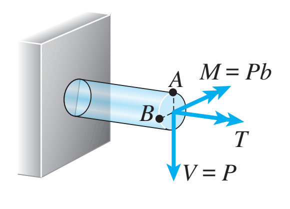
La fuerza cortante V no produce esfuerzo cortante en la parte superior de la barra (punto A), pero en el punto B el esfuerzo cortante es (consulte la ecuación 5.42 en el capítulo 5):

$$\tau_2 = \frac{4V}{3A} = \frac{4V}{3\pi r^2} \quad \text{(c)}$$

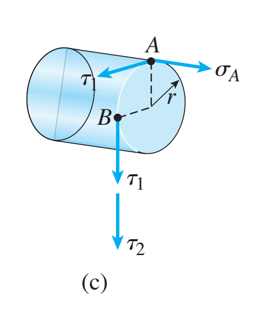
en donde $A = \pi r^2$ es el área de la sección transversal.



(a)

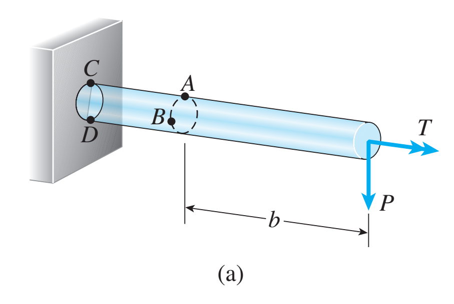


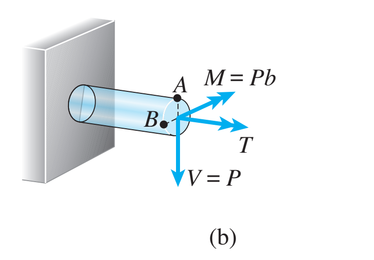
(b)



(c)

FIGURA 8.21 Barra en voladizo sometida a torsión y flexión combinadas: (a) cargas que actúan sobre la barra, (b) resultantes de esfuerzos en una sección transversal y (c) esfuerzos en los puntos A y B.





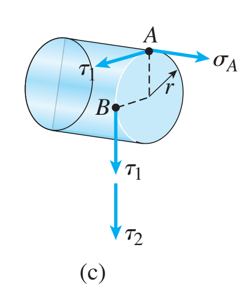


FIGURA 8.21 (Repetida.)

Los esfuerzos σ_A y τ_1 que actúan en el punto A (figura 8.21c) se muestran actuando sobre un elemento de esfuerzo en la figura 8.22a. Este elemento se recortó de la parte superior de la barra en el punto A. Una vista bidimensional del elemento, obtenida observando verticalmente hacia abajo el elemento, se muestra en la figura 8.22b. A fin de determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos, trazamos ejes x y y por el elemento. El eje x es paralelo al eje longitudinal de la barra circular (figura 8.21a) y el eje y es horizontal. Observe que el elemento está en esfuerzo plano con $\sigma_x = \sigma_A$, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = -\tau_1$.

Un elemento de esfuerzo en el punto B (también en esfuerzo plano) se muestra en la figura 8.23a. Los únicos esfuerzos que actúan sobre este elemento son los esfuerzos cortantes, iguales a $\tau_1 + \tau_2$ (consulte la figura 8.21c). En la figura 8.23b se muestra una vista bidimensional del elemento de esfuerzo, con el eje x paralelo al eje longitudinal de la barra y el eje y en la dirección vertical. Los esfuerzos que actúan sobre el elemento son $\sigma_x = \sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = -(\tau_1 + \tau_2)$.

Ahora que determinamos los esfuerzos que actúan en los puntos A y B y habiendo elaborado los elementos de esfuerzo correspondientes, podemos utilizar las ecuaciones de transformación de esfuerzo plano (secciones 7.2 y 7.3) o bien el círculo de Mohr (sección 7.4) para determinar los esfuerzos principales, los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos que actúan en direcciones inclinadas. También podemos emplear la ley de Hooke (sección 7.5) para determinar las deformaciones en los puntos A y B.

El procedimiento descrito antes para analizar los esfuerzos en los puntos A y B (figura 8.21a) se puede emplear en otros puntos en la barra. De interés particular son los puntos donde los esfuerzos calculados con la fórmula de la flexión y las fórmulas del cortante tienen valores máximos o mínimos, denominados **puntos críticos.** Por ejemplo, los esfuerzos normales debidos a flexión son mayores en la sección transversal de momento flexionante máximo que se presenta en el soporte. Por tanto, los puntos C y D en la parte superior e inferior de la viga en el extremo empotrado (figura 8.21a) son puntos críticos donde se deben calcular los esfuerzos. Otro punto crítico es el propio punto B, debido a que los esfuerzos cortantes son un máximo en este punto. (Observe que en este ejemplo los esfuerzos cortantes no cambian si el punto B se mueve a lo largo de la barra en la dirección longitudinal.)

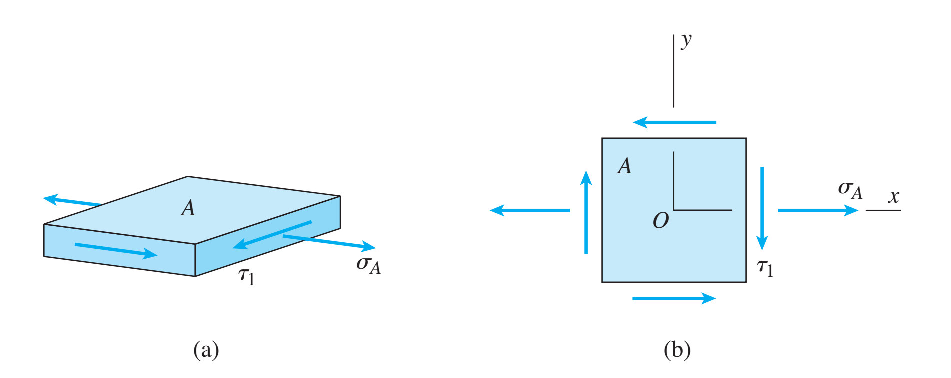


FIGURA 8.22 Elemento de esfuerzo en el punto A.

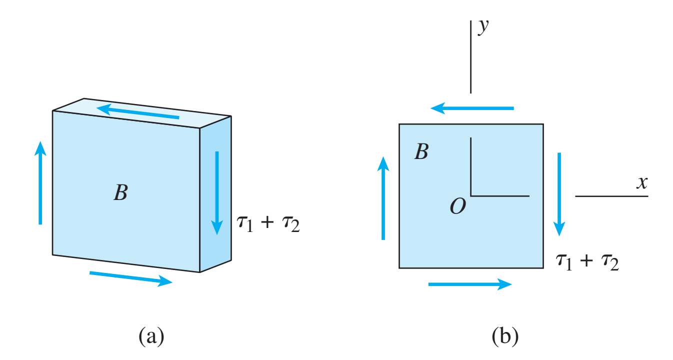


FIGURA 8.23 Elemento de esfuerzo en el punto *B*.

Como paso final, los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en los puntos críticos se pueden comparar entre sí a fin de determinar los esfuerzos normales y cortantes máximos absolutos en la barra.

Este ejemplo ilustra el procedimiento general para determinar los esfuerzos producidos por cargas combinadas. Observe que no se involucran teorías nuevas, sólo aplicaciones de fórmulas y conceptos deducidos antes. Dado que la variedad de situaciones prácticas parece no tener fin, no deduciremos fórmulas generales para calcular los esfuerzos máximos. En cambio, trataremos cada estructura como un caso especial.

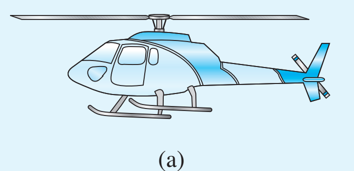
Selección de puntos críticos

Si el objetivo del análisis es determinar los esfuerzos máximos *en cualquier parte* de la estructura, entonces los puntos críticos se deben seleccionar en secciones transversales donde las resultantes de esfuerzos tengan sus valores máximos. Además, dentro de estas secciones transversales, los puntos se deben seleccionar donde los esfuerzos normales o los esfuerzos cortantes tengan su valores máximos. Empleando buen juicio en la selección de los puntos, a menudo podemos tener una certeza razonable de obtener los esfuerzos máximos absolutos en la estructura.

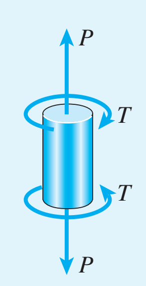
Sin embargo, en ocasiones es difícil reconocer de antemano dónde se localizan los esfuerzos máximos en un elemento. Entonces puede ser necesario investigar los esfuerzos en un número grande de puntos, quizá incluso empleando prueba y error en la selección de puntos. Otras estrategias también pueden dar resultados útiles, como deducir ecuaciones específicas para el problema a la mano o hacer suposiciones de simplificación para facilitar un análisis que de otra manera sería difícil.

Los siguientes ejemplos ilustran los métodos empleados para calcular los esfuerzos en estructuras sometidas a cargas combinadas.

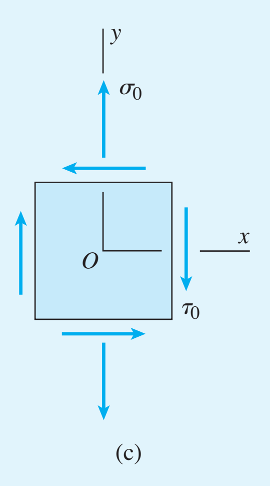
Ejemplo 8.4



(a)



(b)



(c)

FIGURA 8.24 Ejemplo 8.4. Eje del rotor de un helicóptero (torsión y fuerza axial combinadas).

El eje del rotor de un helicóptero impulsa las palas del rotor que proporcionan la fuerza de sustentación para mantener al helicóptero en el aire (figura 8.24a). Como consecuencia, el eje está sometido a una combinación de cargas de torsión y axial (figura 8.24b).

Para un eje con diámetro de 50 mm que transmite una par de torsión $T = 2.4$ kN·m y una fuerza de tensión $P = 125$ kN, determine el esfuerzo de tensión máximo, el esfuerzo de compresión máximo y el esfuerzo cortante máximo en el eje.

Solución

Los esfuerzos en el eje del rotor se producen por la acción combinada de la fuerza axial P y el par de torsión T (figura 8.24b). Por tanto, los esfuerzos en cualquier punto sobre la superficie del eje consisten de un esfuerzo de tensión σ_0 y de un esfuerzo cortante τ_0, como se muestra en el elemento de esfuerzo de la figura 8.24c. Observe que el eje y es paralelo al eje longitudinal del eje.

El esfuerzo de tensión σ_0 es igual a la fuerza axial dividida entre el área de la sección transversal:

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4(125 \text{ kN})}{\pi (50 \text{ mm})^2} = 63.66 \text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante τ_0 se obtiene con la fórmula de la torsión (consulte las ecuaciones 3.11 y 3.12 de la sección 3.3):

$$\tau_0 = \frac{Tr}{I_P} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(2.4 \text{ kN·m})}{\pi (50 \text{ mm})^3} = 97.78 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos σ_0 y τ_0 actúan directamente sobre las secciones transversales del eje.

Conocidos los esfuerzos σ_0 y τ_0, ahora podemos obtener los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos con los métodos descritos en la sección 7.3. Los esfuerzos principales se obtienen con la ecuación (7.17):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Al sustituir $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_0 = 63.66$ MPa y $\tau_{xy} = -\tau_0 = -97.78$ MPa, obtenemos

$$\sigma_{1,2} = 32 \text{ MPa} \pm 103 \text{ MPa} \quad \text{o} \quad \sigma_1 = 135 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -71 \text{ MPa}$$

Estos son los esfuerzos máximos de tensión y compresión en el eje del rotor.

Los esfuerzos cortantes máximos en el plano (ecuación 7.25) son

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(e)}$$

Este término se evaluó antes, por lo que de inmediato observamos que

$$\tau_{\text{máx}} = 103 \text{ MPa}$$

Debido a que los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 tienen signos opuestos, los esfuerzos cortantes máximos en el plano son mayores que los esfuerzos cortantes máximos fuera del plano (consulte las ecuaciones 7.28a, b y c y el análisis adjunto). Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en el eje es 103 MPa.

Ejemplo 8.5

Un recipiente a presión de pared delgada con sección transversal circular está sometido a una presión p interna de gas y comprimido simultáneamente por una carga axial $P = 12$ k (figura 8.25a). El cilindro tiene radio interior $r = 2.1$ in y espesor de pared $t = 0.15$ in.

Determine la presión interna máxima permisible p_{perm} con base en un esfuerzo cortante permisible de 6500 psi en la pared del recipiente.

Solución

Los esfuerzos en la pared del recipiente a presión se deben a la acción combinada de la presión interna y la fuerza axial. Como las dos acciones producen esfuerzos normales uniformes en toda la pared, podemos seleccionar cualquier punto en la superficie para su investigación. En un punto característico, como el punto A (figura 8.25a), aislamos el elemento de esfuerzo como se muestra en la figura 8.25b. El eje x es paralelo al eje longitudinal del recipiente a presión y el eje y es circunferencial. Observe que no hay esfuerzos cortantes que actúen sobre el elemento.

Esfuerzos principales. El esfuerzo longitudinal σ_x es igual al esfuerzo de tensión σ_2 generado por la presión interna (consulte la figura 8.7a y la ecuación 8.6) menos el esfuerzo de compresión producido por la fuerza axial; por tanto,

$$\sigma_x = \frac{pr}{2t} - \frac{P}{A} = \frac{pr}{2t} - \frac{P}{2\pi rt} \qquad \text{(f)}$$

en donde $A = 2\pi rt$ es el área de la sección transversal del cilindro. (Observe que por conveniencia empleamos el radio interior r en todos los cálculos.)

El esfuerzo circunferencial σ_y es igual al esfuerzo de tensión σ_1 generado por la presión interna (figura 8.7a y ecuación 8.5):

$$\sigma_y = \frac{pr}{t} \qquad \text{(g)}$$


Observe que σ_x es algebraicamente mayor que σ_y.

Dado que no actúan esfuerzos cortantes sobre el elemento (figura 8.25), los esfuerzos normales σ_x y σ_y también son esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = \sigma_y = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \sigma_x = \frac{pr}{2t} - \frac{P}{2\pi rt} \qquad \text{(h,i)}$$

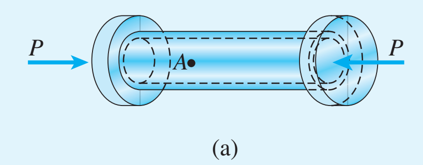
Al sustituir valores numéricos obtenemos

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{p(2.1 \text{ in})}{0.15 \text{ in}} = 14.0p$$

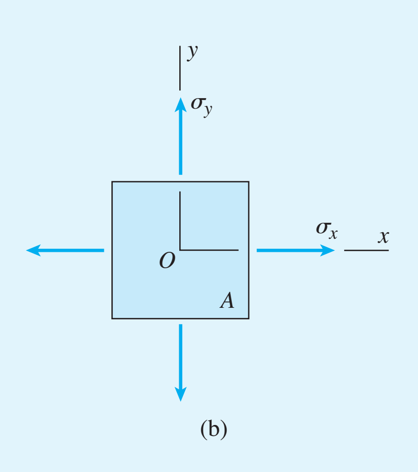
$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} - \frac{P}{2\pi rt} = \frac{p(2.1 \text{ in})}{2(0.15 \text{ in})} - \frac{12 \text{ k}}{2\pi(2.1 \text{ in})(0.15 \text{ in})}$$

$$= 7.0p - 6063 \text{ psi}$$

en donde σ_1, σ_2 y p tienen unidades de libras por pulgada cuadrada (psi).



(a)



(b)

FIGURA 8.25 Ejemplo 8.5. Recipiente a presión sometido a presión interna y fuerza axial combinadas.

Esfuerzos cortantes en el plano. El esfuerzo cortante máximo en el plano (ecuación 7.26) es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}(14.0p - 7.0p + 6063 \text{ psi}) = 3.5p + 3032 \text{ psi}$$

Dado que $\tau_{\text{máx}}$ está limitado a 6500 psi, la ecuación anterior se convierte en

$$6500 \text{ psi} = 3.5p + 3032 \text{ psi}$$

de donde obtenemos

$$p = \frac{3468 \text{ psi}}{3.5} = 990.9 \text{ psi} \quad \text{o} \quad (p_{\text{perm}})_1 = 990 \text{ psi}$$

debido al redondeo hacia abajo.

Esfuerzos cortantes fuera del plano. El esfuerzo cortante máximo fuera del plano (consulte las ecuaciones 7.28a y 7.28b) es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_2}{2} \quad \text{o} \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1}{2}$$

De la primera de estas dos ecuaciones obtenemos

$$6500 \text{ psi} = 3.5p - 3032 \text{ psi} \quad \text{o} \quad (p_{\text{perm}})_2 = 2720 \text{ psi}$$

Y de la segunda ecuación obtenemos

$$6500 \text{ psi} = 7.0p \quad \text{o} \quad (p_{\text{perm}})_3 = 928 \text{ psi}$$

Presión interna permisible. Al comparar los tres valores calculados para la presión permisible, observamos que $(p_{\text{perm}})_3$ rige el diseño y, por tanto, la presión interna permisible es

$$p_{\text{perm}} = 928 \text{ psi}$$

A esta presión los esfuerzos principales son $\sigma_1 = 13{,}000$ psi y $\sigma_2 = 430$ psi. Estos esfuerzos tienen los mismos signos, y se confirma de esta manera que uno de los esfuerzos cortantes fuera del plano debe ser el esfuerzo cortante mayor (consulte el análisis que sigue a las ecuaciones 7.28a, b y c).

Nota: en este ejemplo, determinamos la presión interna permisible en el recipiente al suponer que la carga axial era igual a 12 k. Un análisis más completo incluiría la posibilidad de que la fuerza axial quizá no esté presente. (Resulta que la presión permisible no cambia si en este ejemplo se elimina la fuerza axial.)

Ejemplo 8.6

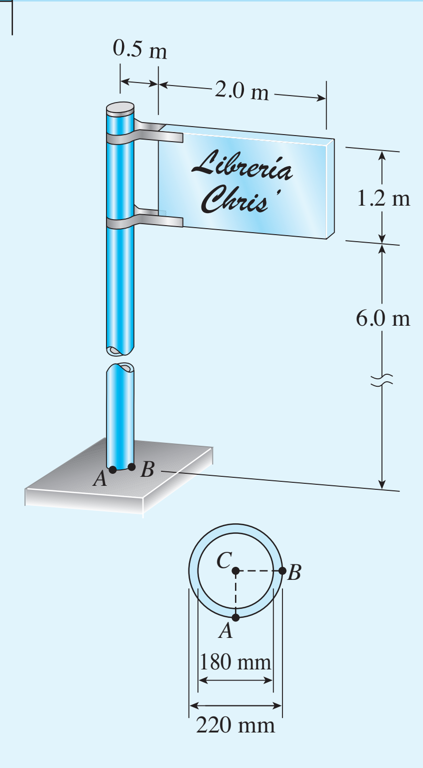


FIGURA 8.26 Ejemplo 8.6. Presión del viento contra un letrero (flexión, torsión y cortante del poste combinados).

Un letrero con dimensiones 2.0 m × 1.2 m está soportado por un poste circular hueco que tiene diámetro exterior de 220 mm y diámetro interior de 180 mm (figura 8.26). El letrero tiene una excentricidad de 0.5 m desde la línea central del poste y su borde inferior está a 6.0 m arriba del suelo.

Determine los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en los puntos A y B en la base del poste debidos a una presión del viento de 2.0 kPa que actúa contra el letrero.

Solución

Resultantes de esfuerzos. La presión del viento contra el letrero produce una fuerza resultante W que actúa en el punto medio del letrero (figura 8.27a) y es igual a la presión p por el área A sobre la que actúa:

$$W = pA = (2.0 \text{ kPa})(2.0 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}) = 4.8 \text{ kN}$$

La línea de acción de esta fuerza está a una altura $h = 6.6$ m arriba del suelo y a una distancia $b = 1.5$ m desde la línea central del poste.

La fuerza del viento que actúa sobre el letrero es estáticamente equivalente a una fuerza lateral W y a un par de torsión T que actúa sobre el poste (figura 8.27b). El par de torsión es igual a la fuerza W por la distancia b:

$$T = Wb = (4.8 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 7.2 \text{ kN·m}$$

Las resultantes de esfuerzos en la base del poste (figura 8.27c) consisten de un momento flexionante M, un par de torsión T y una fuerza cortante V. Sus magnitudes son

$$M = Wh = (4.8 \text{ kN})(6.6 \text{ m}) = 31.68 \text{ kN·m}$$

$$T = 7.2 \text{ kN·m} \qquad V = W = 4.8 \text{ kN}$$

Al examinar estas resultantes de esfuerzos se tiene que los esfuerzos flexionantes máximos ocurren en el punto A y los esfuerzos cortantes máximos en el punto B. Por tanto, A y B son los puntos críticos donde se deben determinar los esfuerzos. (Otro punto crítico está diametralmente opuesto al punto A, como se explica en la *nota* al final de este ejemplo.)

Esfuerzos en los punto A y B. El momento flexionante M produce un esfuerzo de tensión σ_A en el punto A (figura 8.27d) pero no esfuerzo en el punto B (que está ubicado en el eje neutro). El esfuerzo σ_A se obtiene con la fórmula de la flexión:

$$\sigma_A = \frac{M(d_2/2)}{I}$$

en donde d_2 es el diámetro exterior (220 mm) e I es el momento de inercia de la sección transversal. El momento de inercia es

$$I = \frac{\pi}{64}\left(d_2^4 - d_1^4\right) = \frac{\pi}{64}\left[(220 \text{ mm})^4 - (180 \text{ mm})^4\right] = 63.46 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

en donde d_1 es el diámetro interior. Por tanto, el esfuerzo σ_A es

$$\sigma_A = \frac{Md_2}{2I} = \frac{(31.68 \text{ kN·m})(220 \text{ mm})}{2(63.46 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 54.91 \text{ MPa}$$

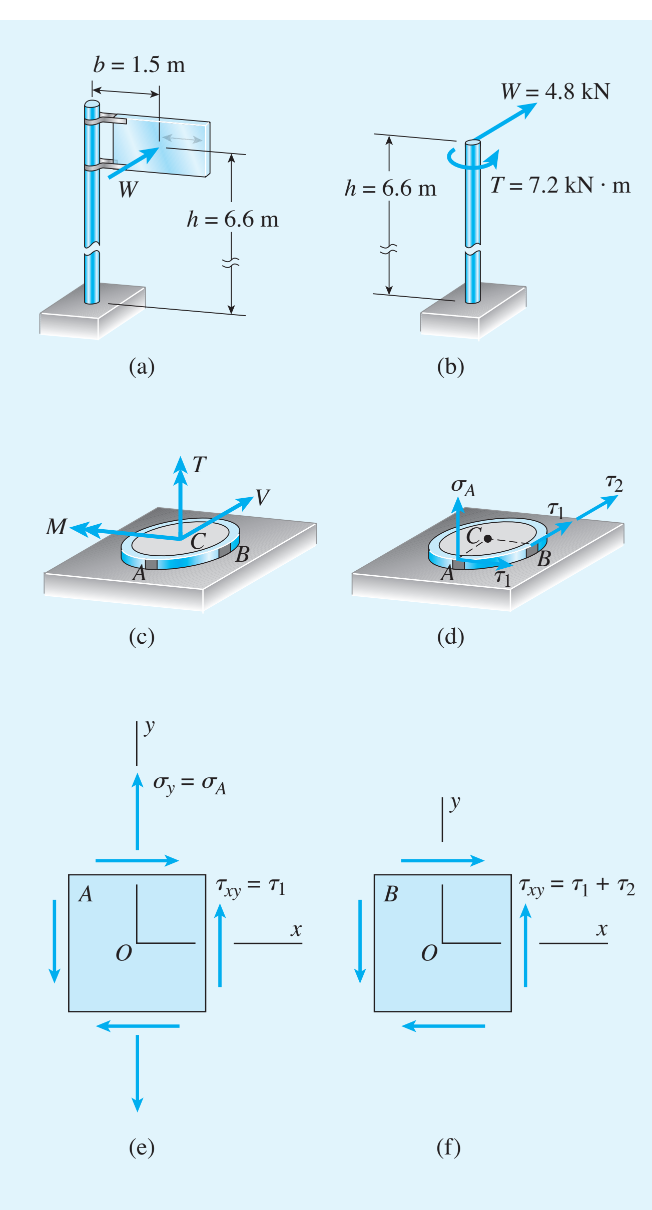


FIGURA 8.27 Solución del ejemplo 8.6.

El par de torsión T produce esfuerzos cortantes τ_1 en los puntos A y B (figura 8.27d). Podemos calcular estos esfuerzos con la fórmula de la torsión:

$$\tau_1 = \frac{T(d_2/2)}{I_P}$$

en donde I_p es momento polar de inercia:

$$I_P = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right) = 2I = 126.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

continúa

Por tanto,

$$\tau_1 = \frac{Td_2}{2I_P} = \frac{(7.2 \text{ kN}\cdot\text{m})(220 \text{ mm})}{2(126.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} = 6.24 \text{ MPa}$$

Por último, calculamos los esfuerzos cortantes en los puntos A y B debidos a la fuerza cortante V. El esfuerzo cortante en el punto A es cero y el esfuerzo cortante en el punto B (designado τ_2 en la figura 8.27d) se obtienen de la fórmula del cortante para un tubo circular (ecuación 5.44 de la sección 5.9):

$$\tau_2 = \frac{4V}{3A}\left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right) \tag{j}$$

en donde r_2 y r_1 son los radios exterior e interior, respectivamente, y A es el área de la sección transversal.

$$r_2 = \frac{d_2}{2} = 110 \text{ mm} \qquad r_1 = \frac{d_1}{2} = 90 \text{ mm}$$

$$A = \pi(r_2^2 - r_1^2) = 12{,}570 \text{ mm}^2$$

Al sustituir valores numéricos en la ecuación (j), obtenemos

$$\tau_2 = 0.76 \text{ MPa}$$

Ahora ya están calculados los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal en los puntos A y B.

Elementos de esfuerzo. El paso siguiente en mostrar estos esfuerzos en elementos de esfuerzo (figuras 8.27e y f). Para los dos elementos el eje y es paralelo al eje longitudinal del poste y el eje x es horizontal. En el punto A los esfuerzos que actúan sobre el elemento son:

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = \sigma_A = 54.91 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = \tau_1 = 6.24 \text{ MPa}$$

En el punto B los esfuerzos son:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = \tau_1 + \tau_2 = 6.24 \text{ MPa} + 0.76 \text{ MPa} = 7.00 \text{ MPa}$$

Como no hay esfuerzos normales que actúen sobre el elemento, el punto B está en cortante puro.

Ahora que conocemos todos los esfuerzos que actúan sobre los elementos de esfuerzo (figuras 8.27e y f), podemos emplear las ecuaciones dadas en la sección 7.3 para determinar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos.

Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes en el punto A. Los esfuerzos principales se obtienen con la ecuación (7.17), que se repite enseguida:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(k)}$$

Al sustituir $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 54.91$ MPa y $\tau_{xy} = 6.24$ MPa, obtenemos

$$\sigma_{1,2} = 27.5 \text{ MPa} \pm 28.2 \text{ MPa}$$

o

$$\sigma_1 = 55.7 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -0.7 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos cortantes máximos en el plano se obtienen con la ecuación (7.25):

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(l)}$$

Este término se evaluó antes, por lo que de inmediato observamos que

$$\tau_{\text{máx}} = 28.2 \text{ MPa}$$

Debido a que los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 tienen signos opuestos, los esfuerzos cortantes máximos en el plano son mayores que los esfuerzos cortantes máximos fuera del plano (consulte las ecuaciones 7.28a, b y c y el análisis adjunto). Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en el punto *A* es 28.2 MPa.

Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos en el punto B. Los esfuerzos en este punto son $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 7.0$ MPa. Como el elemento está en cortante puro, los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = 7.0 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -7.0 \text{ MPa}$$

y el esfuerzo cortante máximo en el plano es

$$\tau_{\text{máx}} = 7.0 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos cortantes máximos fuera del plano son la mitad de este valor.

Nota: si se necesitan los esfuerzos máximos en cualquier parte del poste, entonces también debemos determinar los esfuerzos en el punto crítico diametralmente opuesto al punto *A*, debido a que en ese punto el esfuerzo de compresión debido a la flexión tiene su valor máximo. Los esfuerzos principales en ese punto son

$$\sigma_1 = 0.7 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -55.7 \text{ MPa}$$

y el esfuerzo cortante máximo es 28.2 MPa. Por lo tanto, el esfuerzo de tensión mayor en el poste es 55.7 MPa, el esfuerzo de compresión mayor es –55.7 MPa y el esfuerzo cortante mayor es 28.2 MPa. (Tenga en cuenta que en este análisis sólo se consideran los efectos de la presión del viento. Otras cargas, como el peso de la estructura, también producen esfuerzos en la base del poste).

Ejemplo 8.7

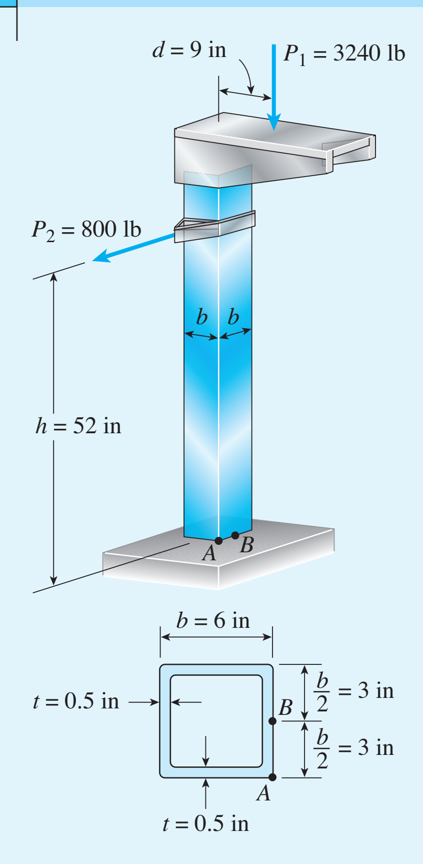


FIGURA 8.28 Ejemplo 8.7. Cargas sobre un poste (carga axial, flexión y cortante combinadas).

Un poste tubular con sección transversal cuadrada soporta una plataforma horizontal (figura 8.28). El diámetro exterior del tubo es $b = 6$ in y su espesor de pared es $t = 0.5$ in. Las dimensiones de la plataforma son 6.75 in × 24 in y soporta una carga de 20 psi distribuida uniformemente que actúa sobre su superficie superior. La resultante de esta carga distribuida es una fuerza vertical P_1:

$$P_1 = (20 \text{ psi})(6.75 \text{ in} \times 24.0 \text{ in}) = 3240 \text{ lb}$$

Esta fuerza actúa en el punto medio de la plataforma, que está a una distancia $d = 9$ in desde el eje longitudinal del poste. Una segunda carga $P_2 = 800$ lb que actúa horizontalmente sobre el poste a una altura $h = 52$ in arriba de la base.

Determine los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en los puntos A y B en la base del poste debidos a las cargas P_1 y P_2.

Solución

Resultantes de esfuerzos. La fuerza P_1 que actúa sobre la plataforma (figura 8.28) es estáticamente equivalente a una fuerza P_1 y a un momento $M_1 = P_1 d$ que actúan en el centroide de la sección transversal del poste (figura 8.29a). La carga P_2 también se muestra en esta figura.

Las resultantes de esfuerzos en la base del poste debidas a las cargas P_1 y P_2 y al momento M_1 se muestran en la figura 8.29b. Estas resultantes de esfuerzos son las siguientes:

1. Una fuerza axial de compresión $P_1 = 3240$ lb
2. Un momento flexionante M_1 producido por la fuerza P_1:

$$M_1 = P_1 d = (3240 \text{ lb})(9 \text{ in}) = 29{,}160 \text{ lb-in}$$

3. Una fuerza cortante $P_2 = 800$ lb
4. Un momento flexionante M_2 producido por la fuerza P_2:

$$M_2 = P_2 h = (800 \text{ lb})(52 \text{ in}) = 41{,}600 \text{ lb-in}$$

Al examinar estas resultantes de esfuerzos (figura 8-29d) tenemos que los dos momentos M_1 y M_2 producen esfuerzos de compresión máximos en el punto A y la fuerza cortante genera esfuerzos cortantes máximos en el punto B. Por tanto, A y B son puntos críticos donde se deben determinar los esfuerzos. (Otro punto crítico está diagonalmente opuesto al punto A, como se explica en la *nota* al final de este ejemplo.)

Esfuerzos en los puntos A y B.

(1) La fuerza axial P_1 (figura 8.29b) produce esfuerzos de compresión uniforme en todo el poste. Estos esfuerzos son

$$\sigma_{P_1} = \frac{P_1}{A}$$

en donde A es el área de la sección transversal del poste:

$$A = b^2 - (b - 2t)^2 = 4t(b - t)$$
$$= 4(0.5 \text{ in})(6 \text{ in} - 0.5 \text{ in}) = 11.00 \text{ in}^2$$

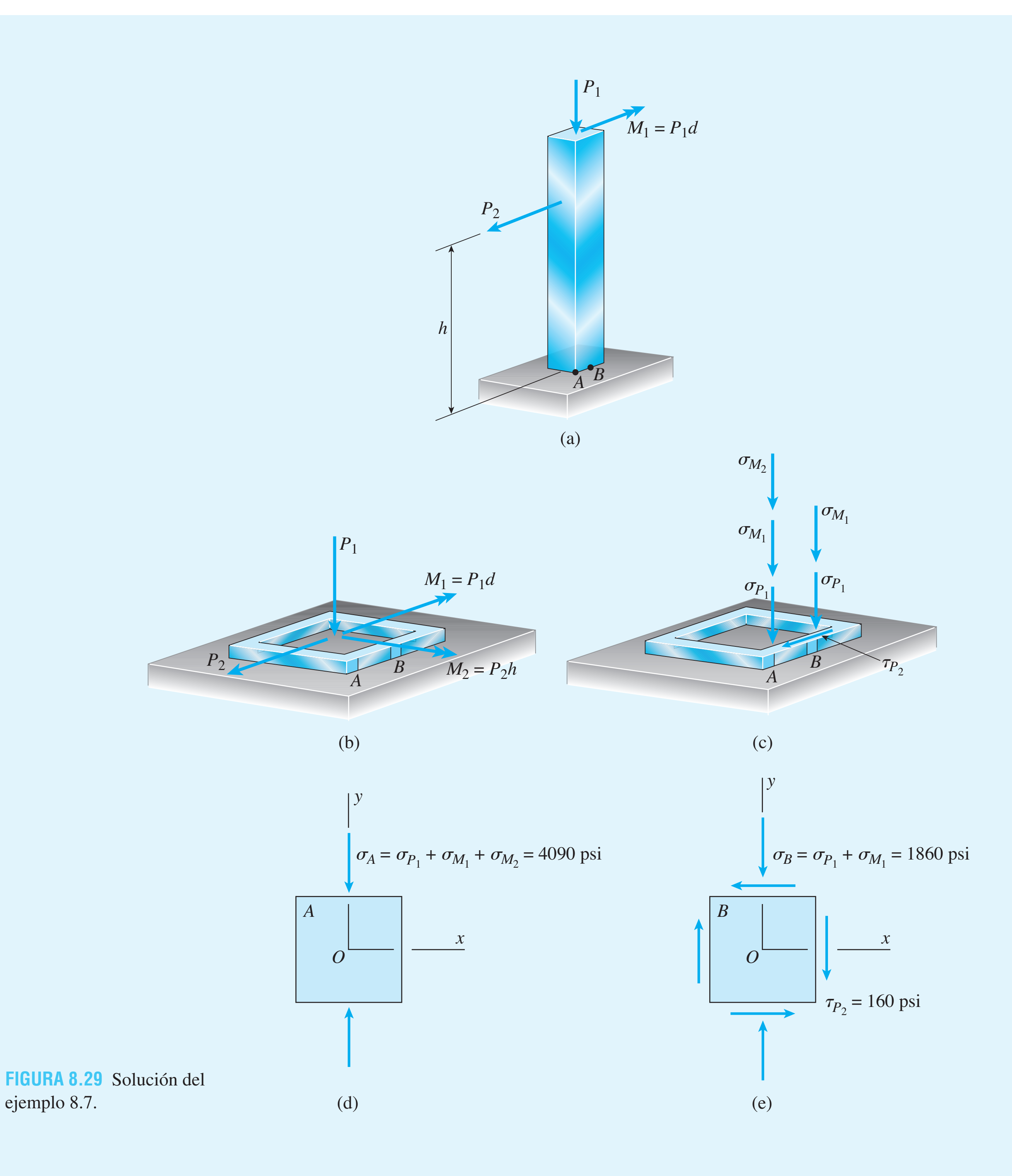


FIGURA 8.29 Solución del ejemplo 8.7.

continúa

Por tanto, el esfuerzo axial de compresión es

$$\sigma_{P_1} = \frac{P_1}{A} = \frac{3240 \text{ lb}}{11.00 \text{ in}^2} = 295 \text{ psi}$$

El esfuerzo σ_{P_1} se muestra actuando en los puntos A y B en la figura 8.29c.

(2) El momento flexionante M_1 (figura 8.29b) produce esfuerzos de compresión σ_{M_1} en los puntos A y B (figura 8.29c). Estos esfuerzos se obtienen con la fórmula de la flexión:

$$\sigma_{M_1} = \frac{M_1(b/2)}{I} = \frac{M_1 b}{2I}$$

en donde I es el momento de inercia del área de la sección transversal:

$$I = \frac{b^4}{12} - \frac{(b-2t)^4}{12} = \frac{1}{12}\left[(6 \text{ in})^4 - (5 \text{ in})^4\right] = 55.92 \text{ in}^4$$

Entonces, el esfuerzo σ_{M_1} es

$$\sigma_{M_1} = \frac{M_1 b}{2I} = \frac{(29{,}160 \text{ lb-in})(6 \text{ in})}{2(55.92 \text{ in}^4)} = 1564 \text{ psi}$$

(3) La fuerza cortante P_2 (figura 8.29b) produce un esfuerzo cortante en el punto B pero no en el punto A. Del análisis de esfuerzos cortantes en las almas de vigas con patines (sección 5.10), sabemos que un valor aproximado del esfuerzo cortante se puede obtener dividiendo la fuerza cortante entre el área del alma (consulte la ecuación 5.50 en la sección 5.10). Por tanto, el esfuerzo cortante producido en el punto B por la fuerza P_2 es

$$\tau_{P_2} = \frac{P_2}{A_{\text{alma}}} = \frac{P_2}{2t(b-2t)} = \frac{800 \text{ lb}}{2(0.5 \text{ in})(6 \text{ in} - 1 \text{ in})} = 160 \text{ psi}$$

El esfuerzo τ_{P_2} actúa en el punto B en la dirección que se muestra en la figura 8.29c.

Si se desea, se puede calcular el esfuerzo cortante τ_{P_2} con la fórmula más precisa de la ecuación (5.48a) en la sección 5.10. El resultado de ese cálculo es τ_{P_2} = 163 psi, que muestra que el esfuerzo cortante obtenido con la fórmula aproximada es satisfactorio.

(4) El momento flexionante M_2 (figura 8.29b) produce un esfuerzo de compresión en el punto A pero ningún esfuerzo en el punto B. El esfuerzo en A es

$$\sigma_{M_2} = \frac{M_2(b/2)}{I} = \frac{M_2 b}{2I} = \frac{(41{,}600 \text{ lb-in})(6 \text{ in})}{2(55.92 \text{ in}^4)} = 2232 \text{ psi}$$

Este esfuerzo también se muestra en la figura 8.29c.

Elementos de esfuerzo. El paso siguiente es mostrar los esfuerzos que actúan sobre elementos de esfuerzo en los puntos A y B (figuras 8.29d y e). Cada elemento está orientado de modo que el eje y es vertical (es decir, paralelo al eje longitudinal del poste) y el eje x es horizontal. En el punto A el único esfuerzo es uno de compresión σ_A en la dirección y (figura 8.29d):

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sigma_{P_1} + \sigma_{M_1} + \sigma_{M_2} \\ &= 295 \text{ psi} + 1564 \text{ psi} + 2232 \text{ psi} = 4090 \text{ psi (compresión)}\end{aligned}$$

Así entonces, este elemento está en esfuerzo uniaxial.

En el punto B el esfuerzo de compresión en la dirección y (figura 8.29e) es

$$\sigma_B = \sigma_{P_1} + \sigma_{M_1} = 295 \text{ psi} + 1564 \text{ psi} = 1860 \text{ psi (compresión)}$$

y el esfuerzo cortante es

$$\tau_{P_2} = 160 \text{ psi}$$

El esfuerzo cortante actúa hacia la izquierda sobre la cara superior del elemento y hacia abajo sobre la cara x del elemento.

Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos en el punto A. Empleando la notación estándar para un elemento en esfuerzo plano (figura 8.30), escribimos los esfuerzos para el elemento A (figura 8.29d) como se indica:

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = -\sigma_A = -4090 \text{ psi} \qquad \tau_{xy} = 0$$

Dado que el elemento está en esfuerzo uniaxial, los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = -4090 \text{ psi}$$

y el esfuerzo cortante máximo en el plano (ecuación 7.26) es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{4090 \text{ psi}}{2} = 2050 \text{ psi}$$

El esfuerzo cortante máximo fuera del plano (ecuación 7.28a) tiene la misma magnitud.

Esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximos en el punto B. Al emplear de nuevo la notación estándar para esfuerzo plano (figura 8.30), observamos que los esfuerzos en el punto B (figura 8.29e) son

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = -\sigma_B = -1860 \text{ psi} \qquad \tau_{xy} = -\tau_{P_2} = -160 \text{ psi}$$

Para obtener los esfuerzos principales, utilizamos la ecuación (7.17), que se repite a continuación:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(m)}$$

FIGURA 8.30 Notación para un elemento en esfuerzo plano.

continúa

Al sustituir los valores de σ_x, σ_y y τ_{xy}, obtenemos

$$\sigma_{1,2} = -930 \text{ psi} \pm 944 \text{ psi}$$

o

$$\sigma_1 = 14 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = -1870 \text{ psi}$$

Los esfuerzos cortantes máximos en el plano se obtienen con la ecuación (7.25):

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(n)}$$

Este término se evaluó antes, por lo que de inmediato observamos que

$$\tau_{\text{máx}} = 944 \text{ psi}$$

Debido a que los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 tienen signos opuestos, los esfuerzos cortantes máximos en el plano son mayores que los esfuerzos cortantes máximos fuera del plano (consulte las ecuaciones 7.28a, b y c y el análisis adjunto). Por tanto, el esfuerzo cortante máximo en el punto B es 944 psi.

Nota: si se necesitan los esfuerzos máximos en cualquier parte en la base del poste, entonces también debemos determinar los esfuerzos en el punto crítico A diagonalmente opuesto (figura 8.29c), ya que en ese punto cada momento flexionante produce el esfuerzo de tensión máximo. Por tanto, el esfuerzo de tensión que actúa en ese punto es

$$\sigma_y = -\sigma_{P_1} + \sigma_{M_1} + \sigma_{M_2} = -295 \text{ psi} + 1564 \text{ psi} + 2232 \text{ psi} = 3500 \text{ psi}$$

Los esfuerzos que actúan sobre un elemento de esfuerzo en ese punto (consulte la figura 8.30) son

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 3500 \text{ psi} \qquad \tau_{xy} = 0$$

y, por tanto, los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo son

$$\sigma_1 = 3500 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \tau_{\text{máx}} = 1750 \text{ psi}$$

Por tanto, el esfuerzo de tensión máximo en cualquier parte en la base del poste es 3500 psi, el esfuerzo de compresión máximo es 4090 psi y el esfuerzo cortante máximo es 2050 psi. (Tenga en cuenta que en este análisis sólo se consideraron los efectos de las cargas P_1 y P_2. Otras cargas, como el peso de la estructura, también producen esfuerzos en la base del poste.)

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo investigamos algunos ejemplos prácticos de estructuras en estados de esfuerzo plano con base el material presentado en las secciones 7.2 a 7.5 del capítulo anterior. Primero consideramos los esfuerzos en recipientes esféricos y cilíndricos de pared delgada, como tanques de almacenamiento que contienen gases comprimidos o líquidos. Luego investigamos la distribución de los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos en vigas y trazamos trayectorias de esfuerzo o contornos de esfuerzo para representar la variación de dichos esfuerzos sobre la longitud de la viga. Por último, evaluamos los esfuerzos normales y cortantes máximos en varios puntos en estructuras o componentes sometidos a cargas combinadas. Los conceptos y determinaciones más importantes presentadas en este capítulo son las siguientes:

1. El esfuerzo plano es una condición común de esfuerzo que existe en todas las estructuras ordinarias, como en las paredes de recipientes a presión, en las almas y/o patines de vigas de varios perfiles y en una gran variedad de estructuras sometidas a los efectos combinados de cargas axial, cortante y de flexión, así como a la presión interna.
2. La pared de un recipiente presurizado de pared delgada está en un estado de esfuerzo plano, en específico, esfuerzo biaxial, con esfuerzos de tensión uniformes conocidos como esfuerzos de membrana que actúan en todas las direcciones. Sólo el exceso de presión interna sobre la presión externa o presión manométrica tiene algún efecto sobre estos esfuerzos. Consideraciones importantes adicionales para un análisis o diseño más detallado de recipientes esféricos incluyen: concentraciones de esfuerzos alrededor de aberturas, efectos de cargas externas y peso propio (incluido el contenido) y la influencia de la corrosión, impactos y cambios de temperatura.
3. Las paredes de recipientes a presión cilíndricos de pared delgada con secciones transversales circulares también están en un estado de esfuerzo biaxial. Al esfuerzo circunferencial se le refiere como esfuerzo de aro y el esfuerzo paralelo al eje del recipiente se le denomina esfuerzo longitudinal o esfuerzo axial. El esfuerzo circunferencial es igual al doble del esfuerzo longitudinal. Los dos son esfuerzos principales. Las fórmulas deducidas aquí empleando la teoría elemental para cascarones de pared delgada sólo son válidas en partes del cilindro alejadas de cualesquiera discontinuidades que causen concentraciones de esfuerzos.
4. Si se aplica la ley de Hooke, las fórmulas de la flexión y del cortante (capítulo 5) se utilizan para encontrar esfuerzos normales y cortantes en puntos de interés a lo largo de una viga. Al investigar los esfuerzos en muchas secciones transversales de la viga para una carga dada, podemos determinar la variación en los esfuerzos principales en toda la viga y luego elaborar dos sistemas de curvas ortogonales (denominados trayectorias de esfuerzo) que dan las direcciones de los esfuerzos principales. También podemos elaborar curvas uniendo puntos con igual esfuerzo principal, conocidas como contornos de esfuerzo.
5. Las trayectorias de esfuerzo dan las direcciones de los esfuerzos principales pero no proporcionan información sobre sus magnitudes. En contraste, las magnitudes de los esfuerzos principales son constantes a lo largo de un contorno de esfuerzo, pero los contornos no dan información acerca de las direcciones de los esfuerzos.
6. En el diseño práctico de vigas ordinarias, los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos raramente se calculan. En cambio, los esfuerzos de tensión y compresión que se emplean en el diseño se calculan con la fórmula de la flexión en la sección transversal de momento flexionante máximo y el esfuerzo cortante que se empleará en el diseño se calcula con la fórmula del cortante en la sección transversal de fuerza cortante máxima.

continúa

7. Un elemento estructural sometido a cargas combinadas a menudo se puede analizar superponiendo los esfuerzos y las deformaciones causadas por cada carga actuando por separado. Sin embargo, los esfuerzos y las deformaciones deben ser funciones lineales de las cargas aplicadas, lo que a su vez requiere que el material siga la ley de Hooke y que los desplazamientos sean pequeños. No debe haber interacción entre las varias cargas, es decir, los esfuerzos y las deformaciones debidas a una carga no se deben ver afectados por la presencia de otras cargas.
8. En la sección 8.5 se presenta un enfoque detallado para el análisis de puntos críticos en una estructura o componente sometido a más de un tipo de carga.

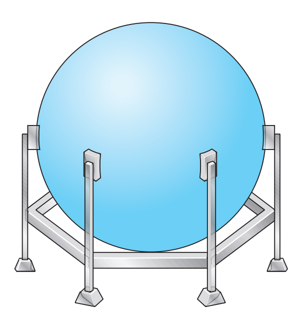
PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8

Recipientes esféricos a presión

Al resolver los problemas de la sección 8.2 suponga que el radio o el diámetro dado es una dimensión interior y que todas las presiones internas son presiones manométricas.

8.2.1 Un tanque esférico grande (consulte la figura) contiene gas a una presión de 450 psi. El tanque tiene un diámetro de 42 ft y está construido de acero de alta resistencia con un esfuerzo de fluencia en tensión de 80 ksi.

Determine el espesor requerido (hasta el 1/4 in más cercano) de la pared del tanque si se requiere un factor de seguridad de 3.5 con respecto a la fluencia.



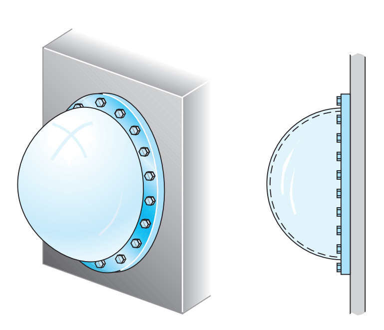
PROBS. 8.2.1 y 8.2.2

8.2.2 Resuelva el problema anterior si la presión interna es 3.75 MPa, el diámetro es 19 m, el esfuerzo de fluencia es de 570 MPa y el factor de seguridad es 3.0.

Determine el espesor requerido hasta el milímetro más cercano.

8.2.3 Una claraboya hemisférica (o *puerto de inspección*) en una cámara de descompresión (consulte la figura) está sometida una presión de aire interna de 80 psi. El puerto está sujeto a la pared de la cámara mediante 18 pernos.

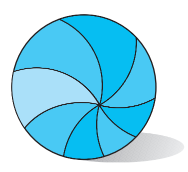
Encuentre la fuerza de tensión F en cada perno y el esfuerzo de tensión σ en el puerto de inspección si el radio del hemisferio es 7.0 in y su espesor es 1.0 in.



PROB. 8.2.3

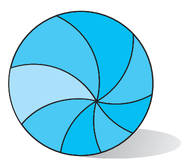
8.2.4 Una pelota de hule (consulte la figura) está inflada a una presión de 60 kPa. A esa presión el diámetro de la pelota es 230 mm y el espesor de pared es 1.2 mm. El hule tiene un módulo de elasticidad $E = 3.5$ MPa y la relación de Poisson $\nu = 0.45$.

Determine el esfuerzo máximo y la deformación máxima en la pelota.



PROB. 8.2.4

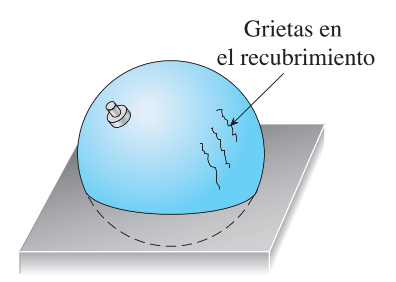
8.2.5 Resuelva el problema anterior si la presión es 9.0 psi, el diámetro es 9.0 in, el espesor de pared es 0.05 in, el módulo de elasticidad es 500 psi y la relación de Poisson es 0.45.



PROB. 8.2.5

8.2.6 Un recipiente esférico a presión hecho de acero (diámetro 480 mm, espesor 8.0 mm) está recubierto con laca frágil que se agrieta cuando la deformación alcanza 150×10^{-6} (consulte la figura).

¿Qué presión interna p ocasionará que la laca se agriete? (Suponga $E = 205$ GPa y $\nu = 0.30$.)



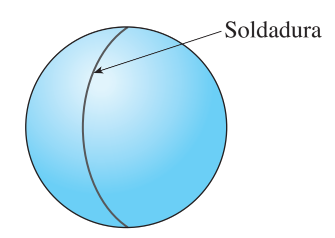
PROB. 8.2.6

8.2.7 Un tanque esférico con diámetro de 48 in y espesor de pared de 1.75 in contiene aire comprimido a una presión de 2200 psi. El tanque está construido con dos hemisferios unidos mediante una costura soldada (consulte la figura).

(a) ¿Cuál es la carga de tensión f (lb por pulgada de longitud de soldadura) que soporta la soldadura?

(b) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en la pared del tanque?

(c) ¿Cuál es la deformación normal máxima ϵ en la pared? (Para el acero, suponga $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.)



PROBS. 8.2.7 y 8.2.8

8.2.8 Resuelva el problema anterior con los siguientes datos: diámetro 1.0 m, espesor 48 mm, presión 22 MPa, módulo de elasticidad 210 GPa y relación de Poisson 0.29.

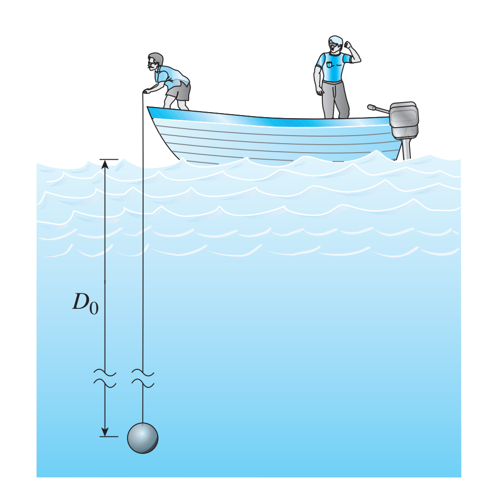
8.2.9 Un tanque esférico de acero inoxidable con un diámetro de 22 in se utiliza para almacenar gas propano a una presión de 2450 psi. Las propiedades del acero son las siguientes: esfuerzo de fluencia en tensión, 140,000 psi; esfuerzo de fluencia en cortante, 65,000 psi; módulo de elasticidad, 30×10^6 psi y relación de Poisson, 0.28. El factor de seguridad deseado con respecto a la fluencia es 2.8. Además, la deformación normal no debe sobrepasar 1100×10^{-6}.

Determine el espesor mínimo permisible $t_{\text{mín}}$ del tanque.

8.2.10 Resuelva el problema anterior si el diámetro es 500 mm, la presión es 18 MPa, el esfuerzo de fluencia en tensión es 975 MPa, el esfuerzo de fluencia en cortante es 460 MPa, el factor de seguridad es 2.5, el módulo de elasticidad es 200 GPa, la relación de Poisson es 0.28 y la deformación normal no debe sobrepasar 1210×10^{-6}.

8.2.11 Una esfera hueca presurizada con radio $r = 4.8$ in y espesor de pared $t = 0.4$ in se sumerge en un lago (consulte la figura). El aire comprimido en el recipiente está a una presión de 24 psi (presión manométrica cuando el recipiente está fuera del agua).

¿A qué profundidad D_0 la pared del recipiente estará sometida a un esfuerzo de compresión de 90 psi?



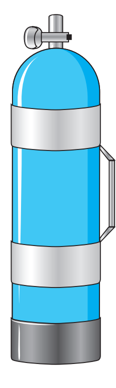
PROB. 8.2.11

Recipientes cilíndricos a presión

Al resolver los problemas de la sección 8.3, suponga que el radio o el diámetro dado es una dimensión interior y que todas las presiones internas son presiones manométricas.

8.3.1 Se está diseñando un tanque de buceo (consulte la figura) para una presión interna de 1600 psi con un factor de seguridad de 2.0 con respecto a la fluencia. El esfuerzo de fluencia del acero es 35,000 psi en tensión y 16,000 psi en cortante.

Si el diámetro del tanque es 7.0 in, ¿cuál es el espesor de pared mínimo requerido?

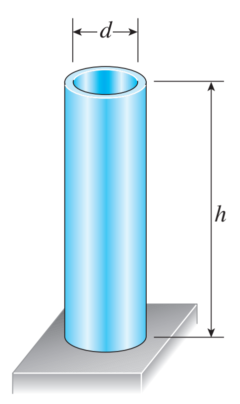


PROB. 8.3.1

8.3.2 Un tubo vertical alto abierto en su parte superior (consulte la figura) tiene diámetro $d = 2.2$ m y espesor de pared $t = 20$ mm.

(a) ¿Qué altura h de agua producirá un esfuerzo circunferencial de 12 MPa en la pared del tubo?

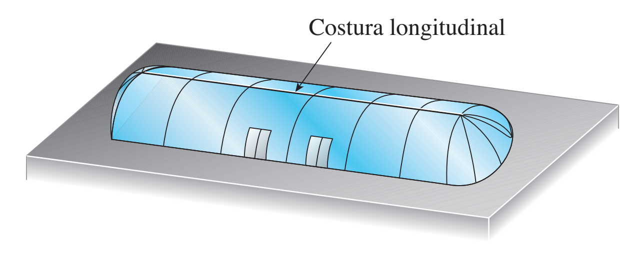
(b) ¿Cuál es el esfuerzo axial en la pared del tubo debido a la presión del agua?



PROB. 8.3.2

8.3.3 Una estructura inflable de un circo ambulante tiene forma de semicilindro con los extremos cerrados (consulte la figura). La tela y la estructura de plástico se inflan mediante un soplador pequeño y tiene un radio de 40 ft cuando está totalmente inflada. Una costura longitudinal se encuentra a todo lo largo de la parte más alta de la estructura.

Si la costura longitudinal a lo largo de la parte superior se desgarra cuando se somete a una carga de tensión de 540 libras por pulgada de costura, ¿cuál es el factor de seguridad n contra el desgarramiento cuando la presión interna es 0.5 psi y la estructura está totalmente inflada?



PROB. 8.3.3

8.3.4 Un recipiente cilíndrico de pared delgada a presión con radio r está sometido simultáneamente a una presión p interna de gas y a una fuerza F de compresión que actúa en los extremos (consulte la figura).

¿Cuál debe ser la magnitud de la fuerza F a fin de producir cortante puro en la pared del cilindro?



PROB. 8.3.4

8.3.5 Un deformímetro se coloca en la dirección longitudinal sobre la superficie de una lata de aluminio para una bebida de cola (consulte la figura). La razón entre el radio y el espesor de la lata es 200. Cuando lata se abre, la deformación cambia en $\epsilon_0 = 170 \times 10^{-6}$.

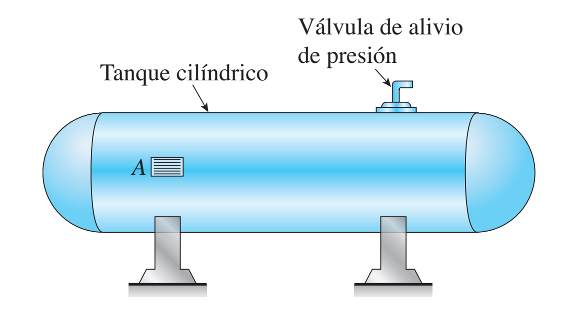
¿Cuál es la presión interna p en la lata? (Suponga $E = 10 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.33$.)



PROB. 8.3.5

8.3.6 Un tanque cilíndrico circular de acero (consulte la figura) contiene un combustible volátil a presión. Un deformímetro en el punto A registra la deformación normal en el tanque y transmite esta información a un sistema de control. El esfuerzo cortante último en la pared del tanque es 84 MPa y se requiere un factor de seguridad de 2.5.

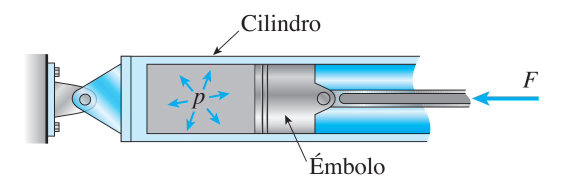
¿Para qué valor de la deformación deben tomar medidas correctivas los operadores para reducir la presión en el tanque? (Los datos para el acero son: $E = 205$ GPa y relación de Poisson $\nu = 0.30$.)



PROB. 8.3.6

8.3.7 Un cilindro lleno de aceite está a presión por la acción de un émbolo, como se muestra en la figura. El diámetro d del émbolo es 1.80 m y la fuerza de compresión F es 3500 lb. El esfuerzo cortante máximo permisible $\tau_{máx}$ en la pared del cilindro es 5500 psi.

¿Cuál es el espesor mínimo permisible $t_{mín}$ de la pared del cilindro? (Consulte la figura.)



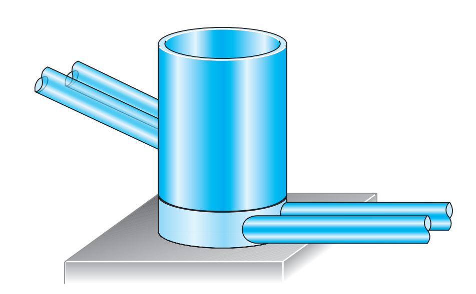
PROBS. 8.3.7 y 8.3.8

8.3.8 Resuelva el problema anterior si d = 90 mm, F = 42 kN y τ_{perm} = 40 MPa.

8.3.9 Un tubo vertical en un sistema de abastecimiento de agua (consulte la figura) tiene 12 in de diámetro y 6 in de espesor. Dos tubos horizontales toman agua del tubo vertical; cada uno tiene 2 ft de diámetro y 1 in de espesor. Cuando el sistema está cerrado y el agua llena los tubos pero no se mueve, el esfuerzo circunferencial en la parte inferior del tubo es de 130 psi.

(a) ¿Cuál es la altura h del agua en el tubo vertical?

(b) Si los fondos de los tubos están a la misma elevación que el fondo del tubo, ¿cuál es el esfuerzo circunferencial en los tubos?



PROB. 8.3.9

8.3.10 Un tanque cilíndrico con extremos hemisféricos está construido con secciones de acero soldadas circunferencialmente (consulte la figura). El diámetro del tanque es 1.25 m, el espesor de pared es 22 mm y la presión interna es 1750 kPa.

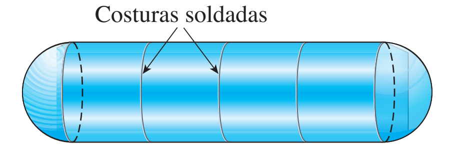
(a) Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_h en los extremos del tanque.

(b) Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_c en la parte cilíndrica del tanque.

(c) Determine el esfuerzo de tensión σ_w que actúa perpendicular a las uniones soldadas.

(d) Determine el esfuerzo cortante máximo τ_h en los extremos del tanque.

(e) Determine el esfuerzo cortante máximo τ_c en la parte cilíndrica del tanque.



PROBS. 8.3.10 y 8.3.11

8.3.11 Un tanque cilíndrico con diámetro d = 18 in está sometido a una presión de gas interna p = 450 psi. El tanque está construido con secciones de acero que están soldadas circunferencialmente (consulte la figura). Los extremos del tanque son hemisféricos. Los esfuerzos de tensión y cortante permisibles son 8200 psi y 3000 psi, respectivamente. Además, el esfuerzo de tensión permisible perpendicular a la soldadura es 6250 psi.

Determine el espesor mínimo requerido $t_{mín}$ de (a) la parte cilíndrica del tanque y (b) de los extremos hemisféricos.

***8.3.12** Un tanque presurizado de acero está construido con una soldadura helicoidal que forma un ángulo α = 55° con el eje longitudinal (consulte la figura). El tanque tiene radio r = 0.6 m, espesor de pared t = 18 mm y presión interna p = 2.8 MPa. Además, el acero tiene módulo de elasticidad E = 200 GPa y relación de Poisson ν = 0.30.

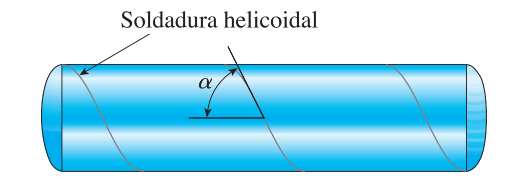
Determine las cantidades siguientes para la parte cilíndrica del tanque.

(a) Los esfuerzos circunferencial y longitudinal.

(b) Los esfuerzos cortantes máximos en el plano y fuera del plano.

(c) Las deformaciones circunferencial y longitudinal.

(d) Los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos paralelos y perpendiculares a la soldadura (muestre estos esfuerzos en un elemento de esfuerzo orientado de manera apropiada).



PROBS. 8.3.12 y 8.3.13

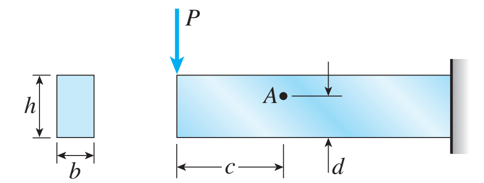
***8.3.13** Resuelva el problema anterior para un tanque soldado con α = 62°, r = 19 in, t = 0.65 in, p = 240 psi, E = 30 × 10^6 psi y ν = 0.30.

Esfuerzos máximos en vigas

Al resolver los problemas de la sección 8.4, considere sólo los esfuerzos en el plano y no tome en cuenta los pesos de las vigas.

8.4.1 Una viga en voladizo con sección transversal rectangular está sometida a una carga concentrada $P = 17$ k que actúa en el extremo libre (consulte la figura). La viga tiene un ancho $b = 3$ in y altura $h = 12$ in. El punto A está ubicado a una distancia $c = 2.5$ ft desde el extremo libre y a una distancia $d = 9$ in desde la parte inferior de la viga.

Calcule los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el punto A. Muestre estos esfuerzos en bosquejos de elementos orientados de manera apropiada.

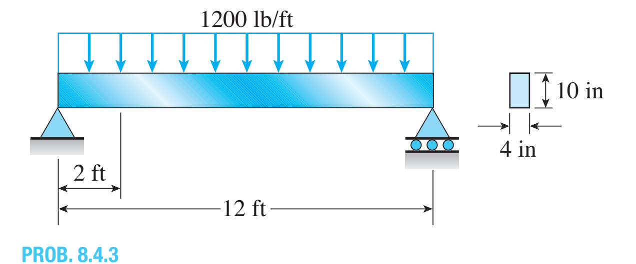


PROBS. 8.4.1 y 8.4.2

8.4.2 Resuelva el problema anterior con los siguientes datos: $P = 130$ kN, $b = 80$ mm, $h = 260$ mm, $c = 0.6$ m y $d = 220$ mm.

8.4.3 Una viga simple con sección transversal rectangular (ancho 4 in, altura 10 in) soporta una carga uniforme de 1200 lb/ft sobre un claro de 12 ft (consulte la figura).

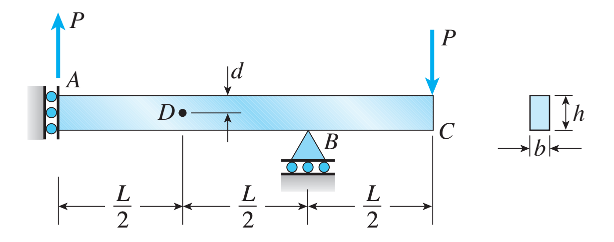
Encuentre los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en la sección transversal a 2 ft desde el apoyo izquierdo en cada una de las ubicaciones siguientes: (a) en el eje neutro, (b) a 2 in arriba del eje neutro y (c) en la parte superior de la viga. (No tome en cuenta los esfuerzos de compresión directos producidos por la carga uniforme apoyada contra la parte superior de la viga.)



PROB. 8.4.3

8.4.4 Una viga ABC con saliente ABC con un apoyo guiado en A tiene sección transversal rectangular y cargas concentradas P en el apoyo A y en el extremo libre C (consulte la figura). La longitud del claro de A a B es L, y la longitud de la saliente es $L/2$. La sección transversal tiene ancho b y altura h. El punto D está ubicado a la mitad entre los apoyos a una distancia d desde la cara superior de la viga.

Sabiendo que el esfuerzo de tensión máximo (esfuerzo principal) en el punto D es $\sigma_1 = 35$ MPa, determine la magnitud de la carga P. Los datos para la viga son: $L = 1.75$ m, $b = 50$ mm, $h = 200$ mm y $d = 40$ mm.

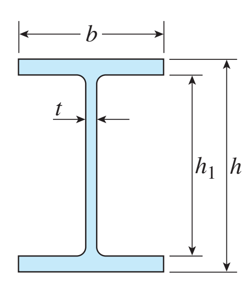


PROBS. 8.4.4 y 8.4.5

8.4.5 Resuelva el problema anterior si el esfuerzo y las dimensiones son: $\sigma_1 = 2450$ psi, $L = 80$ in, $b = 2.5$ in, $h = 10$ in y $d = 2.5$ in.

8.4.6 Una viga con sección transversal de patín ancho (consulte la figura) tiene las dimensiones siguientes: $b = 120$ mm, $t = 10$ mm, $h = 300$ mm y $h_1 = 260$ mm. La viga está simplemente apoyada con longitud del claro $L = 3.0$ m. Una carga concentrada $P = 120$ kN actúa a la mitad del claro.

En una sección transversal ubicada a 1.0 m desde el apoyo izquierdo, determine los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en cada una de las ubicaciones siguientes: (a) en la parte superior de la viga, (b) en la parte superior del alma y (c) en el eje neutro.



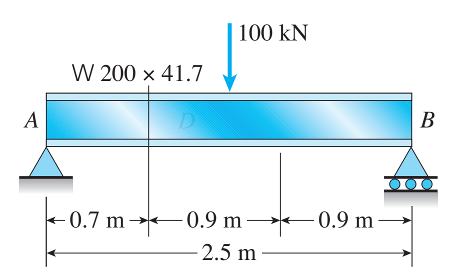
PROBS. 8.4.6 y 8.4.7

8.4.7 Una viga con sección transversal de patín ancho (consulte la figura) tiene las dimensiones siguientes: $b = 5$ in, $t = 0.5$ in, $h = 12$ in y $h_1 = 10.5$ in. La viga está simplemente apoyada con longitud del claro $L = 10$ ft y soporta una carga concentrada $q = 6$ k/ft.

Calcule los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en la sección transversal ubicada a 3 ft desde el apoyo izquierdo en cada una de las ubicaciones siguientes: (a) en la parte inferior de la viga, (b) en la parte inferior del alma y (c) en el eje neutro.

8.4.8 Una viga W 200 × 41.7 de patín ancho (consulte la tabla E.1(b), apéndice E) está simplemente apoyada y tiene un claro de 2.5 m (consulte la figura). La viga soporta una carga concentrada de 100 kN a 0.9 m del apoyo *B*.

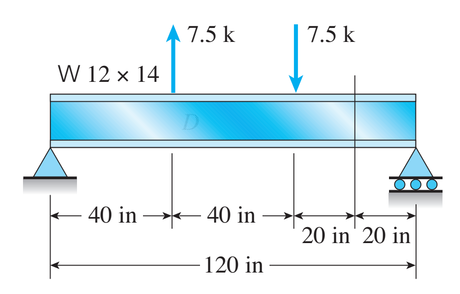
En una sección transversal ubicada a 0.7 m del apoyo izquierdo, determine los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en cada una de las ubicaciones siguientes: (a) en la parte superior de la viga, (b) en la parte superior del alma y (c) en el eje neutro.



PROB. 8.4.8

8.4.9 Una viga W 12 × 14 de patín ancho (consulte la tabla E-1(a), apéndice E) está simplemente apoyada y tiene un claro de 120 in (consulte la figura). La viga soporta dos cargas concentradas de manera simétrica pero con sentidos opuestos de 7.5 k cada una.

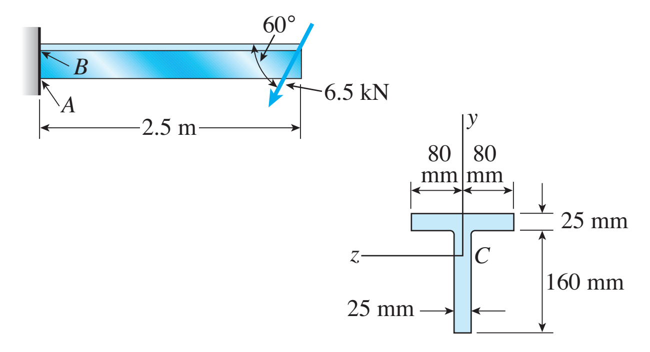
En una sección transversal ubicada a 20 in desde el apoyo derecho, determine los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en cada una de las siguientes ubicaciones: (a) en la parte superior de la viga, (b) en la parte superior del alma y (c) en el eje neutro.



PROB. 8.4.9

***8.4.10** Una viga en voladizo con sección transversal T está sometida a una fuerza inclinada con magnitud de 6.5 kN (consulte la figura). La línea de acción de la fuerza está inclinada a un ángulo de 60° con respecto a la horizontal e interseca la parte superior de la viga en la sección transversal extrema. La viga tiene una longitud de 2.5 m y la sección transversal tiene las dimensiones que se muestran en la figura.

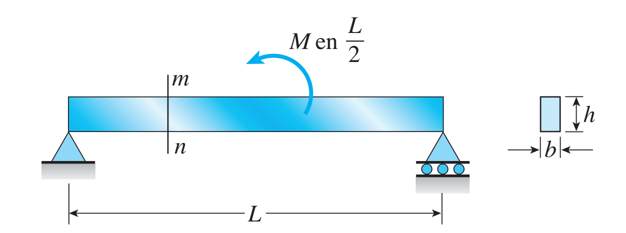
Determine los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en los puntos *A* y *B* en el alma de la viga cerca del apoyo.



PROB. 8.4.10

***8.4.11** Una viga simple con sección transversal rectangular tiene un claro $L = 62$ in y soporta un momento concentrado $M = 560$ k-in a la mitad del claro (consulte la figura). La altura de la viga es $h = 6$ in y el ancho es $b = 2.5$ in.

Trace gráficas de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, y del esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ mostrando cómo varían sobre la altura de la viga en la sección transversal *mn*, que se encuentra a 24 in desde el apoyo izquierdo.



PROBS. 8.4.11 y 8.4.12

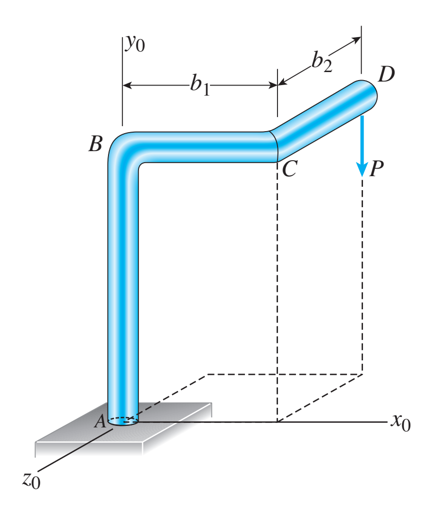
***8.4.12** Resuelva el problema anterior para una sección transversal *mn* ubicada a 0.18 m desde el apoyo si $L = 0.75$ m, $M = 65$ kN·m, $h = 120$ mm y $b = 20$ mm.

Cargas combinadas

Los problemas de la sección 8.5 se deben resolver suponiendo que las estructuras se comportan linealmente elásticas y que los esfuerzos generados por dos o más cargas se pueden superponer para obtener los esfuerzos resultantes que actúan en un punto. Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera del plano a menos que se especifique lo contrario.

8.5.1 Una ménsula *ABCD* con sección transversal circular consiste de un brazo vertical *AB*, un brazo horizontal *BC* paralelo al eje x_0 y un brazo horizontal *CD* paralelo al eje z_0 (consulte la figura). Los brazos *BC* y *CD* tienen longitudes b_1 = 3.6 ft y b_2 = 2.2 ft, respectivamente. Los diámetros exterior e interior de la ménsula son d_2 = 7.5 in y d_1 = 6.8 in. Una carga vertical P = 1400 lb actúa en el punto *D*. Determine los

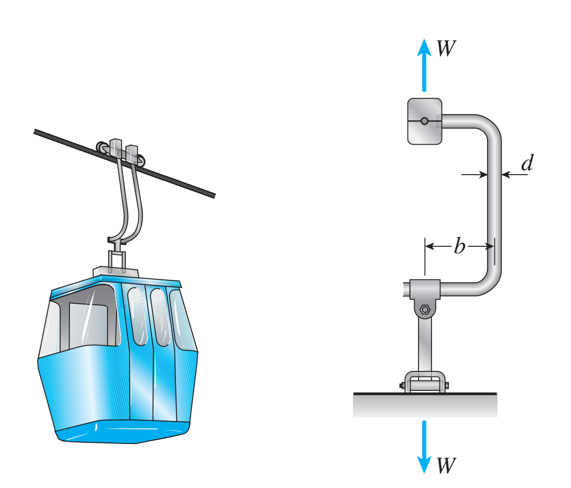
esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el brazo vertical.



PROB. 8.5.1

8.5.2 Una góndola de un teleférico está soportada por dos brazos doblados, como se muestra en la figura. Cada brazo tiene una excentricidad $b = 180$ mm desde la línea de acción de la fuerza del peso W. Los esfuerzos permisibles en los brazos son 100 MPa en tensión y 50 MPa en cortante.

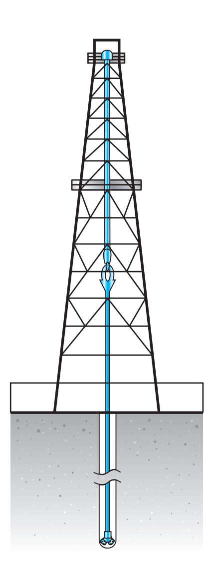
Si la góndola pesa 12 kN, ¿cuál es el diámetro mínimo d de los brazos?



PROB. 8.5.2

8.5.3 Un tubo hueco para perforación en un pozo petrolero (consulte la figura) tiene un diámetro exterior de 6.2 in y espesor de 0.75 in. Justo arriba de la broca, la fuerza de compresión en el tubo (debida al peso del tubo) es 62 k y el par de torsión (debido al dispositivo de perforación) es 185 k-in.

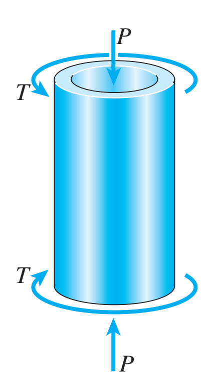
Determine los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el tubo de perforación.



PROB. 8.5.3

8.5.4 Un segmento de un eje de un generador está sometido a un par de torsión T y a una fuerza axial P, como se muestra en la figura. El eje es hueco (diámetro exterior $d_2 = 300$ mm y diámetro interior $d_1 = 250$ mm) y suministra 1800 kW a 4.0 Hz.

Si la fuerza de compresión $P = 540$ kN, ¿cuáles son los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el eje?



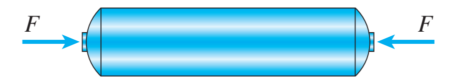
PROBS. 8.5.4 y 8.5.5

8.5.5 Un segmento de un eje de un generador con sección transversal hueca está sometido a un par de torsión $T = 240$ k-in (consulte la figura). Los diámetros exterior e interior del eje son 8.0 in y 6.25 in, respectivamente.

¿Cuál es la carga de compresión máxima P que se puede aplicar al eje si el esfuerzo cortante permisible en el plano es $\tau_{perm} = 6250$ psi?

8.5.6 Un tanque cilíndrico está sometido a una presión interna p y al mismo tiempo se comprime por una fuerza axial F = 72 kN (consulte la figura). El cilindro tiene un diámetro d = 100 mm y espesor de pared t = 4 mm.

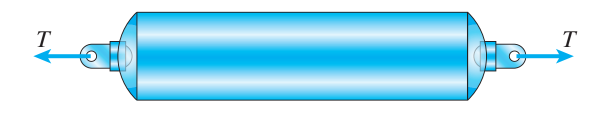
Calcule la presión interna máxima permisible $p_{máx}$ con base en un esfuerzo cortante permisible en la pared del tanque de 60 MPa.



PROB. 8.5.6

8.5.7 Un tanque cilíndrico con diámetro d = 2.5 in está sometido a una presión de gas interna p = 600 psi y a una carga de tensión externa T = 1000 lb (consulte la figura).

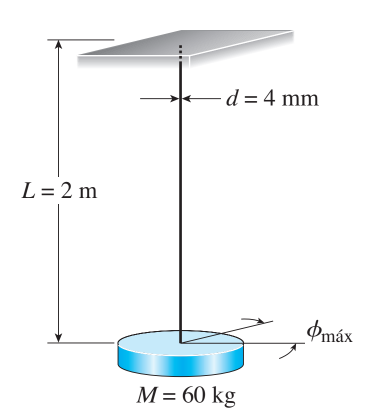
Determine el espesor mínimo t de la pared del tanque con base en un esfuerzo cortante permisible de 3000 psi.



PROB. 8.5.7

8.5.8 El péndulo de torsión que se muestra en la figura consiste de un disco circular horizontal con masa M = 60 kg suspendido mediante un alambre vertical de acero (G = 80 GPa) con longitud L = 2 m y diámetro d = 4 mm.

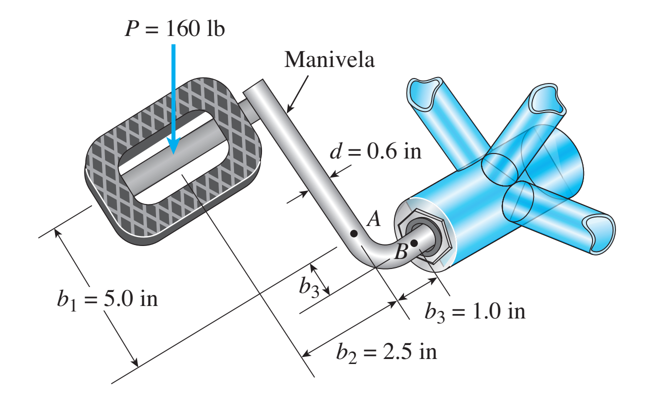
Calcule el ángulo máximo permisible de rotación $\phi_{máx}$ del disco (es decir, la amplitud máxima de las vibraciones por torsión) de manera que los esfuerzos en el alambre no sobrepasen 100 MPa en tensión y 50 MPa en cortante.

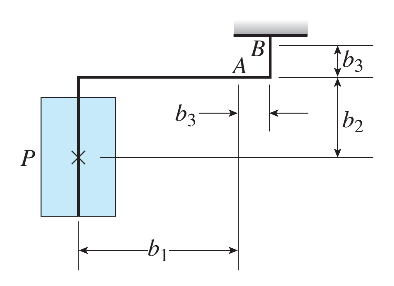


PROB. 8.5.8

8.5.9 Determine los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en los puntos A y B en la manivela del pedal de bicicleta que se muestra en la figura.

El pedal y la manivela están en un plano horizontal y los puntos A y B se encuentran en la parte superior de la manivela. La carga P = 160 lb actúa en la dirección vertical y las distancias (en el plano horizontal) entre la línea de acción de la carga y los puntos A y B son b_1 = 5.0 in, b_2 = 2.5 in y b_3 = 1.0 in. Suponga que la manivela tiene una sección transversal circular sólida con diámetro d = 0.6 in.





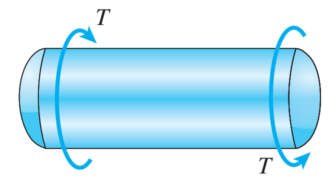
Vista superior

PROB. 8.5.9

8.5.10 Un recipiente cilíndrico a presión con radio r = 300 mm y espesor de pared t = 15 mm está sometido a una presión interna p = 2.5 MPa. Además, un par de torsión T = 120 kN·m actúa en cada extremo del cilindro (consulte la figura).

(a) Determine el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{máx}$ y el esfuerzo cortante máximo en el plano $\tau_{máx}$ en la pared del cilindro.

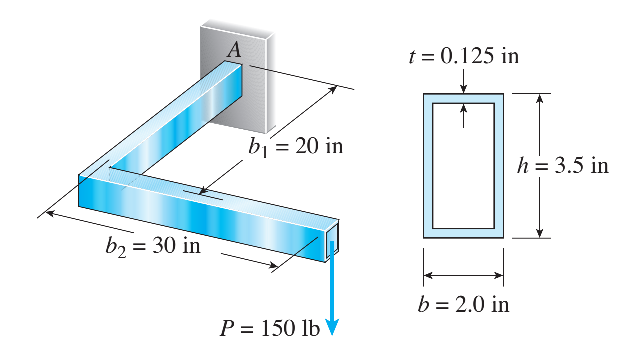
(b) Si el esfuerzo cortante permisible en el plano es 30 MPa, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible T?



PROB. 8.5.10

8.5.11 Una ménsula en forma de L en un plano horizontal soporta una carga P = 150 lb (consulte la figura). La ménsula tiene una sección transversal rectangular hueca con espesor t = 0.125 in y dimensiones exteriores b = 2.0 in y h = 3.5 in. Las longitudes hasta las líneas centrales de los brazos son b_1 = 20 in y b_2 = 30 in.

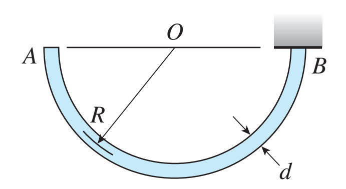
Considerando sólo la carga P, calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t, el esfuerzo de compresión máximo σ_c y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el punto A, que está situado en la parte suprior de la ménsula en el soporte.



PROB. 8.5.11

8.5.12 Una barra semicircular AB que se encuentra en un plano horizontal está soportada en B (consulte la figura). La barra tiene un radio hasta la línea central R y peso q por unidad de longitud (el peso total de la barra es igual a πqR). La sección transversal de la barra es circular con diámetro d.

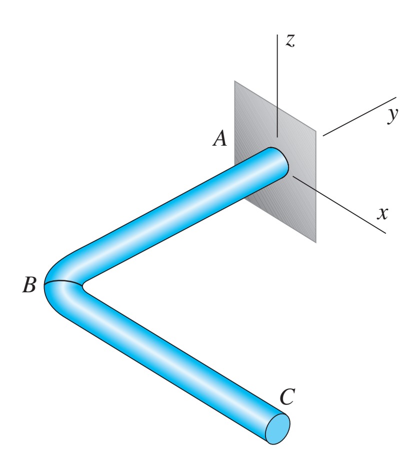
Obtenga fórmulas para el esfuerzo de tensión máximo σ_t, el esfuerzo de compresión máximo σ_c y esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en la parte superior de la barra en el soporte, debidos al peso de la barra.



PROB. 8.5.12

8.5.13 Un brazo ABC en un plano horizontal y soportado en A (consulte la figura) está hecho con dos barras sólidas idénticas de acero AB y BC soldadas en ángulo recto. Cada barra tiene una longitud de 20 in.

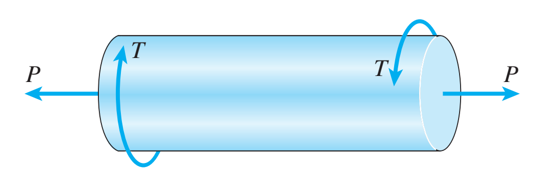
Si se sabe que el esfuerzo de tensión máximo (esfuerzo principal) en la parte superior de la barra en el soporte A debido únicamente a los pesos de las barras es 932 psi, determine el diámetro d de las barras.



PROB. 8.5.13

8.5.14 Un tanque cilíndrico presurizado con extremos planos está cargado por pares de torsión T y fuerzas de tensión P (consulte la figura). El tanque tiene radio r = 50 mm y espesor de pared t = 3 mm. La presión interna p = 3.5 MPa y el par de torsión T = 450 N·m.

¿Cuál es el valor máximo permisible de las fuerzas P si el esfuerzo de tensión permisible en la pared del cilindro es 72 MPa?

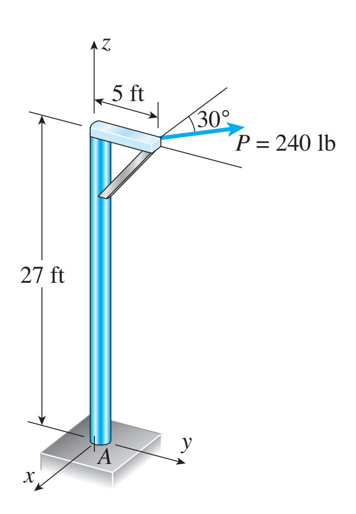


PROB. 8.5.14

8.5.15 Un poste con sección transversal hueca soporta una carga horizontal $P = 240$ lb que actúa en el extremo de un brazo con longitud de 5 ft (consulte la figura). La altura del poste es 27 ft y su módulo de sección es $S = 15\ \text{in}^3$. Suponga que el radio exterior del poste es $r_2 = 4.5$ in y el radio interior es $r_1 = 4.243$ in.

(a) Calcule el esfuerzo de tensión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ y el esfuerzo cortante máximo en el plano $\tau_{\text{máx}}$ en el punto A en la superficie exterior del poste a lo largo del eje x debidos a la carga P. Esta carga P actúa en un plano horizontal a un ángulo de 30° desde una línea que es paralela al eje $(-x)$.

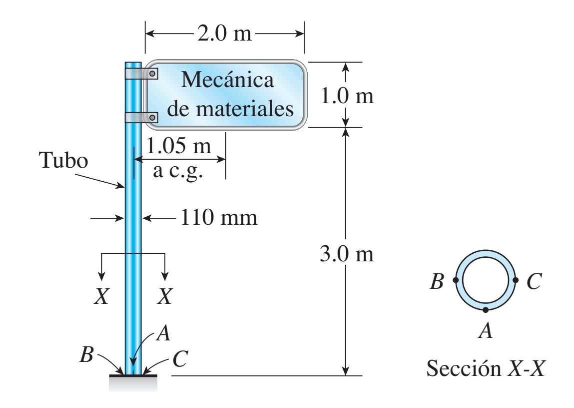
(b) Si el esfuerzo de tensión máximo y el esfuerzo cortante máximo en el plano en el punto A está limitado a 16,000 psi y 6000 psi, respectivamente, ¿cuál es el valor mayor permisible de la carga P?



PROB. 8.5.15

8.5.16 Un letrero que está soportado por un tubo (consulte la figura) tiene un diámetro exterior de 110 mm y diámetro interior de 90 mm. Las dimensiones del letrero son 2.0 m × 1.0 m y su borde inferior está a 3.0 m arriba de la base. Observe que el centro de gravedad del letrero se encuentra a 1.05 m desde el eje del tubo. La presión del viento contra el letrero es 1.5 kPa.

Determine los esfuerzos cortantes máximos en el plano, debidos a la presión del viento sobre el letrero en los puntos A, B y C ubicados en la superficie exterior en la base del tubo.

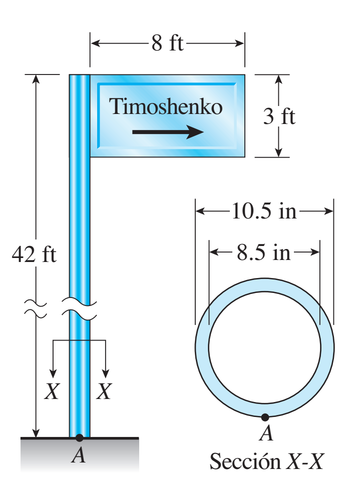


PROB. 8.5.16

8.5.17 Un letrero está soportado por un poste circular con sección transversal hueca, como se muestra en la figura. Los diámetros exterior e interior del poste son 10.5 in y 8.5 in, respectivamente. El poste tiene una altura de 42 ft y pesa 4.0 k. Las dimensiones del letrero son 8 ft × 3 ft y pesa 500 lb. Observe que el centro de gravedad está a 53.25 in desde el eje del poste. La presión del viento contra el letrero es 35 lb/ft².

(a) Determine los esfuerzos que actúan sobre un elemento de esfuerzo en el punto A, que está en la superficie exterior del poste en su "frente," es decir, la parte del poste más cercana al observador.

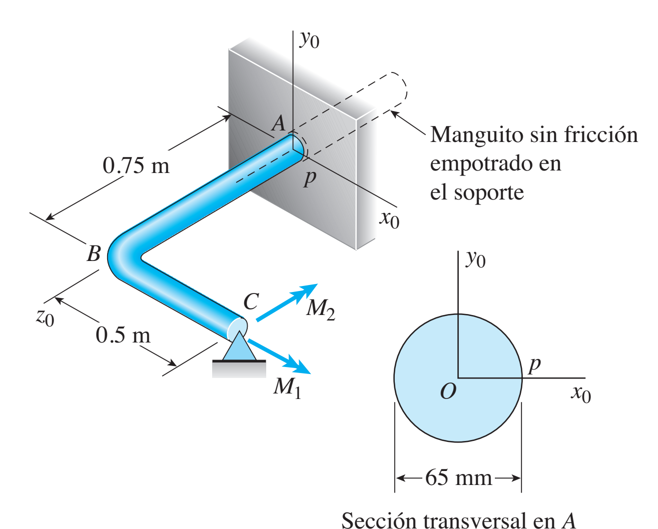
(b) Determine los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el punto A.



PROB. 8.5.17

8.5.18 Una ménsula horizontal *ABC* consiste de dos brazos perpendiculares *AB* con longitud igual a 0.75 m y *BC* con longitud igual a 0.5 m. La ménsula tiene una sección transversal circular sólida con diámetro de 65 mm y está insertada en un manguito sin fricción en *A* (que tiene un diámetro ligeramente mayor que la ménsula) por lo que es libre de girar con respecto al eje z_0 en *A* y está soportada por un pasador en *C*. En el punto *C* se aplican los momentos siguientes: M_1 = 1.5 kN·m en la dirección *x* y M_2 = 1.0 kN·m que actúan en la dirección (−*z*).

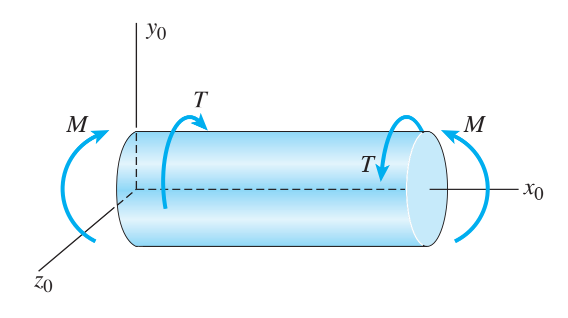
Considerando sólo los momentos M_1 y M_2 calcule el esfuerzo de tensión máximo σ_t, el esfuerzo de compresión máximo σ_c y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el punto *p*, que está situado en el soporte *A* en el lado de la ménsula a media altura.



PROB. 8.5.18

8.5.19 Un recipiente cilíndrico a presión con extremos planos está sometido a un par de torsión *T* y a un momento flexionante *M* (consulte la figura). El radio exterior es 12.0 in y el espesor de pared es 1.0 in. Las cargas son: *T* = 800 k-in, *M* = 1000 k-in y la presión interna *p* = 900 psi.

Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_t, el esfuerzo de compresión máximo σ_c y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$ en el cilindro.

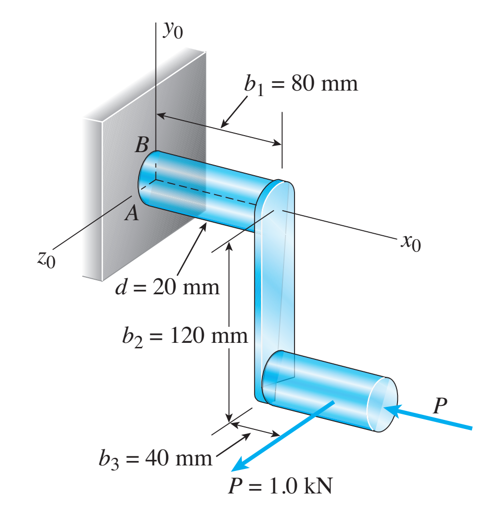


PROB. 8.5.19

8.5.20 Para fines de análisis, un segmento del cigüeñal de un vehículo se representa como se muestra en la figura. Dos cargas *P* actúan como se muestra, una paralela a $(-x_0)$ y la otra paralela a z_0; cada carga *P* es igual a 1.0 kN. Las dimensiones del cigüeñal son b_1 = 80 mm, b_2 = 120 mm y b_3 = 40 mm. El diámetro del eje superior es *d* = 20 mm.

(a) Determine los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el punto *A*, que está ubicado en la superficie superior del árbol en el eje z_0.

(b) Determine los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el punto *B*, que se encuentra en la superficie del árbol en el eje y_0.

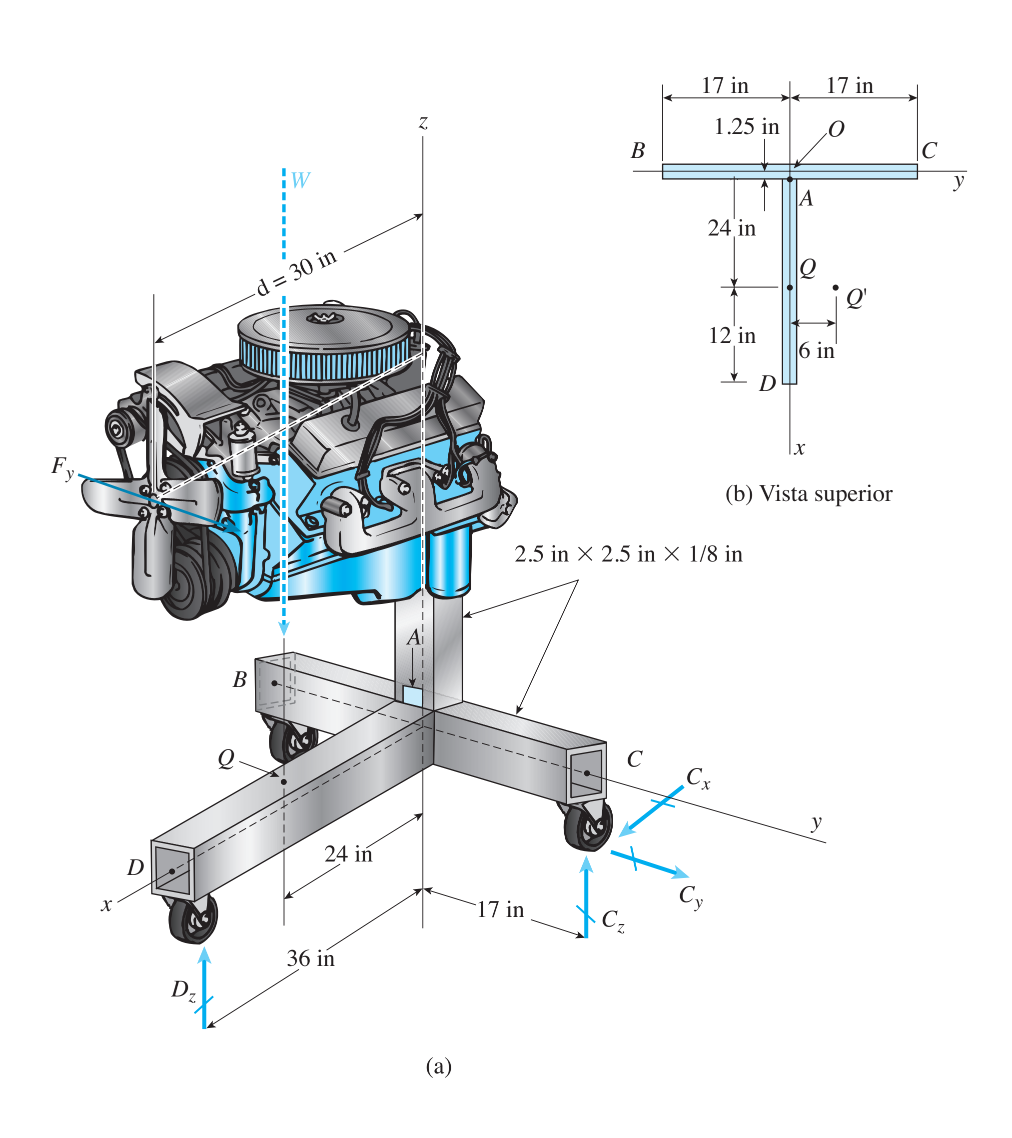


PROB. 8.5.20

8.5.21 Un soporte móvil de acero sostiene el motor de un automóvil que pesa $W = 750$ lb como se muestra en la parte (a) de la figura. El soporte está construido con un tubo de acero de 2.5 in × 2.5 in × 1/8 in de espesor. Una vez en posición el soporte se restringe por soportes con pasador en *B* y *C*. De interés son los esfuerzos en el punto *A* en la base del poste vertical; el punto *A* tiene coordenadas ($x = 1.25$, $y = 0$, $z = 1.25$) (in). No tome en cuenta el peso del soporte.

(a) Al inicio el peso del motor actúa en la dirección ($-z$) por el punto *Q* que tiene coordenadas (24, 0, 1.25); encuentre los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante en el punto *A*.

(b) Repita el inciso (a) suponiendo ahora que, durante una reparación, el motor se gira con respecto a su propio eje longitudinal (que es paralelo al eje *x*) de manera que *W* actúa en **Q**′ (con coordenadas (24, 6, 1.25)) y la fuerza $F_y = 200$ lb se aplica paralela al eje *y* a una distancia $d = 30$ in.



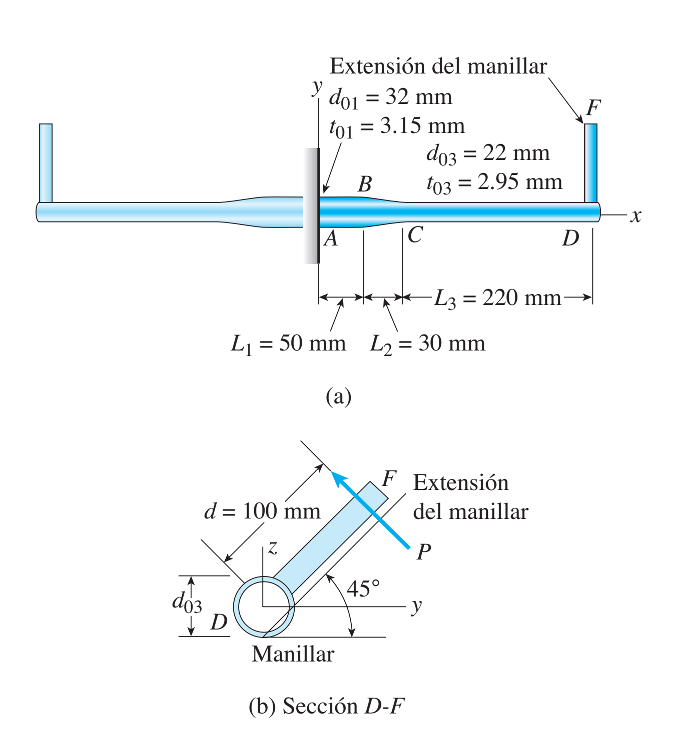
(a)

(b) Vista superior

PROB. 8.5.21

8.5.22 Un ciclista de montaña en un recorrido colina arriba aplica una fuerza $P = 65$ N a cada extremo de los manillares *ABCD*, hechos de una aleación de aluminio 7075-T6, jalando sobre las extensiones de los manillares (*DF* en el segmento del manillar derecho). Considere sólo la mitad derecha del conjunto del manillar (suponga que las barras están fijas en la horquilla en *A*). Los segmentos *AB* y *CD* son barras prismáticas con longitudes L_1 y L_3, y con diámetros exteriores y espesores d_{01}, t_{01} y d_{03}, t_{03}, respectivamente, como se muestra. Sin embargo, el segmento *BC* con longitud L_2, está ahusado, y sus dimensiones exteriores y el espesor varían linealmente entre las dimensiones *B* y *C*. Considere sólo los efectos de cortante, torsión y flexión para el segmento *AD*; suponga que *DF* es rígido.

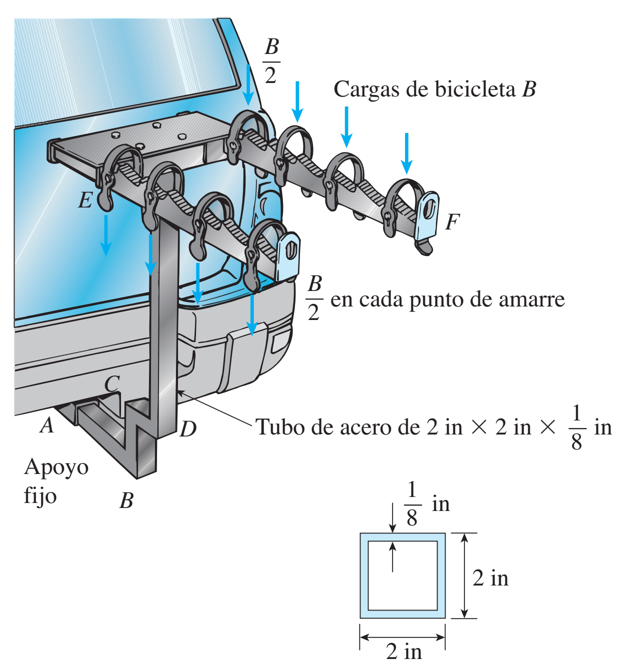
Encuentre los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante adyacentes al soporte *A*. Muestre dónde ocurre cada valor máximo del esfuerzo.

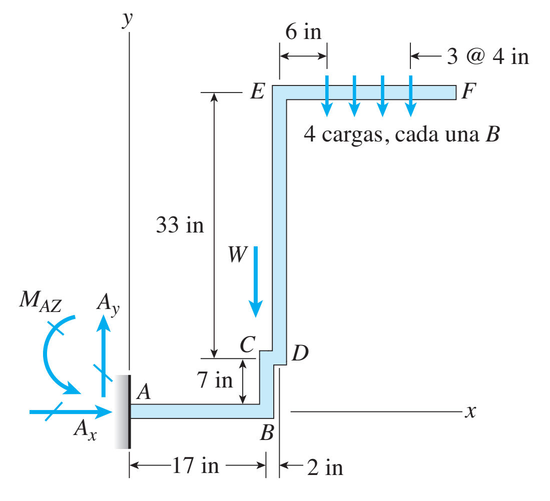


PROB. 8.5.22

8.5.23 Determine los esfuerzos máximos de tensión, compresión y cortante que actúan sobre la sección transversal del tubo en el punto *A* del soporte de enganche para bicicletas que se muestra en la figura.

El soporte está hecho de un tubo de acero de 2 in × 2 in con espesor de 1/8 in. Suponga que el peso de cada una de cuatro bicicletas está distribuido uniformemente entre los dos brazos del soporte de manera que éste se puede representar como una viga en voladizo (*ABCDEF*) en el plano *x*-*y*. El peso global sólo del soporte es $W = 60$ lb dirigido a través de *C* y el peso de cada bicicleta es $B = 30$ lb.





PROB. 8.5.23



Las deflexiones de vigas son un aspecto importante en su diseño inicial y también se deben supervisar durante su construcción.

9

Deflexiones de vigas

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presentan los métodos para el cálculo de las deflexiones de vigas. Las deflexiones de vigas, además de los esfuerzos y las deformaciones unitarias en ellas analizadas en los capítulos 5 y 6 son un aspecto esencial en su análisis y diseño. Una viga puede ser lo suficientemente fuerte como para soportar una variedad de cargas estáticas o dinámicas (consulte el análisis en las secciones 1.7 y 5.6), pero si se flexiona demasiado o vibra por las cargas aplicadas, falla y no cumple los requisitos de "servicio", los cuales son un elemento importante de su diseño global. En este capítulo se estudia una variedad de métodos que se pueden utilizar para calcular sus deflexiones (tanto de traslación como de rotación) **en puntos específicos** a lo largo de la viga o bien **la forma flexionada de toda la viga**. La viga puede ser prismática o no prismática (sección 9.7), sometida a cargas concentradas o distribuidas (o a las dos) o la "carga" puede ser una diferencia en temperatura entre la parte superior y la inferior de la viga (sección 9.11). En general, se supone que la viga se comporta de manera linealmente elástica y que está restringida a desplazamientos pequeños (es decir, pequeños comparados con su propia longitud). Primero se estudian los métodos con base en la **integración de la ecuación diferencial de la curva elástica** (secciones 9.2 a 9.4). En el apéndice G se resumen los resultados de las deflexiones de vigas para una amplia gama de cargas que actúan sobre vigas en voladizo o simples, que se pueden emplear en el **método de superposición** (sección 9.5). Luego, se describe un método basado en el **área del diagrama del momento flexionante** (sección 9.6). Los conceptos de trabajo y **energía de deformación** se presentan en la sección (9.8) seguidos de una aplicación de estos principios para calcular las deflexiones de una viga conocida como **teorema de Castigliano.** Por último, se estudia el tema especializado de deflexiones en vigas debidas a **impacto** (sección 9.10).

El capítulo 9 está organizado como sigue:

**Temas avanzados*

9.1 INTRODUCCIÓN

Cuando un viga con un eje longitudinal recto se carga con fuerzas laterales, el eje se deforma y adopta una forma curva, denominada **curva de deflexión** de la viga. En el capítulo 5, utilizamos la curvatura de la viga flexionada para determinar las deformaciones unitarias normales y los esfuerzos normales en la viga. Sin embargo, no desarrollamos un método para encontrar la propia curva de deflexión. En este capítulo determinaremos la ecuación de la curva de deflexión y también encontraremos las deflexiones en puntos específicos a lo largo del eje de la viga.

El cálculo de deflexiones es una parte importante del análisis y diseño estructural. Por ejemplo, determinar deflexiones es un ingrediente esencial en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas (capítulo 10). Las deflexiones también son importantes en el análisis dinámico, como cuando se investigan las vibraciones de aeronaves o la respuesta de los edificios a los sismos.

En ocasiones las deflexiones se calculan con el fin de verificar que estén dentro de los límites tolerables. Por ejemplo, las especificaciones para el diseño de edificios suelen fijar límites superiores para las deflexiones. Las deflexiones grandes son inusuales (e incluso ponen nerviosos a sus ocupantes) y pueden causar grietas en techos y paredes. En el diseño de máquinas y aeronaves las especificaciones pueden limitar las deflexiones a fin de evitar las vibraciones indeseables.

9.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN

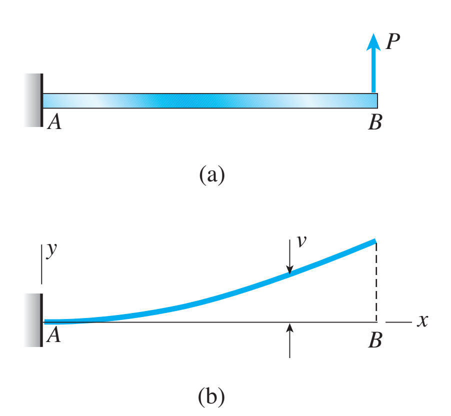


FIGURA 9.1 Curva de deflexión de una viga en voladizo.

La mayor parte de los procedimientos para determinar las deflexiones se basan en ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión y sus relaciones asociadas; por esta razón iniciaremos deduciendo la ecuación básica para la curva de deflexión de una viga.

Para fines de análisis, considere una viga en voladizo con una carga concentrada que actúa hacia arriba en el extremo libre (figura 9.1a). Debido a la acción de esta carga el eje de la viga se deforma y adopta una forma curva, como se muestra en la figura 9.1b. Los ejes de referencia tienen su origen en el empotramiento de la viga, con el eje x dirigido hacia la derecha y el eje y dirigido hacia arriba. El eje z está dirigido hacia fuera de la figura (hacia el observador).

Al igual que en nuestros anteriores análisis de flexión en vigas en el capítulo 5, suponemos que el plano xy es un plano de simetría de la viga y que todas las cargas actúan en él (el *plano de flexión*).

La **deflexión** v es el desplazamiento en la dirección y de cualquier punto sobre el eje de la viga (figura 9.1b). Dado que el eje y es positivo hacia arriba, las deflexiones también son positivas hacia arriba.*

Para obtener la ecuación de la curva de deflexión, debemos expresar la deflexión v como una función de la coordenada x. Por tanto, consideremos ahora

*Como ya se mencionó en la sección 5.1, los símbolos tradicionales para los desplazamientos en las direcciones x, y y z son u, v y w, respectivamente. La ventaja de esta notación es que enfatiza la distinción entre *coordenada* y *desplazamiento*.

la curva de deflexión con más detalle. La deflexión v en cualquier punto m_1 sobre la curva de deflexión se muestra en la figura 9.2a. El punto m_1 está ubicado a una distancia x desde el origen (medida a lo largo del eje x), también se muestra un segundo punto m_2, ubicado a una distancia $x + dx$ desde el origen. La deflexión en este segundo punto es $v + dv$, donde dv es el incremento en la deflexión conforme nos movemos a lo largo de la curva de m_1 a m_2.

Cuando la viga se flexiona, no sólo hay una deflexión en cada punto a lo largo del eje, sino también una rotación. El **ángulo de rotación** θ del eje de la viga es el ángulo entre el eje x y la tangente a la curva de deflexión, según se muestra para el punto m_1 en la vista ampliada de la figura 9.2b. Para nuestra elección de ejes (x positivo hacia la derecha y y positivo hacia arriba), el ángulo de rotación es positivo cuando es contrario al sentido de las manecillas del reloj. (Otros nombres para el ángulo de rotación son *ángulo de inclinación* y *ángulo de la pendiente*).

El ángulo de rotación en el punto m_2 es $\theta + d\theta$, donde $d\theta$ es el incremento angular conforme nos movemos del punto m_1 al punto m_2. Se deduce que si trazamos líneas normales a las tangentes (figuras 9.2a y b), el ángulo entre estas normales es $d\theta$. Además, como se estudió en la sección 5.3, el punto de intersección de estas normales es el **centro de curvatura** O' (figura 9.2a) y la distancia desde O' hasta la curva es el **radio de curvatura** ρ. En la figura 9.2a observamos que

$$\rho\, d\theta = ds \qquad \text{(a)}$$

en donde $d\theta$ está en radianes y ds es la distancia a lo largo de la curva de deflexión entre los puntos m_1 y m_2. Por tanto, la **curvatura** κ (igual al recíproco del radio de curvatura) está dada por la ecuación

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \qquad (9.1)$$

La **convención de signos** para la curvatura se ilustra en la figura 9.3, que es una repetición de la figura 5.6 de la sección 5.3. Observe que la curvatura

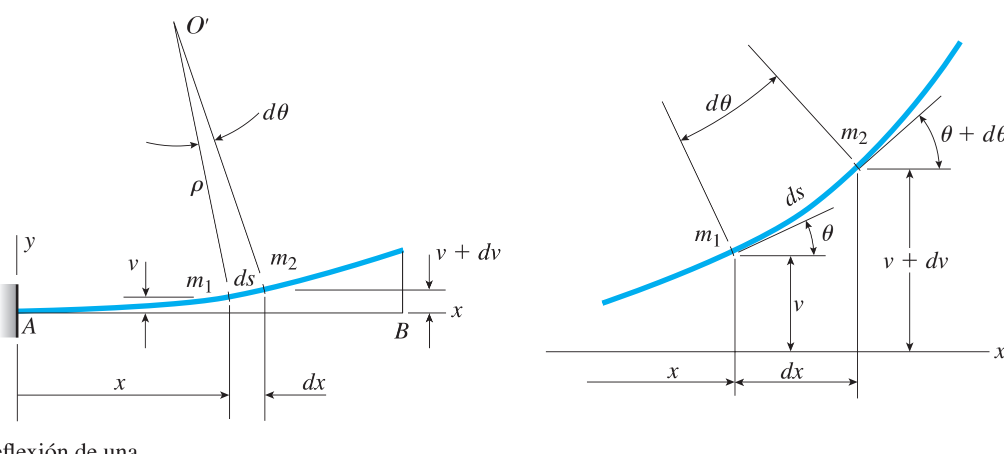
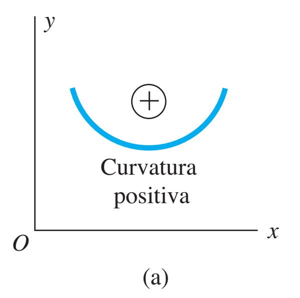


FIGURA 9.2 Curva de deflexión de una viga.



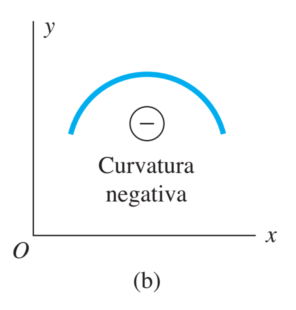


FIGURA 9.3 Convención de signos para la curvatura.

es positiva cuando el ángulo de rotación aumenta cuando nos movemos a lo largo de la viga en la dirección x positiva.

La **pendiente de la curva de deflexión** es la primera derivada dv/dx de la expresión para la deflexión v. En términos geométricos, la pendiente es el incremento dv en la deflexión (conforme vamos del punto m_1 al punto m_2 en la figura 9.2) dividido entre el incremento dx en la distancia a lo largo del eje x. Como dv y dx son infinitesimalmente pequeños, la pendiente dv/dx es igual a la tangente del ángulo de rotación θ (figura 9.2b). Por tanto,

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \qquad \theta = \arctan\frac{dv}{dx} \tag{9.2a,b}$$

De manera similar, también obtenemos las siguientes relaciones:

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{dv}{ds} \tag{9.3a,b}$$

Observe que cuando los ejes x y y tienen las direcciones que se muestran en la figura 9.2a, la pendiente dv/dx es positiva cuando la tangente a la curva se inclina hacia arriba a la derecha.

Las ecuaciones (9.1) a (9.3) se basan sólo en consideraciones geométricas y, por tanto, son válidas para vigas de cualquier material. Además, no hay restricciones para las magnitudes de las pendientes y deflexiones.

Vigas con ángulos de rotación pequeños

Las estructuras que se encuentran en la vida cotidiana, como edificios, automóviles, aeronaves y barcos, experimentan cambios relativamente pequeños en su forma mientras están en servicio. Los cambios son tan pequeños que no los nota un observador casual. En consecuencia, las curvas de deflexión de la mayor parte de las vigas y columnas tienen ángulos de rotación muy pequeños, deflexiones muy pequeñas y curvaturas muy pequeñas. En estas condiciones podemos hacer algunas aproximaciones matemáticas que simplifican en gran medida el análisis de la viga.

Considere, por ejemplo, la curva de deflexión que se muestra en la figura 9.2. Si el ángulo de rotación θ es una cantidad muy pequeña (y de aquí que la curva de deflexión sea casi horizontal), de inmediato observamos que la distancia ds a lo largo de la curva de deflexión es prácticamente la misma que el incremento dx a lo largo del eje x. Esta misma conclusión se puede obtener de manera directa a partir de la ecuación (9.3a). Dado que cos ≈ 1 cuando el ángulo θ es pequeño, la ecuación (9.3a) da

$$ds \approx dx \tag{b}$$

Con esta aproximación, la curvatura resulta (consulte la ecuación 9.1)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \tag{9.4}$$

Además, ya que $\theta \approx \theta$ cuando θ es pequeño, podemos hacer la siguiente aproximación para la ecuación (9.2a):

$$\theta \approx \tan\,\theta = \frac{dv}{dx} \qquad \text{(c)}$$

Entonces, si las rotaciones de una viga son pequeñas, podemos suponer que el ángulo de rotación θ y la pendiente dv/dx son iguales. (Observe que el ángulo de rotación debe medirse en radianes.)

Al derivar θ con respecto a x en la ecuación (c), obtenemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{(d)}$$

Combinamos esta ecuación con la ecuación (9.4) para obtener una relación entre la **curvatura** de una viga y su deflexión:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \qquad (9.5)$$

Esta ecuación es válida para una viga de cualquier material, siempre que las rotaciones sean pequeñas.

Si el material de una viga es **linealmente elástico** y sigue la ley de Hooke, la curvatura (de la ecuación 5.12, capítulo 5) es

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (9.6)$$

en donde M es el momento flexionante y EI es la rigidez a la flexión de la viga. La ecuación (9.6) muestra que un momento flexionante positivo produce una curvatura positiva y un momento flexionante negativo resulta en una curvatura negativa, como se mostró antes en la figura 5.10.

Al combinar la ecuación (9.5) con la ecuación (9.6) se obtiene la **ecuación diferencial básica de la curva de deflexión** de una viga:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (9.7)$$

Esta ecuación se puede integrar en cada caso particular para encontrar la deflexión v, siempre que el momento flexionante M y la rigidez a la flexión EI se conozcan como funciones de x.

Como recordatorio, repetimos las **convenciones de signos** que deben emplearse con las ecuaciones anteriores: (1) los ejes x y y son positivos hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente; (2) la deflexión v es positiva hacia arriba; (3) la pendiente dv/dx y el ángulo de rotación θ son positivos cuando son en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al eje x positivo; (4) la curvatura κ es positiva cuando la viga se flexiona con concavidad hacia arriba y (5) el momento flexionante M es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga.

Se pueden obtener ecuaciones adicionales a partir de las relaciones entre el momento flexionante M, la fuerza cortante V y la intensidad q de la

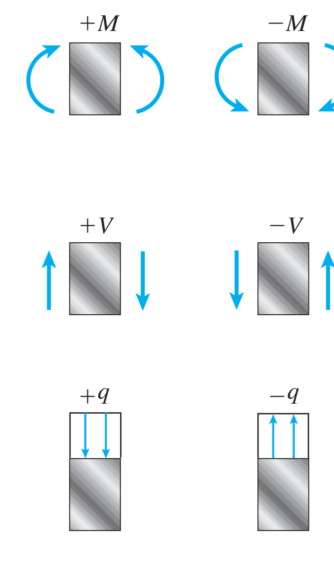


FIGURA 9.4 Convenciones de signos para el momento flexionante M, la fuerza cortante V y la intensidad q de la carga distribuida.

carga distribuida. En el capítulo 4 dedujimos las siguientes ecuaciones entre M, V y q (consulte las ecuaciones 4.4 y 4.6):

$$\frac{dV}{dx} = -q \qquad \frac{dM}{dx} = V \tag{9.8a,b}$$

Las convenciones de signos para estas cantidades se muestran en la figura 9.4. Al derivar la ecuación (9.7) con respecto a x y luego sustituyendo las ecuaciones anteriores para la fuerza cortante y la carga, podemos obtener las ecuaciones adicionales. Al hacerlo, consideraremos dos casos: vigas no prismáticas y vigas prismáticas.

Vigas no prismáticas

En el caso de una viga no prismática, la rigidez a la flexión EI es variable y, por tanto, podemos escribir la ecuación (9.7) en la siguiente forma

$$EI_x \frac{d^2v}{dx^2} = M \tag{9.9a}$$

donde se agrega el subíndice x como recordatorio que la rigidez a la flexión puede variar con x. Al derivar los dos lados de esta ecuación y empleando las ecuaciones (9.8a) y (9.8b), obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(EI_x \frac{d^2v}{dx^2}\right) = \frac{dM}{dx} = V \tag{9.9b}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_x \frac{d^2v}{dx^2}\right) = \frac{dV}{dx} = -q \tag{9.9c}$$

La deflexión de una viga no prismática se puede determinar al resolver (ya sea analítica o numéricamente) cualquiera de las tres ecuaciones diferenciales anteriores. La elección suele depender de cuál ecuación proporcione la solución más eficiente.

Vigas prismáticas

En el caso de una viga no prismática (EI constante), las ecuaciones diferenciales se convierten en

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \qquad EI\frac{d^3v}{dx^3} = V \qquad EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q \tag{9.10a,b,c}$$

Para simplificar la escritura de estas y otras ecuaciones, con frecuencia se emplean **primas** para denotar derivación:

$$v' \equiv \frac{dv}{dx} \qquad v'' \equiv \frac{d^2v}{dx^2} \qquad v''' \equiv \frac{d^3v}{dx^3} \qquad v'''' \equiv \frac{d^4v}{dx^4} \tag{9.11}$$

Con esta notación podemos expresar las ecuaciones diferenciales para una viga **prismática** en las siguientes formas:

$$EIv'' = M \qquad EIv''' = V \qquad EIv'''' = -q \tag{9.12a,b,c}$$

Nos referiremos a estas ecuaciones como **ecuación del momento flexionante, ecuación de la fuerza cortante** y **ecuación de la carga**, respectivamente.

En las dos siguientes secciones emplearemos las ecuaciones anteriores para encontrar deflexiones de vigas. El procedimiento general consiste en integrar las ecuaciones y luego evaluar las constantes de integración a partir de condiciones de frontera y de otras condiciones relativas a la viga.

Al deducir las ecuaciones diferenciales (ecuaciones 9.9, 9.10 y 9.12), supusimos que el material seguía la ley de Hooke y que las pendientes de la curva de deflexión eran muy pequeñas. También supusimos que cualesquiera deformaciones por cortante eran despreciables; en consecuencia, consideramos sólo las deformaciones debidas a flexión pura. La mayor parte de las vigas en uso común satisfacen estas suposiciones.

Expresión exacta para la curvatura

Si la curva de deflexión de una viga tiene pendientes grandes, no podemos emplear las aproximaciones dadas por las ecuaciones (b) y (c), por lo que debemos recurrir a las expresiones exactas para la curvatura y el ángulo de rotación (consulte las ecuaciones 9.1 y 9.2b). Al combinar estas expresiones obtenemos

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{dx}\,\frac{dx}{ds} \tag{e}$$

De la figura 9.2, observamos que

$$ds^2 = dx^2 + dv^2 \quad \text{o} \quad ds = [dx^2 + dv^2]^{1/2} \tag{f,g}$$

y dividiendo los dos lados de la ecuación (g) entre dx da

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = [1 + (v')^2]^{1/2} \quad \text{o} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{[1 + (v')^2]^{1/2}} \tag{h,i}$$

Además, la derivada de la función arco tangente (consulte el apéndice C) da

$$\frac{d}{dx}(\arctan v') = \frac{v''}{1 + (v')^2} \tag{j}$$

Al sustituir las expresiones (i) y (j) en la ecuación para la curvatura (ecuación e) obtenemos

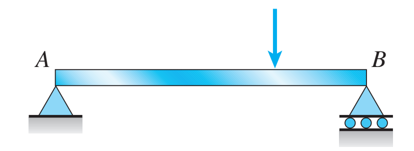
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \tag{9.13}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación (9.5), observamos que la suposición de rotaciones pequeñas es equivalente a ignorar $(v')^2$ en comparación con uno. La ecuación (9.13) se debe emplear para la curvatura siempre que las pendientes sean grandes.*

---

*La relación básica que establece que la curvatura de una viga es proporcional al momento flexionante (ecuación 9.6) la obtuvo por primera vez Jacob Bernoulli, si bien él calculó un valor incorrecto para la constante de proporcionalidad. La relación fue utilizada más tarde por Euler, quien resolvió la ecuación diferencial de la curva de deflexión para deflexiones grandes (empleando la ecuación 9.13) y deflexiones pequeñas (utilizando la ecuación 9.7). Para ver la historia de las curvas de deflexión, consulte la referencia 9.1.

9.3 DEFLEXIONES POR INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOMENTO FLEXIONANTE



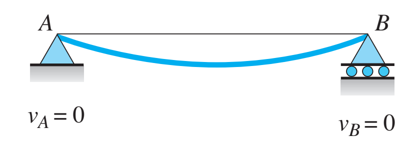


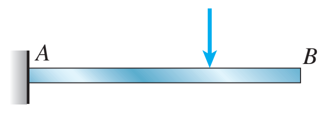
FIGURA 9.5 Condiciones de frontera en apoyos simples.

Ahora estamos en condiciones de resolver las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión y obtener deflexiones de vigas. La primera ecuación que utilizaremos es la ecuación del momento flexionante (ecuación 9.12a). Como ésta es de segundo orden, se requieren dos integraciones. La primera produce la pendiente $v' = dv/dx$ y la segunda produce la deflexión v.

Iniciamos el análisis escribiendo la ecuación (o ecuaciones) para los momentos flexionantes en la viga. Dado que en este capítulo sólo se consideran vigas estáticamente determinadas, podemos obtener los momentos flexionantes a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio, empleando los procedimientos descritos en el capítulo 4. En algunos casos una sola expresión para el momento flexionante es válida para toda la longitud de la viga, como se ilustra en los ejemplos 9.1 y 9.2. En otros casos el momento flexionante cambia abruptamente en uno o más puntos a lo largo del eje de la viga. Entonces debemos reescribir expresiones separadas del momento flexionante para cada región de la viga entre puntos donde ocurren cambios, como se ilustra en el ejemplo 9.3.

Sin importar el número de expresiones para el momento flexionante, el siguiente es el procedimiento general para resolver las ecuaciones diferenciales. Para cada región de la viga, sustituimos la expresión para M en la ecuación diferencial e integramos para obtener la pendiente v'. Cada integración produce una constante de integración. Luego, integramos cada ecuación de pendiente para obtener la deflexión correspondiente v. Una vez más, cada integración produce una constante nueva. Por tanto, hay dos constantes de integración por cada región de la viga. Dichas constantes se evalúan a partir de condiciones conocidas relativas a las pendientes y deflexiones. Las condiciones son de tres tipos: (1) condiciones de frontera, (2) condiciones de continuidad y (3) condiciones de simetría.

Las **condiciones de frontera** se relacionan con las deflexiones y pendientes en los apoyos de una viga. Por ejemplo, en un apoyo fijo simple (una articulación o un rodillo) la deflexión es cero (figura 9.5) y en un apoyo la deflexión y la pendiente son cero (figura 9.6). Cada una de estas condiciones de frontera da una ecuación que se puede emplear para evaluar las constantes de integración.



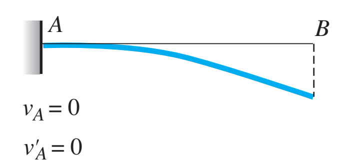


FIGURA 9.6 Condiciones de frontera en un empotramiento.

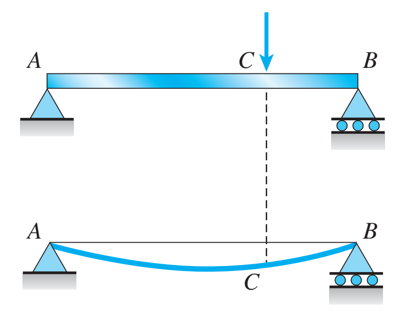


FIGURA 9.7 Condiciones de continuidad en el punto C.

Las **condiciones de continuidad** se presentan en puntos donde las regiones de integración confluyen, como en el punto C en la viga de la figura 9.7. La curva de deflexión de esta viga es físicamente continua en el punto C y, por tanto, la deflexión en el punto C determinada para la parte izquierda de la viga debe ser igual a la deflexión en el punto C determinada para la parte derecha. De manera similar, las pendientes encontradas para cada parte de la viga deben ser iguales en el punto C. Cada una de estas condiciones de continuidad da una ecuación para evaluar las constantes de integración.)

Las **condiciones de simetría** también pueden estar presentes, si una viga simple soporta una carga uniforme en toda su longitud, sabemos de antemano que la pendiente de la curva de deflexión en el punto medio debe ser cero. Esta condición da una ecuación adicional, como se ilustra en el ejemplo 9.1.

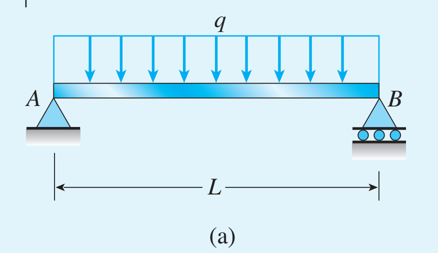
Cada condición de frontera, de continuidad y de simetría conduce a una ecuación que contiene una o más constantes de integración. Como el número de condiciones *independientes* siempre es igual al número de constantes de integración, de las ecuaciones podemos despejar las constantes. (Las condiciones de frontera y de continuidad solas siempre son suficientes para determinar las constantes. Cualesquiera condiciones de simetría proporcionan ecuaciones adicionales, pero no son independientes de las otras ecuaciones. La elección de qué condiciones emplear es un aspecto de conveniencia.)

Una vez evaluadas las constantes, éstas se pueden sustituir de regreso en las expresiones para las pendientes y deflexiones, produciendo de esta manera las ecuaciones finales de la curva de deflexión. Luego estas ecuaciones se pueden utilizar para obtener las deflexiones y los ángulos de rotación en puntos particulares a lo largo del eje de la viga.

El método anterior para encontrar deflexiones algunas veces se denomina **método de integraciones sucesivas.** Los siguientes ejemplos ilustran el método con detalle.

Nota: al dibujar las curvas de deflexión, como las que se muestran en los ejemplos siguientes y en las figuras 9.5, 9.6 y 9.7, por claridad exageramos en gran medida las deflexiones. Sin embargo, siempre se debe tener en cuenta que las deflexiones reales son cantidades muy pequeñas.

Ejemplo 9.1



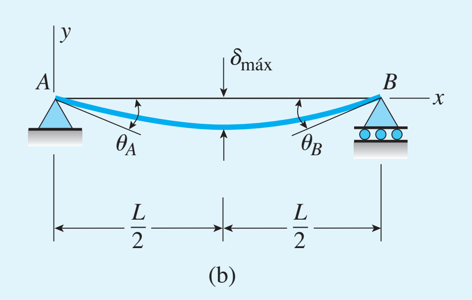


FIGURA 9.8 Ejemplo 9.1. Deflexiones de una viga simple con una carga uniforme.

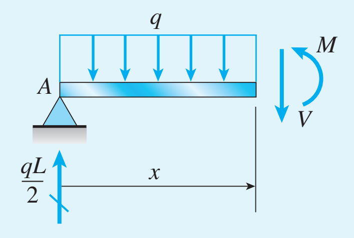


FIGURA 9.9 Diagrama de cuerpo libre que se emplea para determinar el momento flexionante M (ejemplo 9.1).

Determine la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB que soporta una carga uniforme con intensidad q que actúa en todo el claro de la viga (figura 9.8a).

Además, determine la deflexión máxima $\delta_{máx}$ en el punto medio de la viga y los ángulos de rotación θ_A y θ_B en los apoyos (figura 9.8b). (*Nota:* la viga tiene longitud L y rigidez a la flexión constante EI.)

Solución

Momento flexionante en la viga. El momento flexionante en una sección transversal a una distancia x desde el apoyo izquierdo se obtiene a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.9. Como la reacción en el apoyo es $qL/2$, la ecuación para el momento flexionante es

$$M = \frac{qL}{2}(x) - qx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \tag{9.14}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión. Al sustituir la expresión para el momento flexionante (ecuación 9.14) en la ecuación diferencial (ecuación 9.12a), obtenemos

$$EIv'' = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \tag{9.15}$$

Ahora esta ecuación se puede integrar para obtener la pendiente y la deflexión de la viga.

Pendiente de la viga. Al multiplicar los dos lados de la ecuación diferencial por dx, obtenemos la ecuación siguiente:

$$EIv''\,dx = \frac{qLx}{2}dx - \frac{qx^2}{2}dx$$

Integrando cada término, da

$$EI\int v''\,dx = \int \frac{qLx}{2}dx - \int \frac{qx^2}{2}dx$$

o

$$EIv' = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \tag{a}$$

en donde C_1 es una constante de integración.

Para evaluar la constante C_1, observamos de la simetría de la viga y su carga que la pendiente de la curva de deflexión a la mitad del claro es igual a cero. Entonces, tenemos la siguiente condición de simetría:

$$v' = 0 \quad \text{cuando} \quad x = \frac{L}{2}$$

continúa

Esta condición se puede expresar de manera más breve como

$$v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Aplicando esta condición a la ecuación (a) da

$$0 = \frac{qL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{q}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1 \quad \text{o} \quad C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

Entonces la ecuación para la pendiente de la viga (ecuación a) se convierte en

$$EIv' = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{24} \tag{b}$$

o

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3) \tag{9.16}$$

Como se esperaba, la pendiente es negativa (es decir, en el sentido de las manecillas del reloj) en el extremo izquierdo de la viga ($x = 0$), positiva en el extremo derecho ($x = L$) e igual a cero en el punto medio ($x = L/2$).

Deflexión de la viga. La deflexión se obtiene integrando la ecuación para la pendiente. Por tanto, al multiplicar los dos lados de la ecuación (b) por dx e integrar, obtenemos

$$EIv = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24} + C_2 \tag{c}$$

La constante de integración C_2 puede evaluarse a partir de la condición de que la deflexión de la viga en el apoyo izquierdo es igual a cero; es decir, $v = 0$ cuando $x = 0$, o

$$v(0) = 0$$

Al aplicar esta condición a la ecuación (c) se obtiene $C_2 = 0$; de aquí que la ecuación para la curva de deflexión sea

$$EIv = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24} \tag{d}$$

o

$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) \tag{9.17}$$

Esta ecuación da la deflexión en cualquier punto a lo largo del eje de la viga. Observe que la deflexión es cero en los dos extremos de la viga ($x = 0$ y $x = L$) y negativa en cualquier otro lugar (recuerde que las deflexiones hacia abajo son negativas).

Deflexión máxima. De la simetría sabemos que la deflexión máxima se presenta en el punto medio del claro (figura 9.8b). Por tanto, al igualar x a $L/2$ en la ecuación (9.17), obtenemos

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

en donde el signo negativo significa que la deflexión es hacia abajo (como se esperaba). Dado que $\delta_{máx}$ representa la magnitud de esta deflexión, obtenemos

$$\delta_{máx} = \left|v\left(\frac{L}{2}\right)\right| = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad (9.18)$$

Ángulos de rotación. Los ángulos máximos de rotación se tienen en los apoyos de la viga. En el extremo izquierdo de la viga, el ángulo θ_A, en el sentido de las manecillas del reloj (figura 9.8b), es igual al negativo de la pendiente v'. Por tanto, al sustituir $x = 0$ en la ecuación (9.16) encontramos

$$\theta_A = -v'(0) = \frac{qL^3}{24EI} \qquad (9.19)$$

De manera similar, podemos obtener el ángulo de rotación θ_B en el extremo derecho de la viga. Como θ_B es un ángulo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es igual a la pendiente en el extremo:

$$\theta_B = v'(L) = \frac{qL^3}{24EI} \qquad (9.20)$$

Puesto que la viga y la carga son simétricas con respecto al punto medio, los ángulos de rotación en los extremos son iguales.

Este ejemplo ilustra el proceso para plantear y resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión, también demuestra el proceso para determinar pendientes y deflexiones en puntos seleccionados a lo largo del eje de la viga.

Nota: ahora que hemos deducidos fórmulas para la deflexión máxima y los ángulos máximos de rotación (consulte las ecuaciones 9.18, 9.19 y 9.20), podemos evaluar estas cantidades numéricamente y observar que las deflexiones y los ángulos son en efecto pequeños como lo requiere la teoría.

Considere una viga de acero sobre apoyos simples con una longitud del claro $L = 6$ ft. La sección transversal es rectangular con ancho $b = 3$ in y altura $h = 6$ in. La intensidad de la carga uniforme es $q = 8000$ lb/ft, que es relativamente grande debido a que produce un esfuerzo en la viga de 24,000 psi. (Por lo que las deflexiones y pendientes son mayores que lo que normalmente se esperaría.)

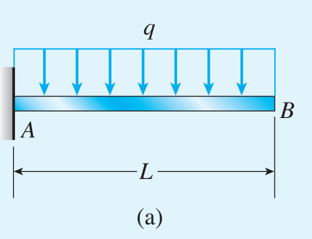
Al sustituir en la ecuación (9.18) y al utilizar $E = 30 \times 10^6$ psi, encontramos que la deflexión máxima es $\delta_{máx} = 0.144$ in, que sólo es 1/500 de la longitud del claro. Además, de la ecuación (9.19), determinamos que el ángulo máximo de rotación es $\theta_A = 0.0064$ radianes, o 0.37°, que es un ángulo muy pequeño.

Por tanto, se justifica nuestra suposición de que las pendientes y deflexiones son pequeñas.

Ejemplo 9.2

Determine la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB sometida a una carga uniforme con intensidad q (figura 9.10a).

Además, determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre (figura 9.10b). (*Nota:* la viga tiene una longitud L y rigidez a la flexión constante EI.)



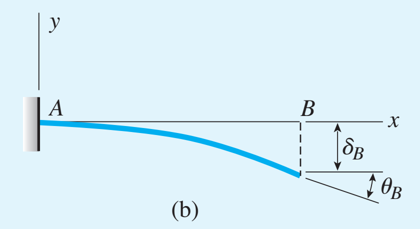


FIGURA 9.10 Ejemplo 9.2. Deflexiones de una viga en voladizo con una carga uniforme.

Solución

Momento flexionante en la viga. El momento flexionante a una distancia x desde el empotramiento se obtiene a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.11. Observe que la reacción vertical en el empotramiento es igual a qL y que la reacción de momento es igual a $qL^2/2$. En consecuencia, la expresión para el momento flexionante M es

$$M = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} \tag{9.21}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión. Al sustituir la ecuación anterior para el momento flexionante en la ecuación diferencial (ecuación 9.12a), obtenemos

$$EIv'' = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} \tag{9.22}$$

Ahora integramos los dos lados de esta ecuación para obtener las pendientes y deflexiones.

Pendiente de la viga. La primera integración de la ecuación (9.22) da la siguiente ecuación para la pendiente:

$$EIv' = -\frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \tag{e}$$

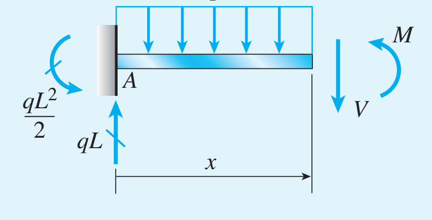


FIGURA 9.11 Diagrama de cuerpo libre empleado para determinar el momento flexionante M (ejemplo 9.2).

La constante de integración C_1 se puede encontrar a partir de la condición de frontera de que la pendiente de la viga es cero en el empotramiento; por tanto, tenemos la siguiente condición:

$$v'(0) = 0$$

Al aplicar esta condición a la ecuación (e) obtenemos $C_1 = 0$. Por tanto, la ecuación (e) se convierte en

$$EIv' = -\frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \qquad \text{(f)}$$

y la pendiente es

$$v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2) \qquad (9.23)$$

Como se esperaba, la pendiente obtenida con esta ecuación es cero en el empotramiento ($x = 0$) y negativa (es decir, en el sentido de las manecillas del reloj) en toda la longitud de la viga.

Deflexión de la viga. La integración de la ecuación de la pendiente (ecuación f) da

$$EIv = -\frac{qL^2x^2}{4} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_2 \qquad \text{(g)}$$

La constante C_2 se determina a partir de la condición de frontera de que la deflexión de la viga es cero en el empotramiento:

$$v(0) = 0$$

Al aplicar esta condición a la ecuación (g), de inmediato observamos que $C_2 = 0$. Por tanto, la ecuación para la deflexión v es

$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad (9.24)$$

Como se esperaba, la deflexión obtenida con esta ecuación es cero en el empotramiento ($x = 0$) y negativa (es decir, hacia abajo) en cualquier otro lugar.

Ángulo de rotación en el extremo libre de la viga. El ángulo de rotación en el sentido de las manecillas del reloj θ_B en el extremo B de la viga (figura 9.10b) es igual al negativo de la pendiente en ese punto. Por tanto, empleando la ecuación (9.23), obtenemos

$$\theta_B = -v'(L) = \frac{qL^3}{6EI} \qquad (9.25)$$

Este es el ángulo de rotación máximo para la viga.

Deflexión en el extremo libre de la viga. Como la deflexión δ_B es hacia abajo (figura 9.10b), es igual al negativo de la deflexión obtenida con la ecuación (9.24):

$$\delta_B = -v(L) = \frac{qL^4}{8EI} \qquad (9.26)$$

Esta es la deflexión máxima de la viga.

Ejemplo 9.3

Una viga simple AB soporta una carga concentrada P que actúa a las distancias a y b desde los apoyos izquierdo y derecho, respectivamente (figura 9.12a).

Determine las ecuaciones de la curva de deflexión, los ángulos de rotación θ_A y θ_B en los apoyos, la deflexión máxima $\delta_{máx}$ y la deflexión δ_C en el punto medio C de la viga (figura 9.12b). (*Nota:* la viga tiene longitud L y rigidez a la flexión constante EI.)

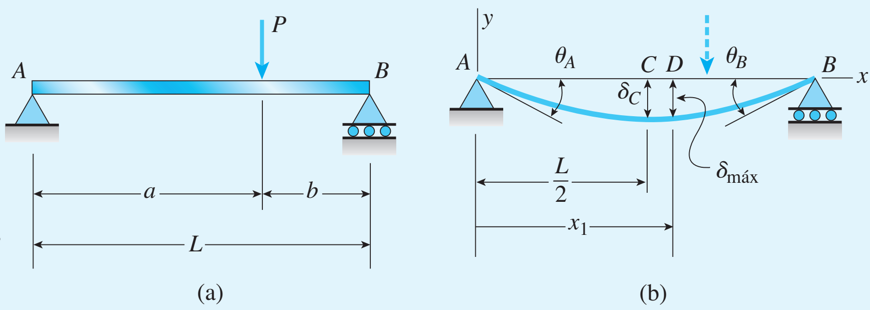


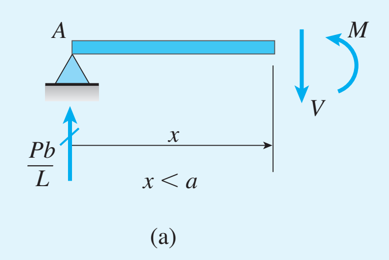
FIGURA 9.12 Ejemplo 9.3. Deflexiones de una viga simple con una carga concentrada.

Solución

Momentos flexionantes en la viga. En este ejemplo los momentos flexionantes se expresan mediante dos ecuaciones, una para cada parte de la viga. Al utilizar los diagramas de cuerpo libre de la figura 9.13 llegamos a las ecuaciones siguientes:

$$M = \frac{Pbx}{L} \qquad (0 \leq x \leq a) \tag{9.27a}$$

$$M = \frac{Pbx}{L} - P(x - a) \qquad (a \leq x \leq L) \tag{9.27b}$$



Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión. Las ecuaciones diferenciales para las dos partes de la viga se obtienen sustituyendo las expresiones para el momento flexionante (ecuaciones 9.27a y b) en la ecuación (9.12a). Los resultados son

$$EIv'' = \frac{Pbx}{L} \qquad (0 \leq x \leq a) \tag{9.28a}$$

$$EIv'' = \frac{Pbx}{L} - P(x - a) \qquad (a \leq x \leq L) \tag{9.28b}$$

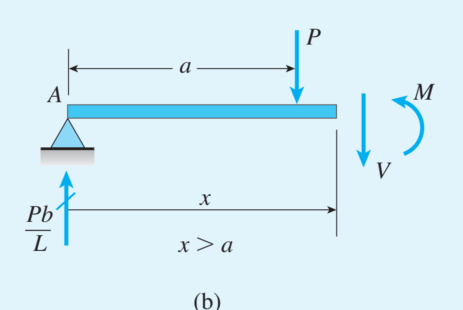


FIGURA 9.13 Diagramas de cuerpo libre empleados para determinar los momentos flexionantes (ejemplo 9.3).

Pendientes y deflexiones de la viga. Las primeras integraciones de las dos ecuaciones diferenciales dan las siguientes expresiones para las pendientes:

$$EIv' = \frac{Pbx^2}{2L} + C_1 \qquad (0 \leq x \leq a) \tag{h}$$

$$EIv' = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x - a)^2}{2} + C_2 \qquad (a \leq x \leq L) \tag{i}$$

en donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Un segundo par de integraciones da las deflexiones:

$$EIv = \frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_3 \qquad (0 \leq x \leq a) \tag{j}$$

$$EIv = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + C_4 \qquad (a \leq x \leq L) \tag{k}$$

Estas ecuaciones contienen dos constantes de integración adicionales, para un total de cuatro que se deben evaluar.

Constantes de integración. Las cuatro constantes de integración se pueden determinar a partir de las siguientes cuatro condiciones:

1. En $x = a$, las pendientes v' para las dos partes de la viga son las mismas.
2. En $x = a$, las deflexiónes v para las dos partes de la viga son las mismas.
3. En $x = 0$, la deflexión v es cero.
4. En $x = L$, la deflexión v es cero.

Las primeras dos condiciones son de continuidad basadas en el hecho de que el eje de la viga es una curva continua. Las condiciones (3) y (4) son condiciones de frontera que se deben satisfacer en los apoyos.

La condición (1) significa que las pendientes determinadas con las ecuaciones (h) e (i) deben ser iguales cuando $x = a$; por tanto,

$$\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = \frac{Pba^2}{2L} + C_2 \quad \text{o} \quad C_1 = C_2$$

La condición (2) significa que las deflexiones encontradas con las ecuaciones (j) y (k) deben ser iguales cuando $x = a$; por tanto,

$$\frac{Pba^3}{6L} + C_1a + C_3 = \frac{Pba^3}{6L} + C_2a + C_4$$

Puesto que $C_1 = C_2$, esta ecuación da $C_3 = C_4$.

A continuación, aplicamos la condición (3) a la ecuación (j) y obtenemos $C_3 = 0$; por tanto,

$$C_3 = C_4 = 0 \tag{l}$$

Por último, aplicamos la condición (4) a la ecuación (k) y obtenemos

$$\frac{PbL^2}{6} - \frac{Pb^3}{6} + C_2L = 0$$

Por tanto,

$$C_1 = C_2 = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L} \tag{m}$$

Ecuaciones de la curva de deflexión. Ahora sustituimos las constantes de integración (ecuaciones l y m) en las ecuaciones para las deflexiones (ecuaciones j y k) y obtenemos las ecuaciones de deflexión para las dos partes de la viga. Las ecuaciones resultantes, después de reacomodar términos, son

continúa

$$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad (0 \leq x \leq a) \tag{9.29a}$$

$$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) - \frac{P(x-a)^3}{6EI} \qquad (a \leq x \leq L) \tag{9.29b}$$

La primera de estas ecuaciones da la curva de deflexión para la parte de la viga a la izquierda de la carga P y la segunda da la curva de deflexión para la parte de la viga a la derecha de la carga.

Las pendientes de las dos partes de la viga se pueden determinar ya sea sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en las ecuaciones (h) e (i) o bien obteniendo las primeras derivadas de las ecuaciones de deflexión (ecuaciones 9.29a y b). Las ecuaciones resultantes son

$$v' = -\frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad (0 \leq x \leq a) \tag{9.30a}$$

$$v' = -\frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) - \frac{P(x-a)^2}{2EI} \qquad (a \leq x \leq L) \tag{9.30b}$$

La deflexión y la pendiente en cualquier punto a lo largo del eje de la viga se pueden calcular con las ecuaciones (9.29) y (9.30).

Ángulos de rotación en los apoyos. Para obtener los ángulos de rotación θ_A y θ_B en los extremos de la viga (figura 9.12b) sustituimos $x = 0$ en la ecuación (9.30a) y $x = L$ en la ecuación (9.30b):

$$\theta_A = -v'(0) = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \tag{9.31a}$$

$$\theta_B = v'(L) = \frac{Pb(2L^2 - 3bL + b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L+a)}{6LEI} \tag{9.31b}$$

Observe que el ángulo θ_A es en el sentido de las manecillas del reloj y θ_B es en sentido contrario, como se muestra en la figura 9.12b.

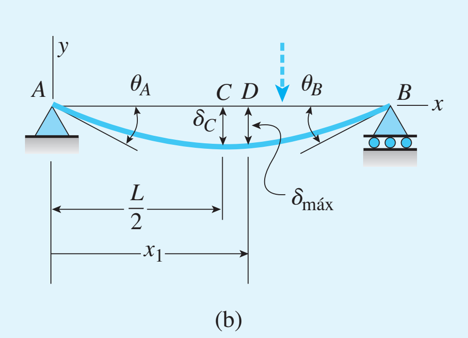


FIGURA 9.12 (Repetida.)

Los ángulos de rotación son funciones de la posición de la carga y alcanzan sus valores máximos cuando ésta se ubica cerca del punto medio de la viga. En el caso del ángulo de rotación θ_A, el valor máximo del ángulo es

$$(\theta_A)_{\text{máx}} = \frac{PL^2\sqrt{3}}{27EI} \tag{9.32}$$

y se presenta cuando $b = L/\sqrt{3} = 0.577L$ (o $a = 0.423L$). Este valor de b se obtiene al derivar θ_A con respecto a b (empleando la primera de las dos expresiones para θ_A en la ecuación 9.31a) y luego igualamos el resultado a cero.

Deflexión máxima de la viga. La deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$ ocurre en el punto D (figura 9.12b) donde la curva de deflexión tiene una tangente horizontal. Si la carga está a la derecha del punto medio, es decir, si $a > b$, el punto D está en la parte de la viga a la izquierda de la carga. Podemos ubicar este punto igualando la pendiente v' dada por la ecuación (9.30a) a cero y despejando la distancia x, que ahora denotamos x_1. De esta manera obtenemos la siguiente fórmula para x_1:

$$x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \qquad (a \geq b) \tag{9.33}$$

De esta ecuación vemos que conforme la carga P se mueve del centro de la viga ($b = L/2$) hacia el extremo derecho ($b = 0$), la distancia x_1 varía de $L/2$ a $L/\sqrt{3} = 0.577L$. Por lo que la deflexión máxima ocurre en un punto muy cercano al punto medio de la viga, que siempre se ubica entre el punto medio de la viga y la carga.

La deflexión máxima $\delta_{máx}$ se determina al sustituir x_1 (de la ecuación 9.33) en la ecuación de deflexión (ecuación 9.29a) y al agregar luego un signo menos:

$$\delta_{máx} = -(v)_{x=x_1} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\, LEI} \qquad (a \geq b) \qquad (9.34)$$

El signo menos es necesario debido a que la deflexión máxima es hacia abajo (figura 9.12b) en tanto que la deflexión v es positiva hacia arriba.

La deflexión máxima de la viga depende de la posición de la carga P, es decir, de la distancia b. El valor máximo de la deflexión máxima (la deflexión "máx-máx") se tiene cuando $b = L/2$ y la carga está en el punto medio de la viga. Esta deflexión máxima es igual a $PL^3/48EI$.

Deflexión en el centro de la viga. La deflexión δ_C en el punto medio C cuando la carga actúa a la derecha del punto medio (figura 9.12b) se obtiene sustituyendo $x = L/2$ en la ecuación (9.29a), como se muestra:

$$\delta_C = -v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \qquad (a \geq b) \qquad (9.35)$$

Dado que la deflexión máximo siempre ocurre cerca del punto medio de la viga, la ecuación (9.35) produce una aproximación cercana a la deflexión máxima. En el caso menos favorable (cuando b tiende a cero), la diferencia entre la deflexión máxima y la deflexión en el punto medio es menor que 3 por ciento de la deflexión máxima, como se demuestra en el problema 9.3.7.

Caso especial (carga en el centro de la viga). Un caso especial importante ocurre cuando la carga P actúa en el punto medio de la viga ($a = b = L/2$). Entonces, obtenemos los siguientes resultados con las ecuaciones (9.30a), (9.29a), (9.31) y (9.34), respectivamente:

$$v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \qquad (9.36)$$

$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \qquad (9.37)$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI} \qquad (9.38)$$

$$\delta_{máx} = \delta_C = \frac{PL^3}{48EI} \qquad (9.39)$$

Como la curva de deflexión es simétrica con respecto al punto medio de la viga, las ecuaciones para v' y v están dadas sólo para la mitad izquierda de la viga (ecuaciones 9.36 y 9.37). Si fuera necesario, se pueden obtener las ecuaciones para la mitad derecha con las ecuaciones (9.30b) y (9.29b) al sustituir $a = b = L/2$.

9.4 DEFLEXIONES POR INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA FUERZA CORTANTE Y DE LA CARGA

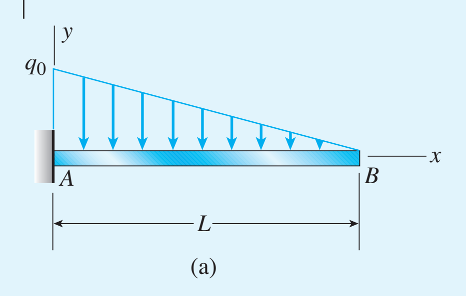
Las ecuaciones de la curva de deflexión en términos de la fuerza cortante V y la carga q (ecuaciones 9.12b y c, respectivamente) también se pueden integrar para obtener pendientes y deflexiones. Puesto que es usual que las cargas sean cantidades conocidas, en tanto que los momentos flexionantes se deben determinar a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio, muchos analistas prefieren empezar con la ecuación de la carga. Por esta misma razón la mayor parte de los programas de cómputo para encontrar deflexiones inician con la ecuación de la carga y luego realizan integraciones numéricas para obtener las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones.

El procedimiento para resolver la ecuación de la carga o bien la ecuación de la fuerza cortante es similar al usado para resolver la ecuación del momento flexionante, excepto que se requieren más integraciones. Por ejemplo, si iniciamos con la ecuación de la carga, se requieren cuatro integraciones a fin de llegar a las deflexiones. Por tanto, se introducen cuatro constantes de integración para cada ecuación de la carga que se integre. Igual que antes, estas constantes se encuentran a partir de condiciones de frontera, continuidad y simetría. Sin embargo, estas últimas ahora incluyen condiciones sobre las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes así como condiciones sobre las pendientes y las deflexiones.

Las condiciones sobre las fuerzas cortantes son equivalentes a condiciones sobre la tercera derivada (debido a que $EIv''' = V$). De manera similar, las condiciones sobre los momentos flexionantes son equivalentes a condiciones sobre la segunda derivada (dado que $EIv'' = M$). Cuando las condiciones sobre la fuerza cortante y el momento flexionante se agregan a las condiciones sobre las pendientes y las deflexiones, siempre tendremos condiciones independientes suficientes para determinar las constantes de integración.

Los siguientes ejemplos ilustran las técnicas de análisis con detalle. El primer ejemplo inicia con la ecuación de la carga y el segundo con la ecuación de la fuerza cortante.

Ejemplo 9.4



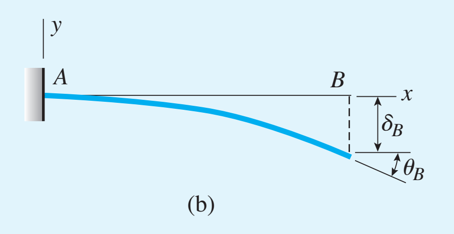


FIGURA 9.14 Ejemplo 9.4. Deflexiones de una viga en voladizo con una carga triangular.

Determine la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo *AB* que soporta una carga con distribución triangular de intensidad máxima q_0 (figura 9.14a).

Además, determine la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo libre (figura 9.14b). Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga). (*Nota:* la viga tiene longitud *L* y rigidez a la flexión constante *EI*.)

Solución

Ecuación diferencial de la curva de deflexión. La intensidad de la carga distribuida está dada por la ecuación siguiente (consulte la figura 9.14a):

$$q = \frac{q_0(L - x)}{L} \tag{9.40}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial de cuarto orden (ecuación 9.12c) se convierte en

$$EIv'''' = -q = -\frac{q_0(L - x)}{L} \tag{a}$$

Fuerza cortante en la viga. La primera integración de la ecuación (a) da

$$EIv''' = \frac{q_0}{2L}(L - x)^2 + C_1 \tag{b}$$

El lado derecho de esta ecuación representa la fuerza cortante *V* (consulte la ecuación 9.12b). Dado que la fuerza cortante es cero en $x = L$, tenemos la siguiente condición de frontera:

$$v'''(L) = 0$$

Utilizando esta condición con la ecuación (b), obtenemos $C_1 = 0$. Por tanto, la ecuación (b) se simplifica a

$$EIv''' = \frac{q_0}{2L}(L - x)^2 \tag{c}$$

y la fuerza cortante en la viga es

$$V = EIv''' = \frac{q_0}{2L}(L - x)^2 \tag{9.41}$$

Momento flexionante en la viga. Integrando una segunda vez, obtenemos la ecuación siguiente de la ecuación (c):

$$EIv'' = -\frac{q_0}{6L}(L - x)^3 + C_2 \tag{d}$$

Esta ecuación es igual al momento flexionante *M* (consulte la ecuación 9.12a). Como el momento flexionante es cero en el extremo libre de la viga, tenemos la siguiente condición de frontera:

$$v''(L) = 0$$

continúa



Parte en voladizo de la estructura de un techo

Al aplicar esta condición a la ecuación (d), obtenemos $C_2 = 0$, y, por tanto, el momento flexionante es

$$M = EIv'' = -\frac{q_0}{6L}(L - x)^3 \qquad (9.42)$$

Pendiente y deflexión de la viga. Las integraciones tercera y cuarta producen

$$EIv' = \frac{q_0}{24L}(L - x)^4 + C_3 \qquad (e)$$

$$EIv = -\frac{q_0}{120L}(L - x)^5 + C_3 x + C_4 \qquad (f)$$

Las condiciones de frontera en el empotramiento, donde la pendiente y la deflexión son cero, son

$$v'(0) = 0 \qquad v(0) = 0$$

Al aplicar estas condiciones a las ecuaciones (e) y (f), respectivamente, determinamos

$$C_3 = -\frac{q_0 L^3}{24} \qquad C_4 = \frac{q_0 L^4}{120}$$

Sustituimos estas expresiones para las constantes en las ecuaciones (e) y (f), y obtenemos las siguientes ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga:

$$v' = -\frac{q_0 x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3) \qquad (9.43)$$

$$v = -\frac{q_0 x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3) \qquad (9.44)$$

Ángulo de rotación y deflexión en el extremo libre de la viga. El ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre de la viga (figura 9.14b) se obtienen de las ecuaciones (9.43) y (9.44), respectivamente, sustituyendo $x = L$. Los resultados son

$$\theta_B = -v'(L) = \frac{q_0 L^3}{24EI} \qquad \delta_B = -v(L) = \frac{q_0 L^4}{30EI} \qquad (9.45a,b)$$

De esta manera hemos determinado las pendientes y deflexiones requeridas de la viga al resolver la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión.

Ejemplo 9.5

Una viga simple AB con una saliente BC soporta una carga concentrada P en el extremo de la saliente (figura 9.15a). La longitud del claro principal de la viga es L y la longitud del voladizo es $L/2$.

Determine las ecuaciones de la curva de deflexión y la deflexión δ_S en el extremo del voladizo (figura 9.15b). Utilice la tercera ecuación diferencial de la curva de deflexión (la ecuación de la fuerza cortante). (*Nota:* la viga tiene rigidez a la flexión constante EI.)

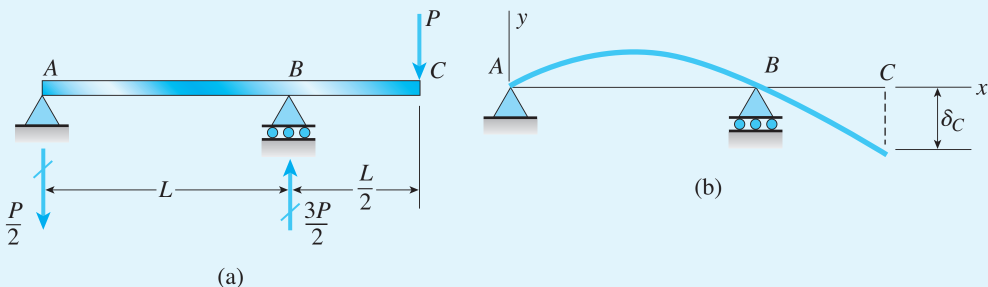


FIGURA 9.15 Ejemplo 9.5. Deflexiones de una viga con una saliente.

Solución

Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión. Dado que las fuerzas reactivas actúan en los apoyos A y B, debemos escribir ecuaciones diferenciales separadas para las partes AB y BC de la viga. Por tanto, iniciamos encontrando las fuerzas cortantes en cada parte de la viga.

La reacción hacia abajo en el apoyo A es igual a $P/2$ y la reacción hacia arriba en el apoyo B es igual a $3P/2$ (consulte la figura 9.15a). De aquí se deduce que las fuerzas cortantes en las partes AB y BC son

$$V = -\frac{P}{2} \qquad (0 < x < L) \tag{9.46a}$$

$$V = P \qquad \left(L < x < \frac{3L}{2}\right) \tag{9.46b}$$

en donde x se mide desde el extremo A de la viga (figura 9.12b).

Ahora la ecuación diferencial de tercer orden para la viga se convierte en (consulte la ecuación 9.12b):

$$EIv''' = -\frac{P}{2} \qquad (0 < x < L) \tag{g}$$

$$EIv''' = P \qquad \left(L < x < \frac{3L}{2}\right) \tag{h}$$

Momentos flexionantes en la viga. La integración de las dos ecuaciones anteriores produce las ecuaciones del momento flexionante:

$$M = EIv'' = -\frac{Px}{2} + C_1 \qquad (0 \le x \le L) \tag{i}$$

$$M = EIv'' = Px + C_2 \qquad \left(L \le x \le \frac{3L}{2}\right) \tag{j}$$

continúa



Trabe armada con saliente durante su transporte al sitio de construcción

Los momentos flexionantes en los puntos A y C son cero; de aquí tenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$v''(0) = 0 \qquad v''\left(\frac{3L}{2}\right) = 0$$

Al utilizar estas condiciones con las ecuaciones (i) y (j), obtenemos

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = -\frac{3PL}{2}$$

Por tanto, los momentos flexionantes son

$$M = EIv'' = -\frac{Px}{2} \qquad (0 \le x \le L) \tag{9.47a}$$

$$M = EIv'' = -\frac{P(3L - 2x)}{2} \qquad \left(L \le x \le \frac{3L}{2}\right) \tag{9.47b}$$

Estas ecuaciones se pueden verificar determinando los momentos flexionantes a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio.

Pendientes y deflexiones de la viga. Las integraciones siguientes producen las pendientes:

$$EIv' = -\frac{Px^2}{4} + C_3 \qquad (0 \le x \le L)$$

$$EIv' = -\frac{Px(3L - x)}{2} + C_4 \qquad \left(L \le x \le \frac{3L}{2}\right)$$

La única condición sobre las pendientes es la condición de continuidad en el apoyo B. De acuerdo con ésta, la pendiente en el punto B encontrada para la parte AB de la viga es igual a la pendiente en el mismo punto determinada para la parte BC de la viga. Entonces, sustituimos $x = L$ en cada una de las ecuaciones anteriores para las pendientes y obtenemos

$$-\frac{PL^2}{4} + C_3 = -PL^2 + C_4$$

Esta ecuación elimina una constante de integración ya que podemos expresar C_4 en términos de C_3:

$$C_4 = C_3 + \frac{3PL^2}{4} \tag{k}$$

La tercera y última integración da

$$EIv = -\frac{Px^3}{12} + C_3x + C_5 \qquad (0 \le x \le L) \tag{l}$$

$$EIv = -\frac{Px^2(9L - 2x)}{12} + C_4x + C_6 \qquad \left(L \le x \le \frac{3L}{2}\right) \tag{m}$$

Para la parte AB de la viga (figura 9.15a), tenemos dos condiciones de frontera sobre las deflexiones, a saber, la deflexión es cero en los puntos A y B:

$$v(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(L) = 0$$

Al aplicar estas condiciones a la ecuación (l), obtenemos

$$C_5 = 0 \qquad C_3 = \frac{PL^2}{12} \tag{n,o}$$

Sustituimos la expresión anterior para C_3 en la ecuación (k) y obtenemos

$$C_4 = \frac{5PL^2}{6} \tag{p}$$

Para la parte *BC* de la viga, la deflexión es cero en el punto *B*. Por tanto, la condición de frontera es

$$v(L) = 0$$

Aplicamos esta condición a la ecuación (m) y sustituimos la ecuación (p) para C_4, y obtenemos

$$C_6 = -\frac{PL^3}{4} \tag{q}$$

De esta manera hemos evaluado todas las constantes de integración.

Las ecuaciones de deflexión se obtienen al sustituir las constantes de integración (ecuaciones n, o, p y q) en las ecuaciones (l) y (m). Los resultados son

$$v = \frac{Px}{12EI}(L^2 - x^2) \qquad (0 \le x \le L) \tag{9.48a}$$

$$v = -\frac{P}{12EI}(3L^3 - 10L^2x + 9Lx^2 - 2x^3) \qquad \left(L \le x \le \frac{3L}{2}\right) \tag{9.48b}$$

Observe que la deflexión siempre es positiva (hacia arriba) en la parte *AB* de la viga (ecuación 9.48a) y siempre es negativa (hacia abajo) en la saliente *BC* (ecuación 9.48b).

Deflexión en el extremo de la saliente. Podemos encontrar la deflexión δ_C en el extremo de la saliente (figura 9.15b) sustituyendo $x = 3L/2$ en la ecuación (9.48b):

$$\delta_C = -v\left(\frac{3L}{2}\right) = \frac{PL^3}{8EI} \tag{9.49}$$

De esta manera hemos determinado las deflexiones requeridas de la viga con saliente (ecuaciones 9.48 y 9.49) al resolver la ecuación diferencial de tercer orden de la curva de deflexión.

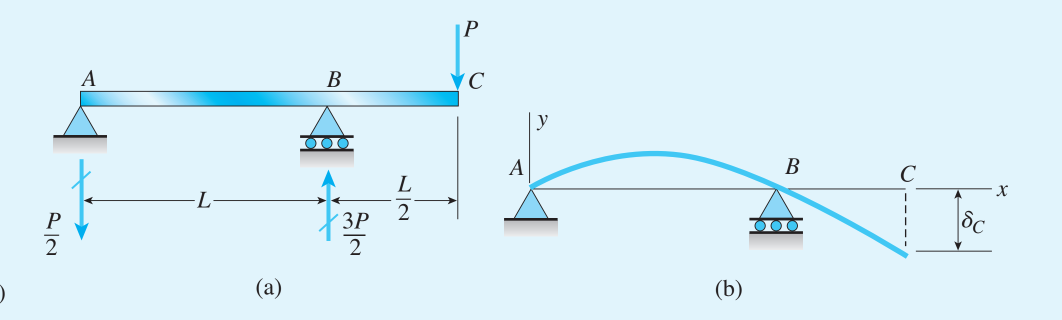
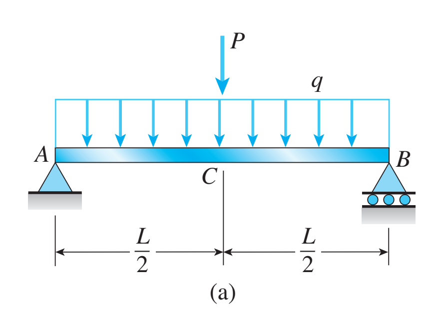


FIGURA 9.15 (Repetida.)

9.5 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN



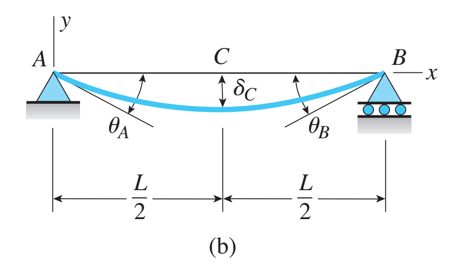


FIGURA 9.16 Viga simple con dos cargas.

El **método de superposición** es una técnica práctica de uso común para obtener deflexiones y ángulos de rotación de vigas. El concepto subyacente es muy simple y se puede enunciar así:

En condiciones adecuadas, la deflexión de una viga producida por varias cargas diferentes que actúan de manera simultánea se puede determinar superponiendo las deflexiones producidas por las mismas cargas al actuar por separado.

Por ejemplo, si v_1 representa la deflexión en un punto particular en el eje de una viga debida a una carga q_1 y si v_2 representa la deflexión en el mismo punto debida a una carga diferente q_2, entonces la deflexión en ese punto debida a las cargas q_1 y q_2 en acción simultánea es $v_1 + v_2$. (Las cargas q_1 y q_2 son independientes y cada una puede actuar en cualquier parte a lo largo del eje de la viga.)

La razón para superponer deflexiones se basa en la naturaleza de las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión (ecuaciones 9.12a, b y c). Éstas son ecuaciones diferenciales *lineales*, debido a que todos los términos que contienen la deflexión v y sus derivadas están elevados a la primera potencia. Por tanto, las soluciones de estas ecuaciones para varias condiciones de carga se pueden sumar de manera algebraica, o *superponer*. (Las condicione para que la superposición sea válida se describen más adelante en la subsección “Principio de superposición”.)

Como **ejemplo** del método de superposición, considere la viga simple *ACB* que se muestra en la figura 9.16a. Esta viga soporta dos cargas: (1) una carga uniforme con intensidad q que actúa sobre todo el claro y (2) una carga concentrada P que actúa a la mitad del claro. Suponga que queremos encontrar la deflexión δ_C en el punto medio y los ángulos de rotación θ_A y θ_B en los extremos (figura 9.16b). Al utilizar el método de superposición obtenemos los efectos de cada carga al actuar de manera independiente y luego combinamos los resultados.

Para la carga uniforme que actúa sola, la deflexión en el centro del claro y los ángulos de rotación se obtienen con las fórmulas del ejemplo 9.1 (consulte las ecuaciones 9.18, 9.19 y 9.20):

$$(\delta_C)_1 = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad (\theta_A)_1 = (\theta_B)_1 = \frac{qL^3}{24EI}$$

en donde EI es la rigidez a la flexión de la viga y L es su longitud.

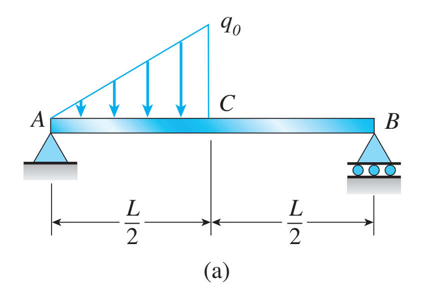
Para la carga P que actúa sola, las cantidades correspondientes se obtienen con las fórmulas del ejemplo 9.3 (consulte las ecuaciones 9.38 y 9.39):

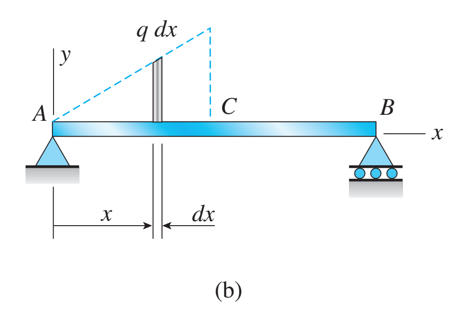
$$(\delta_C)_2 = \frac{PL^3}{48EI} \qquad (\theta_A)_2 = (\theta_B)_2 = \frac{PL^2}{16EI}$$

La deflexión y los ángulos de rotación debidos a las cargas combinadas (figura 9.16a) se obtienen sumando sus valores individuales:

$$\delta_C = (\delta_C)_1 + (\delta_C)_2 = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI} \tag{a}$$

$$\theta_A = \theta_B = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{qL^3}{24EI} + \frac{PL^2}{16EI} \tag{b}$$





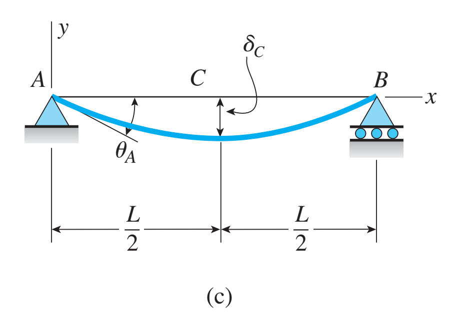


FIGURA 9.17 Viga simple con una carga triangular.

Las deflexiones y los ángulos de rotación en otros puntos en el eje de la viga se pueden determinar mediante este mismo procedimiento. Sin embargo, el método de superposición no está limitado a encontrar deflexiones y ángulos de rotación en puntos individuales. El método también se puede emplear para obtener ecuaciones generales para las pendientes y deflexiones de vigas sometidas a más de una carga.

Tablas de deflexiones de vigas

El método de superposición es útil sólo cuando se dispone de fórmulas para deflexiones y pendientes. Para proporcionar un acceso conveniente a las fórmulas, en el apéndice G al final del libro se encuentran tablas para vigas en voladizo y simples. Tablas similares se encuentran en manuales de ingeniería. Con estas tablas y utilizando el método de superposición podemos obtener deflexiones y ángulos de rotación para muchas condiciones de carga distintas, como se ilustra en los ejemplos al final de esta sección.

Cargas distribuidas

En ocasiones encontramos una carga distribuida que no está incluida en una tabla de deflexiones de vigas y en estos casos un método de superposición aún resulta útil. Podemos considerar un elemento de la carga distribuida como si fuera una carga concentrada y luego podemos encontrar la deflexión requerida mediante integración en toda la región de la viga donde se aplica la carga.

Para ilustrar este proceso de integración, considere una viga simple *ACB* con una carga triangular que actúa sobre la mitad izquierda (figura 9.17a). Queremos obtener la deflexión δ_C en el punto medio *C* y el ángulo de rotación θ_A en el apoyo izquierdo (figura 9.17c).

Comencemos por visualizar un elemento $q\,dx$ de la carga distribuida como una carga concentrada (figura 9.17b). Observe que la carga actúa a la izquierda del centro del claro de la viga. La deflexión en el centro debida a esta carga concentrada se obtiene del caso 5 de la tabla G.2, apéndice G. La fórmula que se da allí para la deflexión en el centro (para el caso en que $a \leq b$) es

$$\frac{Pa}{48EI}(3L^2 - 4a^2)$$

En nuestro ejemplo (figura 9.17b), sustituimos $q\,dx$ con *P* y *x* con *a*:

$$\frac{(q\,dx)(x)}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \tag{c}$$

Esta expresión da la deflexión en el punto *C* debida al elemento $q\,dx$ de la carga.

Luego, observamos que la intensidad de la carga uniforme (figuras 9.17a y b) es

$$q = \frac{2q_0 x}{L} \tag{d}$$

donde q_0 es la intensidad máxima de la carga. Con esta sustitución para *q*, la fórmula para la deflexión (ecuación c) se convierte en

$$\frac{q_0 x^2}{24LEI}(3L^2 - 4x^2)dx$$

Por último, integramos sobre toda la región de la carga para obtener la deflexión δ_C en el centro de la viga debida a toda la carga triangular:

$$\delta_C = \int_0^{L/2} \frac{q_0 x^2}{24LEI}(3L^2 - 4x^2)dx$$

$$= \frac{q_0}{24LEI}\int_0^{L/2} (3L^2 - 4x^2)x^2 dx = \frac{q_0 L^4}{240EI} \qquad (9.50)$$

De manera similar, podemos calcular el ángulo de rotación θ_A en el extremo izquierdo de la viga (figura 9.17c). La expresión para este ángulo debido a una carga concentrada P (consulte el caso 5 de la tabla G.2) es

$$\frac{Pab(L + b)}{6LEI}$$

Reemplazamos P con $2q_0x\, dx/L$, a con x y b con $L - x$, y obtenemos

$$\frac{2q_0 x^2(L - x)(L + L - x)}{6L^2EI} dx \quad \text{o} \quad \frac{q_0}{3L^2EI}(L - x)(2L - x)x^2 dx$$

Por último, integramos sobre toda la región de la carga:

$$\theta_A = \int_0^{L/2} \frac{q_0}{3L^2EI}(L - x)(2L - x)x^2 dx = \frac{41q_0L^3}{2880EI} \qquad (9.51)$$

Este es el ángulo de rotación producido por la carga triangular.

Este ejemplo ilustra cómo podemos emplear la superposición y la integración para encontrar deflexiones y ángulos de rotación producidos por cargas distribuidas de casi cualquier tipo. Si la integración no se puede realizar fácilmente mediante métodos analíticos, se deben emplear métodos numéricos.

Principio de superposición

El método de superposición para encontrar deflexiones en vigas es un ejemplo de un concepto más general conocido en mecánica como **principio de superposición.** Este principio es válido siempre que la cantidad por determinar sea una función lineal de las cargas aplicadas. Cuando ese es el caso, la cantidad deseada se puede determinar considerando que cada carga actúa por separado y luego estos resultados se pueden superponer para obtener la cantidad deseada debida a todas las cargas en acción simultánea. En estructuras ordinarias es usual que el principio sea válido para esfuerzos, deformaciones unitarias, y momentos flexionantes, y muchas otras cantidades además de deflexiones.

En el caso particular de **deflexiones de vigas,** el principio de superposición es válido con las condiciones siguientes: (1) la ley de Hooke es válida para el material, (2) las deflexiones y rotaciones son pequeñas, y (3) la presencia de las deflexiones no altera las acciones de las cargas aplicadas. Estos requisitos aseguran que las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión sean lineales.

Los siguientes ejemplos proporcionan ilustraciones adicionales en los que el principio de superposición se usa para calcular deflexiones y ángulos de rotación de vigas.

Ejemplo 9.6

Una viga en voladizo AB soporta una carga uniforme con intensidad q que actúa sobre parte del claro y una carga concentrada P que actúa en el extremo libre (figura 9.18a).

Determine la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo B de la viga (figura 9.18b). (*Nota:* la viga tiene longitud L y rigidez a la flexión constante EI.)

q P A B a b L

(a)

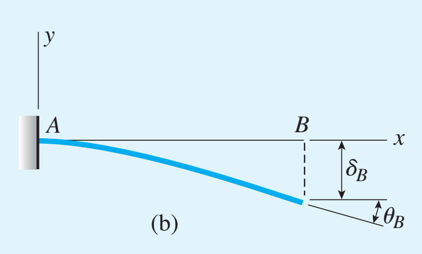


FIGURA 9.18 Ejemplo 9.6. Viga en voladizo con una carga uniforme y una carga concentrada.

Solución

Podemos obtener la deflexión y el ángulo de rotación en el extremo B de la viga al combinar los efectos de las cargas por separado. Si la carga uniforme actúa sola, la deflexión y el ángulo de rotación (obtenidos del caso 2 de la tabla G.1, apéndice G) son

$$(\delta_B)_1 = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \qquad (\theta_B)_1 = \frac{qa^3}{6EI}$$

Si la carga P actúa sola, las cantidades correspondientes (del caso 4, tabla G.1) son

$$(\delta_B)_2 = \frac{PL^3}{3EI} \qquad (\theta_B)_2 = \frac{PL^2}{2EI}$$

Por tanto, la deflexión y el ángulo de rotación debidos a las cargas combinadas (figura 9.18a) son

$$\delta_B = (\delta_B)_1 + (\delta_B)_2 = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) + \frac{PL^3}{3EI} \qquad (9.52)$$

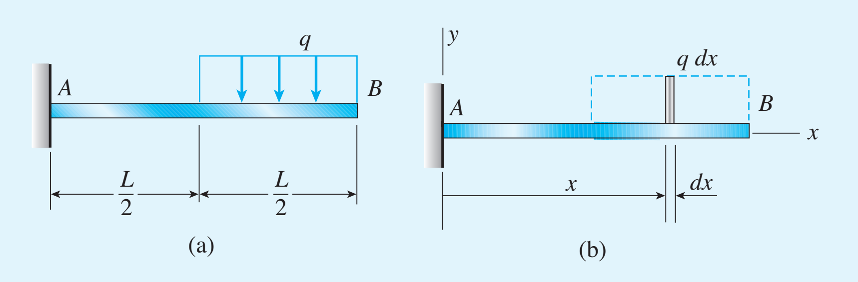
$$\theta_B = (\theta_B)_1 + (\theta_B)_2 = \frac{qa^3}{6EI} + \frac{PL^2}{2EI} \qquad (9.53)$$

De esta manera, hemos determinado las cantidades requeridas al emplear las fórmulas tabuladas y el método de superposición.

Ejemplo 9.7

Una viga en voladizo AB sometida a una carga uniforme con intensidad q que actúa sobre la mitad derecha de la viga se muestra en la figura 9.19a.

Obtenga fórmulas para la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo libre (figura 9.19c). (*Nota:* la viga tiene longitud L y rigidez a la flexión constante EI.)



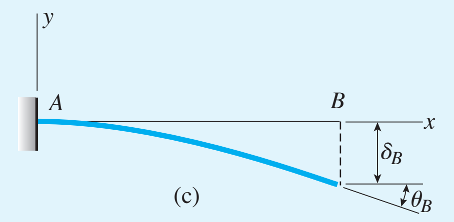


FIGURA 9.19 Ejemplo 9.7. Viga en voladizo con una carga uniforme que actúa sobre la mitad derecha de la viga.

Solución

En este ejemplo determinaremos la deflexión y el ángulo de rotación al tratar un elemento de la carga uniforme como una carga concentrada y luego integrando (consulte la figura 9.19b). El elemento de carga tiene magnitud $q\,dx$ y está ubicado a una distancia x desde el apoyo. La deflexión diferencial resultante $d\delta_B$ y el ángulo diferencial de rotación $d\theta_B$ en el extremo libre se determinan a partir de las fórmulas correspondientes en el caso 5 de la tabla G.1, apéndice G, reemplazando P con $q\,dx$ y a con x; por tanto,

$$d\delta_B = \frac{(qdx)(x^2)(3L - x)}{6EI} \qquad d\theta_B = \frac{(q\,dx)(x^2)}{2EI}$$

Al integrar sobre toda la región cargada, obtenemos

$$\delta_B = \int d\delta_B = \frac{q}{6EI}\int_{L/2}^{L} x^2(3L - x)\,dx = \frac{41qL^4}{384EI} \qquad (9.54)$$

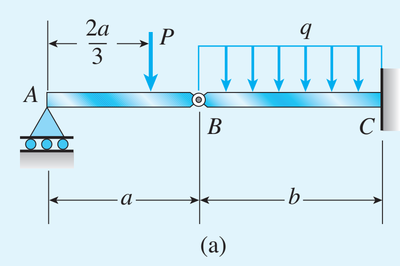
$$\theta_B = \int d\theta_B = \frac{q}{2EI}\int_{L/2}^{L} x^2\,dx = \frac{7qL^3}{48EI} \qquad (9.55)$$

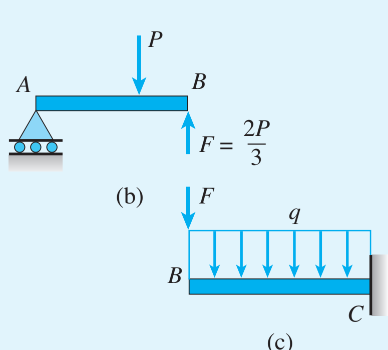
Nota: estos mismos resultados se pueden obtener empleando las fórmulas del caso 3 de la tabla G.1 y sustituir $a = b = L/2$.

Ejemplo 9.8

Una viga compuesta *ABC* tiene un apoyo de rodillo en *A*, una articulación interna en *B* y está empotrada en *C* (figura 9.20a). El segmento *AB* tiene longitud *a* y la del segmento *BC* es $2a/3$ desde el apoyo *A*, y una carga uniforme con intensidad *q* que actúa entre los puntos *B* y *C*.

Determine la deflexión δ_B en la articulación y el ángulo de rotación θ_A en el apoyo *A* (figura 9.20d). (*Nota:* la viga tiene rigidez a la flexión constante *EI*.)





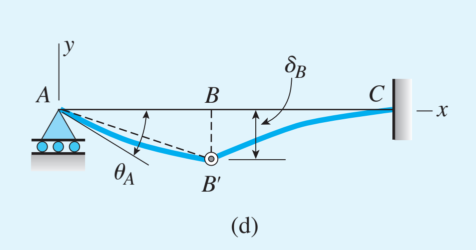


FIGURA 9.20 Ejemplo 9.8. Viga compuesta con una articulación.

Solución

Para fines de análisis, consideraremos que la viga compuesta consiste en dos vigas individuales: (1) una viga simple *AB* con longitud *a* y (2) una viga en voladizo *BC* con longitud *b*. Las dos vigas están unidas mediante un pasador en *B*.

Si separamos la viga *AB* del resto de la estructura (figura 9.20b), observamos que existe una fuerza vertical *F* en el extremo *B* igual a $2P/3$. Esta misma fuerza actúa hacia abajo en el extremo *B* del voladizo (figura 9.20c). En consecuencia, la viga en voladizo *BC* está sometida a dos cargas; una uniforme y una concentrada. La deflexión en el extremo de este voladizo (que es igual que la deflexión δ_B de la articulación) se encuentra fácilmente con los casos 1 y 4 de la tabla G.1, apéndice G:

$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{Fb^3}{3EI}$$

o, dado que $F = 2P/3$,

$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI} \qquad (9.56)$$

El ángulo de rotación θ_A en el apoyo *A* (figura 9.20d) consiste en dos partes: (1) un ángulo BAB' producido por el desplazamiento hacia debajo de la articulación y (2) un ángulo adicional de rotación generado por la flexión de la viga *AB* (o viga AB') como una viga simple. El ángulo BAB' es

$$(\theta_A)_1 = \frac{\delta_B}{a} = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI}$$

El ángulo de rotación en el extremo de una viga simple con una carga concentrada se obtiene del caso 5 de la tabla G-2. La fórmula dada allí es

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

en donde *L* es la longitud de la viga simple, *a* es la distancia desde el apoyo izquierdo hasta la carga y *b* es la distancia desde el apoyo derecho hasta la carga. Por tanto, en la notación de nuestro ejemplo (figura 9.20a), el ángulo de rotación es

$$(\theta_A)_2 = \frac{P\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}\right)\left(a + \frac{a}{3}\right)}{6aEI} = \frac{4Pa^2}{81EI}$$

Al combinar los dos ángulos, obtenemos el ángulo total de rotación en el apoyo *A*:

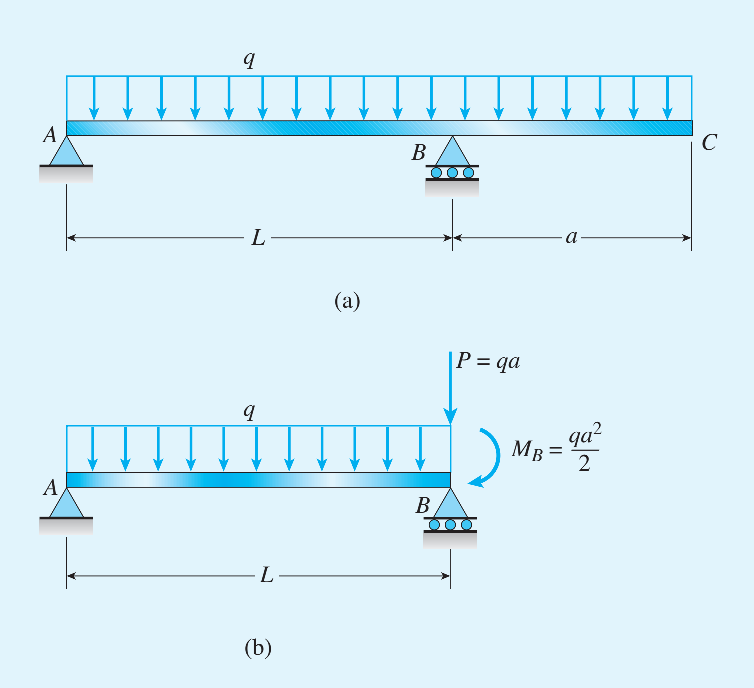
$$\theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI} + \frac{4Pa^2}{81EI} \qquad (9.57)$$

Este ejemplo ilustra cómo se puede adaptar el método de superposición para manejar una situación aparentemente compleja de una manera relativamente simple.

Ejemplo 9.9

Una viga simple AB con longitud L tiene una saliente BC con longitud a (figura 9.21a). La viga soporta una carga uniforme con intensidad q en toda su longitud.

Obtenga una fórmula para la deflexión δ_C en el extremo de la saliente (figura 9.21c). (*Nota:* la viga tiene rigidez a la flexión constante EI.)



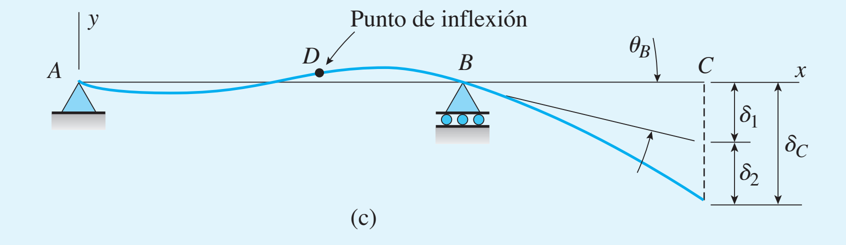


FIGURA 9.21 Ejemplo 9.9. Viga simple con una saliente.

Solución

Podemos encontrar la deflexión del punto C imaginando que la saliente BC (figura 9.21a) es una viga en voladizo sometida a dos acciones. La primera es la rotación del apoyo del voladizo un ángulo θ_B, que es el ángulo de rotación de la viga ABC en el apoyo B (figura 9.21c). (Suponemos que el ángulo θ_B en sentido de las manecillas del reloj es positivo.) Este ángulo de rotación causa una rotación de cuerpo rígido de la saliente BC, que resulta en un desplazamiento hacia abajo δ_1 en el punto C.



Viga con saliente que soporta una carga uniforme debida a la gravedad

La segunda acción es la flexión de BC como una viga en voladizo que soporta una carga uniforme. Esta flexión produce un desplazamiento adicional hacia abajo δ_2 (figura 9.21c). La superposición de estos dos desplazamientos da el desplazamiento total δ_C en el punto C.

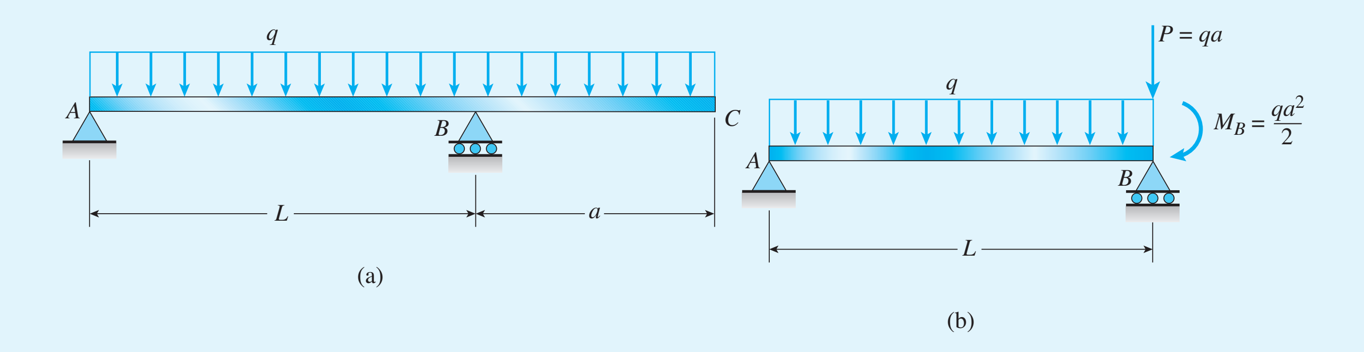
Deflexión δ_1. Iniciemos determinando la deflexión δ_1 generada por el ángulo de rotación θ_B en el punto B. Para encontrar este ángulo, observamos que la parte AB de la viga está en la misma condición que una viga simple (figura 9.21b) sometida a las siguientes cargas: (1) una carga uniforme con intensidad q, (2) un par M_B (igual a $qa^2/2$) y (3) una carga vertical P (igual a qa). Sólo las cargas q y M producen ángulos de rotación en el extremo B de esta viga simple. Estos ángulos se determinan a partir de los casos 1 y 7 de la tabla G.2, apéndice G. Por tanto, el ángulo θ_B es

$$\theta_B = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_B L}{3EI} = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{qa^2L}{6EI} = \frac{qL(4a^2 - L^2)}{24EI} \qquad (9.58)$$

en donde un ángulo en el sentido de las manecillas del reloj es positivo, como se muestra en la figura 9.21c.

La deflexión hacia abajo δ_1 del punto C, debida sólo al ángulo de rotación θ_B, es igual a la longitud del de la saliente por el ángulo (figura 9.21c):

$$\delta_1 = a\theta_B = \frac{qaL(4a^2 - L^2)}{24EI} \qquad (e)$$



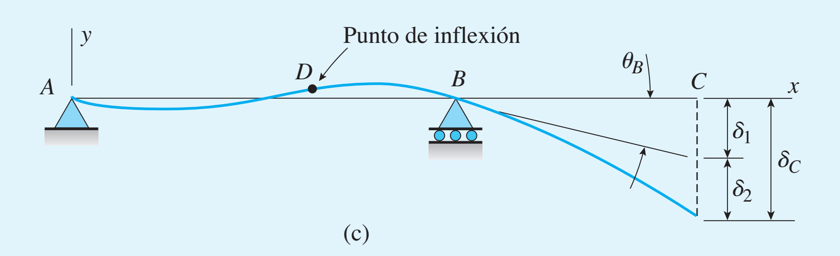


FIGURA 9.21 (Repetida.)

continúa

Deflexión δ_2. La flexión del voladizo BC genera una deflexión adicional δ_2 en el punto C. Esta deflexión es igual a la deflexión de una viga en voladizo con longitud a sometida a una carga uniforme con intensidad q (consulte el caso 1 de la tabla G.1):

$$\delta_2 = \frac{qa^4}{8EI} \tag{f}$$

Deflexión δ_C. La deflexión total hacia abajo del punto C es la suma algebraica de δ_1 y δ_2:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \frac{qaL(4a^2 - L^2)}{24EI} + \frac{qa^4}{8EI} = \frac{qa}{24EI}[L(4a^2 - L^2) + 3a^3]$$

o

$$\delta_C = \frac{qa}{24EI}(a + L)(3a^2 + aL - L^2) \tag{9.59}$$

De la ecuación anterior observamos que la deflexión δ_C puede ser hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de las magnitudes relativas de las longitudes L y a. Si a es relativamente grande, el último término en la ecuación (la expresión de tres términos entre paréntesis) es positivo y la deflexión δ_C es hacia abajo. Si a es relativamente pequeña, el último término es negativo y la deflexión es hacia arriba. La deflexión es cero cuando el último término es igual a cero:

$$3a^2 + aL - L^2 = 0$$

o

$$a = \frac{L(\sqrt{13} - 1)}{6} = 0.4343L \tag{g}$$

Según este resultado, observamos que si a es mayor que $0.4343L$, la deflexión del punto C es hacia abajo; si a es menor que $0.4343L$, la deflexión es hacia arriba.

Curva de deflexión. La forma de la curva de deflexión para la viga en este ejemplo se muestra en la figura 9.21c para el caso cuando a es suficientemente grande ($a > 0.4343L$) para producir una deflexión hacia abajo en C y suficientemente pequeña ($a < L$) para asegurar que la reacción en A es hacia arriba. En estas condiciones la viga tiene un momento flexionante positivo entre el apoyo A y un punto tal como D. La curva de deflexión en la región AD es cóncava hacia arriba (curvatura positiva). De D a C, el momento flexionante es negativo y, por tanto, la curva de deflexión es cóncava hacia abajo (curvatura negativa).

Punto de inflexión. En el punto D la curvatura de la curva de deflexión es cero debido a que el momento flexionante es cero. Un punto como el D donde la curvatura y el momento flexionante *cambian signos* se denomina **punto de inflexión** (o *punto de contraflexión*). El momento flexionante M y la segunda derivada d^2v/dx^2 siempre son cero en un punto de inflexión.

Sin embargo, un punto donde M y d^2v/dx^2 son iguales a cero no necesariamente es un punto de inflexión porque es posible que estas cantidades sean cero sin cambiar signos en ese punto; por ejemplo, podrían tener valores máximos o mínimos.

9.6 MÉTODO DE ÁREA-MOMENTO

En esta sección describiremos otro método para determinar deflexiones y ángulos de rotación de vigas. Dado que el método se basa en dos teoremas relacionados con el *área del diagrama de momento flexionante*, se llama **método de área-momento.**

Las suposiciones empleadas en la deducción de los dos teoremas son las mismas que se utilizaron para deducir las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión. Por tanto, el método de área-momento es válido sólo para vigas linealmente elásticas con pendientes pequeñas.

Primer teorema del método de área-momento

Para deducir el primer teorema, considere un segmento AB de la curva de deflexión de una viga en una región donde la curvatura es positiva (figura 9.22). Por supuesto, las deflexiones y pendientes que se muestran en la figura están muy exageradas por claridad. En el punto A la tangente AA' a la curva de deflexión forma un ángulo θ_A con el eje x y en el punto B la tangente BB' forma un ángulo θ_B. Estas dos tangentes se encuentran en el punto C.

El **ángulo entre las tangentes,** denotado como $\theta_{B/A}$, es igual a la diferencia entre θ_A y θ_B:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A \tag{9.60}$$

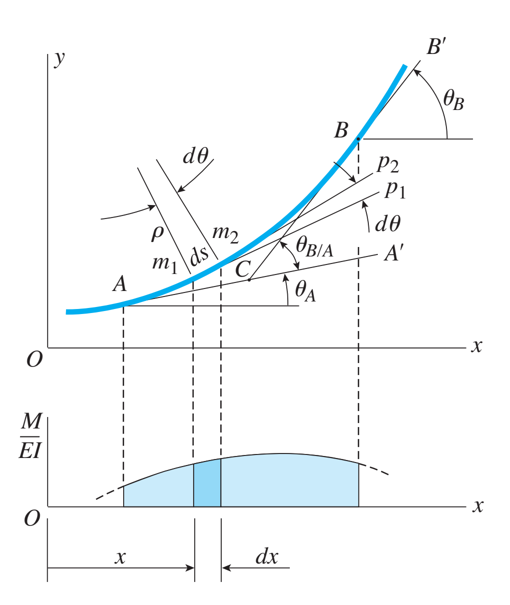


FIGURA 9.22 Deducción del primer teorema del método de área-momento.

Por tanto, el ángulo $\theta_{B/A}$ se puede describir como el ángulo a la tangente en B medido en relación con, o con respecto a la tangente en A. Observe que θ_A y θ_B, que son los ángulos de rotación del eje de la viga en los puntos A y B, respectivamente, también son iguales a las pendientes en estos puntos, debido a que en realidad las pendientes y los ángulos son cantidades muy pequeñas.

A continuación considere dos puntos m_1 y m_2 sobre el eje flexionado de la viga (figura 9.22). Estos puntos están separados una distancia pequeña ds. Las tangentes a la curva de deflexión en estos puntos se muestran en la figura como las líneas m_1p_1 y m_2p_2. Las normales a estas tangentes se cortan en el centro de curvatura (no se muestran en la figura).

El ángulo $d\theta$ entre las normales (figura 9.22) está dado por la siguiente ecuación:

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} \tag{a}$$

en donde ρ es el radio de curvatura y $d\theta$ se mide en radianes (consulte la ecuación 9.1). Dado que las normales y las tangentes (m_1p_1 y m_2p_2) son perpendiculares, se deduce que el ángulo entre las tangentes también es igual a $d\theta$.

Para una viga con ángulos de rotación pequeños, podemos reemplazar ds con dx, como se explicó en la sección 9.2. Entonces,

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} \tag{b}$$

Además, de la ecuación (9.6) sabemos que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{c}$$

y, por tanto,

$$d\theta = \frac{M\,dx}{EI} \tag{9.61}$$

en donde M es el momento flexionante y EI es la rigidez a la flexión de la viga.

La cantidad $M\,dx/EI$ tiene una interpretación geométrica simple. Para ver esto, consulte la figura 9.22 donde dibujamos el diagrama M/EI debajo de la viga. En cualquier punto a lo largo del eje x, la altura de este diagrama es igual al momento flexionante M en ese punto dividido entre la rigidez a la flexión EI en ese punto. Por tanto, el diagrama M/EI tiene la misma forma que el diagrama de momento flexionante siempre que EI sea constante. El término $M\,dx/EI$ es el área de la franja sombreada con ancho dx dentro del diagrama M/EI. (Observe que como la curvatura de la curva de deflexión en la figura 9.22 es positiva, el momento flexionante M y el área del diagrama M/EI también son positivos.)

Ahora integremos $d\theta$ (ecuación 9.61) entre los puntos A y B de la curva de deflexión:

$$\int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M\,dx}{EI} \tag{d}$$

Cuando se evalúa, la integral en lado izquierdo es igual a $\theta_B - \theta_A$, que es igual al ángulo $\theta_{B/A}$ entre las tangentes en B y A (ecuación 9.60).

La integral en lado derecho de la ecuación (d) es igual al área del diagrama M/EI entre los puntos A y B. (Observe que el área del diagrama M/EI es una cantidad algebraica y puede ser positiva o negativa, dependiendo de si el momento es positivo o negativo).

Ahora podemos escribir la ecuación (d) de la manera siguiente:

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M\,dx}{EI}$$
$$= \text{Área del diagrama } M/EI \text{ entre los puntos } A \text{ y } B \qquad (9.62)$$

Esta ecuación se puede enunciar como un teorema:

Primer teorema de área-momento: el ángulo $\theta_{B/A}$ entre las tangentes a la curva de deflexión en dos puntos A y B es igual al área del diagrama M/EI entre esos puntos.

Las siguientes son las convenciones de signos empleadas al deducir el teorema anterior:

1. Los ángulos θ_A y θ_B son positivos en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
2. El ángulo $\theta_{B/A}$ entre las tangentes es positivo cuando el ángulo θ_B es algebraicamente mayor que el ángulo θ_A. Además, observe que el punto B debe estar a la derecha del punto A; es decir, debe estar más alejado a lo largo del eje de la viga conforme nos movemos en la dirección x.
3. El momento flexionante M es positivo de acuerdo con nuestra convención de signos habitual; es decir, M es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga.
4. Al área del diagrama M/EI se le da un signo positivo o negativo según si el momento flexionantes es positivo o negativo. Si parte del diagrama del momento flexionante es positivo y parte es negativo, entonces a las partes correspondientes del diagrama M/EI se les dan los mismos signos.

Las convenciones de signos anteriores para θ_A, θ_B y $\theta_{B/A}$ a menudo se ignoran en la práctica debido a que (como se explica más adelante) las direcciones de los ángulos de rotación usualmente son obvios por inspección de la viga y de su carga. Cuando este es el caso, podemos simplificar los cálculos e ignorar los signos y podemos emplear sólo valores absolutos al aplicar el primer teorema de área-momento.

Segundo teorema de área-momento

Ahora analicemos el segundo teorema, que está relacionado principalmente con deflexiones en vez de ángulos de rotación. Considere de nuevo la curva de deflexión entre los puntos A y B (figura 9.23). Trazamos la tangente en el punto A y observamos que su intersección con una línea vertical que pasa por el punto B está en el punto B_1. La distancia vertical entre los puntos B y B_1 se denota con $t_{B/A}$ en la figura. A esta distancia se le refiere como **desvia-**

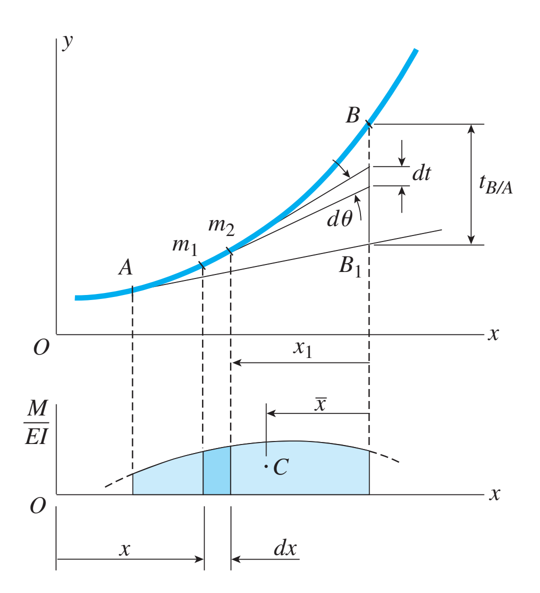


FIGURA 9.23 Deducción del segundo teorema de área-momento.

ción tangencial de B con respecto a A. De manera más precisa, la distancia $t_{B/A}$ es la desviación vertical del punto B sobre la curva de deflexión con respecto a la tangente en el punto A. La desviación tangencial es positiva cuando el punto B está arriba de la tangente en A.

Para determinar la desviación tangencial, de nuevo seleccionamos dos puntos m_1 y m_2 separados una distancia pequeña sobre la curva de deflexión (figura 9.23). El ángulo entre las tangentes en estos dos puntos es $d\theta$ y el segmento sobre la línea BB_1 entre estas tangentes es dt. Dado que los ángulos entre las tangentes y el eje x en realidad son muy pequeños, observamos que la distancia vertical dt es igual a $x_1 d\theta$, donde x_1 es la distancia horizontal desde el punto B hasta el elemento pequeño m_1m_2. Como $d\theta = M\,dx/EI$ (ecuación 9.61), obtenemos

$$dt = x_1\,d\theta = x_1\frac{M\,dx}{EI} \tag{e}$$

La distancia dt representa la contribución de la flexión del elemento m_1m_2 a la desviación tangencial $t_{B/A}$. La expresión $x_1M\,dx/EI$ se puede interpretar de manera geométrica como el momento estático del área de la franja sombreada de ancho dx dentro del diagrama M/EI. Este momento estático se evalúa con respecto a una línea vertical que pasa por el punto B.

Al integrar la ecuación (e) entre los puntos A y B obtenemos

$$\int_A^B dt = \int_A^B x_1\frac{M\,dx}{EI} \tag{f}$$

La integral en el lado izquierdo es igual a $t_{B/A}$, es decir, es igual a la desviación del punto B desde la tangente en A. La integral en el lado derecho representa el momento estático con respecto al punto B del área del diagrama M/EI entre A y B. Por tanto, podemos escribir la ecuación (f) como sigue:

$$t_{B/A} = \int_A^B x_1 \frac{M\,dx}{EI}$$
$$= \text{Momento estático del área del diagrama } M/EI \text{ entre los puntos } A \text{ y } B\text{, evaluado con respecto a } B \qquad (9.63)$$

Esta ecuación representa el segundo teorema:

Segundo teorema de área-momento: la desviación tangencial $t_{B/A}$ del punto B desde la tangente en el punto A es igual al momento estático del área del diagrama M/EI entre A y B, evaluado con respecto a B.

Si el momento flexionante es positivo, entonces el momento estático del diagrama M/EI también es positivo, siempre que el punto B esté a la derecha del punto A. En estas condiciones la desviación tangencial $t_{B/A}$ es positiva y el punto B está arriba de la tangente en A (como se muestra en la figura 9.23). Si a medida que nos movemos de A a B en la dirección x el área del diagrama M/EI es negativa, entonces el momento estático también es negativo y la desviación tangencial es negativa, lo que significa que el punto B está debajo de la tangente en A.

El momento estático del área del diagrama M/EI se puede obtener calculando el producto del área del diagrama por la distancia $\bar{x}$ desde el punto B hasta el centroide C del área (figura 9.23). Este procedimiento suele ser más conveniente que el de integración, debido a que el diagrama M/EI, por lo general, consiste en figuras geométricas familiares como rectángulos, triángulos y segmentos parabólicos. Las áreas y las distancias centroidales de esas figuras se encuentran tabuladas en el apéndice D.

Como método de análisis, el método de área-momento es factible sólo para tipos de vigas relativamente simples. Por tanto, en general, es obvio si la viga se flexiona hacia arriba o hacia abajo y si un ángulo de rotación es en el sentido de las manecillas del reloj o contrario a éste. En consecuencia, rara vez es necesario seguir las convenciones de signos formales (y un tanto incómodas) descritas antes para la desviación tangencial. En cambio, podemos determinar las direcciones por inspección y emplear sólo valores absolutos al aplicar los teoremas de área-momento.

Ejemplo 9.10

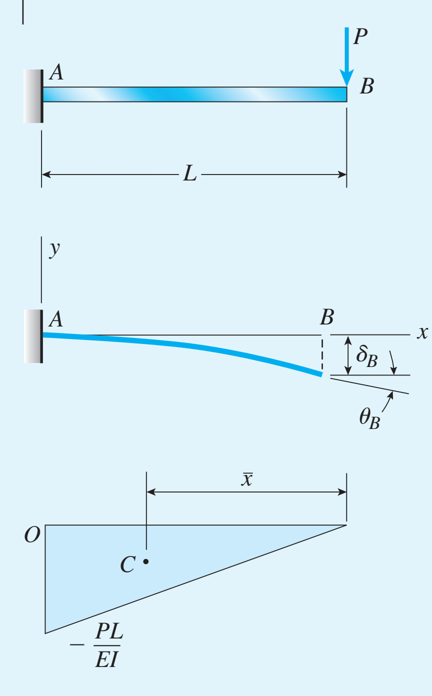


FIGURA 9.24 Ejemplo 9.10. Viga en voladizo con una carga concentrada.

Determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre de una viga en voladizo *AB* que soporta una carga concentrada *P* (figura 9.24). (*Nota:* la viga tiene longitud *L* y rigidez a la flexión constante *EI*.)

Solución

Por inspección de la viga y su carga sabemos que el ángulo de rotación θ_B es en el sentido de las manecillas del reloj y que la deflexión δ_B es hacia abajo (figura 9.24). Por tanto, podemos utilizar valores absolutos al aplicar los teoremas de área-momento.

Diagrama M/EI. El diagrama del momento flexionante tiene forma triangular con el momento en el empotramiento igual a –*PL*. Dado que la rigidez a la flexión *EI* es constante, el diagrama *M*/*EI* tiene la misma forma que el diagrama de momento flexionante, como se muestra en la última parte de la figura 9.24.

Ángulo de rotación. Del primer teorema de área-momento sabemos que el ángulo $\theta_{B/A}$ entre las tangentes en los puntos *B* y *A* es igual al área del diagrama *M*/*EI* entre esos puntos. Esta área, que denotaremos A_1, se determina como sigue:

$$A_1 = \frac{1}{2}(L)\left(\frac{PL}{EI}\right) = \frac{PL^2}{2EI}$$

Observe que sólo estamos empleando el valor absoluto del área.

El ángulo de rotación relativo entre los puntos *A* y *B* (del primer teorema) es

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = A_1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

Dado que la tangente a la curva de deflexión en el empotramiento *A* es horizontal ($\theta_A = 0$), obtenemos

$$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI} \qquad (9.64)$$

Este resultado concuerda con la fórmula para θ_B dada en el caso 4 de la tabla G.1, apéndice G.

Deflexión. La deflexión δ_B en el extremo libre se puede obtener del segundo teorema de área-momento. En este caso la desviación tangencial $t_{B/A}$ del punto *B* desde la tangente en *A* es igual a la propia deflexión δ_B (consulte la figura 9.24). El momento estático del área del diagrama *M*/*EI*, evaluado con respecto al punto *B*, es

$$Q_1 = A_1\bar{x} = \left(\frac{PL^2}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$$

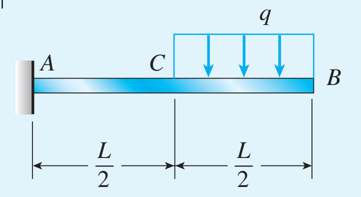
Observe de nuevo que estamos ignorando los signos y empleando sólo valores absolutos.

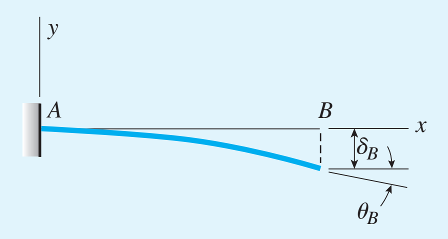
Del segundo teorema de área-momento sabemos que la deflexión δ_B es igual al momento estático Q_1. Por tanto,

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad (9.65)$$

Este resultado también aparece en el caso 4 de la tabla G.1.

Ejemplo 9.11





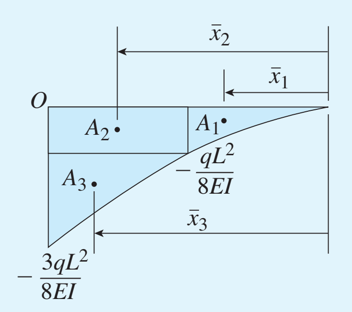


FIGURA 9.25 Ejemplo 9.11. Viga en voladizo que soporta una carga uniforme sobre la mitad derecha.

Encuentre el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre B de una viga en voladizo ACB que soporta una carga uniforme con intensidad q que actúa sobre la mitad derecha de la viga (figura 9.25). (*Nota:* la viga tiene longitud L y rigidez a la flexión constante EI.)

Solución

La deflexión y el ángulo de rotación en el extremo B de la viga tienen las direcciones que se muestran en la figura 9.25. Como conocemos de antemano estas direcciones, podemos escribir las expresiones de área-momento empleando sólo valores absolutos.

Diagrama M/EI. El diagrama del momento flexionante consiste en una curva parabólica de la carga uniforme y en una línea recta en la mitad izquierda de la viga. Dado que EI es constante, el diagrama M/EI tiene la misma forma (consulte la última parte de la figura 9.25). Los valores de M/EI en los puntos A y C son $-3qL^2/8EI$ y $-qL^2/EI$, respectivamente.

Ángulo de rotación. Con el fin de evaluar el área del diagrama M/EI, es conveniente dividirlo en tres partes: (1) un tímpano parabólico con área A_1, (2) un rectángulo con área A_2 y (3) un triángulo con área A_3. Estas áreas son

$$A_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{qL^2}{8EI}\right) = \frac{qL^3}{48EI} \qquad A_2 = \frac{L}{2}\left(\frac{qL^2}{8EI}\right) = \frac{qL^3}{16EI}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3qL^2}{8EI} - \frac{qL^2}{8EI}\right) = \frac{qL^3}{16EI}$$

De acuerdo con el primer teorema de área-momento, el ángulo entre las tangentes en los puntos A y B es igual al área del diagrama M/EI entre esos puntos. Como el ángulo en A es cero, se deduce que el ángulo de rotación θ_B es igual al área del diagrama; por tanto

$$\theta_B = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{7qL^3}{48EI} \qquad (9.66)$$

Deflexión. La deflexión δ_B es la desviación tangencial del punto B con respecto a una tangente en el punto A (figura 9.25). Por tanto, del segundo teorema de área-momento, δ_B es igual al momento estático del diagrama M/EI, evaluado con respecto al punto B:

$$\delta_B = A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3 \qquad (g)$$

en donde $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$, son las distancias desde el punto B hasta los centroides de las áreas respectivas. Estas distancias son

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3L}{8} \qquad \bar{x}_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} = \frac{3L}{4} \qquad \bar{x}_3 = \frac{L}{2} + \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5L}{6}$$

Al sustituir en la ecuación (g), obtenemos

$$\delta_B = \frac{qL^3}{48EI}\left(\frac{3L}{8}\right) + \frac{qL^3}{16EI}\left(\frac{3L}{4}\right) + \frac{qL^3}{16EI}\left(\frac{5L}{6}\right) = \frac{41qL^4}{384EI} \qquad (9.67)$$

Este ejemplo ilustra cómo se pueden determinar el área y el momento estático de un diagrama complejo M/EI al dividir el área en partes con propiedades conocidas. Los resultados de este análisis (ecuaciones 9.66 y 9.67) se pueden verificar al emplear las fórmulas del caso 3, tabla G.1 del apéndice G, y al sustituir $a = b = L/2$.

Ejemplo 9.12

Una viga simple *ADB* soporta una carga concentrada *P* que actúa en la posición que se muestra en la figura 9.26. Determine el ángulo de rotación θ_A en el apoyo *A* y la deflexión δ_D producida por la carga *P*. (*Nota:* la viga tiene longitud *L* y rigidez a la flexión constante *EI*.)

Solución

La curva de deflexión, que muestra el ángulo de rotación θ_A y la deflexión δ_D, se ilustra en el diagrama de la segunda parte de la figura 9.26. Dado que podemos determinar la dirección de θ_A y δ_D por inspección, es posible escribir las expresiones de área-momento empleando sólo valores absolutos.

Diagrama M/EI. El diagrama del momento flexionante es triangular, con el momento máximo (igual a *Pab*/*L*) que ocurre bajo la carga. Dado que *EI* es constante, el diagrama *M*/*EI* tiene la misma forma que el diagrama del momento (consulte la tercera parte de la figura 9.26).

Ángulo de rotación en el apoyo A. Para determinar este ángulo trazamos la tangente AB_1 en el apoyo *A*. Luego observamos que la distancia BB_1 es la desviación

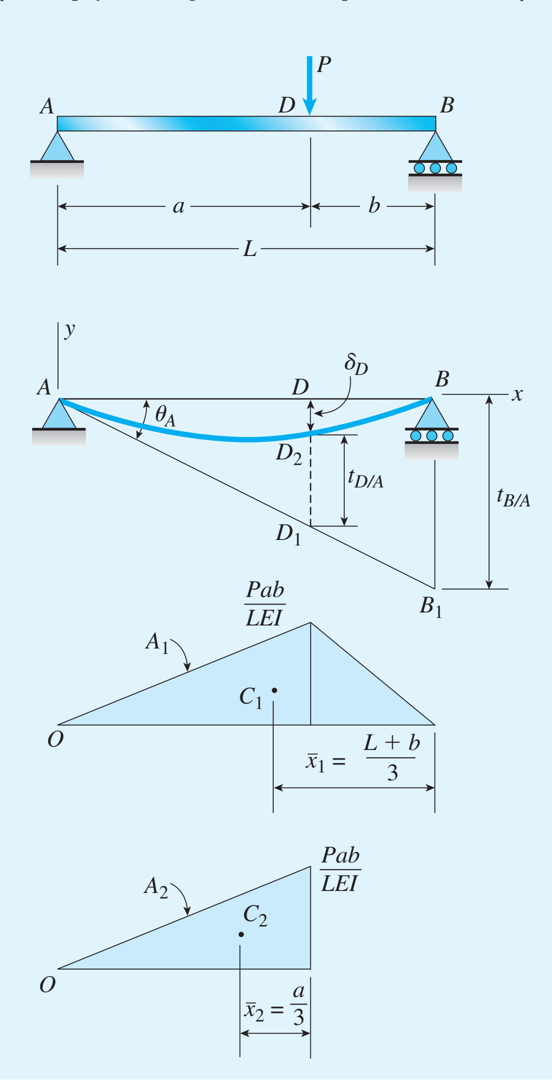


FIGURA 9.26 Ejemplo 9.12. Viga simple con una carga concentrada.

tangencial $t_{B/A}$ del punto B desde la tangente en A. Podemos calcular esta distancia al evaluar el momento estático del área del diagrama M/EI con respecto al punto B y luego aplicar el segundo teorema de área-momento.

El área de todo el diagrama M/EI es

$$A_1 = \frac{1}{2}(L)\left(\frac{Pab}{LEI}\right) = \frac{Pab}{2EI}$$

El centroide C_1 de esta área está a una distancia $\bar{x}_1$ desde el punto B (consulte la figura 9.26). Esta distancia, obtenida del caso 3 del apéndice D, es

$$\bar{x}_1 = \frac{L + b}{3}$$

Por tanto, la desviación tangencial es

$$t_{B/A} = A_1\bar{x}_1 = \frac{Pab}{2EI}\left(\frac{L + b}{3}\right) = \frac{Pab}{6EI}(L + b)$$

El ángulo θ_A es igual a la desviación tangencial dividida entre la longitud de la viga:

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{Pab}{6LEI}(L + b) \qquad (9.68)$$

De esta manera hemos determinado el ángulo de rotación en el apoyo A.

Deflexión por la carga. Como se muestra en la segunda parte de la figura 9.26, la deflexión δ_D por la carga P es igual a la distancia DD_1 menos la distancia D_2D_1. La distancia DD_1 es igual al ángulo de rotación θ_A multiplicado por la distancia a; entonces

$$DD_1 = a\theta_A = \frac{Pa^2b}{6LEI}(L + b) \qquad \text{(h)}$$

La distancia D_2D_1 es la desviación tangencial $t_{D/A}$ en el punto D; es decir, es la desviación del punto D desde la tangente en A. Esta distancia se puede determinar a partir del segundo teorema de área-momento obteniendo el momento estático del área del diagrama M/EI entre los puntos A y D con respecto a D (consulte la última parte de la figura 9.26). El área de esta parte del diagrama M/EI es

$$A_2 = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{Pab}{LEI}\right) = \frac{Pa^2b}{2LEI}$$

y su distancia centroidal desde el punto D es

$$\bar{x}_2 = \frac{a}{3}$$

Por tanto, el momento estático de esta área con respecto al punto D es

$$t_{D/A} = A_2\bar{x}_2 = \left(\frac{Pa^2b}{2LEI}\right)\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{Pa^3b}{6LEI} \qquad \text{(i)}$$

La deflexión en el punto D es

$$\delta_D = DD_1 - D_2D_1 = DD_1 - t_{D/A}$$

Al sustituir de las ecuaciones (h) e (i), obtenemos

$$\delta_D = \frac{Pa^2b}{6LEI}(L + b) - \frac{Pa^3b}{6LEI} = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} \qquad (9\text{-}69)$$

Las fórmulas anteriores para θ_A y δ_D (ecuaciones 9.68 y 9.69) se pueden verificar al emplear las fórmulas del caso 5, tabla G.2 del apéndice G.

9.7 VIGAS NO PRISMÁTICAS

Los métodos presentados en las secciones anteriores para determinar deflexiones de vigas prismáticas también se pueden utilizar para encontrar deflexiones de vigas con momentos de inercia variables. En la figura 9.27 se ilustran dos ejemplos de vigas no prismáticas. La primera viga tiene dos momentos de inercia diferentes y la segunda es una viga ahusada con un momento de inercia que varía continuamente. En los dos casos el objetivo es ahorrar material al aumentar el momento de inercia en las regiones donde el momento flexionante es mayor.



Vigas no prismáticas con orificios en sus almas

Si bien no se implican conceptos nuevos, el análisis de una viga no prismática es más complejo que el de una viga con momento de inercia constante. Algunos de los procedimientos que se pueden utilizar se ilustran en los ejemplos que siguen (ejemplos 9.13 y 9.14).

En el primer ejemplo (una viga simple con dos momentos de inercia diferentes) las deflexiones se determinan al resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión. En el segundo ejemplo (una viga en voladizo con dos momentos de inercia diferentes), se utiliza en método de superposición.

Estos dos ejemplos, así como los problemas para esta sección, involucran vigas relativamente simples e idealizadas. Cuando se trate con vigas más complejas (como vigas ahusadas), es usual que se requieran métodos numéricos de análisis. (También hay disponibles programas de cómputo para el cálculo numérico de las deflexiones de vigas.)

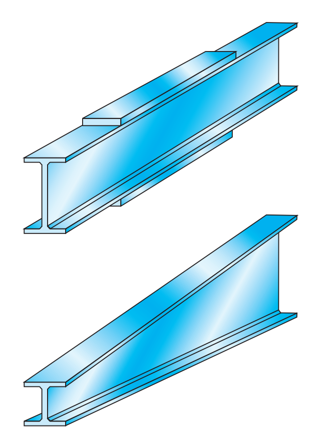
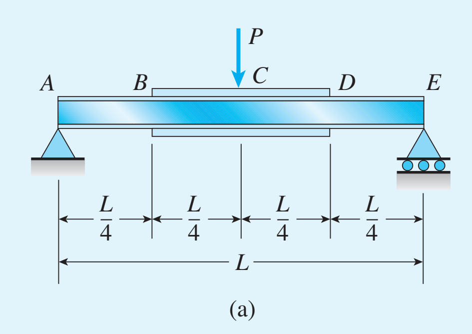


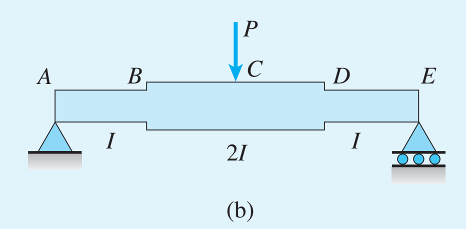
FIGURA 9.27 Vigas con momentos de inercia variables (consulte también la figura 5.23).

Ejemplo 9.13

Una viga *ABCDE* sobre apoyos simples está construida con una viga de patín ancho al soldar cubreplacas sobre la mitad central de la viga (figura 9.28a). El efecto de las cubreplacas es duplicar el momento de inercia (figura 9.28b). Una carga concentrada *P* actúa a la mitad del claro *C* de la viga.

Determine las ecuaciones de la curva de deflexión, el ángulo de rotación θ_A en el apoyo izquierdo y la deflexión δ_C a la mitad del claro (figura 9.28c).





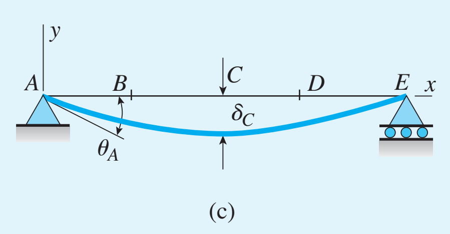


FIGURA 9.28 Ejemplo 9.13. Viga simple con dos momentos de inercia diferentes.

Solución

Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión. En este ejemplo determinaremos las pendientes de las deflexiones de la viga integrando la ecuación del momento flexionante, es decir, la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (ecuación 9.12a). Como la reacción en cada apoyo es *P*/2, el momento flexionante sobre toda la mitad izquierda de la viga es

$$M = \frac{Px}{2} \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \tag{a}$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales para la mitad izquierda de la viga son

$$EIv'' = \frac{Px}{2} \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \tag{b}$$

$$E(2I)v'' = \frac{Px}{2} \qquad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \tag{c}$$

Cada una de estas ecuaciones se puede integrar dos veces para obtener expresiones para las pendientes y deflexiones en sus regiones respectivas. Estas integraciones producen cuatro constantes de integración que se pueden determinar a partir de las cuatro siguientes condiciones:



1. Condición de frontera: en el apoyo *A* ($x = 0$), la deflexión es cero ($v = 0$).
2. Condición de simetría: en el punto *C* ($x = L/2$), la pendiente es cero ($v' = 0$).
3. Condición de continuidad: en el punto *B* ($x =$ L/4), la pendiente obtenida de la parte *AB* de la viga es igual a la pendiente obtenida de la parte *BC* de la viga.
4. Condición de continuidad: en el punto *B* ($x = L/4$), la deflexión obtenida de la parte *AB* de la viga es igual a la deflexión obtenida de la parte *BC* de la viga.

Pendientes de la viga. Al integrar cada una de las ecuaciones diferenciales (ecuaciones b y c), obtenemos las siguientes ecuaciones para las pendientes en la mitad izquierda de la viga:

$$v' = \frac{Px^2}{4EI} + C_1 \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \tag{d}$$

$$v' = \frac{Px^2}{8EI} + C_2 \qquad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \tag{e}$$

continúa

Al aplicar la condición de simetría (2) a la ecuación (e), obtenemos la constante C_2:

$$C_2 = -\frac{PL^2}{32EI}$$

Por tanto, la pendiente de la viga entre los puntos B y C (de la ecuación e) es

$$v' = -\frac{P}{32EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \tag{9.70}$$

A partir de esta ecuación podemos encontrar la pendiente de la curva de deflexión en el punto B donde el momento de inercia cambia de I a $2I$:

$$v'\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{3PL^2}{128EI} \tag{f}$$

Como la curva de deflexión es continua en el punto B, podemos usar la condición de continuidad (3) e igualar la pendiente en el punto B obtenida con la ecuación (d) con la pendiente en el mismo punto dada por la ecuación (f). De esta manera determinamos la constante C_1:

$$\frac{P}{4EI}\left(\frac{L}{4}\right)^2 + C_1 = -\frac{3PL^2}{128EI} \quad \text{o} \quad C_1 = -\frac{5PL^2}{128EI}$$

Por tanto, la pendiente entre los puntos A y B (consulte la ecuación d) es

$$v' = -\frac{P}{128EI}(5L^2 - 32x^2) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \tag{9.71}$$

En el apoyo A, donde $x = 0$, el ángulo de rotación (figura 9.28c) es

$$\theta_A = -v'(0) = \frac{5PL^2}{128EI} \tag{9.72}$$

Deflexiones de la viga. Al integrar las ecuaciones para las pendientes (ecuaciones 9.71 y 9.70), obtenemos

$$v = -\frac{P}{128EI}\left(5L^2x - \frac{32x^3}{3}\right) + C_3 \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \tag{g}$$

$$v = -\frac{P}{32EI}\left(L^2x - \frac{4x^3}{3}\right) + C_4 \qquad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \tag{h}$$

Aplicamos la condición de frontera en el apoyo (condición 1) a la ecuación (g), y obtenemos $C_3 = 0$. Por tanto, la deflexión entre los puntos A y B (de la ecuación g) es

$$v = -\frac{Px}{384EI}(15L^2 - 32x^2) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \qquad (9.73)$$

A partir de esta ecuación podemos determinar la deflexión en el punto B:

$$v\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{13PL^3}{1536EI} \qquad \text{(i)}$$

Dado que la curva de deflexión es continua en el punto B, podemos utilizar la condición de continuidad (4) e igualar la deflexión en el punto B obtenida con la ecuación (h) con la deflexión dada por la ecuación (i):

$$-\frac{P}{32EI}\left[L^2\left(\frac{L}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{L}{4}\right)^3\right] + C_4 = -\frac{13PL^3}{1536EI}$$

de donde

$$C_4 = -\frac{PL^3}{768EI}$$

Por tanto, la deflexión entre los puntos B y C (de la ecuación h) es

$$v = -\frac{P}{768EI}(L^3 + 24L^2x - 32x^3) \qquad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \qquad (9.74)$$

De esta manera hemos obtenido las ecuaciones de la curva de deflexión para la mitad izquierda de la viga. (Las deflexiones en la mitad derecha de la viga se pueden obtener por simetría).

Por último, obtenemos la deflexión en el punto medio C al sustituir $x = L/2$ en la ecuación (9.74):

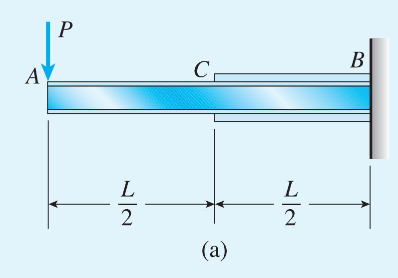
$$\delta_C = -v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3PL^3}{256EI} \qquad (9.75)$$

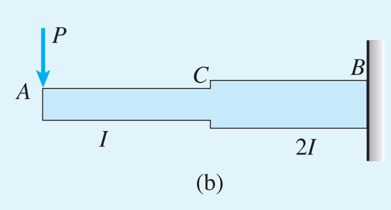
Ahora hemos determinado todas las cantidades requeridas y completado el análisis de la viga no prismática.

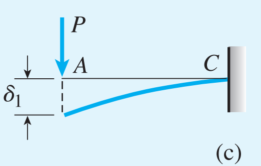
Notas: el uso de la ecuación diferencial para determinar deflexiones es práctico sólo si el número de ecuaciones que se debe resolver está limitado a uno o dos y sólo si las integraciones son fáciles de realizar, como en este ejemplo. En el caso de una viga ahusada (figura 9.27), puede ser difícil resolver la ecuación diferencial de manera analítica debido a que el momento de inercia es una función continua de x. En ese caso, la ecuación diferencial tiene coeficientes variables en vez de coeficientes constantes y se requieren métodos numéricos de solución.

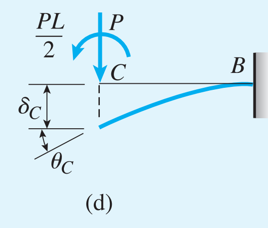
Cuando una viga tiene cambios abruptos en sus dimensiones transversales, como en este ejemplo, hay concentraciones de esfuerzos en los puntos donde ocurren los cambios. Sin embargo, debido a que las concentraciones de esfuerzos afectan sólo una región pequeña de la viga, no tienen un efecto notable sobre las deflexiones.

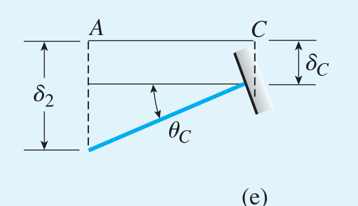
Ejemplo 9.14











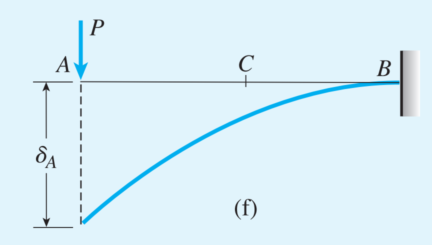


FIGURA 9.29 Ejemplo 9.14. Viga en voladizo con dos momentos de inercia diferentes.

Una viga en voladizo *ACB* con longitud *L* y dos momentos de inercia diferentes *I* y 2*I* soporta una carga concentrada *P* en el extremo libre *A* (figuras 9.29a y b).

Determine la deflexión δ_A en el extremo libre.

Solución

En este ejemplo utilizaremos el método de superposición para determinar la deflexión δ_A en el extremo de la viga. Iniciaremos tomando en cuenta que la deflexión consiste de dos partes: la debida a la flexión de la parte *AC* de la viga y la debida a la flexión de la parte *CB*. Podemos determinarlas por separado y luego superponerlas para obtener la deflexión total.

Deflexión debida a la flexión de la parte AC de la viga. Imagine que la viga se mantiene rígida en el punto *C*, de manera que la viga no se flexiona ni gira en ese punto (figura 9.29c). Podemos calcular con facilidad la deflexión δ_1 del punto *A* en esta viga, ya que tiene longitud *L*/2 y momento de inercia *I*, su deflexión (consulte el caso 4 de la tabla G.1 del apéndice G) es

$$\delta_1 = \frac{P(L/2)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI} \qquad \text{(j)}$$

Deflexión debida a la flexión de la parte CB de la viga. La parte *CB* de la viga también se comporta como una viga en voladizo (figura 9.29d) y contribuye a la deflexión del punto *A*. El extremo de este voladizo está sometido a una carga concentrada *P* y a un momento *PL*/2. Por tanto, la deflexión δ_C y el ángulo de rotación θ_C en el extremo libre (figura 9.29d) son como sigue (consulte los casos 4 y 6 de la tabla G.1):

$$\delta_C = \frac{P(L/2)^3}{3(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2(2EI)} = \frac{5PL^3}{96EI}$$

$$\theta_C = \frac{P(L/2)^2}{2(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{2EI} = \frac{3PL^2}{16EI}$$

Esta deflexión y el ángulo de rotación hacen una contribución adicional δ_2 a la deflexión en el extremo *A* (figura 9.29e). De nuevo visualizamos la parte *AC* como una viga en voladizo, pero ahora su empotramiento (en el punto *C*) se mueve hacia abajo una cantidad δ_C y gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ_C (figura 9.29e). Estos desplazamientos de cuerpo rígido producen un desplazamiento hacia abajo en el extremo *A* igual a lo siguiente:

$$\delta_2 = \delta_C + \theta_C\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5PL^3}{96EI} + \frac{3PL^2}{16EI}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7PL^3}{48EI} \qquad \text{(k)}$$

Deflexión total. La deflexión total δ_A en el extremo libre *A* de la viga en voladizo original (figura 9.29f) es igual a la suma de las deflexiones δ_1 y δ_2:

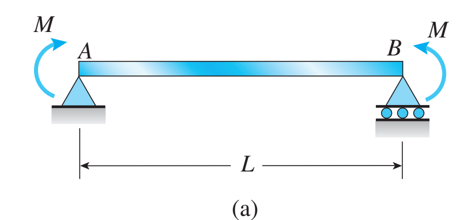
$$\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{7PL^3}{48EI} = \frac{3PL^3}{16EI} \qquad (9.76)$$

Este ejemplo ilustra una de las muchas formas en que se puede utilizar el principio de superposición para determinar deflexiones de vigas.

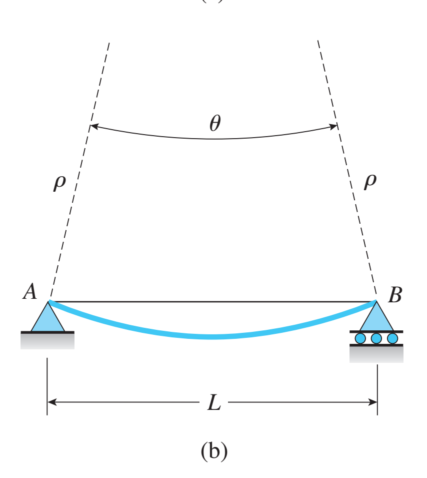
9.8 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN POR FLEXIÓN

Los conceptos generales relativos a la energía de deformación se explicaron antes en los análisis de barras sometidas a cargas axiales y ejes sometidos a torsión (secciones 2.7 y 3.9, respectivamente). En esta sección aplicaremos los mismos conceptos a vigas. Puesto que emplearemos las ecuaciones para curvatura y deflexión deducidas antes en este capítulo, nuestro análisis de la energía de deformación se aplica sólo a vigas que se comportan de manera linealmente elástica. Este requisito significa que el material sigue la ley de Hooke y que las deflexiones y rotaciones deben ser pequeñas.

Iniciemos con una viga simple AB en flexión pura ante la acción de dos pares, cada uno con un momento M (figura 9.30a). La curva de deflexión (figura 9.30b) es un arco circular casi plano con curvatura constante $\kappa = M/EI$ (consulte la ecuación 9.6). El ángulo θ subtendido por este arco es igual a L/ρ, donde L es la longitud de la viga y ρ es el radio de curvatura. Por tanto,



(a)



(b)

FIGURA 9.30 Viga en flexión pura por pares de momento M.

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \kappa L = \frac{ML}{EI} \tag{9.77}$$

Esta relación lineal entre los momentos M y el ángulo θ se muestra de manera gráfica por la línea OA en la figura 9.31. Conforme los pares de flexión aumentan gradualmente su magnitud desde cero a sus valores máximos, realizan un trabajo W representado por el área sombreada debajo de la línea OA. Este trabajo, igual a la energía de deformación U almacenada en la viga, es

$$W = U = \frac{M\theta}{2} \tag{9.78}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (2.35) para la energía de deformación de una barra cargada axialmente.

Al combinar las ecuaciones (9.77) y (9.78) podemos expresar la energía de deformación almacenada en una viga en flexión pura en cualquiera de las dos siguientes formas:

$$U = \frac{M^2L}{2EI} \qquad U = \frac{EI\theta^2}{2L} \tag{9.79a,b}$$

La primera de estas ecuaciones expresa la energía de deformación en términos de los momentos aplicados M y la segunda ecuación la expresa en términos del ángulo θ. Las ecuaciones tienen una forma similar a las que dan la energía de deformación en una barra cargada axialmente (ecuaciones 2.37a y b).

Si el momento flexionante en una viga varía a lo largo de su longitud (flexión no uniforme), entonces podemos obtener la energía de deformación aplicando las ecuaciones (9.79a) y (9.79b) a un elemento de la viga (figura 9.32) e integrando a lo largo de la misma. La longitud del propio elemento

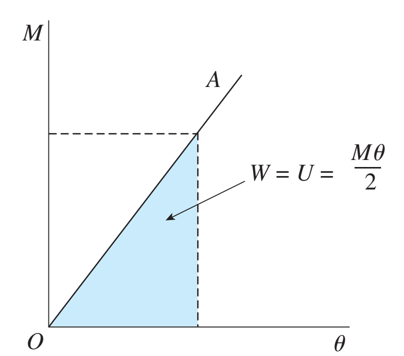


FIGURA 9.31 Diagrama que muestra la relación lineal entre los momentos flexionantes M y el ángulo θ.

es dx y el ángulo $d\theta$ entre sus caras laterales se puede obtener a partir de las ecuaciones (9.4) y (9.5) como sigue:

$$d\theta = \kappa\, dx = \frac{d^2v}{dx^2}dx \tag{a}$$

Por tanto, la energía de deformación dU del elemento está dada por cualquiera de las ecuaciones siguientes (consulte las ecuaciones 9.79a y b):

$$dU = \frac{M^2dx}{2EI} \qquad dU = \frac{EI(d\theta)^2}{2dx} = \frac{EI}{2dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}dx\right)^2 = \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \qquad \text{(b,c)}$$

Al integrar las ecuaciones anteriores para toda la longitud de la viga, podemos expresar la energía de deformación almacenada en una viga en cualquiera de las siguientes formas:

$$U = \int \frac{M^2dx}{2EI} \qquad U = \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \qquad \text{(9.80a,b)}$$

Observe que M es el momento flexionante en la viga y que puede variar como una función de x. Utilizaremos la primera ecuación cuando conozcamos el momento flexionante y la segunda cuando conozcamos la ecuación de la curva de deflexión. (Los ejemplos 9.15 y 9.16 ilustran el uso de estas ecuaciones.)

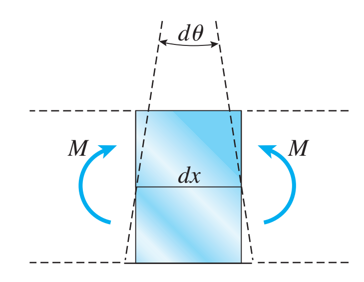


FIGURA 9.32 Vista lateral de un elemento de una viga sometida a momentos flexionantes M.

En la deducción de las ecuaciones (9.80a) y (9.80b), consideramos sólo los efectos de los momentos flexionantes. Si también están presentes fuerzas cortantes, se almacenará energía de deformación adicional en la viga. Sin embargo, la energía de deformación del cortante es relativamente pequeña (en comparación con la energía de deformación por flexión) para vigas en las que las longitudes son mucho mayores que los anchos (digamos, $L/d > 8$). Por tanto, en la mayor parte de las vigas la energía de deformación del cortante se puede ignorar con seguridad.

Deflexiones causadas por una sola carga

Si una viga soporta una sola carga, ya sea una carga concentrada P o bien un par M_0, la deflexión correspondiente δ o el ángulo de rotación θ, respectivamente, se pueden determinar a partir de la energía de deformación de la viga.

En el caso de una viga que soporta una **carga concentrada**, la *deflexión correspondiente* δ es la deflexión del eje de la viga en el punto donde se aplica la carga. La deflexión se debe medir a lo largo de la línea de acción de la carga y es positiva en la dirección de ésta.

En el caso de una viga que soporta un par como una carga, el *ángulo de rotación correspondiente* θ es el ángulo de rotación del eje de la viga en el punto donde se aplica el par.

Como la energía de deformación de una viga es igual al trabajo realizado por la carga y puesto que δ y θ corresponden a P y M_0, respectivamente, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$U = W = \frac{P\delta}{2} \qquad U = W = \frac{M_0\theta}{2} \tag{9.81a,b}$$

La primera ecuación se aplica a una viga cargada *sólo* por una fuerza P y la segunda ecuación se aplica a una viga cargada *sólo* por un par M_0. De las ecuaciones (9.81a) y (9.81b) se deduce que

$$\delta = \frac{2U}{P} \qquad \theta = \frac{2U}{M_0} \tag{9.82a,b}$$

Como se explicó en la sección 2.7, este método para determinar deflexiones y ángulos de rotación está extremadamente limitado en su aplicación debido a que sólo se puede determinar una deflexión (o un ángulo). Además, la única deflexión (o ángulo) que se puede determinar es la correspondiente a la carga (o par). Sin embargo el método en ocasiones es útil y se ilustra más adelante en el ejemplo 9.16.

Ejemplo 9.15

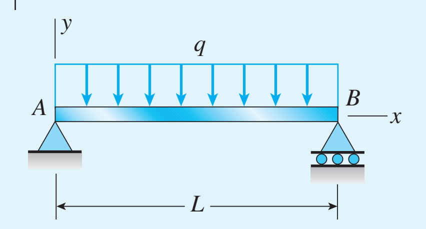


FIGURA 9.33 Ejemplo 9.15. Energía de deformación de una viga.

Una viga simple AB con longitud L soporta una carga uniforme con intensidad q (figura 9.33). (a) Evalúe la energía de deformación de la viga a partir del momento flexionante en la viga. (b) Evalúe la energía de deformación de la viga a partir de la ecuación de la curva de deflexión. (*Nota:* la viga tiene rigidez a la flexión constante EI.)

Solución

(a) *Energía de deformación a partir del momento flexionante*. La reacción de la viga en el apoyo A es $qL/2$ y, por tanto, la expresión para el momento flexionante en la viga es

$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}(Lx - x^2) \tag{d}$$

La energía de deformación de la viga (de la ecuación 9.80a) es

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^L \left[\frac{q}{2}(Lx - x^2)\right]^2 dx = \frac{q^2}{8EI}\int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4)dx \tag{e}$$

de donde obtenemos

$$U = \frac{q^2L^5}{240EI} \tag{9.83}$$

Observe que la carga q aparece elevada a la segunda potencia, lo que es consistente con el hecho de que la energía de deformación siempre es positiva. Además, la ecuación (9.83) muestra que la energía de deformación *no* es una función lineal de las cargas, si bien la propia viga se comporta de manera linealmente elástica.

(b) *Energía de deformación a partir de la curva de deflexión*. La ecuación de la curva de deflexión para una viga simple con una carga uniforme está dada en el caso 1 de la tabla G.2 del apéndice G, como sigue:

$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) \tag{f}$$

Derivando dos veces esta ecuación obtenemos

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(Lx - x^2)$$

Al sustituir la última expresión en la ecuación de la energía de deformación (ecuación 9.80b), obtenemos

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{EI}{2}\int_0^L \left[\frac{q}{2EI}(Lx - x^2)\right]^2 dx$$

$$= \frac{q^2}{8EI}\int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4)\,dx \tag{g}$$

Como la integral final en esta ecuación es la misma que la integral final en la ecuación (e), obtenemos el mismo resultado que antes (ecuación 9.83).

Ejemplo 9.16

Una viga en voladizo *AB* (figura 9.34) está sometida a tres condiciones de carga: (a) una carga concentrada *P* en su extremo libre, (b) un par M_0 en su extremo libre y (c) las dos cargas actúan de manera simultánea.

Para cada condición de carga determine la energía de deformación de la viga. Además, determine la deflexión vertical δ_A en el extremo *A* de la viga debida a la carga *P* que actúa sola (figura 9.34a) y determine el ángulo de rotación θ_A en el extremo *A* debido al momento M_0 que actúa solo (figura 9.34b). (*Nota:* la viga tiene rigidez a la flexión constante *EI*.)

Solución

(a) *Viga con carga concentrada P (figura 9.34a)*. El momento flexionante en la viga a una distancia *x* desde el extremo libre es $M = -Px$. Al sustituir esta expresión para *M* en la ecuación (9.80a), obtenemos la expresión siguiente para la energía de deformación de la viga:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad (9.84)$$

Para obtener la deflexión vertical δ_A debajo de la carga *P*, igualamos el trabajo realizado por la carga con la energía de deformación:

$$W = U \quad \text{o} \quad \frac{P\delta_A}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

de donde

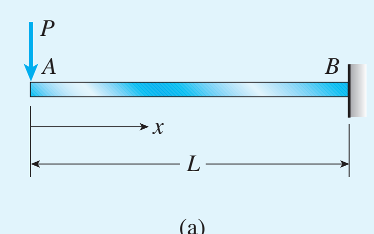
$$\delta_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

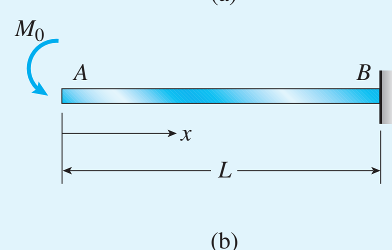
La deflexión δ_A es la única que podemos encontrar mediante este procedimiento, debido a que es la única deflexión que corresponde a la carga *P*.

(b) *Viga con momento M_0 (figura 9.34b)*. En este caso el momento flexionante es constante e igual a $-M_0$. Por tanto, la energía de deformación (de la ecuación 9.80a) es

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-M_0)^2\, dx}{2EI} = \frac{M_0^2L}{2EI} \qquad (9.85)$$

continúa





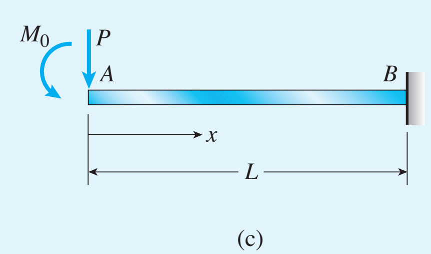


FIGURA 9.34 Ejemplo 9.16. Energía de deformación de una viga.

El trabajo W realizado por el par M_0 al cargar la viga es $M_0\theta_A/2$, donde θ_A es el ángulo de rotación en el extremo A. Por tanto,

$$W = U \quad \text{o} \quad \frac{M_0\theta_A}{2} = \frac{M_0^2 L}{2EI}$$

y

$$\theta_A = \frac{M_0 L}{EI}$$

El ángulo de rotación tiene el mismo sentido que el momento (contrario al de las manecillas del reloj en este ejemplo).

(c) *Viga con las dos cargas en acción simultánea* (*figura 9.34c*). Cuando las dos cargas actúan sobre la viga, el momento flexionante en la viga es

$$M = -Px - M_0$$

Por tanto, la energía de deformación es

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px - M_0)^2 dx$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{PM_0L^2}{2EI} + \frac{M_0^2 L}{2EI} \qquad (9.86)$$

El primer término en este resultado da la energía de deformación debida a la carga P que actúa sola (ecuación 9.84) y el último término proporciona la energía de deformación debida sólo a la acción de M_0 (ecuación 9.85). Sin embargo, cuando las dos cargas actúan de manera simultánea, aparece un término adicional en la expresión para la energía de deformación.

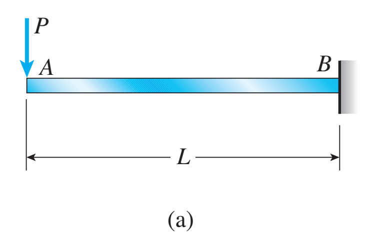
Por tanto, concluimos que la *energía de deformación en una estructura debida a dos o más cargas en acción simultánea no se puede obtener sumando las energías de deformación debidas a las cargas actuando por separado*. La razón es que la energía de deformación es una función cuadrática de las cargas, no una función lineal. Por lo que el *principio de superposición no se aplica a la energía de deformación*.

También observamos que no podemos calcular una deflexión para una viga con dos o más cargas igualando el trabajo realizado por las cargas con la energía de deformación. Por ejemplo, si igualamos el trabajo y la energía para la viga de la figura 9.34c, obtenemos

$$W = U \quad \text{o} \quad \frac{P\delta_{A2}}{2} + \frac{M_0\theta_{A2}}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{PM_0L^2}{2EI} + \frac{M_0^2 L}{2EI} \qquad \text{(h)}$$

en donde δ_{A2} y θ_{A2} representan la deflexión y el ángulo de rotación en el extremo A de la viga con dos cargas en acción simultánea (figura 9.34c). Si bien el trabajo realizado por las dos cargas es en efecto igual a la energía de deformación y la ecuación (h) es correcta, no podemos despejar δ_{A2} ni θ_{A2} debido a que hay dos incógnitas y sólo una ecuación.

*9.9 TEOREMA DE CASTIGLIANO



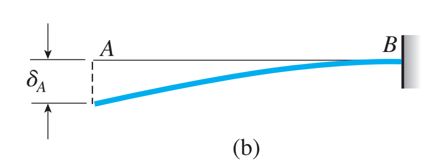


FIGURA 9.35 Viga que soporta una sola carga P.

El **teorema de Castigliano** proporciona un medio para determinar las deflexiones de una estructura a partir de su energía de deformación. Para ilustrar lo que queremos decir con este enunciado, considere una viga en voladizo con una carga concentrada P que actúa en el extremo libre (figura 9.35a). La energía de deformación de esta viga se obtiene con la ecuación (9.84) del ejemplo 9.16:

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \text{(a)}$$

Ahora derivamos esta expresión con respecto a la carga P:

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP}\left(\frac{P^2L^3}{6EI}\right) = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \text{(b)}$$

De inmediato reconocemos este resultado como la deflexión δ_A en el extremo libre A de la viga (consulte la figura 9.35b). Observe en especial que la deflexión δ_A *corresponde* a la propia carga P. (Recuerde que una deflexión correspondiente a una carga concentrada es la deflexión en el punto donde se aplica la carga. Además, la deflexión es en la dirección de la carga.) Por tanto, la ecuación (b) muestra que *la derivada de la energía de deformación con respecto a la carga es igual a la deflexión que corresponde a la carga*. El teorema de Castigliano es un enunciado generalizado de esta observación y ahora lo deduciremos en términos más generales.

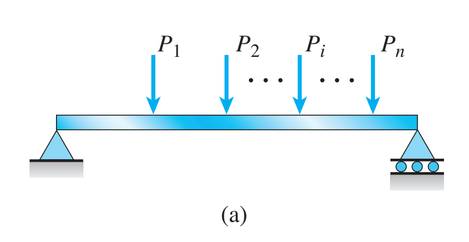
Deducción del teorema de Castigliano

Consideremos una viga sometida a cualquier número de cargas, digamos n cargas $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots P_n$ (figura 9.36a). Las deflexiones de la viga correspondientes a las varias cargas se denotan $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_n$, como se muestra en la figura 9.36b. Igual que en nuestros análisis anteriores de deflexiones y energía de deformación, suponemos que el principio de superposición es aplicable a la viga y a sus cargas.

Ahora determinaremos la energía de deformación de esta viga. Cuando se aplican las cargas a la viga, aumentan de manera gradual su magnitud desde cero hasta sus valores máximos. Al mismo tiempo, cada carga se mueve a través de su desplazamiento correspondiente y realiza trabajo. El trabajo total W realizado por las cargas es igual a la energía de deformación U almacenada en la viga:

$$W = U \qquad \text{(c)}$$

Observe que W (y por tanto U) es una función de las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que actúan sobre la viga.



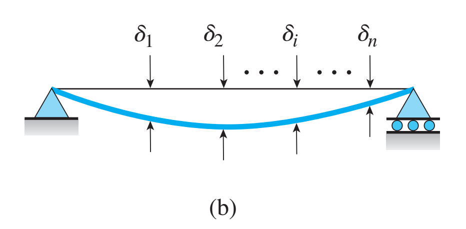


FIGURA 9.36 Viga sometida a n cargas.

A continuación supongamos que una de las cargas, digamos la carga i-ésima, se incrementa ligeramente en una cantidad dP_i en tanto que las otras cargas se mantienen constantes. Este incremento en la carga causará un incremento pequeño dU en la energía de deformación de la viga, que se puede expresar como la razón de cambio de U con respecto a P_i multiplicado por el incremento pequeño P_i. Por tanto, el incremento en la energía de deformación es

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i \tag{d}$$

donde $\partial U/\partial P$ es la razón de cambio de U con respecto a P_i. (Como U es una función de *todas* las cargas, la derivada con respecto a cualquiera de las cargas es una derivada parcial.) La energía de deformación final de la viga es

$$U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i \tag{e}$$

en donde U es la energía de deformación a la que se refiere la ecuación (c).

Dado que el principio de superposición es válido para esta viga, la energía de deformación total es independiente del orden en el cual se aplican las cargas. Es decir, los desplazamientos finales de la viga (y el trabajo realizado por las cargas al alcanzar estos desplazamientos) son los mismos sin importar el orden en que se aplique las cargas. Al obtener la energía de deformación dada por la ecuación (e) primero aplicamos las n cargas P_1, $P_2, \ldots, P_n$ y luego aplicamos la carga dP_i. Sin embargo, podemos invertir el orden y aplicar la carga dP_i primero, seguida de las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. La cantidad final de energía de deformación es la misma en cualquier caso.

Cuando la carga dP_i se aplica primero, produce una energía de deformación igual a la mitad del producto de la carga dP_i y su desplazamiento correspondiente $d\delta_i$. Por tanto, la cantidad de energía de deformación debida a la carga dP_i es

$$\frac{dP_i d\delta_i}{2} \tag{f}$$

Cuando se aplican las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, producen los mismos desplazamientos que antes ($\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$) y realizan la misma cantidad de trabajo que antes (ecuación c). No obstante, durante la aplicación de estas cargas la fuerza dP_i automáticamente se mueve a través del desplazamiento δ_i. Al hacer eso produce un trabajo adicional igual al producto de la fuerza y la distancia a través de la cual se desplaza. (Observe que el trabajo no tiene un factor 1/2 porque la fuerza dP_i actúa con su valor total a través de este desplazamiento.) Por tanto, el trabajo adicional, igual a la energía de deformación adicional, es

$$dP_i \, \delta_i \tag{g}$$

Entonces, la energía de deformación final para la segunda secuencia de carga es

$$\frac{dP_i d\delta_i}{2} + U + dP_i \, \delta_i \tag{h}$$

Al igualar esta expresión para la energía de deformación final con la expresión anterior (ecuación e), que se obtuvo para la primera secuencia de carga, obtenemos

$$\frac{dP_i d\delta_i}{2} + U + dP_i\,\delta_i = U + \frac{\partial U}{\partial P_i}dP_i \qquad \text{(i)}$$

Podemos descartar el primer término debido a que contiene el producto de dos derivadas y es infinitesimalmente pequeño comparado con los otros términos. Entonces obtenemos la siguiente relación:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \qquad (9.87)$$

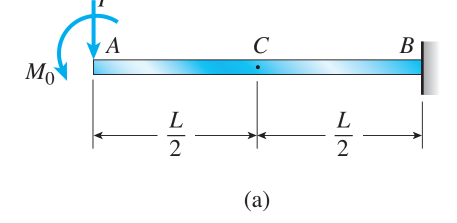
Esta ecuación se conoce como **teorema de Castigliano.**[*]

Si bien dedujimos el teorema de Castigliano al emplear una viga como ilustración, podríamos haber utilizado cualquier otro tipo de estructura (por ejemplo, una armadura) y cualquier otro tipo de cargas (por ejemplo en forma de pares). Los requerimientos importantes son que la estructura sea linealmente elástica y que sea aplicable el principio de superposición. Además, observe que la energía de deformación se debe expresar como una función de las cargas (y no como una función de los desplazamientos), una condición que se implica en el propio teorema, dado que la derivada parcial se obtiene con respecto a la carga. Tomando en cuenta estas limitaciones, podemos enunciar el teorema de Castigliano en términos generales como sigue:

La derivada parcial de la energía de deformación de una estructura con respecto a cualquier carga es igual al desplazamiento correspondiente a esa carga.

La energía de deformación de una estructura linealmente elástica es una función *cuadrática* de las cargas (por ejemplo, consulte la ecuación a) y, por tanto, las derivadas parciales y los desplazamientos (ecuación 9.87) son funciones *lineales* de las cargas (como se esperaba).

Al emplear los términos *carga* y *desplazamiento correspondiente* en conexión con el teorema de Castigliano se entiende que estos términos se emplean en un sentido general. La carga P_i y el desplazamiento correspondiente δ_i puede ser una fuerza y una traslación correspondiente, o un par y una rotación correspondiente, o algún otro conjunto de cantidades correspondientes.



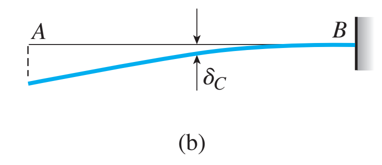


FIGURA 9.38 Aplicación del teorema de Castigliano a una viga.

Aplicación del teorema de Castigliano

Como una aplicación del teorema de Castigliano, consideremos una viga en voladizo AB que soporta una carga concentrada P y un par de momento M_0 que actúa en el extremo libre (figura 9.37a). Queremos determinar la deflexión vertical δ_A y el ángulo de rotación θ_A en el extremo de la viga (figura 9.37b). Observe que δ_A es la deflexión correspondiente a la carga P y θ_A es el ángulo de rotación correspondiente al momento M_0.

[*]El teorema de Castigliano, uno de los teoremas más famosos en el análisis estructural, fue descubierto por Carlos Alberto Pío Castigliano (1847-1884), un ingeniero italiano (referencia 9.2). El teorema citado aquí (ecuación 9.87) en realidad es el segundo de dos teoremas presentados por Castigliano y se conoce apropiadamente como *segundo teorema de Castigliano*. El primer teorema es el inverso del segundo teorema, en el sentido que da las cargas sobre una estructura en términos de las derivadas parciales de la energía de deformación con respecto a los *desplazamientos*.

El primer paso en el análisis es determinar la energía de deformación de la viga. Con ese fin, escribimos como sigue la ecuación para el momento flexionante:

$$M = -Px - M_0 \tag{j}$$

en donde x es la distancia desde el extremo libre (figura 9.37a). La energía de deformación se determina al sustituir esta expresión para M en la ecuación (9.80a):

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px - M_0)^2 dx$$
$$= \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{PM_0 L^2}{2EI} + \frac{M_0^2 L}{2EI} \tag{k}$$

en donde L es la longitud de la viga y EI es la rigidez a la flexión. Observe que la energía de deformación es una función cuadrática de las cargas P y M_0.

Para obtener la deflexión vertical δ_A en el extremo de la viga empleamos el teorema de Castigliano (ecuación 9.87) y obtenemos la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a P:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{M_0 L^2}{2EI} \tag{l}$$

Esta expresión para la deflexión se puede verificar comparándola con las fórmulas de los casos 4 y 6 de la tabla G.1 del apéndice G.

De manera similar, podemos encontrar el ángulo de rotación θ_A en el extremo de la viga obteniendo la derivada parcial con respecto a M_0:

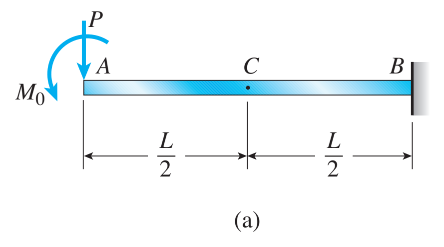
$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{EI} \tag{m}$$

Esta ecuación también se puede verificar al compararla con las fórmulas de los casos 4 y 6 de la tabla G.1.

Uso de una carga ficticia

Los únicos desplazamientos que se pueden determinar con el teorema de Castigliano son los correspondientes a las cargas que actúan sobre la estructura. Si queremos calcular un desplazamiento en un punto sobre una estructura donde no hay carga, entonces se debe aplicar a la estructura una carga ficticia *correspondiente al desplazamiento deseado*. Entonces podemos determinar el desplazamiento evaluando la energía de deformación y obteniendo la derivada parcial con respecto a la carga ficticia. El resultado es el desplazamiento producido por las cargas reales y la carga ficticia en acción simultánea. Igualando a cero la carga ficticia obtenemos el desplazamiento producido sólo por las cargas reales.

Para ilustrar este concepto suponga que queremos encontrar la deflexión vertical δ_C en el punto medio C de la viga en voladizo que se muestra en la figura 9.38a. Como la deflexión δ_C es hacia abajo (figura 9.38b), la carga correspondiente a esa deflexión es una fuerza vertical hacia abajo que actúa en el mismo punto. Por tanto, debemos proporcionar una carga ficticia Q que actúe en el punto C en la dirección hacia abajo (figura 9.39a). Entonces podemos emplear el teorema de Castigliano para determinar la deflexión $(\delta_C)_0$ en el punto medio de esta viga (figura 9.39b). A partir de esa deflexión podemos obtener la deflexión δ_C en la viga de la figura 9.38 al igualar Q a cero.



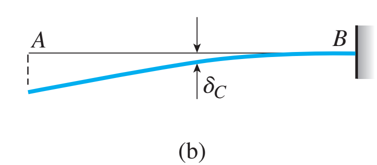


FIGURA 9-38 Viga que soporta las cargas P y M_0.

Iniciamos al determinar los momentos flexionantes en la viga de la figura 9.39a:

$$M = -Px - M_0 \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right) \tag{n}$$

$$M = -Px - M_0 - Q\left(x - \frac{L}{2}\right) \qquad \left(\frac{L}{2} \le x \le L\right) \tag{o}$$

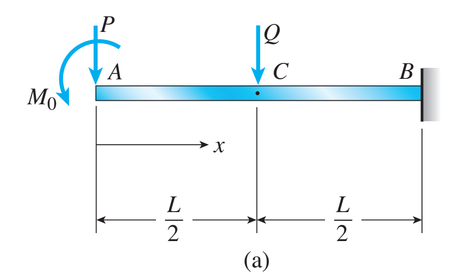


FIGURA 9.39 Viga con una carga ficticia Q.

A continuación determinamos la energía de deformación de la viga aplicando la ecuación (9.80a) a cada mitad de la viga. Para la mitad izquierda de la viga (del punto A al punto C), la energía de deformación es

$$U_{AC} = \int_0^{L/2} \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^{L/2} (-Px - M_0)^2 dx$$

$$= \frac{P^2L^3}{48EI} + \frac{PM_0L^2}{8EI} + \frac{M_0^2 L}{4EI} \tag{p}$$

Para la mitad derecha, la energía de deformación es

$$U_{CB} = \int_{L/2}^{L} \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_{L/2}^{L}\left[-Px - M_0 - Q\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]^2 dx$$

$$= \frac{7P^2L^3}{48EI} + \frac{3PM_0L^2}{8EI} + \frac{5PQL^3}{48EI} + \frac{M_0^2L}{4EI} + \frac{M_0QL^2}{8EI} + \frac{Q^2L^3}{48EI} \quad \text{(q)}$$

que requiere un proceso de integración muy largo. Sumamos las energías de deformación para las dos partes de la viga y obtenemos la energía de deformación para toda la viga (figura 9.39a):

$$U = U_{AC} + U_{CB}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{PM_0L^2}{2EI} + \frac{5PQL^3}{48EI} + \frac{M_0^2L}{2EI} + \frac{M_0QL^2}{8EI} + \frac{Q^2L^3}{48EI} \quad \text{(r)}$$

Ahora podemos obtener la deflexión en el punto medio de la viga que se muestra en la figura 9.39a con el teorema de Castigliano:

$$(\delta_C)_0 = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{M_0L^2}{8EI} + \frac{QL^3}{24EI} \quad \text{(s)}$$

Esta ecuación da la deflexión en el punto C producida por las tres cargas que actúan sobre la viga. Para obtener la deflexión producida sólo por las cargas P y M_0, igualamos la carga Q a cero en la ecuación anterior. El resultado es la deflexión en el punto medio C para la viga con dos cargas (figura 9.38a):

$$\delta_C = \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{M_0L^2}{8EI} \quad \text{(t)}$$

De esta manera hemos obtenido la deflexión en la viga original.

Este método en ocasiones se denomina *método de la carga ficticia*, debido a la introducción de esa carga.

Derivación bajo el signo de integración

Como vimos en el ejemplo anterior, el uso del teorema de Castigliano para determinar deflexiones en vigas puede conducir a integraciones largas, en especial cuando actúan sobre la viga más de dos cargas. La razón es obvia, la determinación de la energía de deformación requiere la integración del *cuadrado* del momento flexionante (ecuación 9.80a). Por ejemplo, si la expresión del momento flexionante tiene tres términos, su cuadrado puede tener hasta seis términos y se deben integrar cada uno de ellos.

Después de realizar las integraciones y determinar la energía de deformación, derivamos la energía de deformación para obtener las deflexiones.

Sin embargo, podemos omitir el paso de determinar la energía de deformación derivando *antes* de integrar. Este procedimiento no elimina las integraciones, pero las simplifica en gran medida.

Para deducir este método partimos de la ecuación para la energía de deformación (ecuación 9.80a) y aplicamos el teorema de Castigliano (ecuación 9.87):

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i}\int \frac{M^2 dx}{2EI} \tag{u}$$

Al seguir las reglas del cálculo, podemos derivar la integral obteniendo la derivada bajo el signo de integración:

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial P_i}\int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int\left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial P_i}\right)dx \tag{9.88}$$

Nos referiremos a esta ecuación como el **teorema de Castigliano modificado.**

Al emplear el teorema modificado integramos el producto del momento flexionante y su derivada. En contraste, al utilizar el teorema de Castigliano estándar (consulte la ecuación u), integramos el cuadrado del momento flexionante. Como la derivada es una expresión más corta que el propio momento, este nuevo procedimiento es mucho más simple. Para demostrar esto, ahora resolveremos los ejemplos anteriores mediante el teorema modificado (ecuación 9.88).

Comencemos con la viga que se muestra en la figura 9.37 y recordemos que deseamos determinar la deflexión y el ángulo de rotación en el extremo libre. El momento flexionante y sus derivadas (consulte la ecuación j) son

$$M = -Px - M_0$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x \qquad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1$$

De la ecuación (9.88) obtenemos la deflexión δ_A y el ángulo de rotación θ_A:

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-Px - M_0)(-x)\,dx = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{M_0 L^2}{2EI} \tag{v}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-Px - M_0)(-1)\,dx = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{EI} \tag{w}$$

Estas ecuaciones concuerdan con los resultados anteriores (ecuaciones l y m). Sin embargo, los cálculos son más breves que los realizados antes, debido a que no tuvimos que integrar el cuadrado del momento flexionante (consulte la ecuación k).

Las ventajas de derivar bajo el signo de integración son aún más aparentes cuando actúan más de dos cargas sobre la estructura, como en el

ejemplo de la figura 9.38. En dicho ejemplo queríamos determinar la deflexión δ_C en el punto medio C de la viga debida a las cargas P y M_0. Para hacerlo sumamos la carga ficticia Q en el punto medio (figura 9.39). Después continuamos con la determinación de la deflexión $(\delta_C)_0$ en el punto medio de la viga cuando actuaban las tres cargas (P, M_0 y Q). Por último, igualamos Q a cero para obtener la deflexión δ_C debida sólo a P y M_0. La solución requirió tiempo porque las integraciones fueron muy largas. Sin embargo, si utilizamos el teorema modificado y derivamos primero, los cálculos son mucho más cortos.

Ante el efecto de las tres cargas (figura 9.39), los momentos flexionantes y sus derivadas son como sigue (consulte las ecuaciones n y o):

$$M = -Px - M_0 \qquad \frac{\partial M}{\partial Q} = 0 \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$M = -Px - M_0 - Q\left(x - \frac{L}{2}\right) \qquad \frac{\partial M}{\partial Q} = -\left(x - \frac{L}{2}\right) \qquad \left(\frac{L}{2} \leq x \leq L\right)$$

Por tanto, la deflexión $(\delta_C)_0$, de la ecuación (9.88), es

$$(\delta_C)_0 = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} (-Px - M_0)(0)dx$$
$$+ \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L} \left[-Px - M_0 - Q\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]\left[-\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]dx$$

Puesto que Q es una carga ficticia y dado que ya realizamos las derivadas parciales, podemos igualar Q a cero antes de integrar y obtener la deflexión δ_C debida a las dos cargas P y M_0 de la siguiente manera:

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L} [-Px - M_0]\left[-\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]dx = \frac{5PL^3}{48EI} + \frac{M_0 L^2}{8EI}$$

que concuerda con el resultado anterior (ecuación t). De nuevo, las integraciones se simplifican en gran medida derivando bajo el signo de integración y empleando el teorema modificado.

La derivada parcial que aparece bajo el signo de integración en la ecuación (9.88) tiene una interpretación física simple. Representa la razón de cambio del momento flexionante M con respecto a la carga P_i, es decir, es igual al momento flexionante M producido por una carga P_i de valor unitario. Esta observación conduce a un método para encontrar deflexiones conocido como *método de la carga unitaria*. El teorema de Castigliano también conduce a un método de análisis estructural conocido como *método de las flexibilidades*. Los dos son de uso común en el análisis estructural y se describen en libros de texto sobre ese tema.

Los ejemplos siguientes proporcionan ilustraciones adicionales del uso del teorema de Castigliano para determinar deflexiones de vigas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el teorema no está limitado a lo anterior, sino que también se aplica a cualquier tipo de estructura linealmente elástica para la cual sea válido el principio de superposición.

Ejemplo 9.17

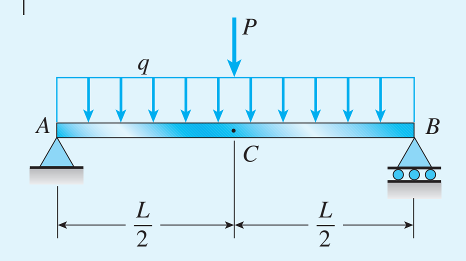


FIGURA 9.40 Ejemplo 9.17. Viga simple con dos cargas.

Una viga simple AB soporta una carga uniforme con intensidad $q = 1.5$ k/ft y una carga concentrada $P = 5$ k (figura 9.40). La carga P actúa en el punto medio C de la viga que tiene longitud $L = 8.0$ ft, módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ psi y momento de inercia $I = 75.0$ in^4.

Determine la deflexión hacia abajo δ_C en el punto medio de la viga mediante los métodos siguientes: (1) obtenga la energía de deformación de la viga y utilice el teorema de Castigliano y (2) utilice la forma modificada del teorema de Castigliano (derivación bajo el signo de integración).

Solución

Método (1). Debido a que la viga y sus cargas son simétricas con respecto al punto medio, la energía de deformación para toda la viga es igual al doble de la energía de deformación para la mitad izquierda de la viga. Por tanto, sólo necesitamos analizar dicha mitad.

La reacción en el apoyo izquierdo A (figuras 9.40 y 9.41) es

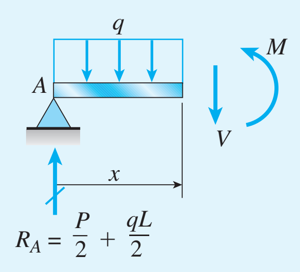


FIGURA 9.41 Diagrama de cuerpo libre para determinar el momento flexionante M en la mitad izquierda de la viga.

$$R_A = \frac{P}{2} + \frac{qL}{2}$$

y, por tanto, el momento flexionante M es

$$M = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{Px}{2} + \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \qquad \text{(x)}$$

en donde x se mide desde el apoyo A.

La energía de deformación de toda la viga (de la ecuación 9.80a) es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = 2\int_0^{L/2} \frac{1}{2EI}\left(\frac{Px}{2} + \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)^2 dx$$

Después de elevar al cuadrado el término entre paréntesis y efectuar una integración muy larga obtenemos

$$U = \frac{P^2L^3}{96EI} + \frac{5PqL^4}{384EI} + \frac{q^2L^5}{240EI}$$

continúa

Como la deflexión en el punto medio C (figura 9.40) corresponde a la carga P, podemos determinar la deflexión empleando el teorema de Castigliano (ecuación 9.87):

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P^2L^3}{96EI} + \frac{5PqL^4}{384EI} + \frac{q^2L^5}{240EI}\right) = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{5qL^4}{384EI} \quad \text{(y)}$$

Método (2). Al utilizar la forma modificada del teorema de Castigliano (ecuación 9.88), evitamos la larga integración para determinar la energía de deformación. El momento flexionante en la mitad izquierda de la viga ya se determinó (consulte la ecuación x) y su derivada parcial con respecto a la carga P es

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

Por tanto, el teorema modificado de Castigliano toma la forma

$$\delta_C = \int\left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)dx$$

$$= 2\int_0^{L/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{Px}{2} + \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{5qL^4}{384EI} \quad \text{(z)}$$

lo que concuerda con el resultado anterior (ecuación y) pero requiere de una integración mucho más simple.

Solución numérica. Ahora que tenemos una expresión para la deflexión en el punto C, podemos sustituir valores numéricos, como sigue:

$$\delta_C = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{5qL^4}{384EI}$$

$$= \frac{(5\text{ k})(96\text{ in})^3}{48(30 \times 10^6\text{ psi})(75.0\text{ in}^4)} + \frac{5(1.5\text{ k/ft})(1/12\text{ ft/in})(96\text{ in})^4}{384(30 \times 10^6\text{ psi})(75.0\text{ in}^4)}$$

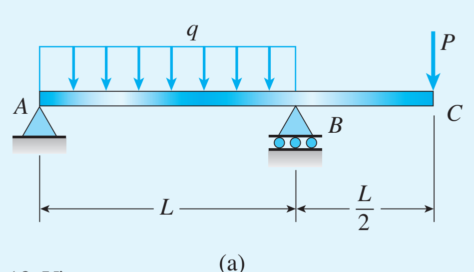
$$= 0.0410\text{ in} + 0.0614\text{ in} = 0.1024\text{ in}$$

Nota: Observe que los valores numéricos no se pueden sustituir hasta *después* de que se obtiene la derivada parcial. Si los valores numéricos se sustituyen de manera prematura, ya sea en la expresión para el momento flexionante o bien para la energía de deformación, podría ser imposible obtener la derivada.

Ejemplo 9.18

Una viga simple con una saliente soporta una carga uniforme con intensidad q sobre el claro AB y una carga concentrada P en el extremo C de la saliente (figura 9.42).

Determine la deflexión δ_C y el ángulo de rotación θ_C en el punto C. (Utilice la forma modificada del teorema de Castigliano.)



A B C δ_C θ_C

(b)

FIGURA 9.42 Ejemplo 9.18. Viga con una saliente.

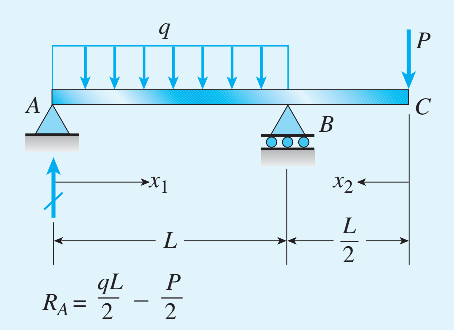


FIGURA 9.43 Reacción en el apoyo A y coordenadas x_1 y x_2 para la viga del ejemplo 9.18.

Solución

Deflexión δ_C en el extremo de la saliente (figura 9.42b). Como la carga P corresponde a esta deflexión, no necesitamos emplear una carga ficticia. En cambio, podemos iniciar de inmediato a encontrar los momentos flexionantes en toda la longitud de la viga. La reacción en el apoyo A es

$$R_A = \frac{qL}{2} - \frac{P}{2}$$

como se muestra en la figura 9.43. Por tanto, el momento flexionante en el claro AB es

$$M_{AB} = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = \frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{q x_1^2}{2} \qquad (0 \le x_1 \le L)$$

donde x_1 se mide desde el apoyo A (figura 9.43). El momento flexionante en la saliente es

$$M_{BC} = -Px_2 \qquad \left(0 \le x_2 \le \frac{L}{2}\right)$$

donde x^2 se mide desde el punto C (figura 9.43).

A continuación determinamos las derivadas parciales con respecto a la carga P:

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = -\frac{x_1}{2} \qquad (0 \le x_1 \le L)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = -x_2 \qquad \left(0 \le x_2 \le \frac{L}{2}\right)$$

Ahora podemos emplear la forma modificada del teorema de Castigliano (ecuación 9.88) para obtener la deflexión en el punto C:

continúa

$$\delta_C = \int \left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^L M_{AB}\left(\frac{\partial M_{AB}}{\partial P}\right) dx + \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} M_{BC}\left(\frac{\partial M_{BC}}{\partial P}\right) dx$$

Al sustituir las expresiones para los momentos flexionantes y las derivadas parciales obtenemos

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2}\right)\left(-\frac{x_1}{2}\right) dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} (-Px_2)(-x_2) dx_2$$

Al realizar las integraciones y combinar los términos obtenemos la deflexión:

$$\delta_C = \frac{PL^3}{8EI} - \frac{qL^4}{48EI} \qquad (9.89)$$

Dado que la carga P actúa hacia abajo, la deflexión δ_C también es positiva hacia abajo. En otras palabras, si la ecuación anterior produce un resultado positivo, la deflexión es hacia abajo. Si el resultado es negativo, la deflexión es hacia arriba.

Al comparar los dos términos en la ecuación (9.89) observamos que la deflexión en el extremo de la saliente es hacia abajo cuando $P > qL/6$ y hacia arriba cuando $P < qL/6$.

Ángulo de rotación θ_C en el extremo de la saliente (figura 9.42b). Como no hay carga sobre la viga original (figura 9.42a) correspondiente a este ángulo de rotación, debemos emplear una carga ficticia. Por tanto, colocamos un par de momento M_C en el punto C (figura 9.44). Observe que el par M_C actúa en el punto sobre la viga donde debe determinarse el ángulo de rotación. Además, tiene la misma dirección, en el sentido de las manecillas del reloj, que el ángulo de rotación (figura 9.42).

Ahora seguimos los mismos pasos que utilizamos para determinar la deflexión en el C. Primero, observamos que la reacción en el apoyo A (figura 9.44) es

$$R_A = \frac{qL}{2} - \frac{P}{2} - \frac{M_C}{L}$$

En consecuencia, el momento flexionante en el claro AB es

$$M_{AB} = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2} = \frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{M_C x_1}{L} - \frac{qx_1^2}{2} \qquad (0 \le x_1 \le L)$$

Además, el momento flexionante en la saliente es

$$M_{BC} = -Px_2 - M_C \qquad \left(0 \le x_2 \le \frac{L}{2}\right)$$

Las derivadas parciales se obtienen con respecto al momento M_C, que es la carga correspondiente al ángulo de rotación. Por tanto,

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial M_C} = -\frac{x_1}{L} \qquad \left(0 \le x_1 \le L\right)$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial M_C} = -1 \qquad \left(0 \le x_2 \le \frac{L}{2}\right)$$

Ahora utilizamos la forma modificada del teorema de Castigliano (ecuación 9.88) para obtener el ángulo de rotación en el punto C:

$$\theta_C = \int \left(\frac{M}{EI}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial M_C}\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^L M_{AB}\left(\frac{\partial M_{AB}}{\partial M_C}\right)dx + \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} M_{BC}\left(\frac{\partial M_{BC}}{\partial M_C}\right)dx$$

Al sustituir las expresiones para los momentos flexionantes y las derivadas parciales obtenemos

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{M_C x_1}{L} - \frac{qx_1^2}{2}\right)\left(-\frac{x_1}{L}\right)dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} (-Px_2 - M_C)(-1)dx_2$$

Puesto que M_C es una carga ficticia y como ya obtuvimos las derivadas parciales, podemos igualar M_C a cero en esta etapa de los cálculos y simplificamos las integraciones:

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2}\right)\left(-\frac{x_1}{L}\right)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} (-Px_2)(-1)dx_2$$

Después de efectuar las integraciones y combinar términos obtenemos

$$\theta_C = \frac{7PL^2}{24EI} - \frac{qL^3}{24EI} \qquad (9.90)$$

Si esta ecuación produce un resultado positivo, el ángulo de rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. Si el resultado es negativo, el ángulo es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Al comparar los dos términos en la ecuación (9.90) observamos que el ángulo de rotación es en el sentido de las manecillas del reloj cuando $P > qL/7$ y en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando $P < qL/7$.

Si se dispone de datos numéricos, ahora es una cuestión de rutina sustituirlos en las ecuaciones (9.89) y (9.90) y calcular la deflexión y el ángulo de rotación en el extremo de la saliente.

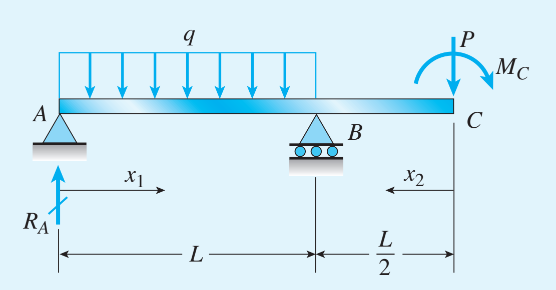


FIGURA 9.44 Momento ficticio M_C que actúa sobre la viga del ejemplo 9.18.

*9.10 DEFLEXIONES PRODUCIDAS POR IMPACTO

En esta sección analizaremos el impacto de un objeto que cae sobre una viga (figura 9.45a). Determinaremos la deflexión dinámica de la viga igualando la energía potencial pérdida por la masa en caída con la energía de deformación adquirida por la viga. Este método aproximado se describe con detalle en la sección 2.8 para una masa que golpea una barra cargada axialmente; en consecuencia, la sección 2.8 se debe comprender por completo antes de continuar.

La mayoría de las suposiciones descritas en la sección 2.8 se aplican a vigas así como a barras cargadas axialmente. Algunas de estas suposiciones son: (1) el peso que cae se pega a la viga y se mueve con ella, (2) no ocurren pérdidas de energía, (3) la viga se comporta de manera linealmente elástica, (4) la forma flexionada de la viga es la misma ante una carga dinámica que ante una carga estática y (5) la energía potencial de la viga debida a su cambio de posición es relativamente pequeña y se puede despreciar. En general estas suposiciones son razonables si la masa del objeto que cae es muy grande comparada con la masa de la viga. De lo contrario, este análisis aproximado no es válido y se requiere un análisis más avanzado.

Como ejemplo, considere la viga simple *AB* que se muestra en la figura 9.45. La viga es golpeada en su punto medio por un cuerpo en caída con masa *M* y peso *W*. Con base en las idealizaciones anteriores, podemos suponer que toda la energía potencial perdida por el cuerpo durante su caída se transforma en energía de deformación elástica que se almacena en la viga. Como la distancia que cae el cuerpo es $h + \delta_{máx}$, donde *h* es la altura inicial arriba de la viga (figura 9.45a) y $\delta_{máx}$ es la deflexión dinámica máxima de la viga (figura 9.45b), la energía potencial pérdida es

$$\text{Energía potencial} = W(h + \delta_{máx}) \qquad \text{(a)}$$

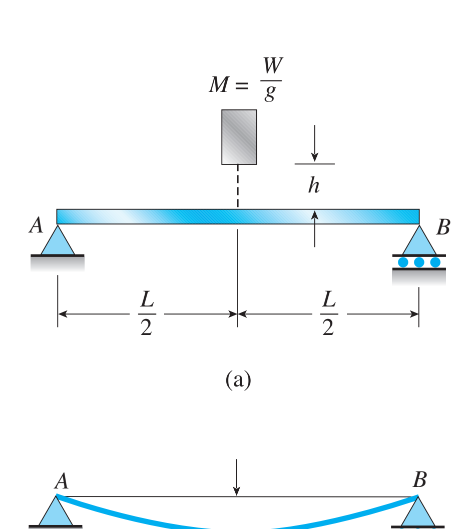


FIGURA 9.45 Deflexión de una viga generada por la caída de un cuerpo.

La energía de deformación adquirida por la viga se puede determinar a partir de la curva de deflexión mediante la ecuación (9.80b), que se repite a continuación:

$$U = \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \tag{b}$$

La curva de deflexión para una viga simple sometida a una carga concentrada que actúa en el centro del claro (consulte el caso 4 de la tabla G.2 del apéndice G) es

$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right) \tag{c}$$

Además, la deflexión máxima de la viga es

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{48EI} \tag{d}$$

Al eliminar la carga P entre las ecuaciones (c) y (d), obtenemos la ecuación de la curva de deflexión en términos de la deflexión máxima:

$$v = -\frac{\delta_{\text{máx}}x}{L^3}(3L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right) \tag{e}$$

Derivamos dos veces y tenemos

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{24\delta_{\text{máx}}x}{L^3} \tag{f}$$

Por último, sustituimos la segunda derivada en la ecuación (b) y obtenemos la siguiente expresión para la energía de deformación de la viga en términos de la deflexión máxima:

$$U = 2\int_0^{L/2} \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = EI\int_0^{L/2}\left(\frac{24\delta_{\text{máx}}x}{L^3}\right)^2 dx = \frac{24EI\delta^2_{\text{máx}}}{L^3} \tag{g}$$

Al igualar la energía potencial pérdida por la masa que cae (ecuación a) con la energía de deformación adquirida por la viga (ecuación g), obtenemos

$$W(h + \delta_{\text{máx}}) = \frac{24EI\delta^2_{\text{máx}}}{L^3} \tag{9.91}$$

Esta ecuación es cuadrática en $\delta_{\text{máx}}$ y se puede despejar su raíz positiva:

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{WL^3}{48EI} + \left[\left(\frac{WL^3}{48EI}\right)^2 + 2h\left(\frac{WL^3}{48EI}\right)\right]^{1/2} \tag{9.92}$$

Observamos que la deflexión dinámica máxima aumenta si se incrementa el peso del objeto que cae o bien la altura de caída, y disminuye si se aumenta la rigidez EI/L^3 de la viga.

Para simplificar la ecuación anterior, denotaremos la *deflexión estática* de la viga debida al peso W con δ_{est}:

$$\delta_{\text{est}} = \frac{WL^3}{48EI} \tag{9.93}$$

Entonces la ecuación (9.92) para la deflexión dinámica máxima se convierte en

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_{\text{est}} + (\delta^2_{\text{est}} + 2h\delta_{\text{est}})^{1/2} \tag{9.94}$$

Esta ecuación muestra que la deflexión dinámica siempre es mayor que la deflexión estática.

Si la altura h es igual a cero, lo que significa que la carga se aplica de manera repentina pero sin caída libre, la deflexión dinámica es el doble de la deflexión estática. Si h es muy grande comparada con la deflexión, entonces el término que contiene h en la ecuación (9.44) predomina y la ecuación se puede simplificar a

$$\delta_{\text{máx}} = \sqrt{2h\delta_{\text{st}}} \tag{9.95}$$

Estas observaciones son análogas a las analizadas antes en la sección 2.8 para el impacto en una barra en tensión o compresión.

La deflexión $\delta_{\text{máx}}$ calculada con la ecuación (9.44) en general representa un límite superior, debido a que supusimos que no había pérdidas de energía durante el impacto. Varios otros factores también tienden a reducir la deflexión, incluidos la deformación localizada de las superficies de contacto, la tendencia de la masa en caída a rebotar hacia arriba y los efectos de inercia de la masa de la viga. Por tanto, observamos que el fenómeno de impacto es muy complejo y si se requiere un análisis más preciso se deben consultar textos y artículos dedicados en específico a ese tema.

*9.11 EFECTOS DE LA TEMPERATURA

En las secciones anteriores de este capítulo consideramos las deflexiones de vigas debidas a cargas laterales. En esta sección analizaremos las deflexiones causadas por **cambios no uniformes de temperatura.** Como punto preliminar recuerde que los efectos de cambios de temperatura *uniformes* ya se describieron en la sección 2.5, donde se demostró que un aumento uniforme de temperatura causa que una barra o viga sin restricción aumente su longitud en la cantidad

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{9.96}$$

En esta ecuación, α es el coeficiente de dilatación térmica, ΔT es el incremento uniforme en temperatura y L es la longitud de la barra (consulte la figura 2.20 y la ecuación 2.16 en el capítulo 2).

Si una viga está apoyada de tal manera que su dilatación longitudinal ocurre libremente, como es el caso para todas las vigas estáticamente determinadas consideradas en este capítulo, entonces un cambio uniforme de temperatura no producirá ningún esfuerzo en la viga. Además, no habrá deflexiones laterales en la viga, debido a que ésta no tiende a flexionarse.

El comportamiento de una viga es muy diferente si la temperatura no es constante a lo largo de su altura. Por ejemplo, suponga que una viga simple, inicialmente recta y a una temperatura uniforme T_0, tiene un cambio de temperatura a T_1 en su superficie superior y T_2 en su superficie inferior,

como se representa en la figura 9.46a. Si suponemos que la variación de temperatura es lineal entre la parte superior y la inferior de la viga, entonces la *temperatura promedio* de la viga es

$$T_{\text{prom}} = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{9.97}$$

y ocurre a la mitad de la altura. Cualquier diferencia entre esta temperatura promedio y la temperatura inicial T_0 resulta en un cambio en la longitud de la viga, dada por la ecuación (9.96), como sigue:

$$\delta_T = \alpha(T_{\text{prom}} - T_0)L = \alpha\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0\right)L \tag{9.98}$$

Además, el diferencial de temperatura $T_2 - T_1$ entre la parte inferior y la superior de la viga produce una *curvatura* del eje de la viga, con las deflexiones laterales acompañantes (figura 9.46b).

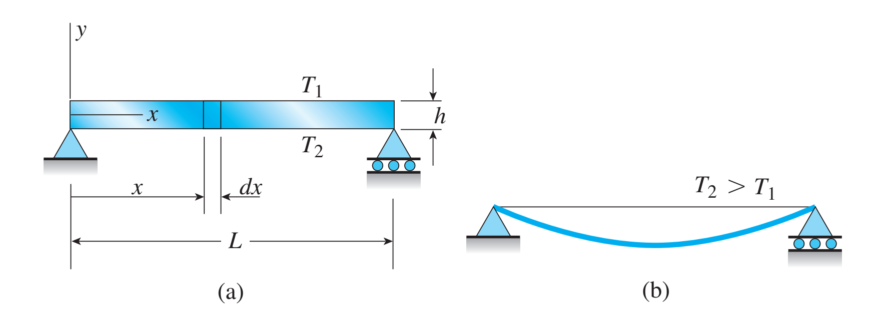
Para investigar las deflexiones debidas a un diferencial de temperatura, considere un elemento con longitud dx cortado de la viga (figuras 9.46a y c). Los cambios en la longitud del elemento en la parte inferior y superior $\alpha(T_2 - T_1)dx$ y $\alpha(T_1 - T_0)dx$, respectivamente. Si T_2 es mayor que T_1 los lados del elemento girarán uno con respecto al otro un ángulo $d\theta$, como se muestra en la figura 9.46c. El ángulo $d\theta$ está relacionado con los cambios en dimensionales mediante la siguiente ecuación, obtenida a partir de la geometría de la figura:

$$h\,d\theta = \alpha(T_2 - T_0)dx - \alpha(T_1 - T_0)dx$$

de donde obtenemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \tag{9.99}$$

en donde h es la altura de la viga.



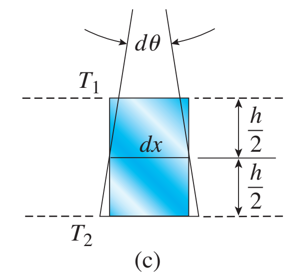


FIGURA 9.46 Efectos de la temperatura en una viga.

Ya hemos visto que la cantidad $d\theta/dx$ representa la curvatura de la curva de deflexión de la viga (consulte la figura 9.4). Como la curvatura es igual a d^2v/dx^2 (ecuación 9.5), podemos escribir la **ecuación diferencial de la curva de deflexión** siguiente:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \tag{9.100}$$

Observe que cuando T_2 es mayor que T_1, la curvatura es positiva y la viga se flexiona cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura 9.46b. La cantidad $\alpha(T_2 - T_1)/h$ en la ecuación (9.100) es la contraparte de la cantidad M/EI, que aparece en la ecuación diferencial básica (ecuación 9.7).

Podemos resolver la ecuación (9.100) mediante las mismas técnicas de integración descritas antes para los efectos de los momentos flexionantes (consulte la sección 9.3). Podemos integrar la ecuación diferencial para obtener dv/dx y v, y podemos utilizar condiciones de frontera u otras para evaluar las constantes de integración. De esta manera podemos obtener las ecuaciones para las pendientes y deflexiones de la viga, como se ejemplifica en los problemas 9.11.1 a 9.11.4 al final de este capítulo.

Si la viga es capaz de cambiar en longitud y flexionarse libremente, no habrá esfuerzos asociados con los cambios de temperatura descritos en esta sección. Sin embargo, si la viga se restringe contra la dilatación longitudinal o la deflexión lateral, o si los cambios de temperatura no varían linealmente desde la parte superior hasta la inferior de la viga, se desarrollarán esfuerzos internos de temperatura. La determinación de estos esfuerzos requiere emplear métodos de análisis más avanzados.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo investigamos el comportamiento lineal elástico del desplazamiento pequeño de vigas de tipos diferentes, con condiciones de apoyo distintas, sometidas a una variedad de cargas incluyendo los efectos de impacto y de temperatura. Estudiamos métodos basados en la integración de la ecuación diferencial de segundo, tercero y cuarto orden de la curva de deflexión. Calculamos desplazamientos (traslaciones y rotaciones) en puntos específicos a lo largo de la viga y también determinamos la ecuación que describe la forma flexionada de toda la viga. Al emplear soluciones para un número de casos estándar (tabulados en el apéndice G), utilizamos el poderoso principio de superposición para resolver vigas y cargas más complicadas combinando las soluciones estándar más simples. También consideramos un método para calcular desplazamientos de vigas con base en el área del diagrama de momento. Por último, estudiamos un método basado en la energía para calcular los desplazamientos de la viga. Los conceptos más importantes presentados en este capítulo se pueden resumir como sigue:

1. Al combinar las expresiones para la curvatura lineal ($\kappa = d^2v/dx^2$) y la relación momento-curvatura ($\kappa = M/EI$), obtuvimos la **ecuación diferencial ordinaria de la curva de deflexión** para una viga, que es válida sólo para comportamiento lineal elástico.

2. La ecuación diferencial de la curva de deflexión se puede derivar una vez para obtener una ecuación de tercer orden que relaciona la fuerza cortante V y la primera derivada del momento, dM/dx, o dos veces para obtener una ecuación de cuarto orden que relaciona la intensidad de la carga distribuida q y la primera derivada del cortante, dV/dx, la elección de las ecuaciones de segundo, tercer o cuarto orden depende de cuál sea más eficiente para el caso particular del apoyo de una viga y de la carga aplicada.

3. Debemos escribir expresiones para el momento (M), el cortante (V) o la intensidad de carga (q) para cada región separada de la viga (por ejemplo, cuando q, V, M o EI varían) y luego aplicamos **condiciones de frontera, continuidad** o **simetría**, según sea apropiado, para determinar las constantes de integración desconocidas; la ecuación de la deflexión de la viga, $v(x)$, se puede definir en un valor particular de x para encontrar el desplazamiento traslacional en ese punto; la evaluación de dv/dx en ese mismo punto proporciona la pendiente de la ecuación de deflexión.

4. El **método de superposición** se puede emplear para resolver desplazamientos y rotaciones para vigas y cargas más complicadas; la viga real primero se debe descomponer en la suma de un número de casos más simples cuyas soluciones ya se conocen (consulte el apéndice G); la superposición sólo es aplicable a vigas que experimentan desplazamientos pequeños y se comportan de una manera lineal elástica.

5. El **método de área-momento** es un enfoque alternativo para determinar desplazamientos de vigas; se basa en dos teoremas que están relacionados con el área del diagrama del momento flexionante.

6. Igualando la energía de deformación de flexión (U) con el trabajo (W) de una carga o momentos concentrados y luego obteniendo una derivada parcial con respecto a una carga particular (P, M), proporciona otro método para calcular deflexiones y rotaciones de vigas; este método se conoce como ***teorema de Castigliano***; sin embargo, tiene aplicaciones limitadas debido a que las cargas no se deben aplicar en ubicaciones donde las deflexiones y las rotaciones son de interés; en este caso se debe aplicar una carga ficticia en el punto donde se van a calcular los desplazamientos.

continúa

7. Al igualar la energía potencial de una masa en caída con la energía adquirida por la viga se pueden aproximar las **deflexiones debidas al impacto.**

8. Por último, si una viga experimenta un cambio de temperatura que no es constante en toda su altura (es decir, un **diferencial de temperatura**, $T_2 - T_1$, a lo largo de la altura h), produce una curvatura del eje de la viga, $\kappa = d\theta/dx = d^2v/dx^2 = \alpha(T_2 - T_1)/h$; esta ecuación se puede integrar para obtener la ecuación de la curva de deflexión empleando integraciones sucesivas como se describió antes.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 9

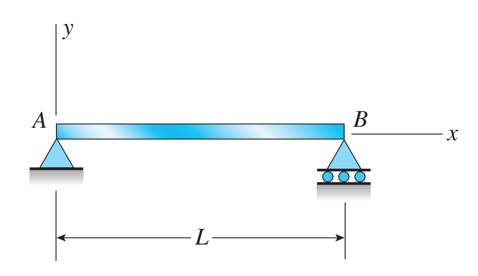
Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión

Las vigas descritas en los problemas para la sección 9.2 tienen rigidez a la flexión constante EI.

9.2.1 La curva de deflexión para una viga simple AB (consulte la figura) está dada por la siguiente ecuación:

$$v = -\frac{q_0 x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

Describa la carga que actúa sobre la viga.



PROBS. 9.2.1 Y 9.2.2

9.2.2 La curva de deflexión para una viga simple AB (consulte la figura) está dada por la siguiente ecuación:

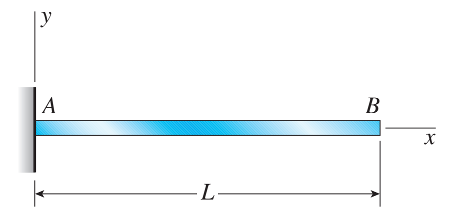
$$v = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

(a) Describa la carga que actúa sobre la viga.
(b) Determine las reacciones R_A y R_B en los apoyos.
(c) Determine el momento flexionante máximo $M_{máx}$.

9.2.3 La curva de deflexión para una viga en voladizo AB (consulte la figura) está dada por la siguiente ecuación:

$$v = -\frac{q_0 x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

Describa la carga que actúa sobre la viga.



PROBS. 9.2.3 y 9.2.4

9.2.4 La curva de deflexión para una viga en voladizo AB (consulte la figura) está dada por la siguiente ecuación:

$$v = -\frac{q_0 x^2}{360L^2EI}(45L^4 - 40L^3x + 15L^2x^2 - x^4)$$

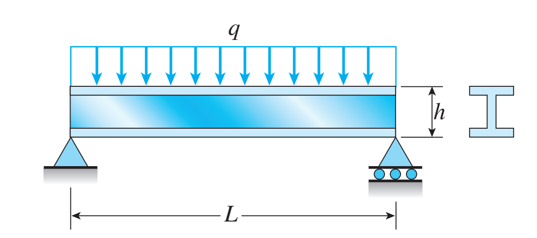
(a) Describa la carga que actúa sobre la viga.
(b) Determine las reacciones R_A y M_A en el apoyo.

Fórmulas de deflexión

Los problemas 9.3.1 a 9.3.7 requieren el cálculo de las deflexiones empleando las fórmulas deducidas en los ejemplos 9.1, 9.2 y 9.3. Todas las vigas tiene rigidez a la flexión constante EI.

9.3.1 Una viga de patín ancho (W 12 × 35) soporta una carga uniforme sobre un claro simple con longitud L = 14 ft (consulte la figura).

Calcule la deflexión máxima $\delta_{máx}$ en el punto medio y los ángulos de rotación θ en los apoyos si q = 1.8 k/ft y E = 30 × 10^6 psi. Utilice las fórmulas del ejemplo 9.1.



PROBS. 9.3.1, 9.3.2 y 9.3.3

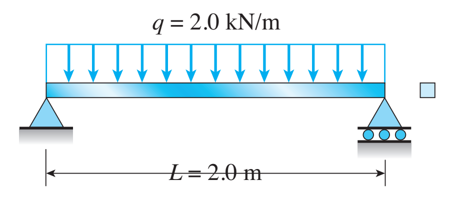
9.3.2 Una viga de acero de patín ancho cargada uniformemente con apoyos simples (consulte la figura) tiene una deflexión hacia abajo de 10 mm en el punto medio y ángulos de rotación iguales a 0.01 radianes en los extremos.

Calcule la altura h de la viga si el esfuerzo de flexión máximo es 90 MPa y el módulo de elasticidad es 200 GPa. (*Sugerencia:* utilice las fórmulas del ejemplo 9.1.)

9.3.3 ¿Cuál es la longitud del claro L de una viga simple de patín ancho cargada uniformemente (consulte la figura) si el esfuerzo de flexión máximo es 12,000 psi, la deflexión máxima es 0.1 in, la altura de la viga es 12 in y el módulo de elasticidad es 30 × 10^6 psi? (Utilice las fórmulas del ejemplo 9.1.)

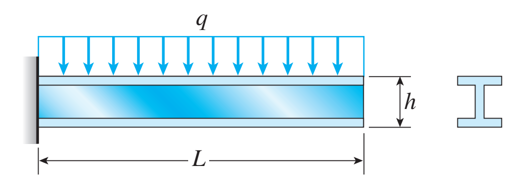
9.3.4 Calcule la deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$ de una viga simple cargada uniformemente (consulte la figura) si la longitud del claro es $L = 2.0$ m, la intensidad de la carga uniforme es $q = 2.0$ kN/m y el esfuerzo de flexión máximo es $\sigma = 60$ MPa.

La sección transversal de la viga es cuadrada y el material es aluminio con módulo de elasticidad $E = 70$ GPa. (Utilice las fórmulas del ejemplo 9.1.)



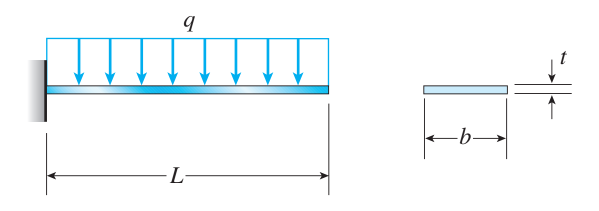
PROB. 9.3.4

9.3.5 Una viga en voladizo con una carga uniforme (consulte la figura) tiene una altura h igual a 1/8 de la longitud L. La viga es una sección de acero de patín ancho con $E = 28 \times 10^6$ psi y un esfuerzo de flexión permisible de 17,500 psi tanto en tensión como en compresión. Calcule la razón δ/L de la deflexión en el extremo libre con respecto a la longitud, suponiendo que la viga soporta la carga máxima permisible. (Utilice las fórmulas del ejemplo 9.2.)



PROB. 9.3.5

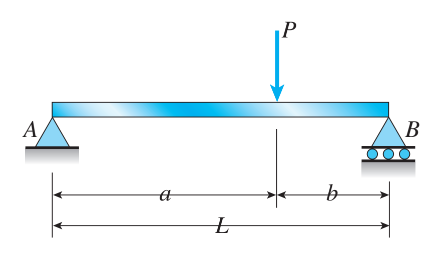
9.3.6 Una microviga de una aleación de oro sujeta a una oblea de silicio se comporta como una viga en voladizo sometida a una carga uniforme (consulte la figura). La viga tiene longitud $L = 27.5$ μm y sección transversal rectangular con ancho $b = 4.0$ μm y espesor $t = 0.88$ μm. La carga total sobre la viga es 17.2 μN. Si la deflexión en el extremo de la viga es 2.46 μm, ¿cuál es el módulo de elasticidad E_g de la aleación de oro? (Utilice las fórmulas del ejemplo 9.2.)



PROB. 9.3.6

9.3.7 Obtenga una fórmula para la razón $\delta_C/\delta_{\text{máx}}$ de la deflexión en el punto medio con respecto a la deflexión máxima para una viga simple que soporta una carga concentrada P (consulte la figura).

A partir de la fórmula, trace una gráfica de $\delta_C/\delta_{\text{máx}}$ contra la razón a/L que define la posición de la carga ($0.5 < a/L < 1$). ¿Qué conclusión saca de la gráfica? (Utilice las fórmulas del ejemplo 9.3.)

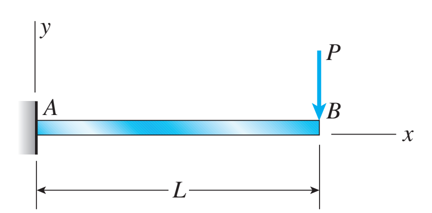


PROB. 9.3.7

Deflexiones por integración de la ecuación del momento flexionante

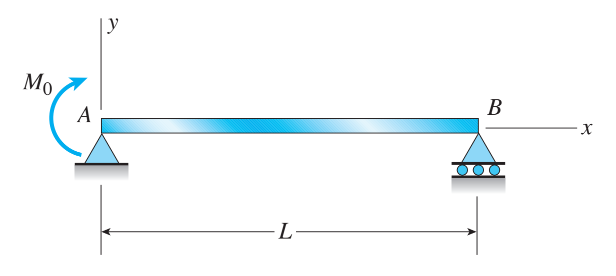
Los problemas 9.3.8 a 9.3.16 se deben resolver integrando la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (la ecuación del momento flexionante). El origen de las coordenadas está en el extremo izquierdo de cada viga y todas las vigas tienen rigidez a la flexión constante EI.)

9.3.8 Deduzca la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo AB que soporta una carga P en el extremo libre (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo libre. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



PROB. 9.3.8

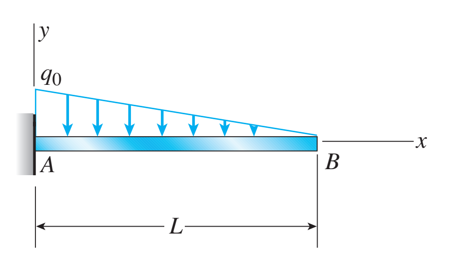
9.3.9 Deduzca la ecuación de la curva de deflexión para una viga simple AB cargada por un par M_0 en el apoyo izquierdo (consulte la figura). Además, determine la deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



PROB. 9.3.9

9.3.10 Una viga en voladizo *AB* que soporta una carga con distribución triangular de intensidad máxima q_0 se muestra en la figura.

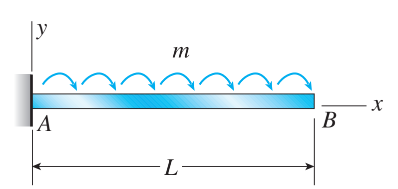
Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y luego obtenga fórmulas para la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo libre. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



PROB. 9.3.10

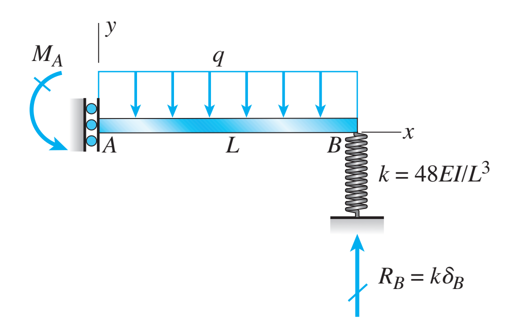
9.3.11 Una viga en voladizo *AB* está sometida a un momento uniformemente distribuido (momento flexionante, no par de torsión) con intensidad *m* por distancia unitaria a lo largo del eje de la viga (consulte la figura).

Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y luego obtenga fórmulas para la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo libre. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



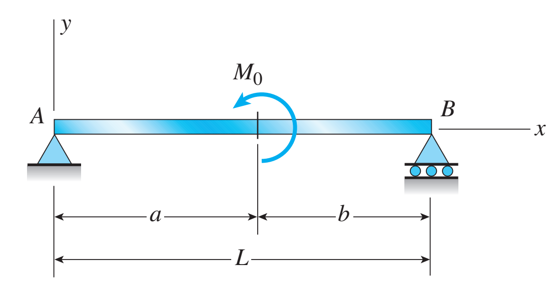
PROB. 9.3.11

9.3.12 La viga que se muestra en la figura tiene un apoyo guiado en *A* y un apoyo de resorte en *B*. El apoyo guiado permite movimiento vertical pero no rotación. Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y determine la deflexión δ_B en el extremo *B* debida a la carga uniforme con intensidad *q*. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



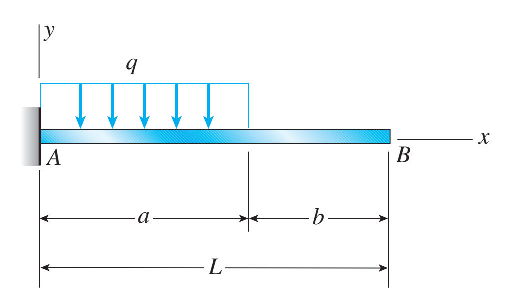
PROB. 9.3.12

9.3.13 Deduzca las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple *AB* cargada por un par M_0 que actúa a una distancia *a* desde el apoyo izquierdo (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_0 en el punto de aplicación de la carga. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



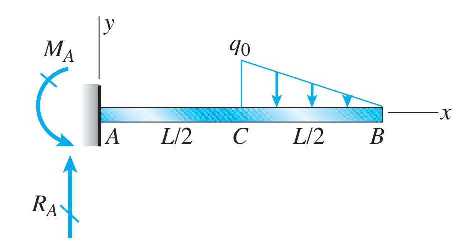
PROB. 9.3.13

9.3.14 Deduzca las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga en voladizo *AB* que soporta una carga uniforme de intensidad *q* sobre parte del claro (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_B en el extremo de la viga. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



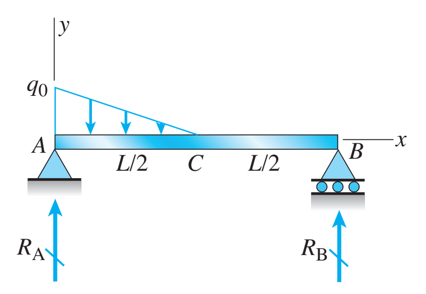
PROB. 9.3.14

9.3.15 Deduzca las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga en voladizo *AB* que soporta una carga distribuida con intensidad pico q_0 que actúa sobre la mitad de la longitud (consulte la figura). Además, obtenga fórmulas para las deflexiones δ_B y δ_C en los puntos *B* y *C*, respectivamente. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



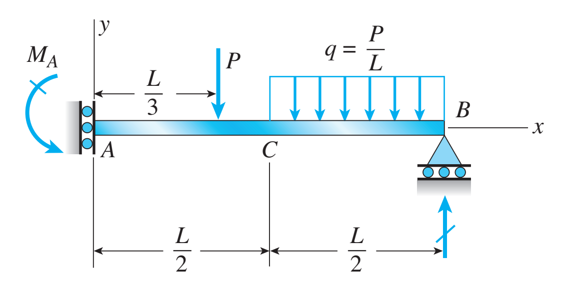
PROB. 9.3.15

9.3.16 Deduzca las ecuaciones de la curva de deflexión para una viga simple *AB* con una carga distribuida con intensidad pico q_0 que actúa sobre la mitad izquierda del claro (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_C en el punto medio de la viga. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)



PROB. 9.3.16

9.3.17 La viga que se muestra en la figura tiene un apoyo guiado en *A* y un apoyo de rodillo en *B*. El apoyo guiado permite movimiento vertical pero no rotación. Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y determine la deflexión δ_A en el extremo *A* y también δ_C en el punto *C* debidas a la carga uniforme de intensidad $q = P/L$ aplicada sobre el segmento *CB* y a la carga *P* en $x = L/3$. (*Nota:* utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión.)

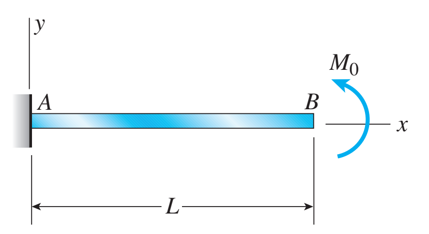


PROB. 9.3.17

Deflexiones por integración de las ecuaciones de la fuerza cortante y de la carga

Las vigas descritas en los problemas para la sección 9.4 tienen rigidez a la flexión constante EI. Además, el origen de las coordenadas está en el extremo izquierdo de cada viga.

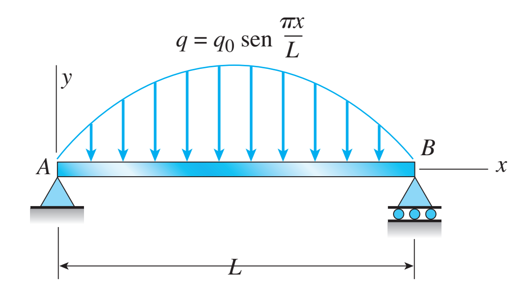
9.4.1 Deduzca la ecuación de la curva de deflexión para una viga en voladizo *AB* cuando un par M_0 actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el extremo libre (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_B y la pendiente θ_B en el extremo libre. Utilice la ecuación diferencial de tercer orden de la curva de deflexión (la ecuación de la fuerza cortante).



PROB. 9.4.1

9.4.2 Una viga simple *AB* está sometida a una carga distribuida de intensidad $q = q_0 \text{ sen } \pi x/L$, donde q_0 es la intensidad máxima de la carga (consulte la figura).

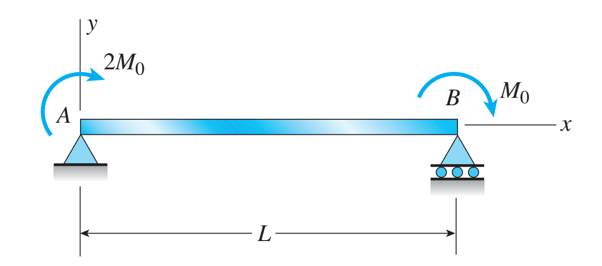
Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y luego determine la deflexión $\delta_{máx}$ en el punto medio de la viga. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).



PROB. 9.4.2

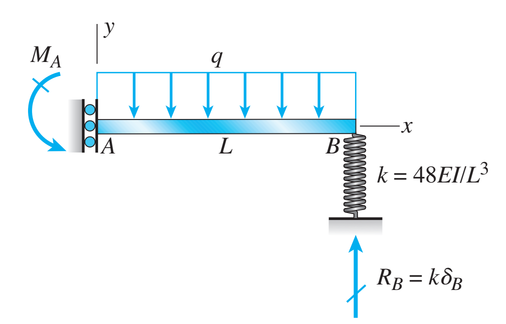
9.4.3 La viga simple *AB* que se muestra en la figura tiene momentos $2M_0$ y M_0 que actúan en los extremos.

Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y luego determine la deflexión máxima $\delta_{máx}$. Utilice la ecuación diferencial de tercer orden de la curva de deflexión (la ecuación de la fuerza cortante).



PROB. 9.4.3

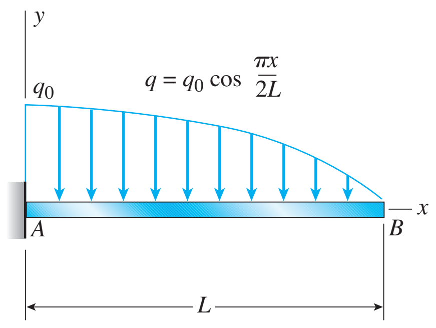
9.4.4 Una viga con una carga uniforme tiene un apoyo guiado en un extremo y un apoyo de resorte en el otro. El resorte tiene rigidez $k = 48EI/L^3$. Deduzca la ecuación de la curva de deflexión a partir de la ecuación diferencial de tercer orden (la ecuación de la fuerza cortante). Además, determine el ángulo de rotación θ_B en el apoyo *B*.



PROB. 9.4.4

9.4.5 La carga distribuida que actúa sobre una viga en voladizo AB tiene una intensidad q dada por $q_0 \cos \pi x/2L$, donde q_0 es la intensidad máxima de la carga (consulte la figura).

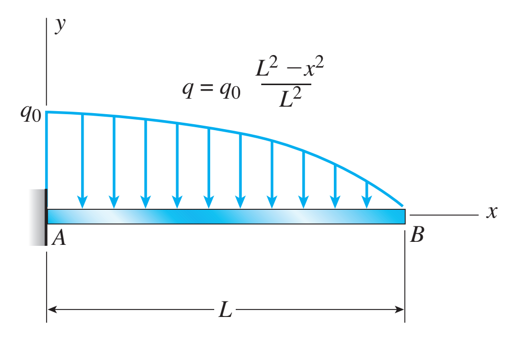
Deduzca la ecuación de la curva de deflexión y luego determine la deflexión δ_B en el extremo libre. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).



PROB. 9.4.5

9.4.6 Una viga en voladizo AB está sometida a una carga parabólicamente variable de intensidad $q = q_0(L^2 - x^2)/L^2$, donde q_0 es la intensidad máxima de la carga (consulte la figura).

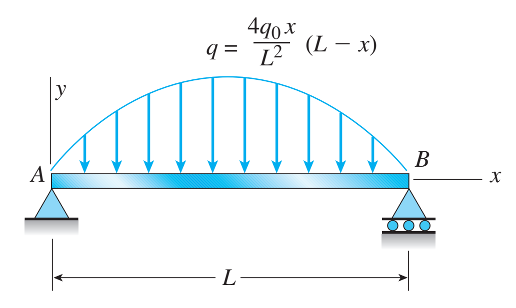
Obtenga la ecuación de la curva de deflexión y luego determine la deflexión δ_B y el ángulo de rotación θ_B en el extremo libre. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).



PROB. 9.4.6

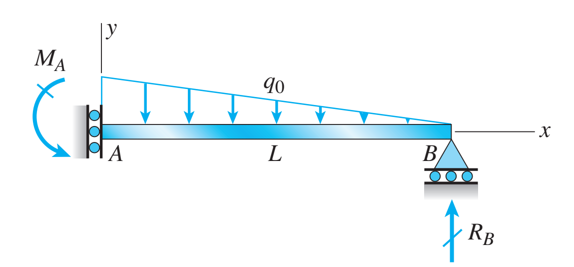
9.4.7 Una viga sobre apoyos simples está sometida a una carga parabólicamente distribuida de intensidad $q = 4q_0x(L - x)/L^2$, donde q_0 es la intensidad máxima de la carga (consulte la figura).

Deduzca la ecuación de la curva y luego determine la deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).



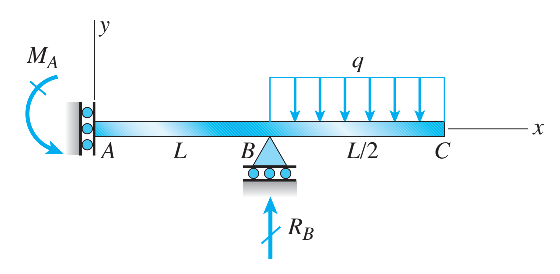
PROB. 9.4.7

9.4.8 Obtenga la ecuación de la curva de deflexión para la viga AB, con apoyo guiado en A y rodillo en B, que soporta una carga con distribución triangular de intensidad máxima q_0 (consulte la figura). Además, determine la deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$ de la viga. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).



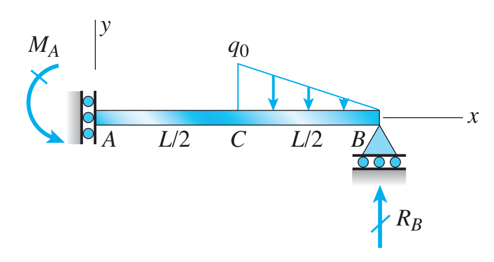
PROB. 9.4.8

9.4.9 Deduzca las ecuaciones de la curva de deflexión para la viga ABC, con apoyo guiado en A y apoyo de rodillo en B, que soporta una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre la parte saliente de la viga (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_C y el ángulo de rotación θ_C. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).



PROB. 9.4.9

9.4.10 Obtenga las ecuaciones de la curva de deflexión para la viga *AB*, con apoyo guiado en *A* y apoyo de rodillo en *B*, que soporta una carga distribuida de intensidad máxima q_0 que actúa sobre la mitad derecha de la viga (consulte la figura). Además, determine la deflexión δ_A, el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_C a la mitad del claro. Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga).

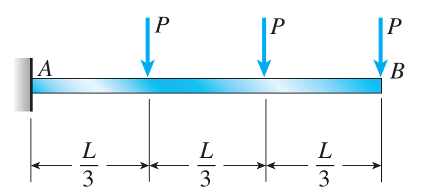


PROB. 9.4.10

Método de superposición

Los problemas para la sección 9.5 se deben resolver mediante el método de superposición. Todas las vigas tienen rigidez a la flexión constante EI.

9.5.1 Una viga en voladizo *AB* soporta tres cargas concentradas igualmente espaciadas, como se muestra en la figura. Obtenga fórmulas para el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre de la viga.



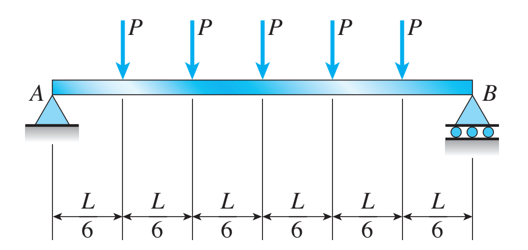
PROB. 9.5.1

9.5.2 Una viga simple *AB* soporta cinco cargas *P* igualmente espaciadas (consulte la figura).

(a) Determine la deflexión δ_1 a la mitad del claro de la viga.

(b) Si la misma carga total (5*P*) se distribuye como una carga uniforme en la viga, ¿cuál es la deflexión δ_2 a la mitad del claro?

(c) Calcule la razón entre δ_1 y δ_2.

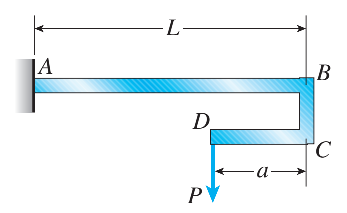


PROB. 9.5.2

9.5.3 La viga en voladizo *AB* que se muestra en la figura tiene una extensión *BCD* unida a su extremo libre. Una fuerza *P* actúa en el extremo de la extensión.

(a) Encuentre la razón *a*/*L* de manera que la deflexión vertical en el punto *B* sea cero.

(b) Encuentre la razón *a*/*L* de manera que el ángulo de rotación en el punto *B* sea cero.

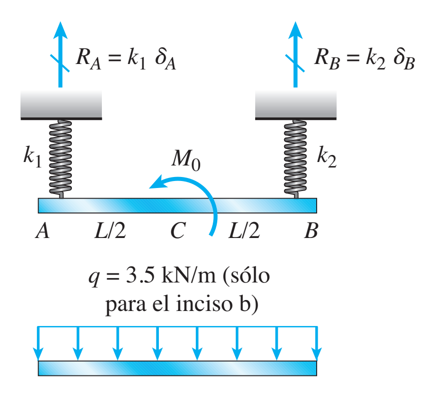


PROB. 9.5.3

9.5.4 Una viga *ACB* pende de dos resortes, como se muestra en la figura. Los resortes tienen rigideces k_1 y k_2, y la viga tiene rigidez a la flexión *EI*.

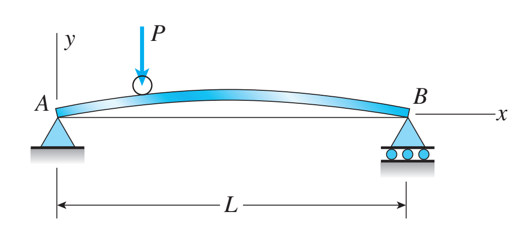
(a) ¿Cuál es el desplazamiento hacia abajo del punto *C*, que se encuentra a la mitad del claro de la viga, cuando se aplica el momento M_0? Los datos para la estructura son los siguientes: M_0 = 10.0 kN·m, L = 1.8 m, EI = 216 kN·m^2, k_1 = 250 kN/m y k_2 = 160 kN/m.

(b) Repita el inciso a pero elimine M_0 y aplique una carga uniforme q = 3.5 kN/m sobre toda la viga.



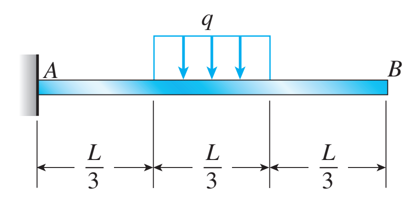
PROB. 9.5.4

9.5.5 ¿Cuál debe ser la ecuación $y = f(x)$ del eje de la viga *AB* ligeramente curva (consulte la figura) *antes* de que se aplique la carga a fin de que la carga *P*, que se mueve a lo largo de la barra, permanezca siempre en el mismo nivel?



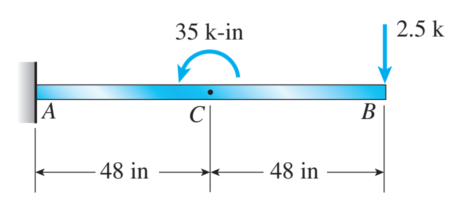
PROB. 9.5.5

9.5.6 Determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre de una viga en voladizo con carga uniforme de intensidad q que actúa sobre el tercio medio de su longitud (consulte la figura).



PROB. 9.5.6

9.5.7 La viga en voladizo ACB que se muestra en la figura tiene rigidez a la flexión $EI = 2.1 \times 10^6$ k-in^2. Calcule las deflexiones hacia abajo δ_C y δ_B en los puntos C y B, respectivamente, debidos a la acción simultánea del momento de 35 k-in aplicado en el punto C y a la carga concentrada de 2.5 k aplicada en el extremo libre B.

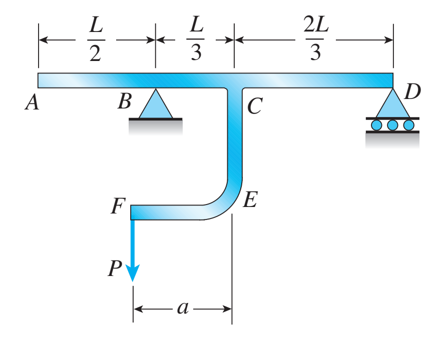


PROB. 9.5.7

9.5.8 Una viga $ABCD$ que consiste de un claro simple BD y una saliente AB está cargada por una fuerza P que actúa en el extremo de la ménsula CEF (consulte la figura).

(a) Determine la deflexión δ_A en el extremo de la saliente.

(b) ¿En qué condiciones esta deflexión es hacia arriba? ¿En qué condiciones es hacia abajo?



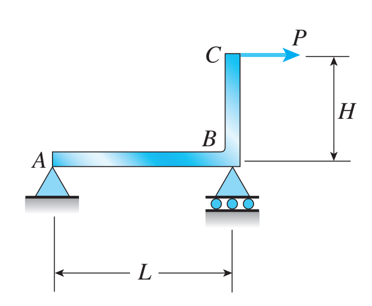
PROB. 9.5.8

9.5.9 Una carga horizontal P actúa en el extremo C de la ménsula ABC que se muestra en la figura.

(a) Determine la deflexión δ_C del punto C.

(b) Determine la deflexión máxima hacia arriba $\delta_{\text{máx}}$ del elemento AB.

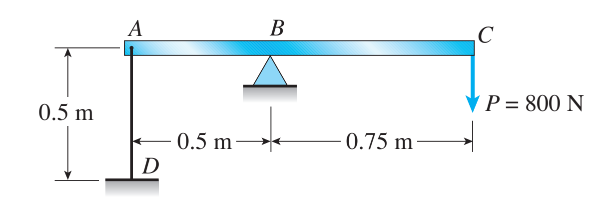
Nota: suponga que la rigidez a la flexión EI es constante en toda la estructura. Además, no tome en cuenta los efectos de las deformaciones axiales y considere sólo los efectos de la flexión debida a la carga P.



PROB. 9.5.9

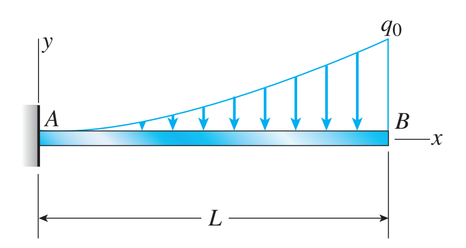
9.5.10 Una viga ABC con rigidez a la flexión $EI = 75$ kN·m^2 está cargada por una fuerza $P = 800$ N en el extremo C y sujeta en el extremo A por un alambre que tiene una rigidez axial $EA = 900$ kN (consulte la figura).

¿Cuál es la deflexión en el punto C cuando se aplica la carga P?



PROB. 9.5.10

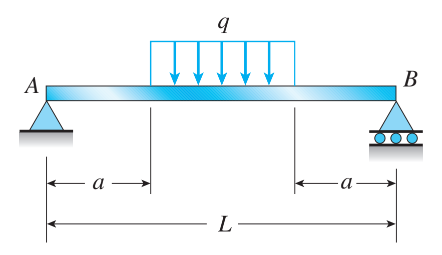
9.5.11 Determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre de una viga en voladizo AB que soporta una carga parabólica definida por la ecuación $q = q_0x^2/L^2$ (consulte la figura).



PROB. 9.5.11

9.5.12 Una viga simple *AB* soporta una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre la región media del claro (consulte la figura).

Determine el ángulo de rotación θ_A en el apoyo izquierdo y la deflexión $\delta_{máx}$ a la mitad del claro.



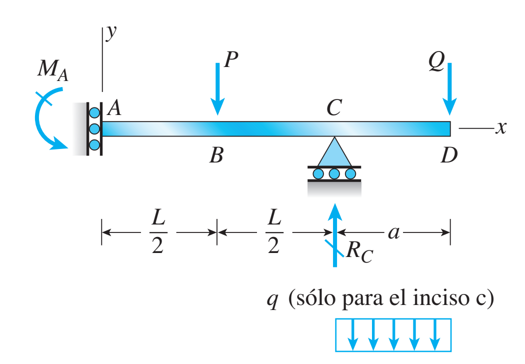
PROB. 9.5.12

9.5.13 La viga con saliente *ABCD* soporta dos cargas concentradas P y Q (consulte la figura).

(a) ¿Para qué razón P/Q la deflexión en el punto B es cero?

(b) ¿Para qué razón la deflexión en el punto D es igual a cero?

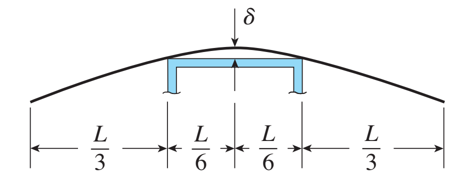
(c) Si Q se reemplaza con una carga uniforme con intensidad q (sobre la saliente), repita los incisos a y b pero encuentre la razón $P/(qa)$.



PROB. 9.5.13

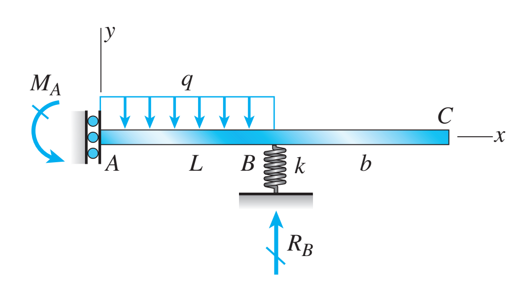
9.5.14 Una tira metálica delgada con peso total W y longitud L se coloca sobre la parte superior de una mesa plana con ancho $L/3$, como se muestra en la figura.

¿Cuál es el espacio libre δ entre la tira y la parte media de la mesa? (La tira de metal tiene rigidez a la flexión EI.)



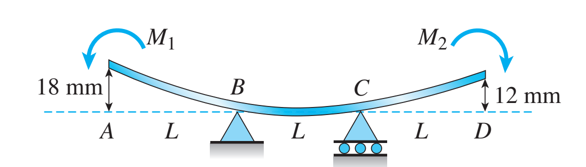
PROB. 9.5.14

9.5.15 Una viga con saliente *ABC* con rigidez a la flexión $EI = 15$ k-in^2 está soportada por un apoyo guiado en A y por un resorte con rigidez k en el punto B (consulte la figura). El claro AB tiene longitud $L = 30$ in y soporta una carga uniforme. La saliente BC tiene longitud $b = 15$ in. ¿Para qué rigidez k del resorte la carga no producirá deflexión en el extremo libre C?



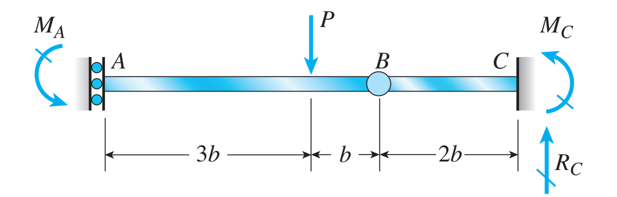
PROB. 9.5.15

9.5.16 Una viga *ABCD* reposa sobre apoyos simples en B y C (consulte la figura). La viga tiene una curvatura inicial ligera de manera que el extremo A está 18 mm arriba de la elevación de los apoyos y el extremo D está 12 mm arriba. ¿Qué momentos M_1 y M_2, que actúen en los puntos A y D, respectivamente, desplazarán los puntos A y D hacia abajo hasta el nivel de los apoyos? (La rigidez a la flexión EI de la viga es 2.5×10^6 N·m^2 y $L = 2.5$ m.)



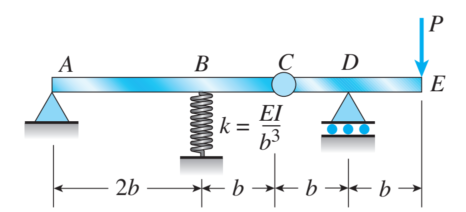
PROB. 9.5.16

9.5.17 La viga compuesta *ABC* que se muestra en la figura tiene un apoyo guiado en A y está empotrada en C. La viga consiste en dos elementos unidos por una conexión articulada (es decir, alivio de momento) en B. Encuentre la deflexión δ provocada por la carga P.



PROB. 9.5.17

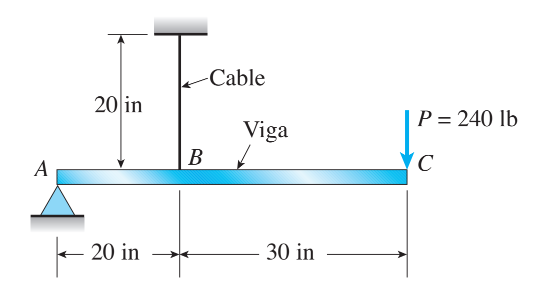
9.5.18 Una viga compuesta *ABCDE* (consulte la figura) consiste de dos partes (*ABC* y *CDE*) conectadas por una articulación (es decir, alivio de momento) en *C*. El apoyo elástico en *B* tiene rigidez $k = EI/b^3$. Determine la deflexión δ_E en el extremo libre *E* debida a la carga *P* que actúa en ese punto.



PROB. 9.5.18

9.5.19 Una viga de acero *ABC* está simplemente apoyada en *A* y sostenida por un cable de acero de alta resistencia en *B* (consulte la figura). Una carga $P = 240$ lb actúa en el extremo libre *C*. El cable tiene rigidez axial $EA = 1500 \times 10^3$ lb y la viga tiene rigidez a la flexión $EI = 36 \times 10^6$ lb-in^2.

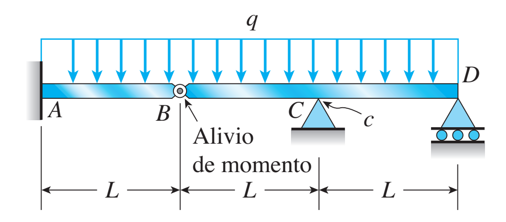
¿Cuál es la deflexión δ_C del punto *C* debida a la carga *P*?



PROB. 9.5.19

9.5.20 La viga compuesta que se muestra en la figura consiste de una viga en voladizo *AB* (longitud *L*) que está conectada por una articulación a una viga simple *BD* (longitud 2*L*). Después de construida la viga, existe un espacio libre *c* entre la viga y un apoyo en *C*, a la mitad de la distancia entre los puntos *B* y *D*. Luego se coloca una carga uniforme a lo largo de toda la longitud de la viga.

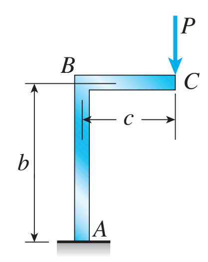
¿Qué intensidad *q* de la carga se necesita para cerrar el espacio libre en *C* y poner en contacto la viga con el apoyo?



PROB. 9.5.19

***9.5.21** Encuentre la deflexión horizontal δ_h y la deflexión vertical δ_v en el extremo *C* del marco *ABC* que se muestra en la figura. (La rigidez a la flexión *EI* es constante en todo el marco.)

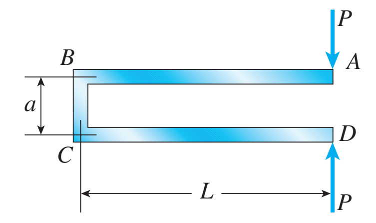
Nota: no tome en cuenta los efectos de las deformaciones axiales y considere sólo los efectos de la flexión debida a la carga *P*.



PROB. 9.5.21

***9.5.22** El marco *ABCD* que se muestra en la figura se comprime por dos fuerzas colineales *P* que actúan en los puntos *A* y *D*. ¿Cuál es el decremento δ en la distancia entre los puntos *A* y *D* cuando se aplican las cargas *P*? (La rigidez a la flexión *EI* es constante en toda el marco.)

Nota: no tome en cuenta los efectos de las deformaciones axiales y considere sólo los efectos de la flexión debidos a las cargas *P*.

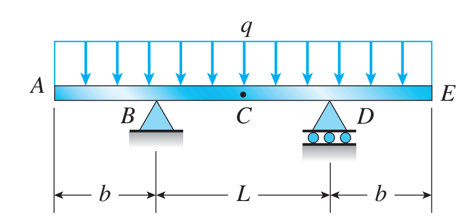


PROB. 9.5.22

****9.5.23** Una viga *ABCDE* tiene apoyos simples en *B* y *D*, y salientes simétricas en cada extremo (consulte la figura). El claro central tiene longitud *L* y cada saliente tiene longitud *b*. Una carga uniforme con intensidad *q* actúa sobre la viga.

(a) Determine la razón *b*/*L* de manera que la deflexión δ_C a la mitad del claro de la viga sea igual a las deflexiones δ_A y δ_E en los extremos.

(b) Para este valor de *b*/*L*, ¿cuál es la deflexión δ_C a la mitad del claro?

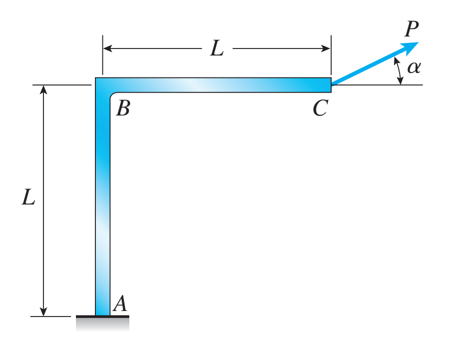


PROB. 9.5.23

*****9.5.24** Un marco ABC está cargado en el punto C por una fuerza P que actúa a un ángulo α con respecto a la horizontal (consulte la figura). Los dos elementos del marco tienen la misma longitud y la misma rigidez a la flexión.

Determine el ángulo α de manera que la deflexión del punto C esté en la misma dirección que la carga. (No tome en cuenta los efectos de las deformaciones axiales y considere sólo los efectos de la flexión debida a la carga P.)

Nota: una dirección de carga provoca que la deflexión resultante tenga la misma dirección que la carga se denomina *dirección principal*. Para una carga dada sobre una estructura planar hay dos direcciones principales, perpendiculares entre sí.

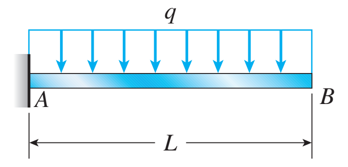


PROB. 9.5.24

Método de área-momento

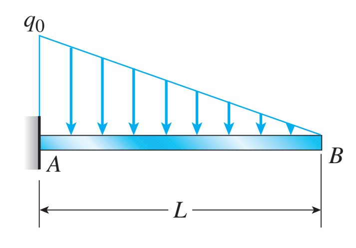
Los problemas para la sección 9.6 se deben resolver mediante el método de área-momento. Todas las vigas tienen rigidez a la flexión constante EI.

9.6.1 Una viga en voladizo AB está sometida a una carga uniforme de intensidad q que actúa en toda su longitud (consulte la figura). Determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre.



PROB. 9.6.1

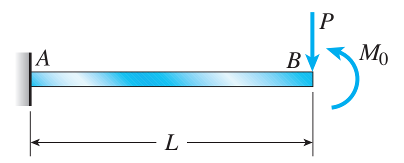
9.6.2 La carga en una viga en voladizo AB tiene una distribución triangular de intensidad máxima q_0 (vea la figura). Determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre.



PROB. 9.6.2

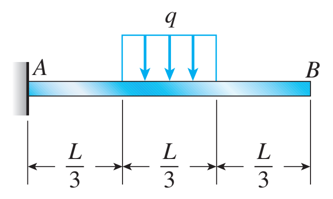
9.6.3 Una viga en voladizo AB está sometida a una carga concentrada P y a un par M_0 que actúan en el extremo libre (consulte la figura).

Obtenga fórmulas para el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo B.



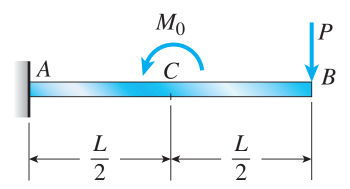
PROB. 9.6.3

9.6.4 Determine el ángulo de rotación θ_B y la deflexión δ_B en el extremo libre de una viga en voladizo AB con una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre el tercio medio del claro (consulte la figura).



PROB. 9.6.4

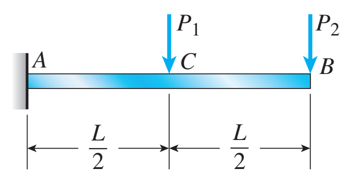
9.6.5 Calcule las deflexiones δ_B y δ_C en los puntos B y C, respectivamente, de la viga en voladizo ACB que se muestra en la figura. Suponga $M_0 = 36$ k-in, $P = 3.8$ k, $L = 8$ ft y $EI = 2.25 \times 10^9$ lb-in^2.



PROB. 9.6.5

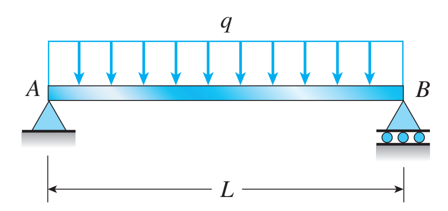
9.6.6 Una viga en voladizo ACB soporta dos cargas concentradas P_1 y P_2 como se muestra en la figura.

Calcule las deflexiones δ_B y δ_C en los puntos B y C, respectivamente. Suponga $P_1 = 10$ kN, $P_2 = 5$ kN, $L = 2.6$ m, $E = 200$ GPa e $I = 20.1 \times 106$ mm^4.



PROB. 9.6.6

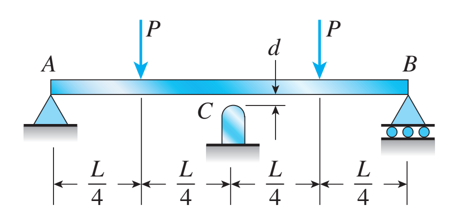
9.6.7 Obtenga fórmulas para el ángulo de rotación θ_A en el apoyo A y la deflexión $\delta_{\text{máx}}$ en el punto medio para una viga AB con una carga uniforme de intensidad q (consulte la figura).



PROB. 9.6.7

9.6.8 Una viga simple AB soporta dos cargas concentradas P en las posiciones que se muestran en la figura. El apoyo C a la mitad del claro de la viga está ubicado a una distancia d debajo de la viga antes que se apliquen las cargas.

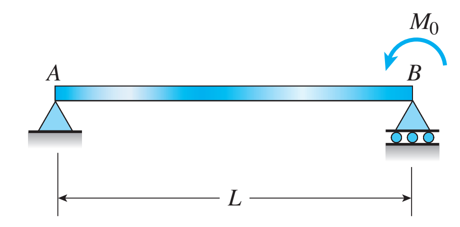
Suponiendo que $d = 10$ mm, $L = 6$ m, $E = 200$ GPa e $I = 198 \times 10^6$ mm^4, calcule la magnitud de las cargas P tal que la viga apenas toque el apoyo en C.



PROB. 9.6.8

9.6.9 Una viga simple AB está sometida a una carga axial en la forma de un par M_0 que actúa en el extremo B (consulte la figura).

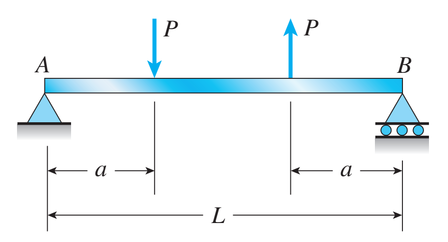
Determine los ángulos de rotación θ_A y θ_B en los apoyos y la deflexión δ en el punto medio.



PROB. 9.6.9

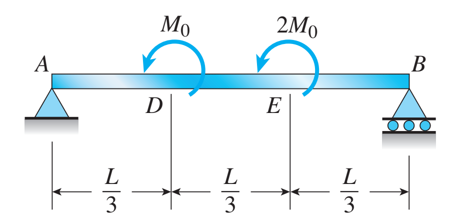
***9.6.10** La viga simple AB que se muestra en la figura soporta dos cargas concentradas iguales P, una actúa hacia abajo y la otra hacia arriba.

Determine el ángulo de rotación θ_A en el extremo izquierdo, la deflexión δ_1 bajo la carga hacia abajo y la deflexión δ_2 en el punto medio de la viga.



PROB. 9.6.10

***9.6.11** Una viga simple AB está sometida a pares M_0 y $2M_0$ que actúan como se muestra en la figura. Determine los ángulos de rotación θ_A y θ_B en los extremos de la viga y la deflexión δ en el punto D donde se aplica la carga M_0.



PROB. 9.6.11

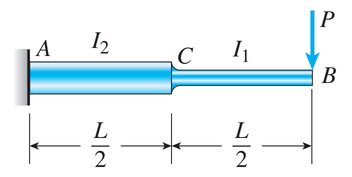
Vigas no prismáticas

9.7.1 La viga en voladizo ACB que se muestra en la figura tiene momentos de inercia I_2 e I_1 en las partes AC y CB, respectivamente.

(a) Por medio del método de superposición determine la deflexión δ_B en el extremo libre debida a la carga P.

(b) Determine la razón r entre la deflexión δ_B y la deflexión δ_1 en el extremo libre de una viga prismática en voladizo con momento de inercia I_1 que soporta la misma carga.

(c) Trace una gráfica de la razón de deflexión r contra la razón I_2/I_1 de los momentos de inercia. (Haga variar I_2/I_1 de 1 a 5.)



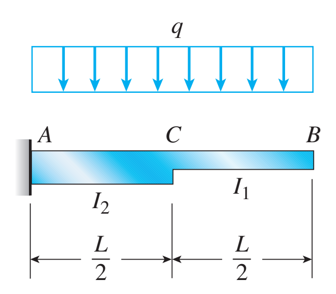
PROB. 9.7.1

9.7.2 La viga en voladizo *ACB* que se muestra en la figura soporta una carga uniforme de intensidad q en toda su longitud. La viga tiene momentos de inercia I_2 e I_1 en las partes *AC* y *CB*, respectivamente.

(a) Utilizando el método de superposición determine la deflexión δ_B en el extremo libre debida a la carga uniforme.

(b) Determine la razón r entre la deflexión δ_B y la deflexión δ_1 en el extremo libre de una viga prismática en voladizo con momento de inercia I_1 que soporta la misma carga.

(c) Trace una gráfica de la razón de deflexión r contra la razón I_2/I_1 de los momentos de inercia. (Haga variar I_2/I_1 de 1 a 5.)

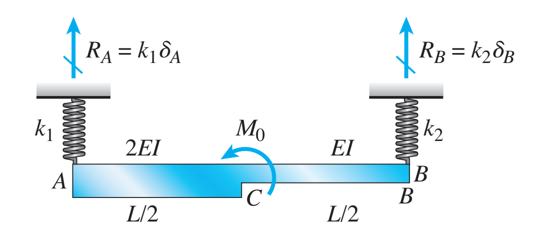


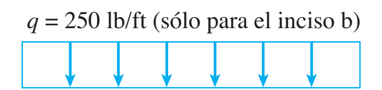
PROB. 9.7.2

***9.7.3** La viga *ACB* pende de dos resortes, como se muestra en la figura. Los resortes tienen rigideces k_1 y k_2, y la viga tiene rigidez a la flexión *EI*.

(a) ¿Cuál es el desplazamiento hacia abajo del punto *C*, que está en el punto medio de la viga, cuando se aplica el momento M_0? Los datos para la estructura son: M_0 = 7.5 k-ft, L = 6 ft, EI = 520 k-ft^2, k_1 = 17 k/ft y k_2 = 11 k/ft.

(b) Repita el inciso a pero elimine M_0 y en su lugar aplique una carga uniforme q sobre toda la viga.

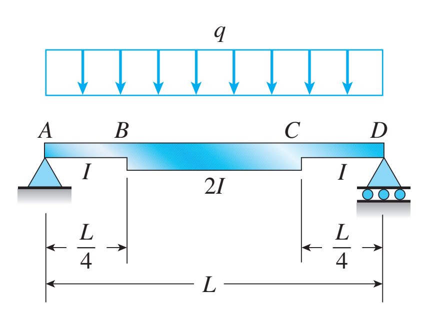




PROB. 9.7.3

***9.7.4** Una viga simple *ABCD* tiene un momento de inercia I cerca de los apoyos y un momento de inercia $2I$ en la región media, como se muestra en la figura. Una carga uniforme con intensidad q actúa sobre toda la longitud de la viga.

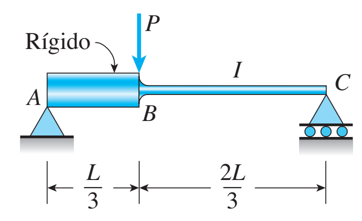
Determine las ecuaciones de la curva de deflexión para la mitad izquierda de la viga. Además, encuentre el ángulo de rotación θ_A en el apoyo izquierdo y la deflexión $\delta_{máx}$ en el punto medio.



PROB. 9.7.4

****9.7.5** Una viga *ABC* tiene un segmento rígido de *A* a *B* y un segmento flexible con momento de inercia I de *B* a *C* (consulte la figura). Una carga concentrada P actúa en el punto *B*.

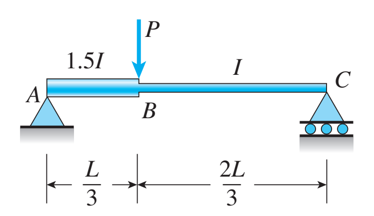
Determine el ángulo de rotación θ_A del segmento rígido, la deflexión δ_B en el punto *B* y la deflexión máxima $\delta_{máx}$.



PROB. 9.7.5

****9.7.6** Una viga simple *ABC* tiene momento de inercia $1.5I$ de *A* a *B* e I de *B* a *C* (consulte la figura). Una carga concentrada P actúa en el punto *B*.

Obtenga las ecuaciones de las curvas de deflexión para las dos partes de la viga. A partir de las ecuaciones determine los ángulos de rotación θ_A y θ_C en los apoyos y la deflexión δ_B en el punto *B*.



PROB. 9.7.6

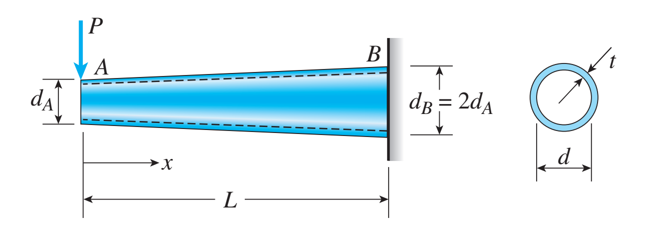
****9.7.7** La viga ahusada en voladizo AB que se muestra en la figura tiene secciones transversales huecas de pared delgada con espesor constante t. Los diámetros en los extremos A y B son d_A y $d_B = 2d_A$, respectivamente. Por tanto, el diámetro d y el momento de inercia I a una distancia x desde el extremo libre son, respectivamente,

$$d = \frac{d_A}{L}(L + x)$$

$$I = \frac{\pi t d^3}{8} = \frac{\pi t d_A^3}{8L^3}(L + x)^3 = \frac{I_A}{L^3}(L + x)^3$$

en donde I_A es el momento de inercia en el extremo A de la viga.

Determine la ecuación de la curva de deflexión y la deflexión δ_A en el extremo libre de la viga debida a la carga P.



PROB. 9.7.7

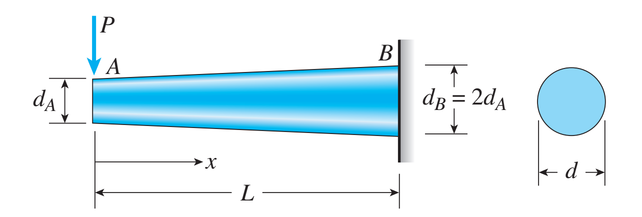
****9.7.8** La viga ahusada en voladizo AB que se muestra en la figura tiene sección transversal circular sólida. Los diámetros en los extremos A y B son d_A y $d_B = 2d_A$, respectivamente. Por tanto, el diámetro d y el momento de inercia I a una distancia x desde el extremo libre son, respectivamente.

$$d = \frac{d_A}{L}(L + x)$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d_A^4}{64L^4}(L + x)^4 = \frac{I_A}{L^4}(L + x)^4$$

en donde I_A es el momento de inercia en el extremo A de la viga.

Determine la ecuación de la curva de deflexión y la deflexión δ_A en el extremo libre de la viga debida a la carga P.



PROB. 9.7.8

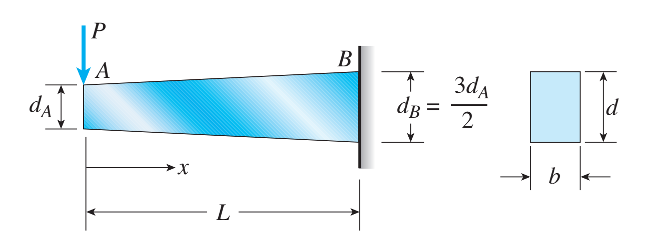
****9.7.9** Una viga ahusada en voladizo AB soporta una carga concentrada P en el extremo libre (consulte la figura). Las secciones transversales de la viga son rectangulares con ancho constante b, altura d_A en el extremo libre A y altura $d_B = 3d_A/2$ en el empotramiento. Por tanto, la altura d y el momento de inercia I a una distancia x desde el extremo libre son, respectivamente,

$$d = \frac{d_A}{2L}(2L + x)$$

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{bd_A^3}{96L^3}(2L + x)^3 = \frac{I_A}{8L^3}(2L + x)^3$$

en donde I_A es el momento de inercia en el extremo A de la viga.

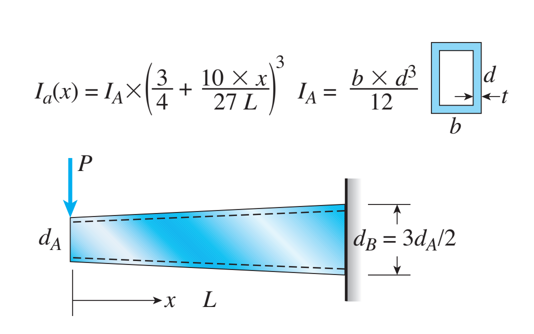
Determine la ecuación de la curva de deflexión y la deflexión δ_A en el extremo libre de la viga debida a la carga P.



PROB. 9.7.9

****9.7.10** Una viga ahusada en voladizo AB soporta una carga concentrada P en el extremo libre (consulte la figura). Las secciones transversales de la viga son tubos rectangulares con ancho constante b y altura del *tubo exterior* d_A en A y altura del *tubo exterior* $d_B = 3d_A/2$ en el empotramiento B. El espesor del tubo es constante, $t = d_A/20$. I_A es el momento de inercia del *tubo exterior* en el extremo A de la viga.

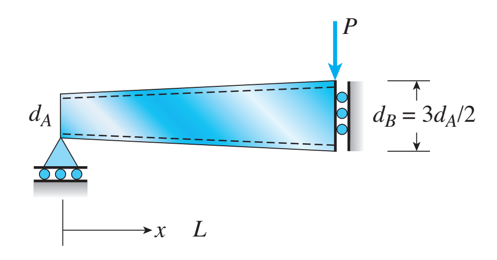
Si el momento de inercia del tubo se aproxima como $I_a(x)$, encuentre la *ecuación* de la curva de deflexión y la deflexión δ_A en el extremo libre de la viga debida a la carga P.



PROB. 9.7.10

****9.7.11** Repita el problema 9.7.10 pero ahora utilice el tubo ahusado en voladizo AB, con apoyo guiado en B, que se muestra en la figura soportando una carga concentrada P en el extremo guiado.

Encuentre la ecuación de la curva de deflexión y la deflexión δ_B en el extremo guiado de la viga debidas a la carga P.



PROB. 9.7.11

****9.7.12** Una viga simple ACB está construida con secciones cuadradas y ahusamiento doble (consulte la figura). La altura de la viga en los apoyos es d_A y en el centro del claro es $d_C = 2d_A$. Cada mitad de la viga tiene longitud L. Por tanto, la altura d y el momento de inercia I a una distancia x desde el extremo izquierdo son, respectivamente:

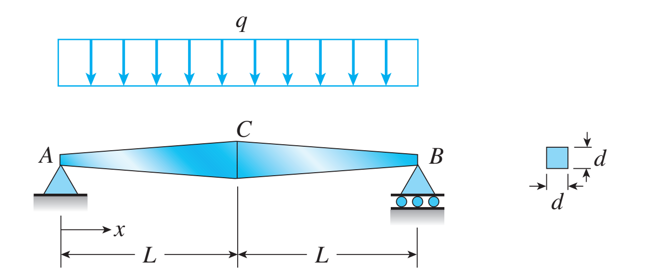
$$d = \frac{d_A}{L}(L + x)$$

$$I = \frac{d^4}{12} = \frac{d_A^4}{12L^4}(L + x)^4 = \frac{I_A}{L^4}(L + x)^4$$

en donde I_A es el momento de inercia en el extremo A de la viga. (Estas ecuaciones son válidas para x entre 0 y L, es decir, para la mitad izquierda de la viga.)

(a) Obtenga ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la mitad izquierda de la viga debidas a la carga uniforme.

(b) A partir de estas ecuaciones obtenga fórmulas para el ángulo de rotación θ_A en el apoyo A y la deflexión δ_C en el centro del claro.



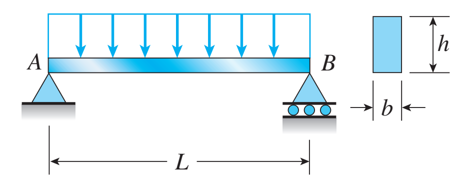
PROB. 9.7.12

Energía de deformación

Las vigas descritas en los problemas para la sección 9.8 tienen rigidez a la flexión EI constante.

9.8.1 Una viga simple AB cargada uniformemente (consulte la figura) con longitud del claro L y sección transversal rectangular (b = ancho, h = altura) tiene un esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{\text{máx}}$ debido a la carga uniforme.

Determine la energía de deformación U almacenada en la viga.



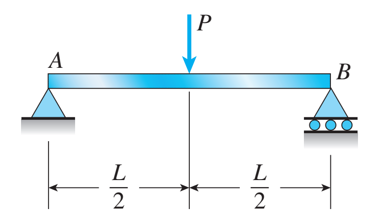
PROB. 9.8.1

9.8.2 Una viga simple AB con longitud L soporta una carga concentrada P a la mitad del claro (consulte la figura).

(a) Evalúe la energía de deformación de la viga a partir del momento flexionante en la viga.

(b) Evalúe la energía de deformación de la viga a partir de la ecuación de la curva de deflexión.

(c) Con base en la energía de deformación, determine la deflexión δ producida por la carga P.

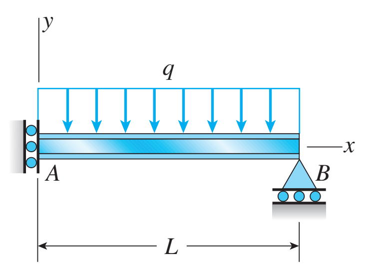


PROB. 9.8.2

9.8.3 Una viga en voladizo apuntalada AB con longitud L y apoyo guiado en A, soporta una carga uniforme con intensidad q (consulte la figura).

(a) Evalúe la energía de deformación de la viga a partir del momento flexionante en la viga.

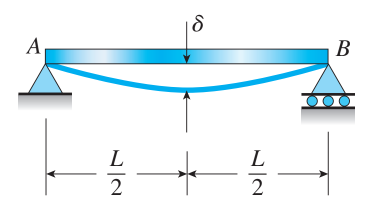
(b) Evalúe la energía de deformación de la viga a partir de la ecuación de la curva de deflexión.



PROB. 9.8.3

9.8.4 Una viga simple AB con longitud L está sometida a cargas que producen una curva de deflexión simétrica con deflexión máxima δ en el centro del claro (consulte la figura).

¿Cuánta energía de deformación U está almacenada en la viga si la curva de deflexión es (a) una parábola y (b) la mitad de la onda de una curva seno?



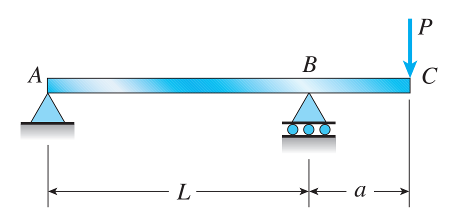
PROB. 9.8.4

9.8.5 Una viga ABC con apoyos simples en A y B, y una saliente BC soporta una carga concentrada P en el extremo libre C (consulte la figura).

(a) Determine la energía de deformación U almacenada en la viga debida a la carga P.

(b) A partir de la energía de deformación encuentre la deflexión δ_C producida por la carga P.

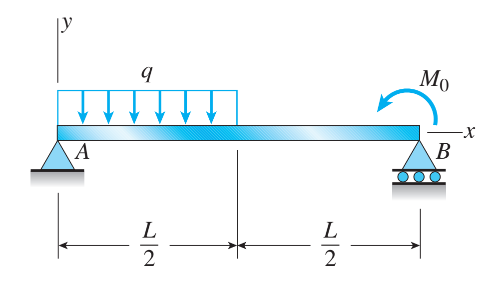
(c) Calcule los valores numéricos de U y δ_C si la longitud L es 8 ft, la longitud del voladizo a es 3 ft, la viga es un perfil de acero de patín ancho W 10 $\times$ 12 y la carga produce un esfuerzo máximo de 12 000 psi en la viga. (Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi).



PROB. 9.8.5

9.8.6 Una viga simple ACB que soporta una carga uniforme q sobre la primera mitad de la viga y un par de momento M_0 en el extremo B se muestra en la figura.

Determine la energía de deformación U almacenada en la viga debida a la carga q y al par M_0 en acción simultánea.

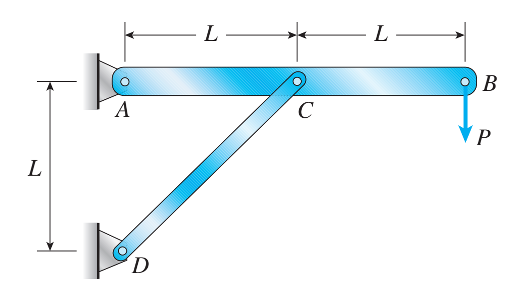


PROB. 9.8.6

9.8.7 La armadura que se muestra en la figura consiste en una viga ACB soportada por un puntal CD. La viga tiene longitud $2L$ y es continua a través del nodo C. Una carga concentrada P actúa en el extremo libre B.

Determine la deflexión vertical δ_B en el punto B debida a la carga P.

Nota: sea EI la rigidez a la flexión de la viga y EA la rigidez axial del puntal. No tome en cuenta los efectos axiales y de cortante en la viga e ignore cualesquiera efectos de flexión en el puntal.



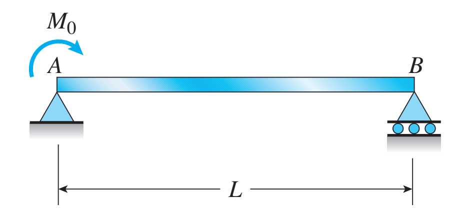
PROB. 9.8.7

Teorema de Castigliano

Las vigas descritas en los problemas para la sección 9.9 tienen rigidez a la flexión constante EI.

9.9.1 Una viga simple AB con longitud L está cargada en el extremo izquierdo por un par de momento M_0 (consulte la figura).

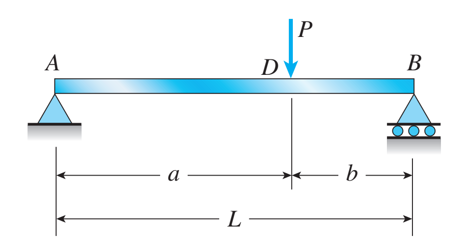
Determine el ángulo de rotación θ_A en el apoyo A. (Obtenga la solución determinando la energía de deformación de la viga y luego emplee el teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.1

9.9.2 La viga simple que se muestra en la figura soporta una carga concentrada P que actúa a una distancia a desde el apoyo izquierdo y a una distancia b desde el apoyo derecho.

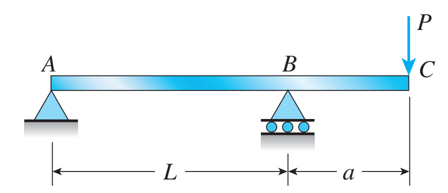
Determine la deflexión δ_D en el punto D donde se aplica la carga. (Obtenga la solución determinando la energía de deformación de la viga y luego emplee el teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.2

9.9.3 Una viga con una saliente *ABC* soporta una carga concentrada *P* en el extremo de la saliente (consulte la figura). El claro *AB* tiene longitud *L* y la saliente tiene longitud *a*.

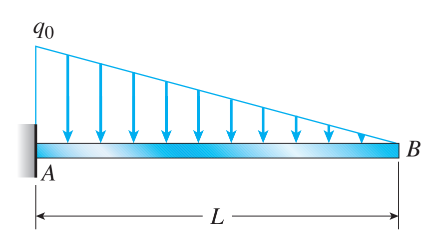
Determine la deflexión δ_C en el extremo de la saliente. (Obtenga la solución determinando la energía de deformación de la viga y luego empleando el teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.3

9.9.4 La viga en voladizo que se muestra en la figura soporta una carga con distribución triangular de intensidad máxima q_0.

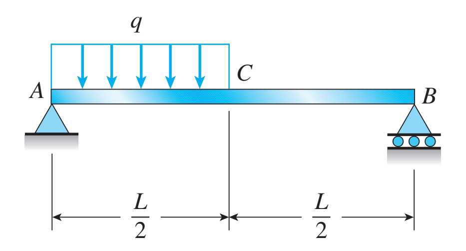
Determine la deflexión δ_B en el extremo libre *B*. (Obtenga la solución determinando la energía de deformación de la viga y luego empleando el teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.4

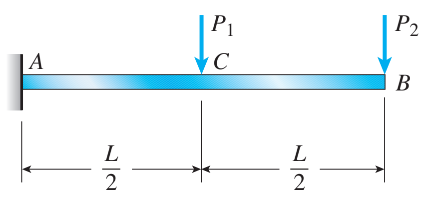
9.9.5 Una viga simple *ACB* soporta una carga uniforme con intensidad *q* sobre la mitad izquierda del claro (consulte la figura).

Determine el ángulo de rotación θ_B en el apoyo *B*. (Obtenga la solución empleando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.5

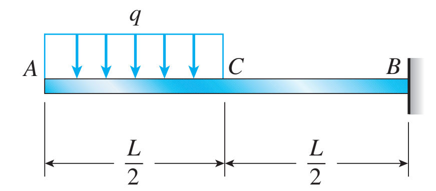
9.9.6 Una viga en voladizo *ACB* soporta dos cargas concentradas P_1 y P_2, como se muestra en la figura. Determine las deflexiones δ_C y δ_B en los puntos *C* y *B*, respectivamente. (Obtenga la solución empleando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.6

9.9.7 La viga en voladizo *ACB* que se muestra en la figura está sometida a una carga uniforme con intensidad *q* que actúa entre los puntos *A* y *C*.

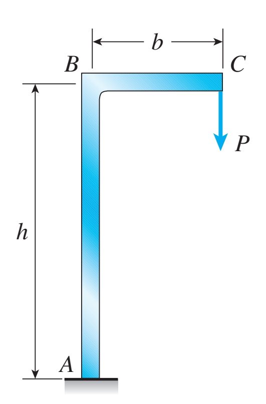
Determine el ángulo de rotación θ_A en el extremo libre *A*. (Obtenga la solución utilizando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.7

9.9.8 El marco *ABC* soporta una carga concentrada *P* en el punto *C* (consulte la figura). Los elementos *AB* y *BC* tienen longitudes *h* y *b*, respectivamente.

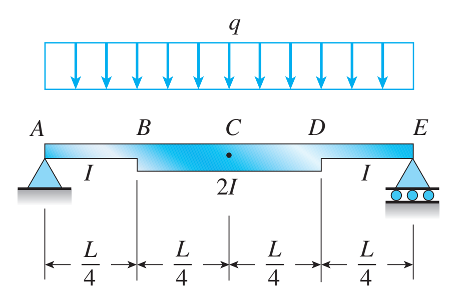
Determine la deflexión vertical δ_C y el ángulo de rotación θ_C en el extremo *C* del marco. (Obtenga la solución empleando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.8

9.9.9 Una viga simple *ABCDE* soporta una carga uniforme de intensidad q (consulte la figura). El momento de inercia en la parte central de la viga (*BCD*) es el doble del momento de inercia en las partes extremas (*AB* y *DE*).

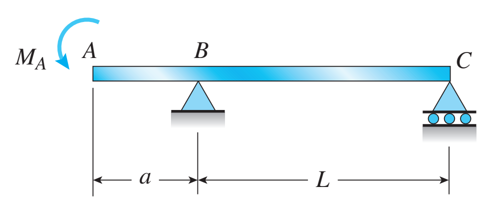
Encuentre la deflexión δ_C en el punto medio *C* de la viga. (Obtenga la solución empleando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.9

9.9.10 Una viga con una saliente *ABC* está sometida a un par M_A en el extremo libre (consulte la figura). Las longitudes de la saliente y del claro principal son a y L, respectivamente.

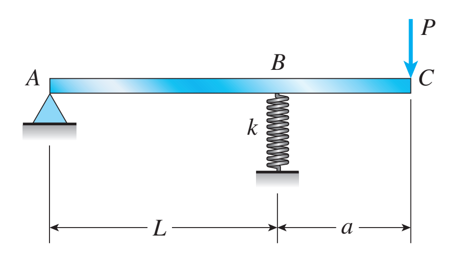
Determine el ángulo de rotación θ_A y la deflexión δ_A en el extremo *A*. (Obtenga la solución utilizando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.10

9.9.11 Una viga con una saliente *ABC* reposa sobre un apoyo simple en *A* y sobre un apoyo de resorte en *B* (consulte la figura). Una carga concentrada *P* actúa en el extremo del voladizo. El claro *AB* tiene longitud *L*, la saliente tiene longitud a y el resorte tiene rigidez k.

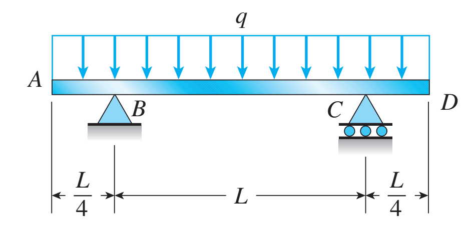
Determine el desplazamiento hacia abajo δ_C del extremo de la saliente. (Obtenga la solución al usar la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.11

***9.9.12** Una viga simétrica *ABCD* con saliente en los dos extremos soporta una carga uniforme de intensidad q (consulte la figura).

Determine la deflexión δ_D en el extremo de la saliente. (Obtenga la solución empleando la forma modificada del teorema de Castigliano.)



PROB. 9.9.12

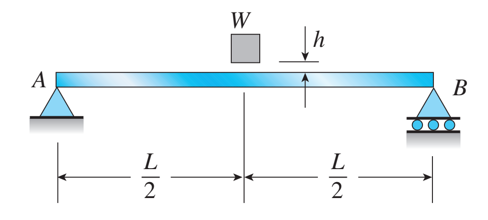
Deflexiones producidas por impacto

Las vigas descritas en los problemas para la sección 9.10 tienen rigidez a la flexión constante EI. No tome en cuenta los pesos de las vigas y considere sólo los efectos de las cargas dadas.

9.10.1 Un objeto sólido con peso *W* se deja caer sobre el punto medio de una viga simple *AB* desde una altura h (consulte la figura).

Obtenga una fórmula para el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ debido al impacto del peso en términos de h, σ_{est} y δ_{est}, donde σ_{est} es el esfuerzo de flexión máximo y δ_{est} es la deflexión en el punto medio cuando el peso *W* actúa sobre la viga como una carga aplicada estáticamente.

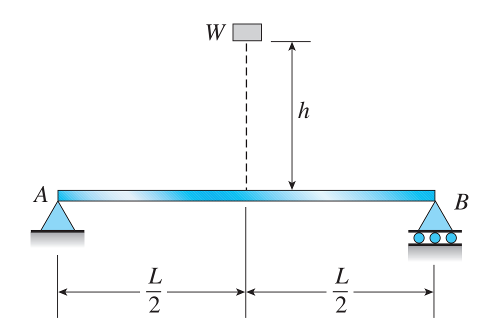
Trace una gráfica de la razón $\sigma_{máx}/\sigma_{est}$ (es decir, la razón entre el esfuerzo dinámico y el esfuerzo estático) contra la razón h/δ_{est}. Haga variar h/δ_{est} de 0 a 10).



PROB. 9.9.10.1

9.10.2 Un objeto con peso W se deja caer sobre el punto medio de una viga simple AB desde una altura h (consulte la figura). La viga tiene sección transversal rectangular con área A.

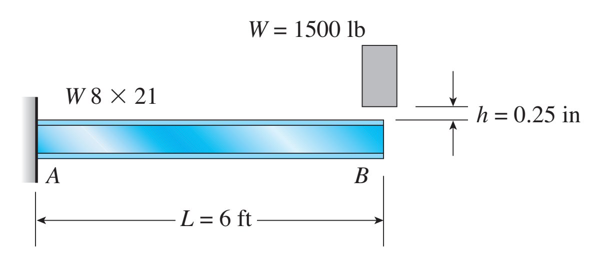
Suponiendo que h es muy grande comparada con la deflexión de la viga cuando el peso W se aplica estáticamente, obtenga una fórmula para el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ en la viga debido a la caída del peso.



PROB. 9.10.2

9.10.3 Una viga en voladizo AB con longitud L = 6 ft está construida de un perfil de patín ancho W 8 × 21 (consulte la figura). Un peso W = 1500 lb cae desde una altura h = 0.25 in sobre el extremo de la viga.

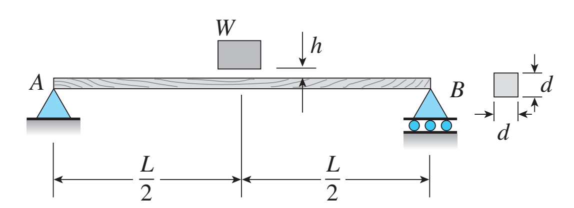
Calcule la deflexión máxima $\delta_{máx}$ del extremo de la viga y el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ debido a la caída del peso. (Suponga $E = 30 \times 10^6$ psi.)



PROB. 9.10.3

9.10.4 Un peso W = 20 kN cae desde una altura h = 1.0 mm sobre el punto medio de una viga simple con longitud L = 3 m (consulte la figura). La viga está hecha de madera con sección transversal cuadrada (dimensión d en cada lado) y E = 12 GPa.

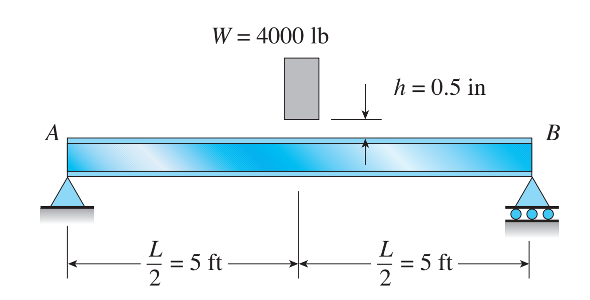
Si el esfuerzo de flexión permisible en la madera es σ_{perm} = 10 MPa, ¿cuál es la dimensión d mínima requerida?



PROB. 9.10.4

9.10.5 Un peso W = 4000 lb cae desde una altura h = 0.5 in sobre el punto medio de una viga simple con longitud L = 10 ft (consulte la figura).

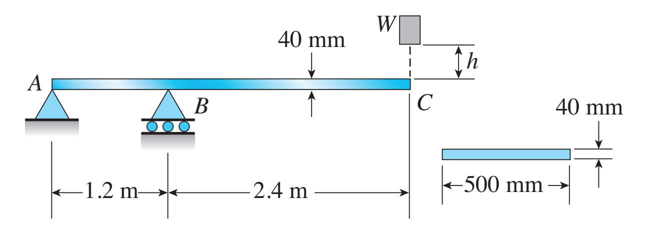
Suponiendo que el esfuerzo de flexión permisible en la viga es σ_{perm} = 18,000 psi y $E = 30 \times 10^6$ psi, seleccione la viga de patín ancho más ligera de la tabla E.1 del apéndice E que sea idonea.



PROB. 9.10.5

9.10.6 Una viga con una saliente ABC con sección transversal rectangular tiene las dimensiones que se muestran en la figura. Un peso W = 750 lb cae sobre el extremo C de la viga.

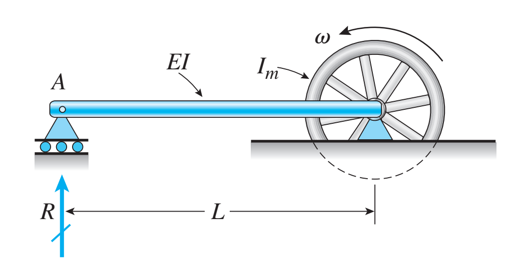
Si el esfuerzo normal permisible es 45 MPa, ¿cuál es la altura máxima h desde donde se puede dejar caer el peso? (Suponga E = 12 GPa.)



PROB. 9.10.6

***9.10.7** Un volante de inercia pesado gira a una velocidad angular ω (radianes por segundo) alrededor de un eje (consulte la figura). El eje está unido rígidamente al extremo de una viga simplemente apoyada con rigidez a la flexión EI y longitud L (consulte la figura). El volante de inercia tiene momento de inercia de la masa I_m con respecto a su eje de rotación.

Si el volante de inercia detiene repentinamente el eje, ¿cuál será la reacción R en el apoyo A de la viga?



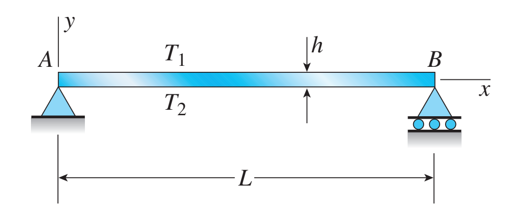
PROB. 9.10.7

Efectos de la temperatura

Las vigas descritas en los problemas para la sección 9.11 tienen rigidez a la flexión constante EI. En cada problema, la temperatura varía linealmente entre la parte superior y la inferior de la viga.

9.11.1 Una viga simple *AB* con longitud *L* y altura *h* experimenta un cambio de temperatura de manera que la parte inferior de la viga está a una temperatura T_2 y la parte superior de la misma está a una temperatura T_1 (consulte la figura).

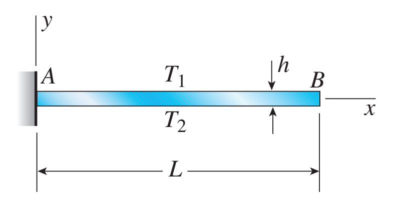
Determine la ecuación de la curva de deflexión de la viga, el ángulo de rotación θ_A en el apoyo izquierdo y la deflexión $\delta_{máx}$ en el punto medio.



PROB. 9.11.1

9.11.2 Una viga en voladizo *AB* con longitud *L* y altura *h* (consulte la figura) está sometida a un cambio de temperatura de manera que la temperatura en la parte superior es T_1 y en la parte inferior es T_2.

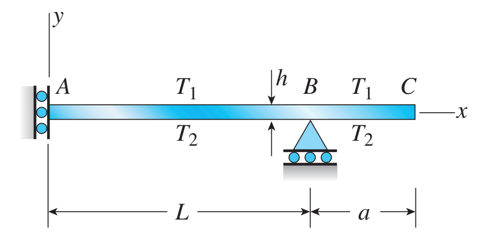
Determine la ecuación de la curva de deflexión de la viga, el ángulo de rotación θ_B en el extremo *B* y la deflexión δ_B en el extremo *B*.



PROB. 9.11.2

9.11.3 Una viga en voladizo *ABC* con peralte *h* tiene un apoyo guiado en *A* y un rodillo en *B*. La viga se calienta a una temperatura T_1 en la parte superior y T_2 en la parte inferior (consulte la figura).

Determine la ecuación de la curva de deflexión de la viga, el ángulo de rotación θ_C en el extremo *C* y la deflexión δ_C en el extremo *C*.



PROB. 9.11.3

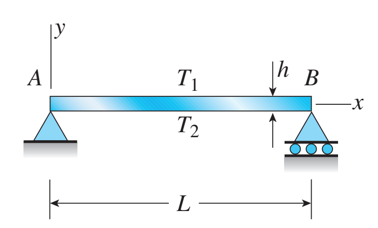
9.11.4 Una viga simple *AB* con longitud *L* y altura *h* (consulte la figura) se calienta de tal manera que la diferencia de temperatura $T_2 - T_1$ entre la parte superior y la inferior de la viga es proporcional a la distancia desde el apoyo *A*; es decir, suponga que la diferencia de temperatura varía *linealmente* a lo largo de la viga:

$$T_2 - T_1 = T_0 x$$

en donde T_0 es una constante que tiene unidades de temperatura (grados) por unidad de distancia.

(a) Determine la deflexión máxima $\delta_{máx}$ de la viga.

(b) Repita para una variación *cuadrática* de la temperatura a lo largo de la viga, $T_2 - T_1 = T_0 x^2$.



PROB. 9.11.4

9.11.5 Una viga *AB*, con apoyo elástico k_R en *A* y una articulación en *B*, con longitud *L* y altura *h* (consulte la figura) se calienta de tal manera que la diferencia de temperatura $T_2 - T_1$ entre la parte superior y la inferior de la viga es proporcional a la distancia desde el apoyo *A*; es decir, suponga que la diferencia de temperatura varía *linealmente* a lo largo de la viga:

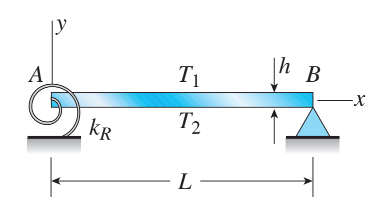
$$T_2 - T_1 = T_0 x$$

en donde T_0 es una constante con unidades de temperatura (grados) por unidad de distancia. Suponga que el resorte en *A* no se ve afectado por el cambio de temperatura.

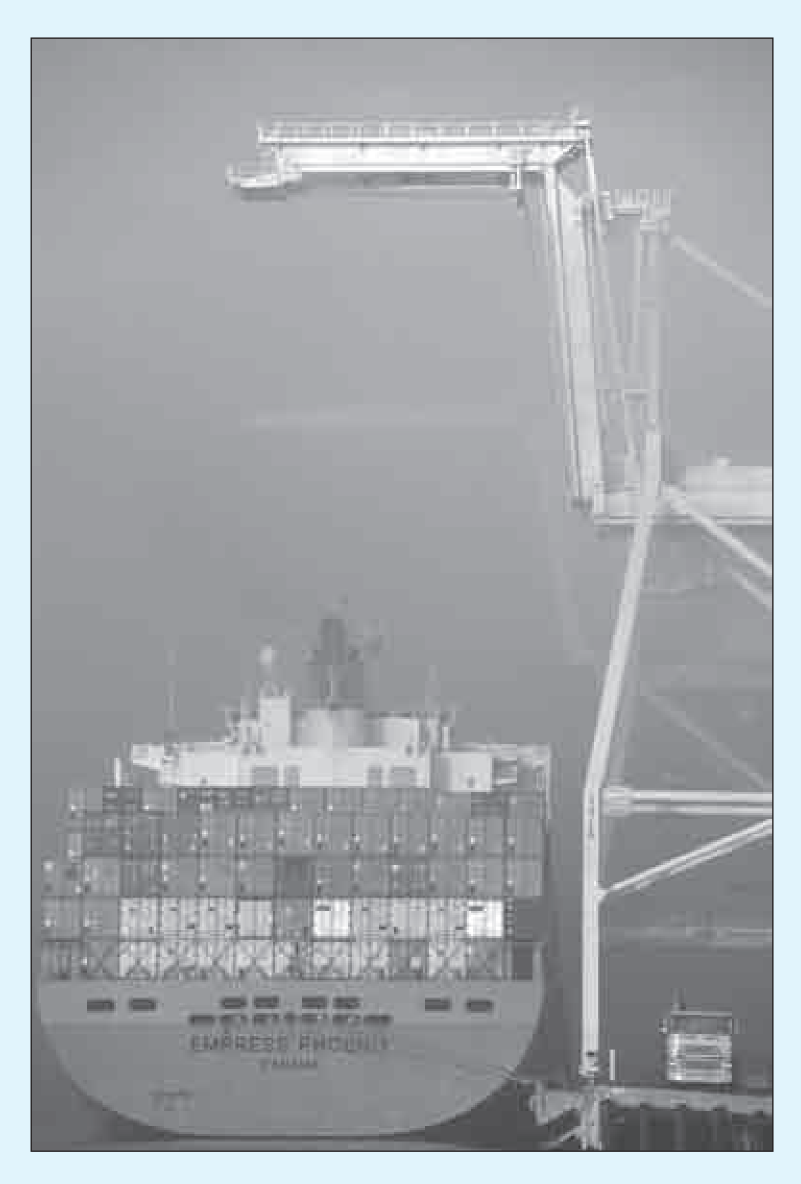
(a) Determine la deflexión máxima $\delta_{máx}$ de la viga.

(b) Repita para una variación *cuadrática* de la temperatura a lo largo de la viga, $T_2 - T_1 = T_0 x^2$.

(c) ¿Cuál es $\delta_{máx}$ para los incisos (a) y (b) anteriores si k_R tiende al infinito?



PROB. 9.11.5



Las estructuras grandes y complejas, como esta grúa que carga un barco de contenedores, por lo general son estáticamente indeterminadas y se requiere de una computadora para determinar las fuerzas en los elementos y los desplazamientos en los nodos.

10

Vigas estáticamente indeterminadas

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

En este capítulo se consideran las vigas estáticamente indeterminadas. Aquí, la estructura de la viga tiene más fuerzas de reacción desconocidas que ecuaciones de equilibrio estático disponibles, por lo que se dice que son ***estáticamente indeterminadas***. El número excedente de reacciones desconocidas define el ***grado*** **de indeterminación**. La solución de vigas estáticamente indeterminadas requiere el desarrollo de ecuaciones adicionales con base en las deformaciones de la estructura, además de las ecuaciones de la estática. Primero se define una variedad de tipos diferentes de vigas estáticamente indeterminadas (sección 10.2) junto con la terminología común (por ejemplo, *estructura primaria, estructura liberada* y *redundante*) empleada en la representación de la solución. Luego, se presenta un método de solución basado en la integración de la ecuación de la curva elástica y en la aplicación de condiciones de frontera para determinar las constantes desconocidas (sección 10.3). Este procedimiento sólo se puede aplicar en casos relativamente simples, por lo que se describe una aproximación más general basada en la superposición (sección 10.4) y es aplicable a las vigas que experimentan desplazamientos pequeños y que se comportan de una manera linealmente elástica. En este caso, las ***ecuaciones de equilibrio*** se complementan con las ***ecuaciones de compatibilidad***; las cargas aplicadas y las deflexiones resultantes de la viga se relacionan con las ***ecuaciones fuerza-desplazamiento*** para las vigas que se dedujeron en el capítulo 9. El método de solución de superposición general sigue al que se introdujo en la sección 2.4 para elementos cargados axialmente y en la sección 3.8 para los ejes circulares sometidos a momentos de torsión. Por último, se presenta una variedad de temas especializados y avanzados al final del capítulo. En la sección 10.5 se analiza el efecto de *carga por diferencia de temperatura* y en la sección 10.6 se presenta el efecto del *acortamiento de la curvatura* debido sólo a la flexión.

El capítulo 10 está organizado como sigue:

**Temas avanzados*

10.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizaremos las vigas en las que el número de reacciones excede al número de ecuaciones independientes de equilibrio. Como las reacciones de esas vigas no se pueden determinar sólo por estática, se dice que son **estáticamente indeterminadas**.

El análisis de las vigas estáticamente indeterminadas es muy diferente al de las estáticamente determinadas. Cuando una viga es estáticamente determinada podemos obtener todas las reacciones, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio. Luego, una vez conocidas las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, podemos obtener los esfuerzos y las deflexiones.

Sin embargo, cuando una viga es estáticamente indeterminada, para determinar todas sus reacciones no son suficientes las ecuaciones de equilibrio y se necesitan ecuaciones adicionales. El método más fundamental para analizar una viga estáticamente indeterminada es resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión, como se describe en la sección 10.3. Si bien este método sirve como un buen punto de partida en nuestro análisis, sólo es práctico para los tipos de vigas estáticamente indeterminadas más simples.

Por tanto, también analizamos el método de superposición (sección 10.4), el cual es aplicable a una gran variedad de estructuras. En el método de superposición complementamos las ecuaciones de equilibrio con ecuaciones de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento. (Este mismo método se describió en la sección 2.4, en la que analizamos las barras estáticamente indeterminadas sometidas a tensión y compresión.)

En la última parte de este capítulo estudiamos dos temas especializados relativos a las vigas estáticamente indeterminadas, que son: vigas sometidas a cambios de temperatura (sección 10.5) y desplazamientos longitudinales en los extremos de vigas (sección 10.6). En todo este capítulo: suponemos que las vigas están hechas de **materiales linealmente elásticos.**

Si bien en este capítulo sólo se analizan las vigas estáticamente indeterminadas, las ideas fundamentales tienen una aplicación mucho más amplia. La mayor parte de las estructuras que encontramos en la vida cotidiana, incluidos los chasises automotrices, edificios y aeronaves, están estáticamente indeterminadas. Sin embargo, son mucho más complejas que las vigas y se deben diseñar mediante técnicas analíticas muy sofisticadas. Muchas de dichas técnicas se basan en los conceptos descritos en este capítulo y, por tanto, se puede considerar como una introducción al análisis de estructuras estáticamente indeterminadas de todos tipos.

10.2 TIPOS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Por lo general, las vigas estáticamente indeterminadas se identifican por la configuración de sus apoyos; por ejemplo, una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro (figura 10.1a) se denomina **viga en voladizo apuntalada.**

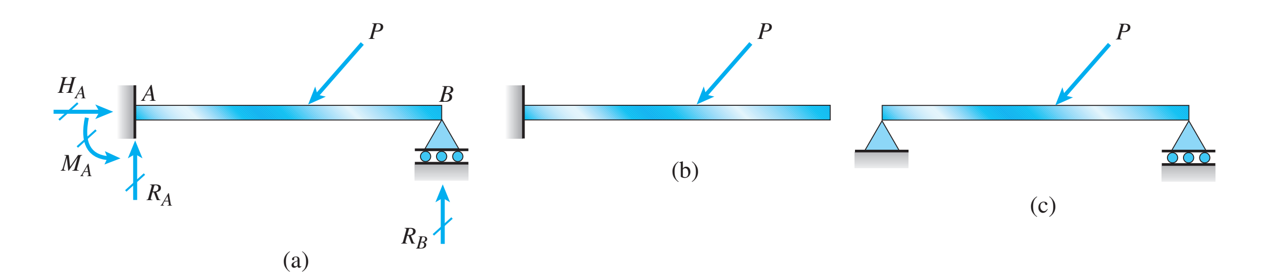


FIGURA 10.1 Viga en voladizo apuntalada: (a) viga con carga y reacciones; (b) estructura liberada cuando la reacción en el apoyo B se selecciona como redundante y (c) estructura liberada cuando la reacción de momento en el extremo A se selecciona como redundante.

Las reacciones de la viga que se muestran en la figura consisten en fuerzas horizontales y verticales en el empotramiento A, un momento en el empotramiento A y una fuerza vertical en el apoyo B. Dado que sólo hay tres ecuaciones de equilibrio independientes para esta viga, no es posible calcular las cuatro reacciones sólo por equilibrio. El número de reacciones que *excede* el número de ecuaciones de equilibrio se denomina **grado de indeterminación estática**. Por tanto, una viga en voladizo apuntalada es estáticamente indeterminada de primer grado.

Las reacciones en exceso se denominan **redundantes estáticas** y se deben seleccionar en cada caso particular. Por ejemplo, la reacción R_B de la viga en voladizo apuntalada que se muestra en la figura 10.1a se puede seleccionar como la reacción redundante. Puesto que esta reacción excede las necesarias para mantener el equilibrio, se puede liberar de la estructura removiendo el apoyo en B. Cuando el apoyo B se remueve, queda una viga en voladizo (figura 10.1b). La estructura que queda cuando se liberan las redundancias se denomina **estructura liberada** o **estructura primaria.** La estructura liberada debe ser estable (de modo que sea capaz de soportar cargas) y debe ser estáticamente determinada (de manera que todas las cantidades de fuerza se determinen sólo por equilibrio).

Otra posibilidad para el análisis de la viga en voladizo apuntalada de la figura 10.1a es seleccionar el momento reactivo M_A como el redundante. Entonces, cuando se elimina la restricción de momento en el empotramiento A, la estructura liberada es una viga simple con un apoyo de pasador en un extremo y un apoyo de rodillo en el otro (figura 10.1c).

Un caso especial se origina si todas las cargas que actúan sobre la viga son verticales (figura 10.2). Entonces la reacción horizontal en el apoyo A desaparece y permanecen tres reacciones; sin embargo, ahora sólo están disponibles dos ecuaciones de equilibrio independientes y, por tanto, la viga

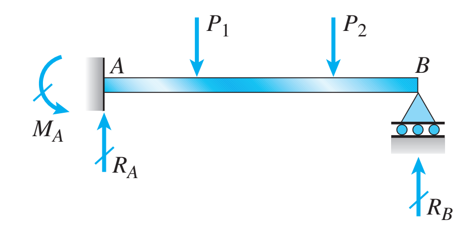


FIGURA 10.2 Viga en voladizo apuntalada sometida sólo a cargas verticales.

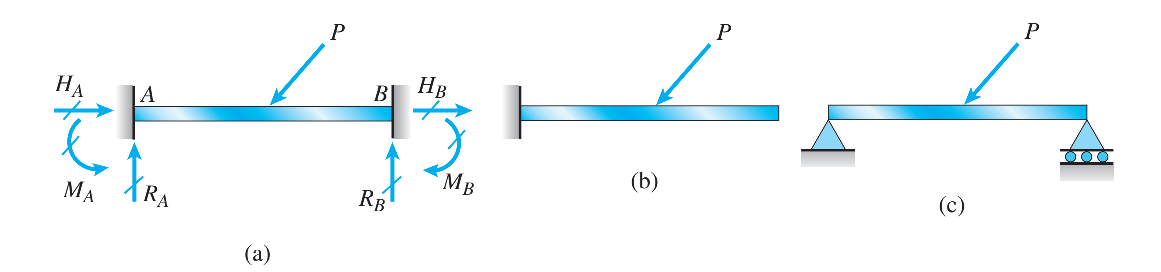


FIGURA 10.3 Viga con extremos empotrados: (a) viga con carga y reacciones; (b) estructura liberada cuando las tres reacciones en el extremo *B* se seleccionan como las redundantes y (c) estructura liberada cuando las dos reacciones de momento y la reacción horizontal en el extremo *B* se seleccionan como las redundantes.

aún es estáticamente indeterminada de primer grado. Si la reacción R_B se elige como la redundante, la estructura liberada es una viga en voladizo; si el momento M_A se elige, la estructura liberada es una viga simple.

Otro tipo de viga estáticamente indeterminada, conocida como **viga con extremos fijos**, se muestra en la figura 10.3a. Esta viga tiene soportes fijos en los dos extremos, lo que resulta en un total de seis reacciones desconocidas (dos fuerzas y un momento en cada soporte). Debido a que sólo hay tres ecuaciones de equilibrio, la viga es estáticamente indeterminada de tercer grado. (Otro nombre para este tipo de viga es *viga sujetada* y *viga empotrada*).

Si seleccionamos las tres reacciones en el extremo *B* de la viga como las redundantes y eliminamos las restricciones correspondientes, quedamos con una viga en voladizo como la estructura liberada (figura 10.3b). Si liberamos los dos momentos en los empotramientos y una reacción horizontal, la estructura liberada es una viga simple (figura 10.3c).

Al considerar de nuevo el caso especial de sólo cargas verticales (figura 10.4), encontramos que ahora la viga empotrada tiene sólo cuatro reacciones diferentes de cero (una fuerza y un momento en cada soporte). El número de ecuaciones de equilibrio disponibles es dos y, por tanto, la viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. Si las dos reacciones en el extremo *B* se seleccionan como las redundantes, la estructura liberada es una viga en voladizo; si se seleccionan los dos momentos, la estructura liberada es una viga simple.

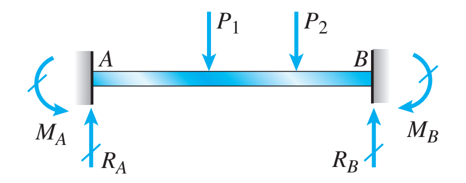


FIGURA 10.4 Viga con extremos fijos (doblemente empotrada) sólo con cargas verticales.

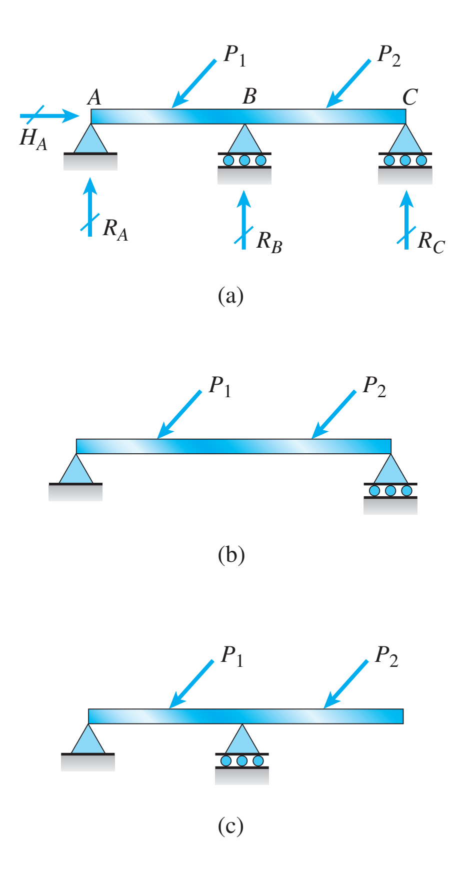


FIGURA 10.5 Ejemplo de una viga continua: (a) viga con cargas y reacciones; (b) estructura liberada cuando la reacción en el apoyo B se selecciona como la redundante y (c) estructura liberada cuando la reacción en el extremo C se selecciona como la redundante.



Los puentes con claros largos con frecuencia se construyen empleando vigas continuas

La viga que se muestra en la figura 10.5a es un ejemplo de una **viga continua**, denominada así debido a que tiene más de un claro y es continua sobre un apoyo interior. Esta viga en particular es estáticamente indeterminada de primer grado ya que hay cuatro fuerzas reactivas y sólo tres ecuaciones de equilibrio.

Si la reacción R_B en el apoyo interior se selecciona como la redundante y se elimina el apoyo correspondiente de la viga, entonces queda una estructura liberada en la forma de una viga simple estáticamente determinada (figura 10.5b). Si la reacción R_C se selecciona como la redundante, la estructura liberada es una viga simple con una saliente (figura 10.5c).

En las siguientes secciones estudiaremos dos métodos para analizar las vigas estáticamente indeterminadas. El objetivo en cada caso es determinar las reacciones redundantes y, una vez conocidas éstas, todas las reacciones restantes (más las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes) se pueden determinar con ecuaciones de equilibrio. En efecto, la estructura se ha convertido en una estáticamente determinada. Por tanto, como paso final en el análisis, los esfuerzos y las deformaciones se pueden determinar mediante los métodos descritos en capítulos anteriores.

10.3 ANÁLISIS DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las vigas estáticamente indeterminadas se pueden analizar al resolver cualquiera de las tres ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión: (1) la ecuación de segundo orden en términos del momento flexionante (ecuación 9.12a), (2) la ecuación de tercer orden en términos de la fuerza cortante (ecuación 9.12b) o (3) la ecuación de cuarto orden en términos de la intensidad de la carga distribuida (ecuación 9.12c).

El procedimiento es en esencia el mismo que para una viga estáticamente determinada (consulte las secciones 9.2, 9.3 y 9.4) y consiste en escribir la ecuación diferencial, integrar para obtener su solución general y luego aplicar condiciones de frontera y otras para evaluar las cantidades desconocidas. Las incógnitas consisten en las reacciones redundantes y en las constantes de integración.

La ecuación diferencial para una viga se puede resolver en términos simbólicos sólo cuando la viga y su carga son relativamente simples y no presentan complicaciones. Las soluciones resultantes están en la forma de fórmulas de propósito general. Sin embargo, en situaciones más complejas las ecuaciones diferenciales se deben resolver de manera numérica mediante programas de cómputo elaborados para ese fin. En esos casos los resultados se aplican sólo a problemas numéricos específicos.

Los siguientes ejemplos ilustran el análisis de vigas estáticamente indeterminadas mediante las ecuaciones diferenciales en términos simbólicos.

Ejemplo 10.1

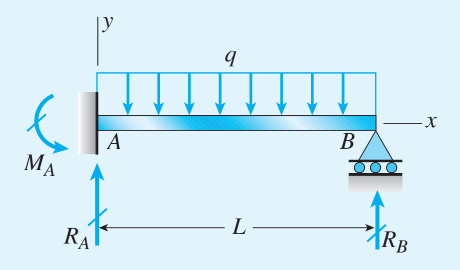


FIGURA 10.6 Ejemplo 10.1. Viga en voladizo apuntalada con una carga uniforme.

Una viga en voladizo apuntalada AB con longitud L soporta una carga uniforme de intensidad q (figura 10.6). Analice esta viga al resolver la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (la ecuación del momento flexionante). Determine las reacciones, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones de la viga.

Solución

Dado que la carga sobre esta viga actúa en la dirección vertical (figura 10.6), concluimos que no hay reacción horizontal en el empotramiento. Por tanto, la viga tiene tres reacciones desconocidas (M_A, R_A y R_B). Sólo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio para determinar estas reacciones y, por tanto, la viga es estáticamente indeterminada de primer grado.

Dado que analizaremos esta viga resolviendo la ecuación del momento flexionante, debemos iniciar con una expresión general para el momento. Esta expresión estará en términos de la carga y de la redundante seleccionada.

Reacción redundante. Elijamos la reacción R_B en el apoyo simple como la redundante. Luego, considerando el equilibrio de toda la viga, podemos expresar las otras dos reacciones en términos de R_B:

$$R_A = qL - R_B \qquad M_A = \frac{qL^2}{2} - R_B L \tag{a,b}$$

Momento flexionante. El momento flexionante M a la distancia x desde el empotramiento se puede expresar en términos de las reacciones como sigue:

$$M = R_A x - M_A - \frac{qx^2}{2} \tag{c}$$

Esta ecuación se puede obtener mediante la técnica acostumbrada de elaborar un diagrama de cuerpo libre de parte de la viga y resolver una ecuación de equilibrio.

Al sustituir las ecuaciones (a) y (b) en la ecuación (c), obtenemos el momento flexionante en términos de la carga y de la reacción redundante:

$$M = qLx - R_B x - \frac{qL^2}{2} + R_B L - \frac{qx^2}{2} \tag{d}$$

Ecuación diferencial. La ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (ecuación 9.12a) ahora se convierte en

$$EIv'' = M = qLx - R_B x - \frac{qL^2}{2} + R_B L - \frac{qx^2}{2} \tag{e}$$

Después de dos integraciones sucesivas obtenemos las siguientes ecuaciones para las pendientes y deflexiones de la viga:

$$EIv' = \frac{qLx^2}{2} - \frac{R_B x^2}{2} - \frac{qL^2 x}{2} + R_B L x - \frac{qx^3}{6} + C_1 \tag{f}$$

$$EIv = \frac{qLx^3}{6} - \frac{R_B x^3}{6} - \frac{qL^2 x^2}{4} + \frac{R_B L x^2}{2} - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2 \tag{g}$$

Estas ecuaciones contienen tres cantidades desconocidas (C_1, C_2 y R_B).

Condiciones de frontera. De la inspección de la figura 10.6 son aparentes tres condiciones de frontera relativas a las deflexiones y pendientes de la viga. Estas condiciones son las siguientes: (1) la deflexión en el empotramiento es cero, (2) la pendiente en el empotramiento es cero y (3) la deflexión en el apoyo simple es cero. Por tanto,

$$v(0) = 0 \qquad v'(0) = 0 \qquad v(L) = 0$$

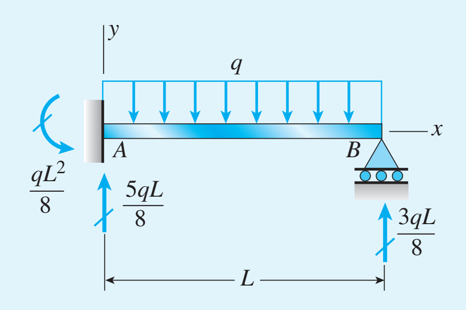
Al aplicar estas condiciones a las ecuaciones para las pendientes y deflexiones (ecuaciones f y g), obtenemos $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, y

$$R_B = \frac{3qL}{8} \tag{10.1}$$

De esta manera ahora conocemos la reacción redundante R_B.

Reacciones. Establecido el valor de la redundante podemos encontrar las reacciones restantes con las ecuaciones (a) y (b). Los resultados son

$$R_A = \frac{5qL}{8} \qquad M_A = \frac{qL^2}{8} \tag{10.2a,b}$$

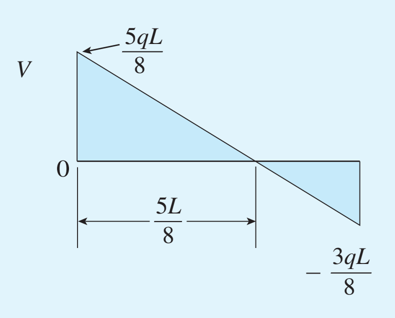


Conocidas estas reacciones podemos determinar las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en la viga.

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Estas cantidades se pueden obtener mediante las técnicas usuales que comprenden diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio. Los resultados son

$$V = R_A - qx = \frac{5qL}{8} - qx \tag{10.3}$$

$$M = R_A x - M_A - \frac{qx^2}{2} = \frac{5qLx}{8} - \frac{qL^2}{8} - \frac{qx^2}{2} \tag{10.4}$$



Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga se pueden trazar con base en estas ecuaciones (consulte la figura 10.7).

A partir de los diagramas observamos que la fuerza cortante máxima ocurre en el empotramiento y es igual a

$$V_{\text{máx}} = \frac{5qL}{8} \tag{10.5}$$

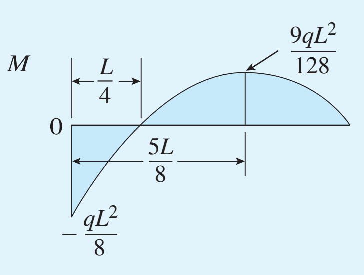


FIGURA 10.7 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga en voladizo con apoyo de la figura 10.6.

Además, los momentos flexionantes máximos positivo y negativo son

$$M_{\text{pos}} = \frac{9qL^2}{128} \qquad M_{\text{neg}} = -\frac{qL^2}{8} \tag{10.6a,b}$$

Por último, observamos que el momento flexionante es igual a cero a una distancia $x = L/4$ desde el empotramiento.

Pendientes y deflexiones de la viga. Regresando a las ecuaciones (f) y (g) para las pendientes y deflexiones, ahora sustituimos los valores de las constantes de integración ($C_1 = 0$ y $C_2 = 0$) así como la expresión para la redundante R_B (ecuación 10.1) y obtenemos

continúa

$$v' = \frac{qx}{48EI}(-6L^2 + 15Lx - 8x^2) \qquad (10.7)$$

$$v = -\frac{qx^2}{48EI}(3L^2 - 5Lx + 2x^2) \qquad (10.8)$$

La forma flexionada de la viga obtenida con la ecuación (10.8) se muestra en la figura 10.8.

Para determinar la deflexión máxima de la viga, igualamos a cero la pendiente (ecuación 10.7) y despejamos la distancia x_1 hasta el punto donde ocurre esta deflexión:

$$v' = 0 \quad \text{o} \quad -6L^2 + 15Lx - 8x^2 = 0$$

de donde

$$x_1 = \frac{15 - \sqrt{33}}{16}L = 0.5785L \qquad (10.9)$$

Al sustituir este valor de x en la ecuación para la deflexión (ecuación 10.8) y también cambiando el signo, obtenemos la deflexión máxima:

$$\delta_{máx} = -(v)_{x=x_1} = \frac{qL^4}{65{,}536EI}(39 + 55\sqrt{33})$$

$$= \frac{qL^4}{184.6EI} = 0.005416\frac{qL^4}{EI} \qquad (10.10)$$

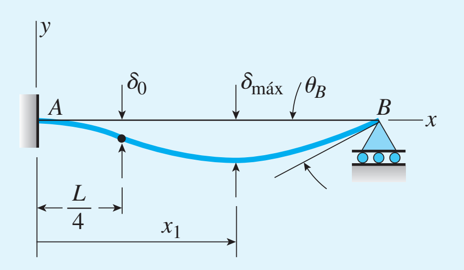


FIGURA 10.8 Curva de deflexión para la viga en voladizo apuntalada de la figura 10.6.

El punto de inflexión está ubicado donde el momento flexionante es igual a cero, es decir, donde $x = L/4$. La deflexión correspondiente δ_0 de la viga (de la ecuación 10.8) es

$$\delta_0 = -(v)_{x=L/4} = \frac{5qL^4}{2048EI} = 0.002441\frac{qL^4}{EI} \qquad (10.11)$$

Observe que cuando $x < L/4$, la curvatura y el momento flexionante son negativos y cuando $x > L/4$, la curvatura y el momento flexionante son positivos.

Para determinar el ángulo de rotación θ_B en el extremo simplemente apoyado de la viga, empleamos la ecuación (10.7), como se muestra:

$$\theta_B = (v')_{x=L} = \frac{qL^3}{48EI} \qquad (10.12)$$

Las pendientes y las deflexiones en otros puntos a lo largo del eje de la viga se pueden obtener mediante procedimientos similares.

Nota: en este ejemplo analizamos la viga considerando la reacción R_B (figura 10.6) como la redundante. Un procedimiento alternativo es tomar el momento reactivo M_A como el redundante. Entonces podemos expresar el momento flexionante M en términos de M_A, sustituir la expresión resultante en la ecuación diferencial de segundo orden y resolverla igual que antes. Otra técnica es iniciar con la ecuación diferencial de cuarto orden, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.2

Una viga *ACB* doblemente empotrada que se muestra en la figura 10.9 soporta una carga concentrada *P* en el centro del claro. Analice esta viga al resolver la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga). Determine las reacciones, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones de la viga.

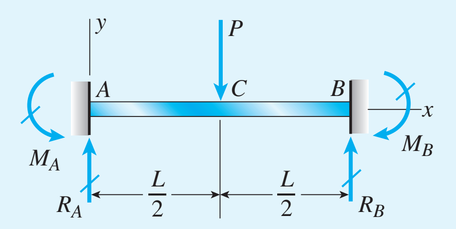


FIGURA 10.9 Ejemplo 10.2. Viga doblemente empotrada con una carga concentrada a la mitad de su claro.

Solución

Como la carga en esta viga actúa sólo en la dirección vertical, sabemos que no hay reacciones horizontales en los empotramientos. Por tanto, la viga tiene cuatro reacciones desconocidas, dos en cada empotramiento. Dado que sólo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio, la viga es estáticamente indeterminada de segundo grado.

Sin embargo, podemos simplificar el análisis observando de la simetría de la viga y de su carga que las fuerzas y los momentos en los empotramientos *A* y *B* son iguales, es decir,

$$R_A = R_B \quad \text{y} \quad M_A = M_B$$

Puesto que las reacciones verticales en los empotramientos son iguales, sabemos del equilibrio de fuerzas en la dirección vertical que cada fuerza es igual a $P/2$:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \qquad (10.13)$$

Por tanto, las únicas cantidades desconocidas que permanecen son las reacciones de momento M_A y M_B; por conveniencia, seleccionaremos M_A como la cantidad redundante.

Ecuación diferencial. Debido a que no hay carga que actúe sobre la viga entre los puntos *A* y *C*, la ecuación diferencial de cuarto orden (ecuación 9.12c) para la mitad izquierda de la viga es

$$EIv'''' = -q = 0 \qquad (0 < x < L/2) \qquad \text{(b)}$$

continúa

Integraciones sucesivas de esta ecuación producen las ecuaciones siguientes, que son válidas para la mitad izquierda de la viga:

$$EIv''' = C_1 \tag{i}$$

$$EIv'' = C_1x + C_2 \tag{j}$$

$$EIv' = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \tag{k}$$

$$EIv = \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \tag{l}$$

Estas ecuaciones contienen cuatro constantes de integración desconocidas. Puesto que ahora tenemos cinco incógnitas (C_1, C_2, C_3, C_4 y M_A), necesitamos cinco condiciones de frontera.

Condiciones de frontera. Las condiciones de frontera aplicables a la mitad izquierda de la viga son las siguientes:

(1) La fuerza cortante en el segmento izquierdo de la viga es igual a R_A, o $P/2$. Por tanto, de la ecuación (9.12b) obtenemos

$$EIv''' = V = \frac{P}{2}$$

Al combinar esta ecuación con la ecuación (i), obtenemos $C_1 = P/2$.

(2) El momento flexionante en el empotramiento izquierdo es igual a $-M_A$. Por tanto, de la ecuación (9.12a) obtenemos

$$EIv'' = M = -M_A \quad \text{en} \quad x = 0$$

Al combinar esta ecuación con la ecuación (j), obtenemos $C_2 = -M_A$.

(3) La pendiente de la viga en el empotramiento izquierdo ($x = 0$) es igual a cero. Por tanto, la ecuación (k) produce $C_3 = 0$.

(4) La pendiente de la viga a la mitad del claro ($x = L/2$) también es igual a cero (de la simetría). Por tanto, de la ecuación (k) obtenemos

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} \tag{10.14}$$

De esta manera hemos determinado los momentos reactivos en los empotramientos de la viga.

(5) La deflexión de la viga en el empotramiento izquierdo ($x = 0$) es igual a cero. Por tanto, de la ecuación (l) encontramos $C_4 = 0$.

En resumen, las cuatro constantes de integración son

$$C_1 = \frac{P}{2} \qquad C_2 = -M_A = -\frac{PL}{8} \qquad C_3 = 0 \qquad C_4 = 0 \tag{m,n,o,p}$$

Fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes se pueden determinar sustituyendo las constantes de integración apropiadas en las ecuaciones (i) y (j). Los resultados son

$$EIv''' = V = \frac{P}{2} \qquad (0 < x < L/2) \tag{10.15}$$

$$EIv'' = M = \frac{Px}{2} - \frac{PL}{8} \qquad (0 \le x \le L/2) \tag{10.16}$$

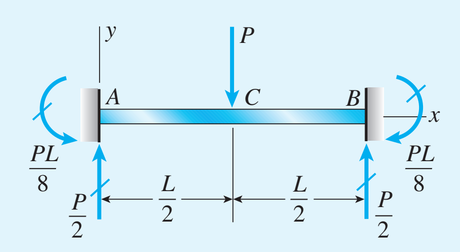
Como conocemos las reacciones de la viga, también podemos obtener estas expresiones de manera directa a partir de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio.

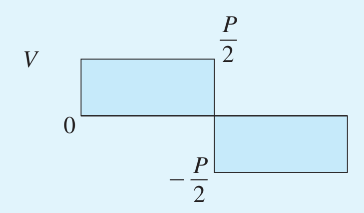
Los diagrama de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 10.10.

Pendientes y deflexiones. Las pendientes y las deflexiones en la mitad izquierda de la viga se pueden encontrar con las ecuaciones (k) y (l) sustituyendo las expresiones para las constantes de integración. De esta manera obtenemos

$$v' = -\frac{Px}{8EI}(L - 2x) \qquad (0 \le x \le L/2) \qquad (10.17)$$

$$v = -\frac{Px^2}{48EI}(3L - 4x) \qquad (0 \le x \le L/2) \qquad (10.18)$$





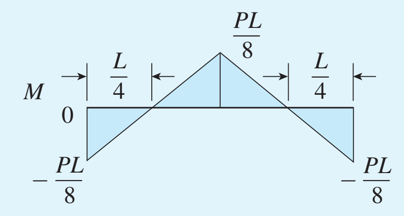


FIGURA 10.10 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga doblemente empotrada de la figura 10.9.

La curva de deflexión de la viga se muestra en la figura 10.11.

Para encontrar la deflexión máxima $\delta_{\text{máx}}$ igualamos x a $L/2$ en la ecuación (10.18) y cambiamos el signo; entonces

$$\delta_{\text{máx}} = -(v)_{x=L/2} = \frac{PL^3}{192EI} \qquad (10.19)$$

El punto de inflexión en la mitad izquierda de la viga ocurre donde el momento flexionante M es igual a cero, es decir, donde $x = L/4$ (consulte la ecuación 10.16). La deflexión correspondiente δ_0 (de la ecuación 10.18) es

$$\delta_0 = -(v)_{x=L/4} = \frac{PL^3}{384EI} \qquad (10.20)$$

que es numéricamente igual a la mitad de la deflexión máxima. Un segundo punto de inflexión se tiene en la mitad derecha de la viga a una distancia $L/4$ desde el extremo B.

Notas: como observamos en este ejemplo, el número de condiciones de frontera y de otros tipos siempre es suficiente para evaluar no sólo las constantes de integración, sino también las reacciones redundantes.

Algunas veces es necesario establecer ecuaciones diferenciales para más de una región de la viga y utilizar condiciones de continuidad entre regiones, como se ilustra en los ejemplos 9.3 y 9.5 del capítulo 9 para vigas estáticamente determinadas. Es probable que esos análisis sean largos y tediosos debido al gran número de condiciones que se deben satisfacer. Sin embargo, si las deflexiones y los ángulos de rotación sólo se necesitan en uno o dos puntos específicos, el método de superposición puede ser útil (consulte la siguiente sección).

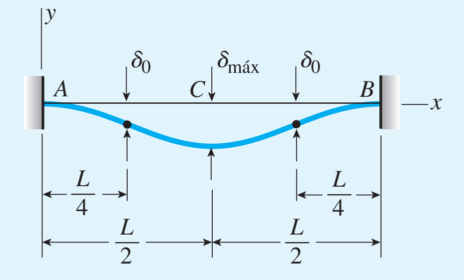


FIGURA 10.11 Curva de deflexión para la viga doblemente empotrada de la figura 10.9.

10.4 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

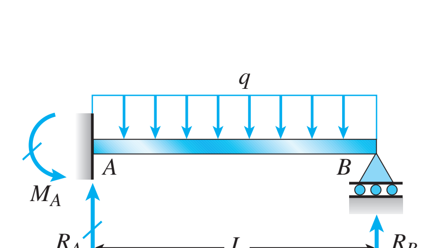
El método de superposición es de importancia fundamental en el análisis de barras, armaduras, vigas, marcos y muchos otros tipos de estructuras estáticamente indeterminadas. Ya hemos empleado el método de superposición para analizar estructuras estáticamente indeterminadas compuestas de barras en tensión y compresión (sección 2.4) y ejes en torsión (sección 3.8). En esta sección aplicaremos el método a vigas.

Iniciaremos el análisis observando el grado de indeterminación estática y seleccionando las reacciones redundantes. Luego, al haber identificado las redundantes, podemos escribir **ecuaciones de equilibrio** que relacionen las otras reacciones desconocidas con las redundantes y las cargas.

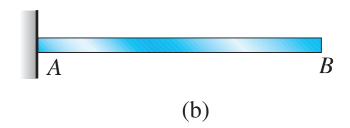
A continuación suponemos que tanto las cargas originales como las reacciones redundantes actúan sobre la estructura liberada y encontramos las deflexiones superponiendo las deflexiones separadas debidas a las cargas y a las redundantes. La suma de estas deflexiones debe ser igual a las deflexiones en la viga original. Sin embargo, las deflexiones en la viga original (en los puntos donde se eliminaron restricciones) son cero o tienen valores conocidos. Por tanto, podemos escribir **ecuaciones de compatibilidad** (o *ecuaciones de superposición*) que expresen el hecho de que las deflexiones de la estructura liberada (en los puntos donde se eliminaron las restricciones) son iguales que las deflexiones en la viga original (en esos mismos puntos).

Como la estructura liberada es estáticamente indeterminada, es fácil determinar sus deflexiones empleando las técnicas descritas en el capítulo 9. Las relaciones entre las cargas y las deflexiones de la estructura liberada se denominan **relaciones fuerza-desplazamiento**. Al sustituir estas relaciones en las ecuaciones de compatibilidad, obtenemos ecuaciones en las que las redundantes son las cantidades desconocidas. Por tanto, en esas ecuaciones podemos despejar las reacciones redundantes. Después, conocidas las redundantes, podemos determinar todas las otras reacciones a partir de las ecuaciones de equilibrio. Además, partiendo del equilibrio podemos determinar también las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes.

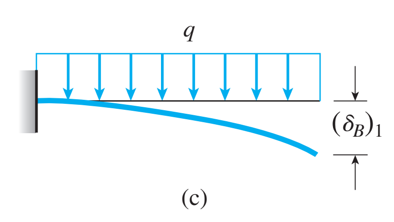
Los pasos descritos en términos generales en los párrafos anteriores se aclaran considerando un caso particular, el de una viga en voladizo apuntalada que soporta una carga uniforme (figura 10.12a). Efectuaremos dos análisis, el primero con la fuerza de reacción R_B seleccionada como la redundante y el segundo con el momento de reacción M_A como el redundante. (Esta misma viga se analizó en el ejemplo 10.1 de la sección 10.3 resolviendo la ecuación diferencial de la curva de deflexión.)



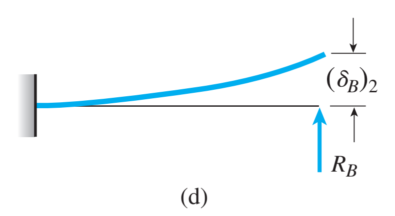
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 10.12 Análisis de una viga en voladizo apuntalada por el método de superposición con la reacción R_B seleccionada como la redundante.

Análisis con R_B como redundante

En este primer ejemplo seleccionamos la reacción R_B en el apoyo simple (figura 10.12a) como la redundante. Entonces, las *ecuaciones de equilibrio* que expresan las otras reacciones desconocidas en términos de la redundante son las siguientes:

$$R_A = qL - R_B \qquad M_A = \frac{qL^2}{2} - R_B L \tag{a,b}$$

Estas ecuaciones se obtienen de ecuaciones de equilibrio que se aplican a toda la viga considerada como un cuerpo libre (figura 10.12a).

El paso siguiente es eliminar la restricción correspondiente a la redundante (en este caso, eliminamos el apoyo en el extremo B). La *estructura liberada* que queda es una viga en voladizo (figura 10.12b). La carga uniforme q y la fuerza redundante R_B se aplican ahora como cargas sobre la estructura liberada (figuras 10.12c y d).

La deflexión en el extremo B de la estructura liberada debida sólo a la carga uniforme se denota $(\delta_B)_1$ y la deflexión en el mismo punto debida sólo a la redundante se denota $(\delta_B)_2$. La deflexión δ_B en el punto B en la estructura original se obtiene superponiendo estas dos deflexiones. Como la deflexión en la viga original es igual a cero, obtenemos la siguiente *ecuación de compatibilidad*:

$$\delta_B = (\delta_B)_1 - (\delta_B)_2 = 0 \tag{c}$$

El signo menos aparece en esta ecuación debido a que $(\delta_B)_1$ es positiva hacia abajo en tanto que $(\delta_B)_2$ es positiva hacia arriba.

Las *relaciones fuerza*-desplazamiento que dan las deflexiones $(\delta_B)_1$ y $(\delta_B)_2$ en términos de la carga uniforme q y de la reacción redundante R_B, respectivamente, se determinan con ayuda de la tabla G.1 del apéndice G (consulte los casos 1 y 4). Utilizando las fórmulas dadas allí, obtenemos

$$(\delta_B)_1 = \frac{qL^4}{8EI} \qquad (\delta_B)_2 = \frac{R_B L^3}{3EI} \tag{d,e}$$

Al sustituir estas relaciones fuerza-desplazamiento en la ecuación de compatibilidad da

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \tag{f}$$

de donde se puede despejar la *reacción redundante*:

$$R_B = \frac{3qL}{8} \tag{10.21}$$

Observe que esta ecuación da la redundante en términos de las cargas que actúan sobre la viga original.

Las reacciones restantes (R_A y M_A) se pueden encontrar con ecuaciones de equilibrio (ecuaciones a y b); los resultados son

$$R_A = \frac{5qL}{8} \qquad M_A = \frac{qL^2}{8} \tag{10.22a,b}$$

Conocidas todas las reacciones, ahora podemos obtener las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en toda la viga y trazar los diagramas correspondientes (consulte la figura 10.7 para ver estos diagramas).

También podemos determinar las *deflexiones y pendientes* de la viga original mediante el principio de superposición. El procedimiento consiste en superponer las deflexiones de la estructura liberada cuando se somete a

las cargas que se muestran en las figuras 10.12c y d. Por ejemplo, las ecuaciones de las curvas de deflexión para estos dos sistemas de carga se obtienen de los casos 1 y 4, respectivamente, de la tabla G.1 del apéndice G:

$$v_1 = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$$v_2 = \frac{R_B x^2}{6EI}(3L - x)$$

Al sustituir el valor de R_B de la ecuación (10.21) y luego sumando las deflexiones v_1 y v_2; obtenemos la siguiente ecuación para la curva de deflexión de la viga original estáticamente indeterminada (figura 10.12a):

$$v = v_1 + v_2 = -\frac{qx^2}{48EI}(3L^2 - 5Lx + 2x^2)$$

Esta ecuación concuerda con la ecuación (10.8) del ejemplo 10.1. Otras cantidades de la deflexión se pueden encontrar de manera análoga.

Análisis con M_A como redundante

Ahora analizaremos la misma viga en voladizo apuntalada seleccionando la reacción de momento M_A como la redundante (figura 10.13). En este caso la estructura liberada es una viga simple (figura 10.13b). Las ecuaciones de equilibrio para las reacciones R_A y R_B en la viga original son:

$$R_A = \frac{qL}{2} + \frac{M_A}{L} \qquad R_B = \frac{qL}{2} - \frac{M_A}{L} \qquad \text{(g,h)}$$

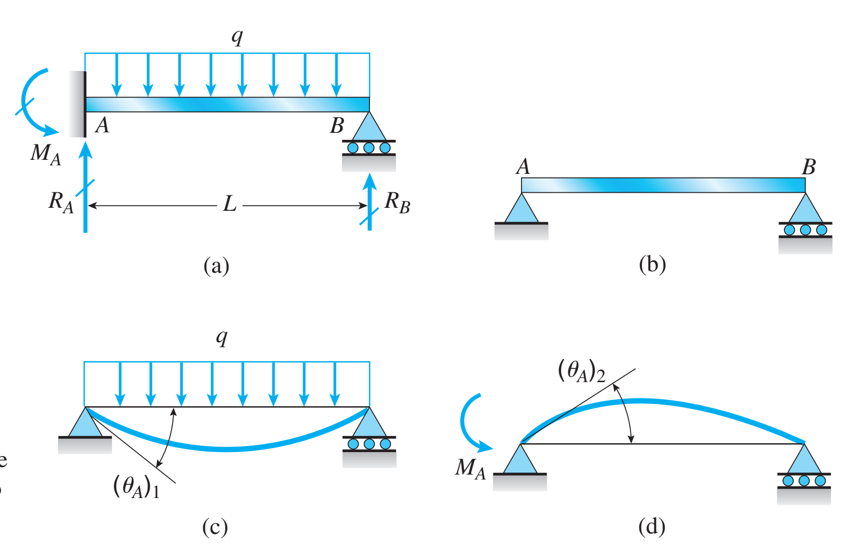


FIGURA 10.13 Análisis de una viga en voladizo apuntalada mediante el método de superposición con la reacción de momento M_A seleccionada como la redundante.

La ecuación de compatibilidad expresa el hecho de que el ángulo de rotación θ_A en el extremo empotrado de la viga original es igual a cero. Como este ángulo se obtiene superponiendo los ángulos de rotación $(\theta_A)_1$ y $(\theta_A)_2$ en la estructura liberada (figuras 10.13c y d), la *ecuación de compatibilidad* se convierte en

$$\theta_A = (\theta_A)_1 - (\theta_A)_2 = 0 \tag{i}$$

En esta ecuación el ángulo $(\theta_A)_1$ se supone positivo en el sentido de las manecillas del reloj y el ángulo $(\theta_A)_2$ se supone positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Los ángulos de rotación en la estructura liberada se obtienen con las fórmulas dadas en la tabla G.2 del apéndice G (consulte los casos 1 y 7). Por tanto, las *relaciones fuerza-desplazamiento* son:

$$(\theta_A)_1 = \frac{qL^3}{24EI} \qquad (\theta_A)_2 = \frac{M_A L}{3EI}$$

Al sustituir en la ecuación de compatibilidad (ecuación i), obtenemos

$$\theta_A = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_A L}{3EI} = 0 \tag{j}$$

Al despejar la redundante de esta ecuación, obtenemos $M_A = qL/8$, que concuerda con el resultado anterior (ecuación 10.22b). Además, las ecuaciones de equilibrio (ecuaciones g y h) producen los mismos resultados anteriores para las reacciones R_A y R_B (consulte las ecuaciones 10.22a y 10.21, respectivamente).

Ahora que hemos determinado todas las reacciones, podemos determinar las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones mediante las técnicas ya descritas.

Comentarios generales

El método de superposición descrito en esta sección también se denomina *método de la flexibilidad* o *método de la fuerza*. Este último nombre se origina del uso de las cantidades de fuerza (fuerzas y momentos) como las redundantes; el primer nombre se utiliza debido a que los coeficientes de las cantidades desconocidas en la ecuación de compatibilidad (términos como $L^3/3EI$ en la ecuación f y $L/3EI$ en la ecuación j) son *flexibilidades* (es decir, deflexiones o ángulos producidos por una carga unitaria).

Dado que el método de superposición comprende la superposición de deflexiones, sólo es aplicable a estructuras linealmente elásticas. (Recuerde que esta misma limitación se aplica a todos los temas estudiados en este capítulo.)

En los ejemplos siguientes, y también en los problemas al final del capítulo, nuestro interés principal es determinar las reacciones, ya que este es el paso clave en las soluciones.

Ejemplo 10.3

Una viga continua ABC con dos claros soporta una carga uniforme con intensidad q, como se muestra en la figura 10.14a. Cada claro de la viga tiene longitud L. Utilizando el método de superposición determine todas las reacciones para esta viga.

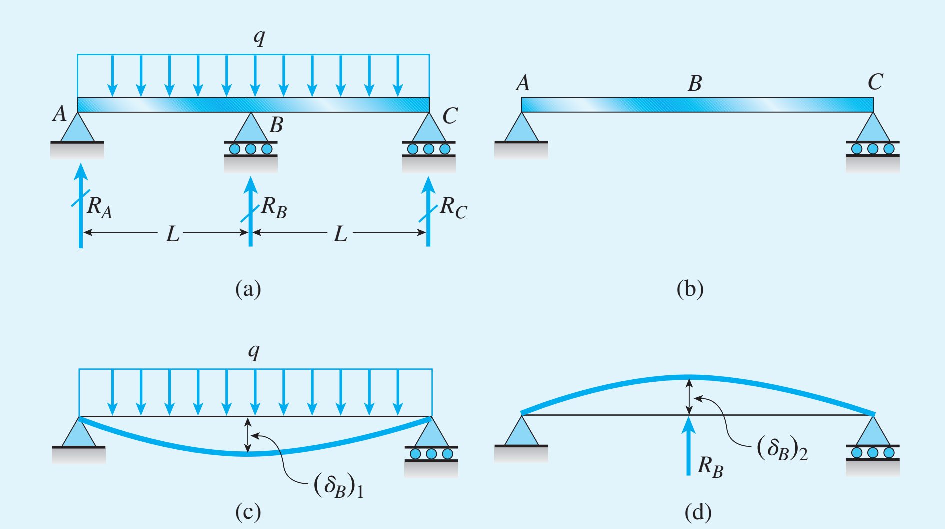


FIGURA 10.14 Ejemplo 10.3. Viga continua con dos claros con una carga uniforme.

Solución

Esta viga tiene tres reacciones desconocidas (R_A, R_B y R_C) y como hay dos ecuaciones de equilibrio para la viga como una unidad, se trata de una estructura estáticamente indeterminada de primer grado. Por conveniencia, seleccionemos la reacción R_B en el apoyo medio como la redundante.

Ecuaciones de equilibrio. Podemos expresar las reacciones R_A y R_C en términos de la redundante R_B mediante dos ecuaciones de equilibrio. La primera, que es para equilibrio de momentos con respecto al punto B, muestra que R_A y R_C son iguales. La segunda, que es para equilibrio en la dirección vertical, produce el siguiente resultado:

$$R_A = R_C = qL - \frac{R_B}{2} \qquad \text{(k)}$$

Ecuación de compatibilidad. Como la reacción R_B se seleccionó como la redundante, la estructura liberada es una viga simple con apoyos en A y C (figura 10.14b). Las deflexiones en el punto B en la estructura liberada debidas a la carga uniforme q y a la redundante R_B se muestran en las figuras 10.14c y d, respectivamente. Observe que las deflexiones se denotan $(\delta_B)_1$ y $(\delta_B)_2$. La superposición de estas deflexiones debe producir la deflexión δ_B en la viga original en el punto B. Como esta última deflexión es igual a cero, la ecuación de compatibilidad es

$$\delta_B = (\delta_B)_1 - (\delta_B)_2 = 0 \qquad \text{(l)}$$

en donde la deflexión $(\delta_B)_1$ es positiva hacia abajo y la deflexión $(\delta_B)_2$ es positiva hacia arriba.

Relaciones fuerza-desplazamiento. La deflexión $(\delta_B)_1$ causada por la carga uniforme que actúa sobre la estructura liberada (figura 10.14c) se obtiene de la tabla G.2, caso 1, como sigue:

$$(\delta_B)_1 = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

donde $2L$ es la longitud de la estructura liberada. La deflexión $(\delta_B)_2$ producida por la redundante (figura 10.14d) es

$$(\delta_B)_2 = \frac{R_B(2L)^3}{48EI} = \frac{R_B L^3}{6EI}$$

como se obtuvo de la tabla G.2, caso 4.

Reacciones. La ecuación de compatibilidad relativa a la deflexión vertical en el punto B (ecuación l) ahora es

$$\delta_B = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_B L^3}{6EI} = 0 \qquad \text{(m)}$$

de la cual encontramos la reacción en el apoyo medio:

$$R_B = \frac{5qL}{4} \qquad (10.23)$$

Las otras reacciones se obtienen con la ecuación (k):

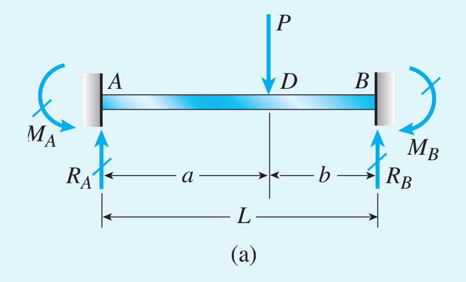
$$R_A = R_C = \frac{3qL}{8} \qquad (10.24)$$

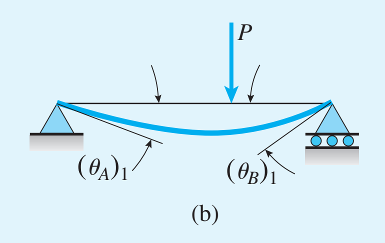
Conocidas las reacciones, podemos encontrar las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, los esfuerzos y las deflexiones sin dificultad.

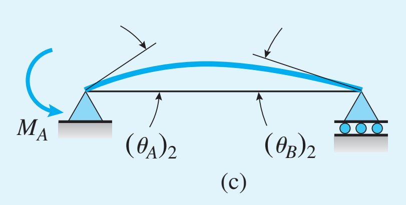
Nota: el objetivo de este ejemplo es ilustrar el método de superposición, por lo que hemos descrito todos los pasos en el análisis. Sin embargo, esta viga en particular (figura 10.14a) se puede analizar por inspección debido a la simetría de la viga y de su carga.

De la simetría sabemos que la pendiente de la viga en el apoyo medio debe ser cero y, por tanto, cada mitad de la viga está en la misma condición que una viga en voladizo apuntalada con una carga uniforme (consulte, por ejemplo, la figura 10.6). En consecuencia, todos nuestros resultados anteriores para una viga en voladizo apuntalada con una carga uniforme (ecuaciones 10.1 a 10.12) se pueden adaptar con facilidad a las condiciones de la viga de la figura 10.14a.

Ejemplo 10.4







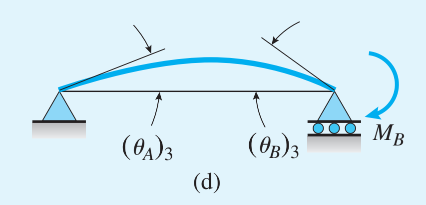


FIGURA 10.15 Ejemplo 10.4. Viga doblemente empotrada con una carga concentrada.

Una viga AB doblemente empotrada (figura 10.15a) está cargada por una fuerza P que actúa en un punto intermedio D. Encuentre las fuerzas y los momentos reactivos en los empotramientos de la viga empleando el método de superposición. Además, determine la deflexión en el punto D donde se aplica la carga.

Solución

Esta viga tiene cuatro reacciones desconocidas (una fuerza y un momento en cada empotramiento), pero sólo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio independientes. Por tanto, la viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. En este ejemplo seleccionaremos los momentos reactivos M_A y M_B como los redundantes.

Ecuaciones de equilibrio. Las dos fuerzas de reacción desconocidas (R_A y R_B) se pueden expresar en términos de las redundantes (M_A y M_B) con la ayuda de dos ecuaciones de equilibrio. La primera ecuación es para momentos con respecto al punto B y la segunda es para momentos con respecto al punto A. Las expresiones resultantes son

$$R_A = \frac{Pb}{L} + \frac{M_A}{L} - \frac{M_B}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L} - \frac{M_A}{L} + \frac{M_B}{L} \tag{n,o}$$

Ecuaciones de compatibilidad. Cuando las dos redundantes se liberan al eliminar las restricciones rotacionales en los extremos de la viga, nos queda una viga simple como estructura liberada (figuras 10.15b, c y d). Los ángulos de rotación en los extremos de la estructura liberada debidos a la carga concentrada P se denotan $(\theta_A)_1$ y $(\theta_B)_1$, como se muestra en la figura 10.15b. De manera similar, los ángulos en los extremos debidos a la redundante M_A se denotan $(\theta_A)_2$ y $(\theta_B)_2$ y los ángulos debidos a la redundante M_B se denotan $(\theta_A)_3$ y $(\theta_B)_3$.

Como los ángulos de rotación en los empotramientos de la viga original son iguales a cero, las dos ecuaciones de compatibilidad son

$$\theta_A = (\theta_A)_1 - (\theta_A)_2 - (\theta_A)_3 = 0 \tag{p}$$

$$\theta_B = (\theta_B)_1 - (\theta_B)_2 - (\theta_B)_3 = 0 \tag{q}$$

en donde los signos de los varios términos se determinan por inspección de las figuras.

Relaciones fuerza-desplazamiento. Los ángulos en los extremos de la viga debidos a la carga P (figura 10.15b) se obtienen del caso 5 de tabla G.2:

$$(\theta_A)_1 = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad (\theta_B)_1 = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

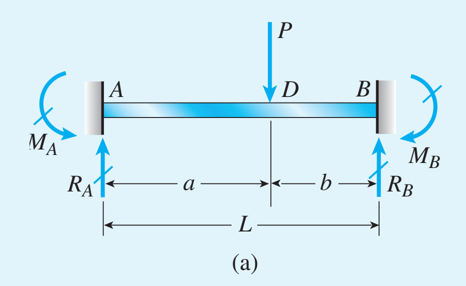
en donde a y b son las distancias desde los apoyos hasta el punto D donde se aplica la carga.

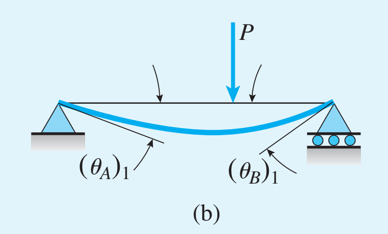
Además, los ángulos en los extremos debidos al momento redundante M_A son (consulte el caso 7 de la tabla G.2):

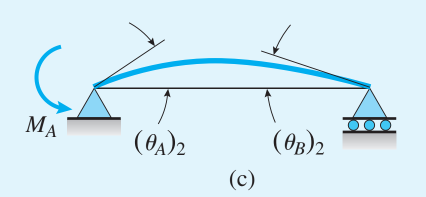
$$(\theta_A)_2 = \frac{M_A L}{3EI} \qquad (\theta_B)_2 = \frac{M_A L}{6EI}$$

De manera similar, los ángulos debidos al momento M_B son

$$(\theta_A)_3 = \frac{M_B L}{6EI} \qquad (\theta_B)_3 = \frac{M_B L}{3EI}$$







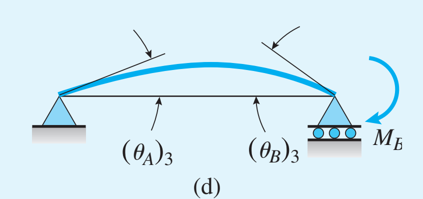


FIGURA 10.15 (Repetida.)

Reacciones. Cuando las expresiones anteriores para los ángulos se sustituyen en las ecuaciones de compatibilidad (ecuaciones p y q), llegamos a dos ecuaciones simultáneas que contienen M_A y M_B como incógnitas:

$$\frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} = \frac{Pab(L + b)}{6LEI} \qquad \text{(r)}$$

$$\frac{M_A L}{6EI} + \frac{M_B L}{3EI} = \frac{Pab(L + a)}{6LEI} \qquad \text{(s)}$$

Al despejar las redundantes, obtenemos

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \qquad M_B = \frac{Pa^2 b}{L^2} \qquad \text{(10.25a,b)}$$

Sustituimos estas expresiones para M_A y M_B en las ecuaciones de equilibrio (ecuaciones n y o), y obtenemos las reacciones verticales:

$$R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(L + 2a) \qquad R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(L + 2b) \qquad \text{(10.26a,b)}$$

De esta manera hemos determinado todas las reacciones para la viga doblemente empotrada.

Las reacciones en los soportes de una viga con extremos empotrados suelen denominarse **momentos de empotramiento** y **fuerzas de empotramiento** y son de uso común en el análisis estructural, por lo que las fórmulas para estas cantidades se encuentran en manuales de ingeniería.

Deflexión en el punto D. para obtener la deflexión en el punto D en la viga doblemente empotrada original (figura 10.15a), de nuevo utilizamos el principio de superposición. La deflexión en el punto D es igual a la suma de tres deflexiones: (1) la deflexión hacia abajo $(\delta_D)_1$ en el punto D de la estructura liberada debida a la carga P (figura 10.15b); (2) la deflexión hacia arriba $(\delta_D)_2$ en el mismo punto en la estructura liberada debida a la redundante M_A (figura 10.15c) y (3) la deflexión hacia arriba $(\delta_D)_3$ en el mismo punto en la estructura liberada debida a la redundante M_B (figura 10.15d). Esta superposición de deflexiones se expresa por la ecuación siguiente:

$$\delta_D = (\delta_D)_1 - (\delta_D)_2 - (\delta_D)_3 \qquad \text{(t)}$$

En donde δ_D es la deflexión hacia abajo en la viga original.

Las deflexiones que aparecen en la ecuación (t) se pueden obtener con las fórmulas de la tabla G.2 del apéndice G (consulte los casos 5 y 7) haciendo sustituciones

continúa

apropiadas y simplificaciones algebraicas. Los resultados de estas manipulaciones son los siguientes:

$$(\delta_D)_1 = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} \qquad (\delta_D)_2 = \frac{M_A ab}{6LEI}(L + b) \qquad (\delta_D)_3 = \frac{M_B ab}{6LEI}(L + a)$$

Al sustituir las expresiones para M_A y M_B de las ecuaciones (10.25a y b) en las últimas dos expresiones, obtenemos

$$(\delta_D)_2 = \frac{Pa^2b^3}{6L^3EI}(L + b) \qquad (\delta_D)_3 = \frac{Pa^3b^2}{6L^3EI}(L + a)$$

Por tanto, la deflexión en el punto D en la viga original, obtenida sustituyendo $(\delta_D)_1$, $(\delta_D)_2$ y $(\delta_D)_3$ en la ecuación (t) y simplificando, es

$$\delta_D = \frac{Pa^3b^3}{3L^3EI} \tag{10.27}$$

El método descrito en este ejemplo para determinar la deflexión δ_D se puede emplear no sólo para encontrar deflexiones en puntos individuales, sino también para determinar las ecuaciones de la curva de deflexión.

Carga concentrada que actúa en el centro del claro de la viga. Cuando la carga P actúa en el centro del claro C (figura 10.16), las reacciones de la viga (de las ecuaciones 10.25 y 10.26 con $a = b = L/2$) son

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} \qquad R_A = R_B = \frac{P}{2} \tag{10.28a,b}$$

Además, la deflexión en el centro del claro (de la ecuación 10.27) es

$$\delta_C = \frac{PL^3}{192EI} \tag{10.29}$$

Esta deflexión es sólo una cuarta parte de la deflexión en el centro de una viga simple con la misma carga, lo que demuestra el efecto rigidizador de la sujeción de los extremos de la viga.

Los resultados anteriores para las reacciones en los extremos y las deflexiones en el centro (ecuaciones 10.28 y 10.29) concuerdan con las determinadas en el ejemplo 10.2 al resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión (consulte las ecuaciones 10.13, 10.14 y 10.19).

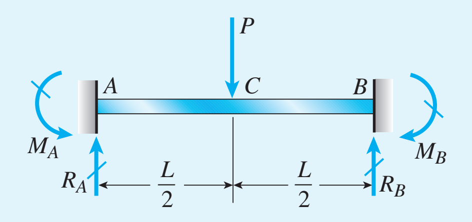


FIGURA 10.16 Viga doblemente empotrada con una carga concentrada que actúa en el centro del claro.

Ejemplo 10.5

Una viga AB doblemente empotrada soporta una carga uniforme de intensidad q que actúa sobre parte del claro (figura 10.17a). Determine las reacciones de esta viga (es decir; encuentre los momentos y las fuerzas en los empotramientos).

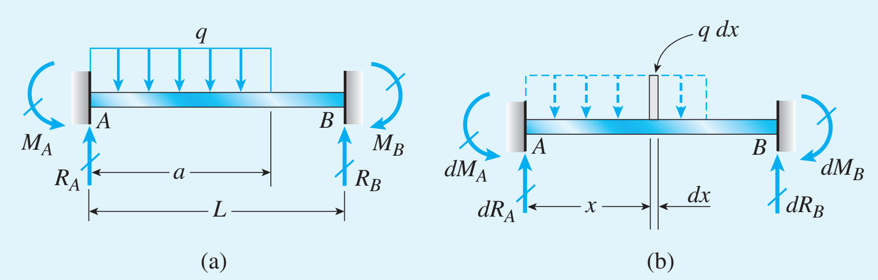


FIGURA 10.17 Ejemplo 10.5. (a) Viga doblemente empotrada con una carga uniforme sobre parte del claro y (b) reacciones producidas por un elemento $q\,dx$ de la carga uniforme

Solución

Procedimiento. Podemos encontrar las reacciones de esta viga al emplear el principio de superposición junto con los resultados obtenidos en el ejemplo anterior (ejemplo 10.4). En ese ejemplo determinamos las reacciones de una viga doblemente empotrada sometida a una carga concentrada P que actúa a una distancia a desde el extremo izquierdo (consulte la figura 10.15a y las ecuaciones 10.25 y 10.26).

A fin de aplicar esos resultados a la carga uniforme de la figura 10.17a, trataremos un elemento de la carga uniforme como una carga concentrada con magnitud $q\,dx$ que actúa a una distancia x desde el extremo izquierdo (figura 10.17b). Luego, empleando las fórmulas deducidas en el ejemplo 10.4, podemos obtener las reacciones causadas por este elemento de carga. Por último, integramos sobre la longitud a de la carga uniforme y así podemos obtener las reacciones debidas a toda la carga uniforme.

Momentos en el empotramiento. Iniciemos con las reacciones de momento, para lo cual emplearemos las ecuaciones (10.25a y b) del ejemplo 10.4. Para obtener los momentos causados por el elemento $q\,dx$ de la carga uniforme (compare la figura 10.17b con la figura 10.15a), reemplazamos P con $q\,dx$, a con x y b con $L - x$. Así, los momentos en el empotramiento debidos al elemento de carga (figura 10.17b) son

$$dM_A = \frac{qx(L-x)^2 dx}{L^2} \qquad dM_B = \frac{qx^2(L-x)dx}{L^2}$$

Al integrar sobre la parte cargada de la viga, obtenemos los momentos en los empotramiento debidos a toda la carga uniforme:

$$M_A = \int dM_A = \frac{q}{L^2}\int_0^a x(L-x)^2 dx = \frac{qa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2) \qquad (10.30a)$$

$$M_B = \int dM_B = \frac{q}{L^2}\int_0^a x^2(L-x) dx = \frac{qa^3}{12L^2}(4L - 3a) \qquad (10.30b)$$

continúa

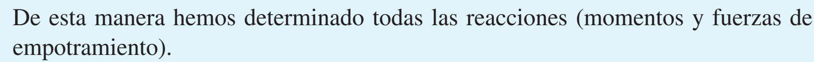
Fuerzas de empotramiento. Continuando de manera similar al caso de los momentos de empotramiento, pero empleando las ecuaciones (10.26a y b), obtenemos las siguientes expresiones para las fuerzas de empotramiento debidas al elemento de carga $q\,dx$:

$$dR_A = \frac{q(L-x)^2(L+2x)dx}{L^3} \qquad dR_B = \frac{qx^2(3L-2x)dx}{L^3}$$

La integración da

$$R_A = \int dR_A = \frac{q}{L^3}\int_0^a (L-x)^2(L+2x)dx = \frac{qa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3) \quad (10.31a)$$

$$R_B = \int dR_B = \frac{q}{L^3}\int_0^a x^2(3L-2x)dx = \frac{qa^3}{2L^3}(2L - a) \quad (10.31b)$$



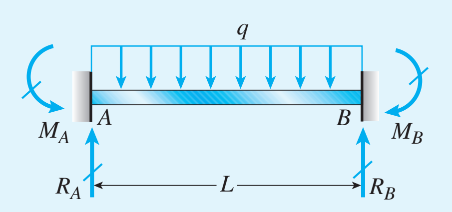


FIGURA 10.18 Viga doblemente empotrada con una carga uniforme.

De esta manera hemos determinado todas las reacciones (momentos y fuerzas de empotramiento).

Carga uniforme que actúa sobre toda la longitud de la viga. Cuando la carga actúa sobre todo el claro (figura 10.18), podemos obtener las reacciones sustituyendo $a = L$ en las ecuaciones anteriores, lo que produce

$$M_A = M_B = \frac{qL^2}{12} \qquad R_A = R_B = \frac{qL}{2} \quad (10.32a,b)$$

La deflexión en centro del claro de una viga cargada uniformemente también es de interés. El procedimiento más simple para obtener esta deflexión es utilizar el método de superposición. El primer paso es eliminar las restricciones de momento en los soportes y obtener una estructura liberada en la forma de una viga simple. La deflexión hacia abajo en centro del claro de una viga simple debida a una carga uniforme (del caso 1, tabla G.2) es

$$(\delta_C)_1 = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (u)$$

y la deflexión hacia arriba en el centro del claro debida a los momentos en los extremos (del caso 10, tabla G.2) es

$$(\delta_C)_2 = \frac{M_AL^2}{8EI} = \frac{(qL^2/12)L^2}{8EI} = \frac{qL^4}{96EI} \quad (v)$$

Por tanto, la deflexión final hacia abajo de la viga doblemente empotrada original (figura 10.18) es

$$\delta_C = (\delta_C)_1 - (\delta_C)_2$$

Al sustituir las deflexiones de las ecuaciones (u) y (v), obtenemos

$$\delta_C = \frac{qL^4}{384EI} \quad (10.33)$$

Esta deflexión es una quinta parte de la deflexión en el centro del claro de una viga simple con una carga uniforme (ecuación u), lo que demuestra de nuevo el efecto rigidizador de la sujeción en los extremos de la viga.

Ejemplo 10.6

Una viga ABC (figura 10.19a) sobre apoyos simples en los puntos A y B, está soportada por un cable en el punto C. La viga tiene una longitud total $2L$ y soporta una carga uniforme de intensidad q. Antes de aplicar la carga uniforme, no hay fuerza en el cable y éste no tiene holgura.

Cuando se aplica la carga uniforme, la viga se flexiona hacia abajo en el punto C y se desarrolla una fuerza de tensión T en el cable. Encuentre la magnitud de esta fuerza.

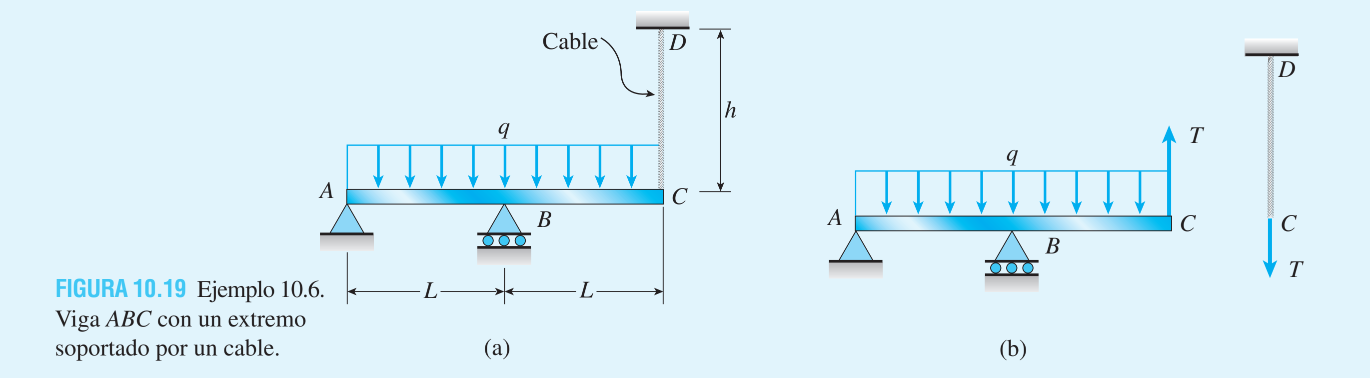


FIGURA 10.19 Ejemplo 10.6. Viga ABC con un extremo soportado por un cable.

Solución

Fuerza redundante. La estructura $ABCD$, que consiste de la viga y el cable, tiene tres reacciones verticales (en los puntos A, B y C). Sin embargo, sólo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio en un diagrama de cuerpo libre de toda la estructura. Por tanto, la estructura es estáticamente indeterminada de primer grado y debemos seleccionar una cantidad redundante para su análisis.

La fuerza de tensión T en el cable es una elección adecuada para la redundante. Podemos liberar esta fuerza al eliminar la conexión en el punto C, cortando así la estructura en dos partes (figura 10.19b). La estructura liberada consiste de la viga ABC y el cable CD como elementos separados, con la fuerza redundante T en acción hacia arriba sobre la viga y hacia abajo sobre el cable.

Ecuación de compatibilidad. La deflexión en el punto C de la viga ABC (figura 10.19b) consiste en dos partes, una deflexión hacia abajo $(\delta_C)_1$ debida a la carga uniforme y una deflexión hacia arriba $(\delta_C)_2$ debida a la fuerza T. Al mismo tiempo, el extremo inferior C del cable se desplaza hacia abajo en una cantidad $(\delta_C)_3$, igual al alargamiento del cable debido a la fuerza T. Por tanto, la *ecuación de compatibilidad*, que expresa el hecho de que la deflexión hacia abajo del extremo C de la viga es igual al alargamiento del cable, es

$$(\delta_C)_1 - (\delta_C)_2 = (\delta_C)_3 \qquad \text{(w)}$$

Con la formulación de esta ecuación ahora nos enfocamos en la tarea de evaluar los tres desplazamientos.

Relaciones fuerza-desplazamiento. La deflexión $(\delta_C)_1$ en el extremo de la saliente (punto C en la viga ABC) debida a la carga uniforme se puede determinar con

continúa

los resultados dados en el ejemplo 9.9 de la sección 9.5 (consulte la figura 9.21). Al utilizar la ecuación (9.59) de ese ejemplo y sustituyendo $a = L$, obtenemos

$$(\delta_C)_1 = \frac{qL^4}{4E_bI_b} \qquad \text{(x)}$$

donde E_bI_b es la rigidez a la flexión de la viga.

La deflexión de la viga en el punto C debida a la fuerza T se puede tomar de la respuesta al problema 9.8.5 o del problema 9.9.3. Estas respuestas dan la deflexión $(\delta_C)_2$ en el extremo de la saliente cuando su longitud es a:

$$(\delta_C)_2 = \frac{Ta^2(L + a)}{3E_bI_b}$$

Ahora sustituimos $a = L$ y obtenemos la deflexión deseada:

$$(\delta_C)_2 = \frac{2TL^3}{3E_bI_b} \qquad \text{(y)}$$

Por último, el alargamiento del cable es

$$(\delta_C)_3 = \frac{Th}{E_cA_c} \qquad \text{(z)}$$

donde h es la longitud del cable y E_cA_c es su rigidez axial.

Fuerza en el cable. Al sustituir los tres desplazamientos (ecuaciones *x*, *y* y *z*) en la ecuación de compatibilidad (ecuación *w*), obtenemos

$$\frac{qL^4}{4E_bI_b} - \frac{2TL^3}{3E_bI_b} = \frac{Th}{E_cA_c}$$

Despejando la fuerza T, obtenemos

$$T = \frac{3qL^4E_cA_c}{8L^3E_cA_c + 12hE_bI_b} \qquad (10.34)$$

Conocida la fuerza T, podemos encontrar todas las reacciones, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes por medio de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio.

Este ejemplo ilustra cómo la cantidad de una fuerza interna (en vez de una reacción interna) se puede utilizar como la redundante.

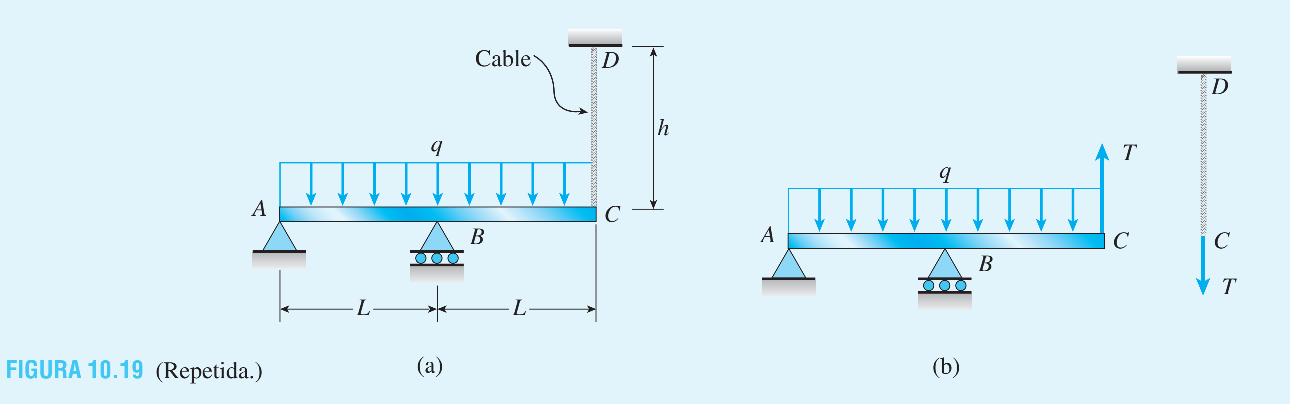


FIGURA 10.19 (Repetida.)

*10.5 EFECTOS DE LA TEMPERATURA

Los cambios de temperatura pueden producir variaciones en la longitud de las barras y deflexiones laterales en las vigas como se analizó en las secciones 2.5 y 9.13. Si estos cambios de longitud y las deflexiones laterales se restringen, se producirán esfuerzos térmicos en el material. En la sección 2.5 vimos cómo encontrar estos esfuerzos en barras estáticamente indeterminadas y ahora consideraremos algunos de los efectos de los cambios de temperatura en vigas estáticamente indeterminadas.

Los esfuerzos y las deflexiones producidas por cambios de temperatura en una viga estáticamente indeterminada se pueden analizar mediante métodos que son similares a los ya descritos para los efectos de cargas. Para iniciar el estudio, considere la viga en voladizo apuntalada *AB* que se muestra en la figura 10.20. Suponemos que la viga estaba originalmente a una temperatura uniforme T_0, pero más tarde su temperatura se incrementó a T_1 en la superficie superior y a T_2 en la superficie inferior. La variación de temperatura sobre la altura *h* de la viga se supone lineal.

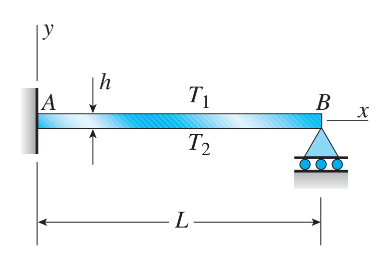


FIGURA 10.20 Viga en voladizo apuntalada con un diferencial de temperatura.

Dado que la temperatura varía linealmente, la temperatura *promedio* de la viga es

$$T_{\text{prom}} = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{10.35}$$

y ocurre a la mitad de la altura de la viga. La diferencia entre esta temperatura promedio y la temperatura inicial T_0 resulta en una tendencia de la viga a cambiar de longitud. Si la viga puede dilatarse libremente en la dirección longitudinal, su longitud aumentará en una cantidad δ_T dada por la ecuación (9.98), que se repite aquí:

$$\delta_T = \alpha(T_{\text{prom}} - T_0)L = \alpha\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0\right)l \tag{10.36}$$

En esta ecuación, α es el coeficiente de dilatación térmica del material y *L* es la longitud de la viga. Si la dilatación longitudinal puede ocurrir con libertad, no se producen esfuerzos axiales por los cambios de temperatura. Sin embargo, si se restringe la dilatación longitudinal, se desarrollarán esfuerzos axiales, como se describe en la sección 2.5.

Ahora considere los efectos del diferencial de temperatura $T_2 - T_1$, que tiende a producir una *curvatura* de la viga pero ningún cambio en longitud. La curvatura debida a los cambios de la temperatura se describe en la sección 9.11, donde se deduce la siguiente ecuación diferencial de la curva de deflexión (consulte la ecuación 9.100):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \tag{10.37}$$

Esta ecuación es aplicable a una viga que no está restringida por los apoyos y, por tanto, tiene libertad para flexionarse y girar. Observe que cuando T_2 es mayor que T_1, la curvatura es positiva y la viga tiende a flexionarse cóncava hacia arriba. Las deflexiones y rotaciones de vigas simples y vigas en voladizo debidas al diferencial de temperatura se pueden determinar con ayuda

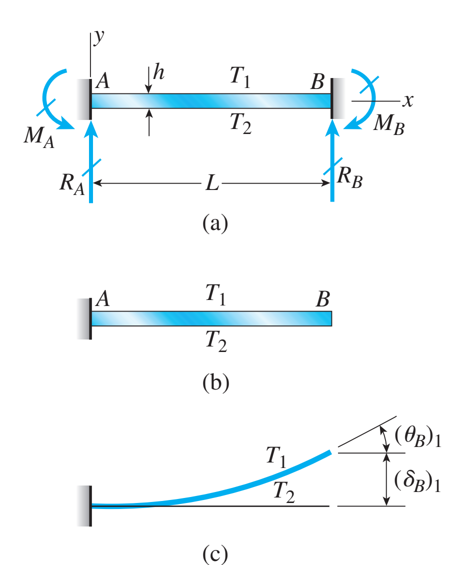


FIGURA 10.21 (a) Viga doblemente empotrada con un diferencial de temperatura, (b) estructura liberada y (c) curva de deflexión para la estructura liberada.

de la ecuación (10.37), como se estudió en la sección 9.11. Ahora podemos utilizar esos resultados para analizar vigas estáticamente indeterminadas mediante el método de superposición.

Método de superposición

Para ilustrar el uso de la superposición, determinemos las reacciones de la viga doblemente empotrada de la figura 10.21a debidas al diferencial de temperatura. Como es usual, iniciamos el análisis seleccionando las reacciones redundantes. Si bien otras elecciones resultan en cálculos más eficientes, seleccionaremos la fuerza reactiva R_B y el momento reactivo M_B como las redundantes a fin de ilustrar la metodología general.

Cuando se eliminan los soportes correspondientes a las redundantes, obtenemos la estructura liberada que se muestra en la figura 10.21*b* (una viga en voladizo). La deflexión y el ángulo de rotación en el extremo *B* de este voladizo (debidos al diferencial de temperatura) son los siguientes:

$$(\delta_B)_1 = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \qquad (\theta_B)_1 = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{h}$$

Estas ecuaciones se obtienen de la solución al problema 9.13.2 en el capítulo anterior. Observe que cuando T_2 es mayor que T_1, la deflexión $(\delta_B)_1$ es hacia arriba y el ángulo de rotación (θ_B) es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A continuación necesitamos encontrar las deflexiones y los ángulos de rotación en la estructura liberada (figura 10.21b) debidos a las redundantes R_B y M_B. Estas cantidades se obtienen de los casos 4 y 6, respectivamente, de la tabla G.1:

$$(\delta_B)_2 = \frac{R_B L^3}{3EI} \qquad (\theta_B)_2 = \frac{R_B L^2}{2EI}$$

$$(\delta_B)_3 = -\frac{M_B L^2}{2EI} \qquad (\theta_B)_3 = -\frac{M_B L}{EI}$$

En estas expresiones las deflexiones hacia arriba y las rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivas (como en la figura 10.21c).

Ahora podemos escribir las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión y el ángulo de rotación en el soporte B como sigue:

$$\delta_B = (\delta_B)_1 + (\delta_B)_2 + (\delta_B)_3 = 0 \tag{a}$$

$$\theta_B = (\theta_B)_1 + (\theta_B)_2 + (\theta_B)_3 = 0 \tag{b}$$

o, al sustituir las expresiones apropiadas,

$$\frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} + \frac{R_B L^3}{3EI} - \frac{M_B L^2}{2EI} = 0 \tag{c}$$

$$\frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{h} + \frac{R_B L^2}{2EI} - \frac{M_B L}{EI} = 0 \tag{d}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver de manera simultánea para las dos redundantes:

$$R_B = 0 \qquad M_B = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

El hecho de que R_B es cero se podría haber anticipado en un inicio a partir de la simetría de la viga doblemente empotrada. Si nos hubiéramos basado en este hecho desde el inicio, la solución anterior se hubiera simplificado debido a que sólo se hubiera requerido una ecuación de compatibilidad.

De la simetría (o de ecuaciones de equilibrio) también sabemos que la reacción R_B es igual a la reacción R_A y que el momento M_A es igual al momento M_B. Por lo tanto, las reacciones para la viga doblemente empotrada que se muestra en la figura 10.21 son las siguientes:

$$R_A = R_B = 0 \qquad M_A = M_B = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \tag{10.38a,b}$$

A partir de estos resultados observamos que la viga está sometida a un momento flexionante constante debido a los cambios de temperatura.

Ecuación diferencial de la curva de deflexión

También podemos analizar la viga doblemente empotrada de la figura 10.21a al resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión. Cuando una viga está sometida a un momento flexionante M y a un diferencial de temperatura $T_2 - T_1$, la ecuación diferencial se convierte en (consulte las ecuaciones 9.7 y 10.37):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \tag{10.39a}$$

o

$$EIv'' = M + \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \qquad (10.39b)$$

Para la viga doblemente empotrada de la figura 10.21a, la expresión para el momento flexionante en la viga es

$$M = R_A x - M_A \qquad (e)$$

donde x se mide desde el apoyo A. Al sustituir en la ecuación diferencial e integrar, obtenemos la siguiente ecuación para la pendiente de la viga:

$$EIv' = \frac{R_A x^2}{2} - M_A x + \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)x}{h} + C_1 \qquad (f)$$

Las dos condiciones de frontera para la pendiente ($v' = 0$ cuando $x = 0$ y $x = L$) dan $C_1 = 0$ y

$$\frac{R_A L}{2} - M_A = -\frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \qquad (g)$$

Una segunda integración da la deflexión de la viga:

$$EIv = \frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} + \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)x^2}{2h} + C_2 \qquad (h)$$

Las condiciones de frontera para la deflexión ($v = 0$ cuando $x = 0$ y $x = L$) dan $C_2 = 0$ y

$$\frac{R_A L}{3} - M_A = -\frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \qquad (i)$$

Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (g) e (i), encontramos

$$R_A = 0 \qquad M_A = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

Del equilibrio de la viga, obtenemos $R_B = 0$ y $M_B = M_A$. Por tanto, estos resultados concuerdan con los determinados mediante el método de superposición (consulte las ecuaciones 10.38a y b).

Observe que obtuvimos la solución anterior sin considerar la simetría debido a que queríamos ilustrar el procedimiento general del método de integración.

Conocidas las reacciones de la viga, ahora podemos encontrar las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y deflexiones. La simplicidad de los resultados podría sorprenderlo.

*10.6 DESPLAZAMIENTOS LONGITUDINALES EN LOS EXTREMOS DE UNA VIGA

Cuando una viga se flexiona por cargas laterales, sus extremos se acercan. Es práctica común ignorar estos desplazamientos longitudinales debido a que usualmente no tienen un efecto notable sobre el comportamiento de la viga. En esta sección, mostraremos cómo evaluar estos desplazamientos y determinaremos si son importantes o no.

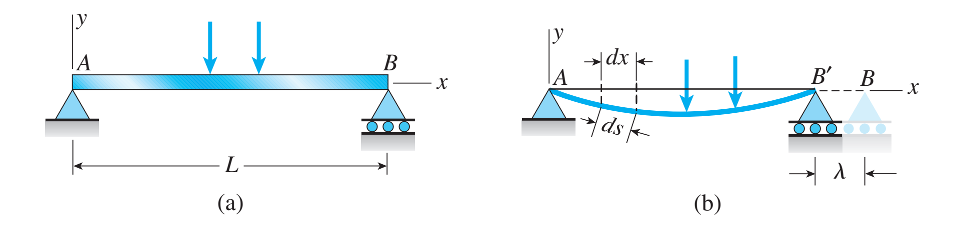
Considere una viga simple AB soportada en un extremo por un apoyo de pasador y con libertad para desplazarse en sentido longitudinal en el otro extremo (figura 10.22a). Cuando esta viga se flexiona por cargas laterales, la curva de deflexión tiene la forma que se muestra en la parte (b) de la figura. Además de las deflexiones laterales, hay un desplazamiento longitudinal en el extremo B de la viga. El extremo B se mueve en sentido horizontal del punto B al punto B' una distancia pequeña λ, denominada **acortamiento por curvatura** de la viga.

Como su nombre lo implica, el acortamiento por curvatura se debe a la flexión del eje de la viga y *no* se debe a deformaciones axiales producidas por fuerzas de tensión o compresión. Como observamos en la figura 10.22b, el acortamiento por curvatura es igual a la diferencia entre la longitud inicial L de la viga recta y la longitud de la cuerda AB' de la viga flexionada. Desde luego, las deflexiones laterales y el acortamiento por curvatura están muy exagerados en la figura.

Acortamiento por curvatura

Para determinar el acortamiento por curvatura, iniciamos al considerar un elemento de longitud ds medido a lo largo del eje curvado de la viga (figura 10.22b). La proyección de este elemento sobre el eje horizontal tiene longitud dx. La relación entre la longitud del elemento y la longitud de su proyección horizontal se obtiene con el teorema de Pitágoras:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dv)^2$$



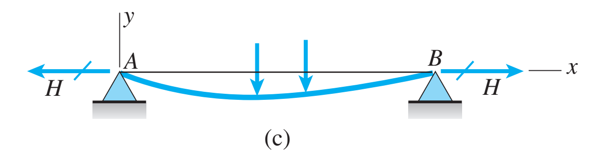


FIGURA 10.22 (a) Viga simple con cargas laterales, (b) desplazamiento horizontal λ en el extremo de la viga y (c) reacciones horizontales H para una viga con apoyos fijos.

donde dv es el incremento en la deflexión v de la viga conforme nos movemos por la distancia dx. Por tanto,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \tag{a}$$

La diferencia entre la longitud del elemento y la longitud de su proyección horizontal es

$$ds - dx = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx = dx\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1\right] \tag{b}$$

A continuación introduzcamos la siguiente serie binomial (consulte el apéndice C):

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \cdots \tag{10.40}$$

que converge cuando t es numéricamente menor que 1. Si t es muy pequeña comparada con 1, podemos ignorar los términos que comprenden t^2, t^3, etcétera, en comparación con los dos primeros términos. Entonces obtenemos

$$\sqrt{1 + t} \approx 1 + \frac{t}{2} \tag{10.41}$$

El término $(dv/dx)^2$ en la ecuación (b) suele ser muy pequeño comparado con 1. Por tanto, podemos utilizar la ecuación (10.41) con $t = (dv/dx)^2$ y reescribir la ecuación (b) como

$$ds - dx = dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \tag{c}$$

Si los lados izquierdo y derecho de esta expresión se integran para toda la longitud de la viga, obtenemos una expresión para la diferencia entre la longitud de la viga y la longitud de la cuerda AB' (figura 10.22b):

$$L - \overline{AB'} = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

Por tanto, el acortamiento por curvatura es

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \tag{10.42}$$

Esta ecuación es válida siempre que las deflexiones y las pendientes sean pequeñas.

Observe que cuando se conoce la ecuación de la curva de deflexión, podemos sustituir en la ecuación (10.42) y determinar el acortamiento λ.

Reacciones horizontales

Ahora suponga que se evita que los extremos de la viga se trasladen en sentido longitudinal mediante apoyos inmóviles (figura 10.22c). Debido a que los extremos no se pueden acercar entre sí, se desarrollará una reacción horizontal H en cada extremo. Esta fuerza causará que el eje de la viga se alargue conforme ocurre la flexión.

Además, la propia fuerza H tendrá un efecto sobre los momentos flexionantes en la viga, ya que un momento flexionante adicional (igual a H multiplicada por la deflexión) existirá en cada sección transversal. Por tanto, la curva de deflexión de la viga depende no sólo de las cargas laterales, sino también de la reacción H, lo que a su vez depende de la forma de la curva de deflexión, como se muestra en la ecuación (10.42).

En vez de intentar efectuar un análisis exacto de este problema complicado, obtengamos una expresión aproximada para la fuerza H a fin de estimar su importancia. Con ese fin, podemos emplear cualquier aproximación razonable para la curva de deflexión. En el caso de una viga articulada con cargas hacia abajo (figura 10.22c), una buena aproximación es una parábola con la ecuación siguiente.

$$v = -\frac{4\delta x(L - x)}{L^2} \tag{10.43}$$

donde δ es la deflexión hacia abajo a la mitad del claro de la viga. El acortamiento por curvatura λ que corresponde a esta forma flexionada supuesta se puede determinar al sustituir la expresión para la deflexión v en la ecuación (10.42) e integrando; el resultado es

$$\lambda = \frac{8\delta^2}{3L} \tag{10.44}$$

La fuerza horizontal H requerida para alargar la viga en esta cantidad es

$$H = \frac{EA\lambda}{L} = \frac{8EA\delta^2}{3L^2} \tag{10.45}$$

en donde EA es la rigidez axial de la viga. El esfuerzo axial de tensión correspondiente en la viga es

$$\sigma_t = \frac{H}{A} = \frac{8E\delta^2}{3L^2} \tag{10.46}$$

Esta ecuación da una estimación cercana del esfuerzo de tensión producido por los apoyos inmóviles de una viga simple.

Comentarios generales

Ahora sustituyamos algunos valores numéricos de manera que podamos evaluar la importancia del acortamiento por curvatura. La deflexión δ en el centro del claro de la viga es usual que sea muy pequeña comparada con su longitud; por ejemplo, la razón δ/L podría ser $1/500$ o menor. Utilizando este valor y también suponiendo que el material es acero con $E = 30 \times 10^6$ psi, con la ecuación (10.46) encontramos que el esfuerzo de tensión sólo es 320 psi. Dado que el esfuerzo de tensión permisible en el acero por lo general es 15,000 psi o mayor, es claro que el esfuerzo axial debido a la fuerza horizontal H se puede ignorar cuando se compara con los esfuerzos de trabajo ordinarios en la viga.

Además, en la deducción de la ecuación (10.46) supusimos que los extremos de la viga estaban sostenidos rígidamente contra desplazamientos longitudinales, lo que físicamente no es posible. En realidad, siempre ocurren desplazamientos longitudinales pequeños, con los que se reduce el esfuerzo axial calculado con la ecuación (10.46).*

De los análisis anteriores concluimos que la práctica común de ignorar los efectos de cualquier restricción longitudinal y de suponer que un extremo de la viga está sobre un apoyo de rodillo (sin importar la construcción real) se justifica. El efecto rigidizador de las restricciones longitudinales es significativo sólo cuando la viga es muy larga y delgada, y soporta cargas grandes. A este comportamiento algunas veces se le refiere como "acción de cuerda," debido a que es análogo a la acción de un cable, o cuerda, que soporta una carga.

*Para un análisis más completo de vigas con apoyos inmóviles, consulte la referencia 10.1.

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo investigamos el comportamiento de las vigas estáticamente indeterminadas sometidas a cargas concentradas y también distribuidas, como el peso propio; también se consideraron temas especiales como los efectos térmicos y el desplazamiento longitudinal debido al acortamiento por curvatura al final del capítulo. Desarrollamos dos métodos de análisis: (1) *integración* de la ecuación de la curva elástica empleando condiciones de frontera disponibles para despejar las constantes de integración desconocidas y las reacciones redundantes y (2) el método más general (utilizado antes en los capítulos 2 y 3 para estructuras axiales y torsionales, respectivamente) con base en la *superposición*. En el procedimiento de superposición agregamos las ecuaciones de *equilibrio* de la estática a las ecuaciones de *compatibilidad* para generar un número suficiente de ecuaciones para despejar todas las fuerzas desconocidas. Se utilizaron las *relaciones fuerza-desplazamiento* con las ecuaciones de compatibilidad para producir las ecuaciones adicionales necesarias para resolver el problema. El número de ecuaciones adicionales requeridas se vio que depende del *grado de indeterminación estática* de la estructura de la viga. El método de superposición está limitado a estructuras de vigas hechas de materiales linealmente elásticos. Los conceptos importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

1. Se analizaron varios tipos de estructuras de vigas estáticamente indeterminadas, como vigas en voladizo apuntaladas, doblemente empotradas y continuas. El ***grado de indeterminación estática*** se determinó para cada tipo de viga y se definió una estructura ***liberada*** para cada caso eliminando fuerzas de reacción ***redundantes*** diferentes.
2. La estructura liberada debe ser estáticamente determinada y **estable** ante la acción de las cargas aplicadas. *Observe* que también es posible insertar *alivios internos* en la fuerza axial, cortante y el momento (consulte los análisis en el capítulo 4) para producir la estructura liberada, como se analizará en cursos posteriores sobre análisis estructural.
3. Para estructuras de vigas simples estáticamente indeterminadas, la **ecuación diferencial de la curva elástica** se puede escribir como una ecuación de segundo, tercero o cuarto orden en términos del momento, la fuerza cortante y la carga distribuida, respectivamente. Al aplicar condiciones de frontera y de otro tipo podemos despejar las constantes de integración y las reacciones redundantes.
4. Un método de solución más general para vigas y otros tipos de estructuras más complejas es el **método de superposición** (también conocido como método de la *fuerza* o de las *flexibilidades*. Aquí, se emplean ecuaciones adicionales que describen la **compatibilidad** de los desplazamientos y incorporan las **relaciones fuerza-desplazamiento** apropiadas para vigas y de esta manera poder complementar las ecuaciones de **equilibrio**. El número de ecuaciones de compatibilidad requerido para la solución es igual al grado de indeterminación estática de la estructura de la viga.
5. En la mayor paarte de los casos, hay muchos caminos para llegar a la misma solución dependiendo de la elección de la reacción redundante.
6. **Cambios de temperatura** diferenciales y **desplazamientos longitudinales** inducen fuerzas de reacción sólo en vigas estáticamente indeterminadas; si la viga es estáticamente determinada, ocurrirán desplazamientos de los nodos, pero no resultarán fuerzas internas de estos efectos.

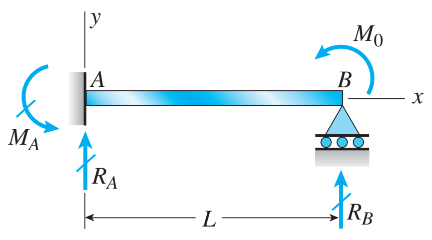
PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 10

Ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión

Los problemas para la sección 10.3 se deben resolver integrando las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión. Todas las vigas tienen rigidez a la flexión constante EI. Al trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante asegúrese de identificar todas las ordenadas críticas, incluyendo valores máximos y mínimos.

10.3.1 Una viga AB en voladizo apuntalada con longitud L está cargada por un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj M_0 que actúa en el apoyo B (consulte la figura).

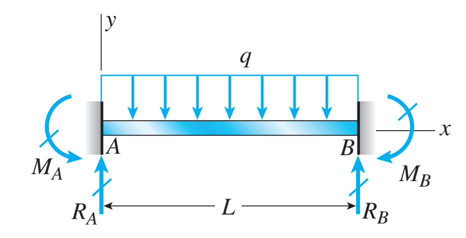
Inicie con la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (la ecuación del momento flexionante), para obtener las reacciones, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones de la viga. Elabore los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante e identifique todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.3.1

10.3.2 Una viga doblemente empotrada AB con longitud L soporta una carga uniforme de intensidad q (consulte la figura).

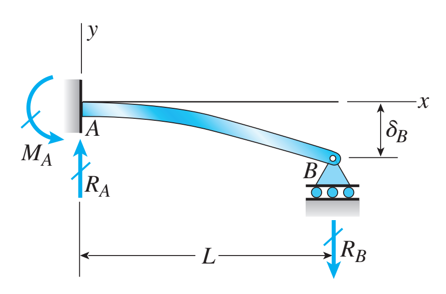
Iniciando con la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (la ecuación del momento flexionante), obtenga las reacciones, las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes, las pendientes y las deflexiones de la viga. Elabore los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante identificando todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.3.2

10.3.3 Una viga AB en voladizo con longitud L tiene un empotramiento en A y un apoyo de rodillo en B (consulte la figura). El apoyo en B se mueve hacia abajo una distancia δ_B.

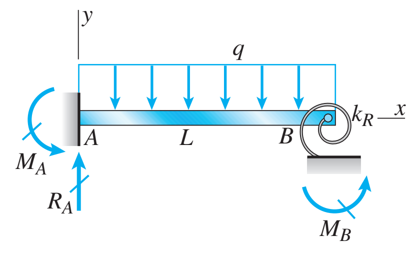
Use la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión (la ecuación de la carga), para determinar las reacciones de la viga y la ecuación de la curva de deflexión. (*Nota:* exprese todos los resultados en términos del desplazamiento impuesto δ_B.)



PROB. 10.3.3

10.3.4 Una viga en voladizo con longitud L sometida a una carga uniforme de intensidad q, tiene un extremo fijo en A y un soporte de resorte en B con rigidez rotacional k_R. Una rotación en B, θ_B, resulta en un momento de reacción $M_B = k_B \times \theta_B$.

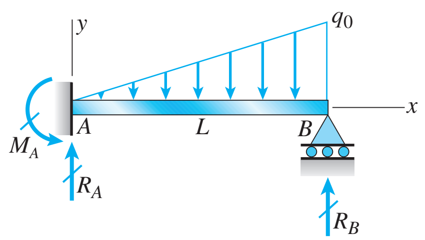
Encuentre la rotación θ_B y el desplazamiento δ_B en B. Utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión para despejar el desplazamiento en el extremo B.



PROB. 10.3.4

10.3.5 Una viga en voladizo con longitud L está sometida a una carga con distribución triangular de intensidad máxima q_0 en B.

Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión para despejar las reacciones en A y B, y también la ecuación de la curva de deflexión.

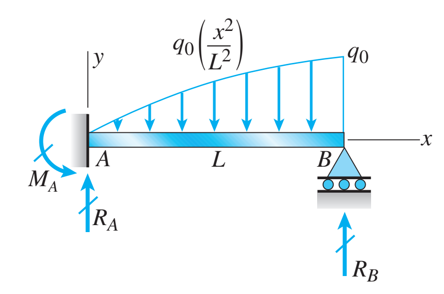


PROB. 10.3.5

10.3.6 Una viga en voladizo apuntalada con longitud L está sometida a una carga con distribución parabólica de intensidad máxima q_0 en B.

(a) Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de de deflexión para despejar las reacciones en A y B, y también la ecuación de la curva de deflexión.

(b) Repita el inciso a si la carga parabólica se reemplaza con q_0 sen$(\pi x/2L)$.

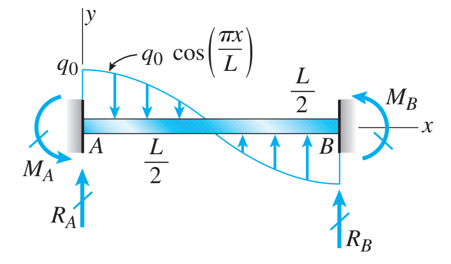


PROB. 10.3.6

10.3.7 Una viga doblemente empotrada con longitud L está sometida a una carga distribuida en forma de una curva coseno con intensidad máxima q_0 en A.

(a) Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión para despejar las reacciones en A y B, y también la ecuación de la curva de deflexión.

(b) Repita el inciso a empleando la carga distribuida q_0 sen$(\pi x/L)$.

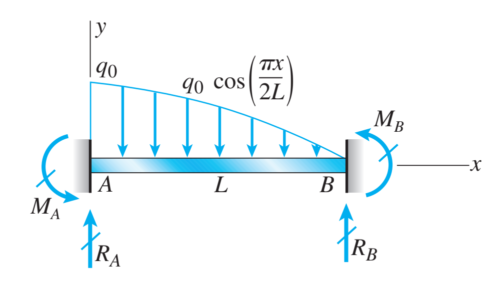


PROB. 10.3.7

10.3.8 Una viga doblemente empotrada con longitud L está sometida a una carga distribuida en forma de una curva coseno con intensidad máxima q_0 en A.

(a) Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión para despejar las reacciones en A y B, y también la ecuación de la curva de deflexión.

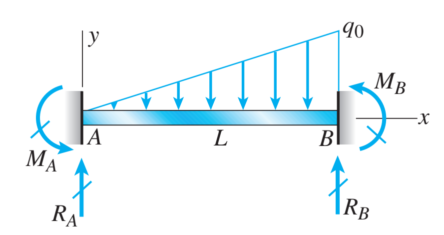
(b) Repita el inciso a si la carga distribuida ahora es $q_0\,(1 - x^2/L^2)$.



PROB. 10.3.8

10.3.9 Una viga doblemente empotrada con longitud L está sometida a una carga con distribución triangular de intensidad máxima q_0 en B.

Utilice la ecuación diferencial de cuarto orden de la curva de deflexión para despejar las reacciones en A y B, y también la ecuación de la curva de deflexión.

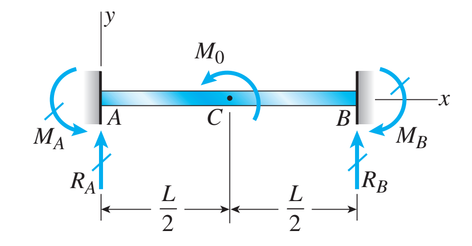


PROB. 10.3.9

10.3.10 Un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj M_0 actúa en el centro del claro de una viga doblemente empotrada ACB con longitud L (consulte la figura).

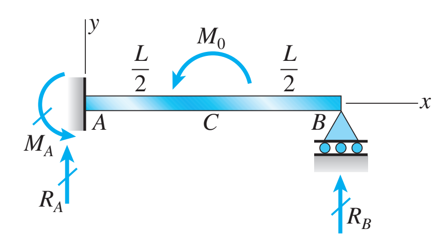
Inicie con la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión (la ecuación del momento flexionante), para determinar todas las reacciones de la viga y obtenga la ecuación de la curva de deflexión para la mitad izquierda de la viga.

Luego trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para toda la viga e identifique todas las ordenadas críticas. Además, trace la curva de deflexión para toda la viga.



PROB. 10.3.10

****10.3.11** Una viga en voladizo apuntalada con longitud L está sometida a un momento concentrado M_0 que actúa en el centro del claro C. Utilice la ecuación diferencial de segundo orden de la curva de deflexión para despejar las reacciones en A y B. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para toda la viga. Además, encuentre las ecuaciones de las curvas de deflexión para las dos mitades de la viga y trace la curva de deflexión para toda la viga.



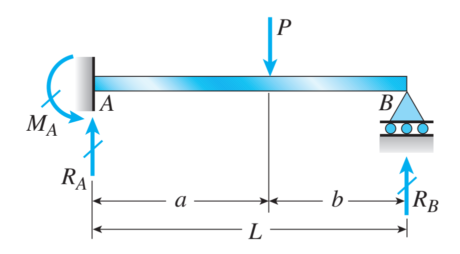
PROB. 10.3.11

Método de superposición

Los problemas para la sección 10.4 se deben resolver mediante el método de superposición. Todas las vigas tienen rigidez a la flexión constante EI a menos que se indique lo contrario. Al trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante identifique todas las ordenadas críticas, incluyendo valores máximos y mínimos.

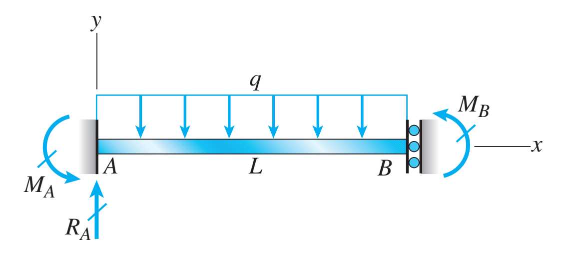
10.4.1 Una viga en voladizo apuntalada AB con longitud L soporta una carga concentrada P que actúa en la posición que se muestra en la figura.

Determine las reacciones R_A, R_B y M_A para toda la viga. Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identificando todas las ordenadas críticas.



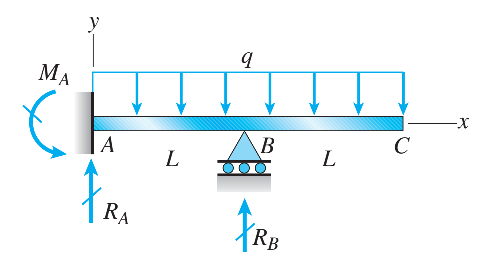
PROB. 10.4.1

10.4.2 Una viga con un apoyo guiado en B está sometida a una carga uniformemente distribuida de intensidad q_0. Utilice el método de superposición para conocer las reacciones. Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, e identifique todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.4.2

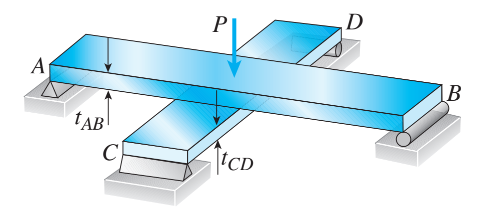
10.4.3 Una viga en voladizo apuntalada con longitud $2L$ con apoyo en B está sometida a una carga uniformemente distribuida de intensidad q. Utilice el método de superposición para despejar todas las reacciones. Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, e identifique todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.4.3

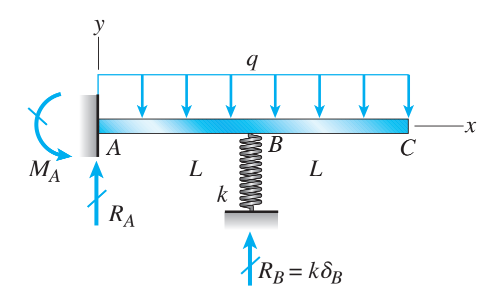
10.4.4 Dos vigas planas AB y CD yacen sobre planos horizontales se cruzan en ángulos rectos y en conjunto soportan una carga vertical P en sus puntos medios (consulte la figura). Antes de aplicar la carga P, las vigas apenas se tocan entre sí. Las dos están hechas del mismo material y tienen los mismos anchos. Además, los extremos de las vigas están simplemente apoyados. Las longitudes de las vigas AB y CD son L_{AB} y L_{CD}, respectivamente.

¿Cuál debe ser la razón t_{AB}/t_{CD} de los espesores de las vigas si las cuatro reacciones deben ser iguales?



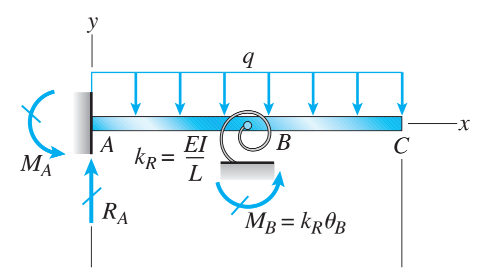
PROB. 10.4.4

10.4.5 Una viga en voladizo apuntalada con longitud $2L$ está sometida a una carga uniformemente distribuida de intensidad q. La viga está apoyada en B por un resorte linealmente elástico con rigidez k. Utilice el método de superposición para despejar todas las reacciones. Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, e identifique todas las ordenadas críticas. Sea $k = 6EI/L^3$.



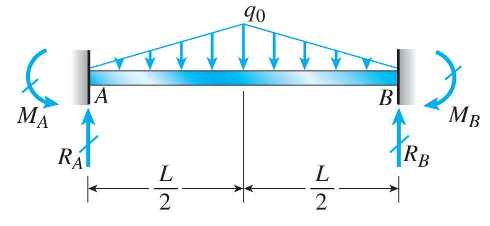
PROB. 10.4.5

10.4.6 Una viga en voladizo apuntalada con longitud $2L$ está sometida a una carga uniformemente distribuida con intensidad q. La viga está apoyada en B por un resorte rotacional linealmente elástico con rigidez k_R, lo que proporciona un momento resistente M_B debido a la rotación θ_B. Utilice el método de superposición para despejar todas las reacciones. Además, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, e identifique todas las ordenadas críticas. Sea $k_R = EI/L$.



PROB. 10.4.6

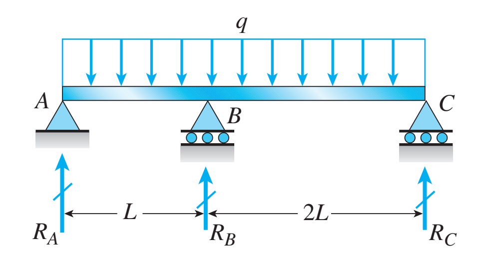
10.4.7 Determine los momentos (M_A y M_B) y las fuerzas en los empotramientos (R_A y R_B) para una viga con longitud L que soporta una carga triangular con intensidad máxima q_0 (consulte la figura). Luego trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, e identifique todas las ordenadas criticas.



PROB. 10.4.7

10.4.8 Una viga continua ABC con dos claros desiguales, uno con longitud L y el otro con longitud $2L$, soporta una carga uniforme de intensidad q (consulte la figura).

Determine las reacciones R_A, R_B y R_C para esta viga. Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, e identifique todas las ordenadas críticas. Sea $k = 4EI/L^3$.

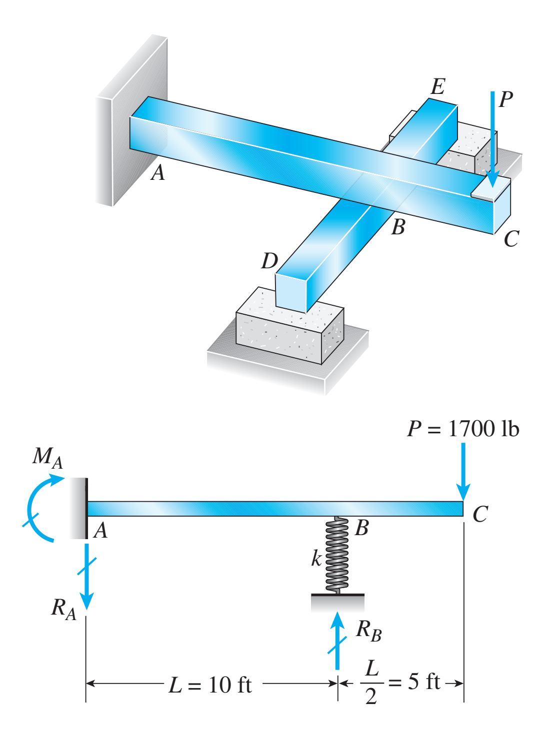


PROB. 10.4.8

10.4.9 Una viga ABC está empotrada en el soporte A y reposa (en el punto B) sobre el punto medio de la viga DE (consulte la primera parte de la figura). Por tanto, la viga ABC se puede representar como una viga en voladizo apuntalada con una saliente BC y un apoyo linealmente elástico con rigidez k en el punto B (consulte la segunda parte de la figura).

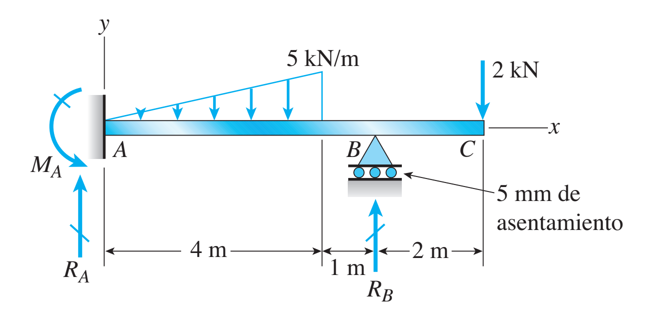
La distancia de A a B es $L = 10$ ft, la distancia de B a C es $L/2 =$ ft y la longitud de la viga DE es $L = 10$ ft. Las dos vigas tienen la misma rigidez a la flexión EI. Una carga concentrada $P = 1700$ lb actúa en el extremo libre de la viga ABC.

Determine las reacciones R_A, R_B y M_A para la viga ABC. Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ABC, e identifique todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.4.9

10.4.10 Una viga en voladizo apuntalada tiene una rigidez a la flexión $EI = 4.5$ MN·m². Cuando se aplican a la viga las cargas que se muestran, se asienta 5 mm en el nodo *B*. Encuentre la reacción en el nodo *B*.

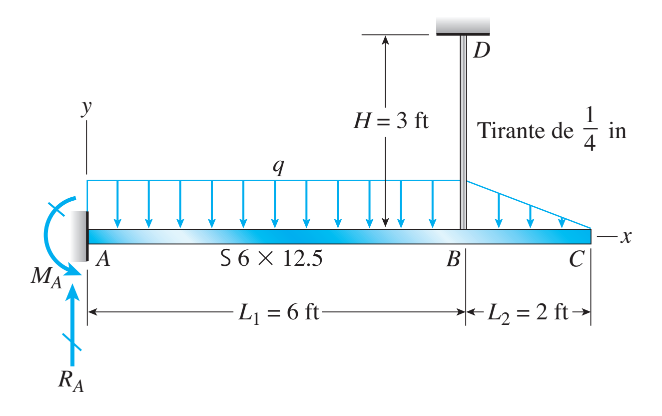


PROB. 10.4.10

10.4.11 Una viga en voladizo está soportada por un tirante en *B* como se muestra. El tirante y la viga son de acero con $E = 30 \times 10^6$ psi. El tirante está apenas tenso antes de que se aplique la carga distribuida $q = 200$ lb/ft.

(a) Encuentre la fuerza de tensión en el tirante.

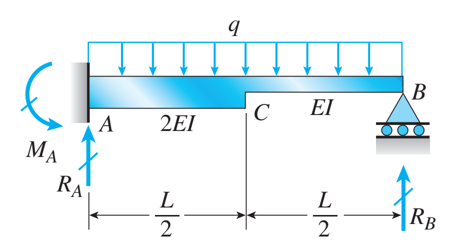
(b) Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga, e identifique todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.4.11

10.4.12 En la figura se muestra una viga en voladizo apuntalada no prismática *AB* con rigidez a la flexión 2*EI* de *A* a *C* y *EI* de *C* a *B*.

Determine todas las reacciones de la viga debidas a la carga uniforme de intensidad *q*. (*Sugerencia:* utilice los resultados de los problemas 9.7.1 y 9.7.2.)

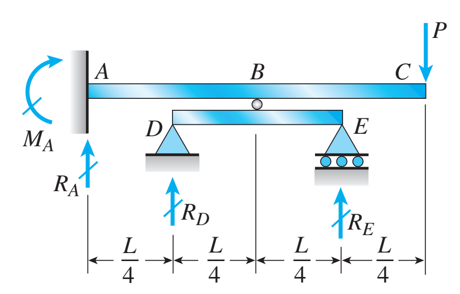


PROB. 10.4.12

10.4.13 Una viga *ABC* está empotrada en el extremo *A* y soportada por la viga *DE* en el punto *B* (consulte la figura). Las dos vigas tienen la misma sección transversal y están hechas del mismo material.

(a) Determine todas las reacciones debidas a la carga *P*.

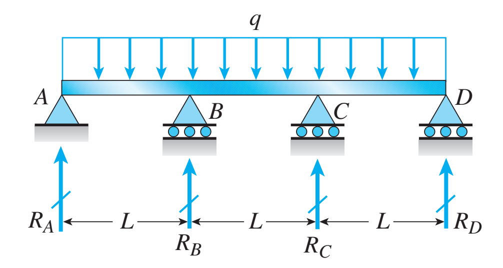
(b) ¿Cuál es el momento flexionante numéricamente máximo en cada viga?



PROB. 10.4.13

10.4.14 Una viga continua con tres claros iguales *ABCD* soporta una carga uniforme con intensidad *q* (consulte la figura).

Determine todas las reacciones de esta viga y trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, identifique todas las ordenadas críticas.

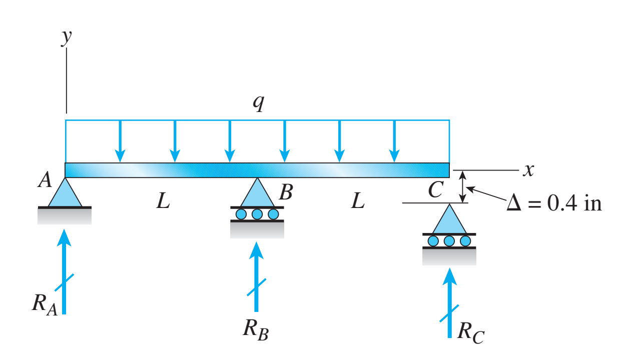


PROB. 10.4.14

***10.4.15** Una viga reposa sobre apoyos en *A* y *B*, y está sometida a una carga distribuida de intensidad *q* como se muestra. Existe un espacio libre pequeño Δ entre la viga sin carga y el apoyo en *C*. Suponga que la longitud del claro es $L =$ 40 in y que la rigidez a la flexión de la viga es $EI = 0.4 \times 10^9$

lb-in^2. Trace una gráfica del momento flexionante en *B* como una función de la intensidad de la carga *q*.

(*Sugerencia:* consulte el ejemplo 9.9 para guiarse sobre el cálculo de la deflexión en *C*.)

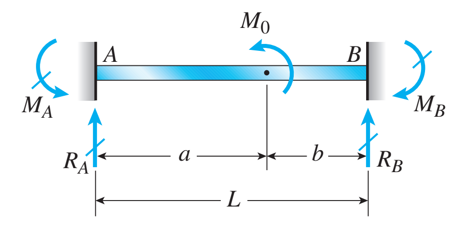


PROB. 10.4.15

***10.4.16** Una viga doblemente empotrada *AB* de longitud *L* está sometida a un momento M_0 que actúa en la posición que se muestra en la figura.

(a) Determine todas las reacciones para esta viga.

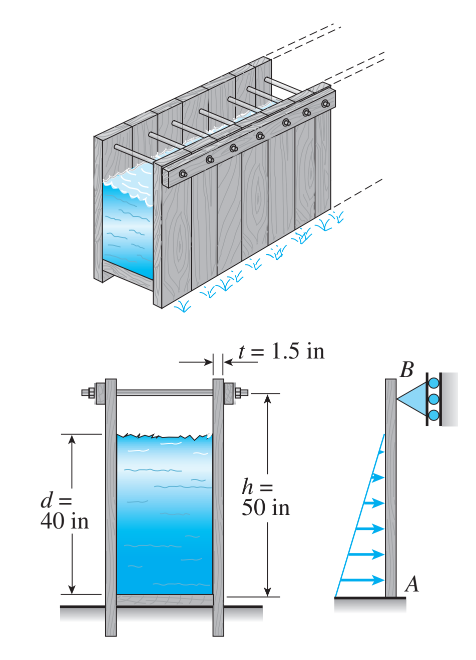
(b) Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el caso especial en el que $a = b = L/2$.



PROB. 10.4.16

***10.4.17** Un canal provisional de madera que sirve como canal para agua de irrigación se muestra en la figura. Los tablones verticales que forman los lados del canal están hincados en el suelo, lo que proporciona su empotramiento. La parte superior del canal está sostenida por tirantes que están apretados de manera que no hay deflexión de los tablones en ese punto. Por tanto, los tablones verticales se pueden modelar como una viga *AB*, soportada y cargada como se muestra en la última parte de la figura.

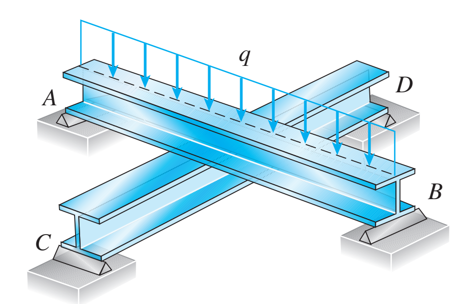
Suponiendo que el espesor *t* de los tablones es 1.5 in, la profundidad *d* del agua es 40 in y la altura *h* hasta los tirantes es 50 in, ¿cuál es el esfuerzo de flexión σ en los tablones? (*Sugerencia:* el momento flexionante numéricamente máximo ocurre en el apoyo empotrado.)



PROB. 10.4.17

***10.4.18** Dos vigas idénticas *AB* y *CD* simplemente apoyadas están colocadas de manera que se cruzan entre sí en sus puntos medios (consulte la figura). Antes de aplicar la carga uniforme, las vigas apenas se tocan entre sí en el punto de cruce.

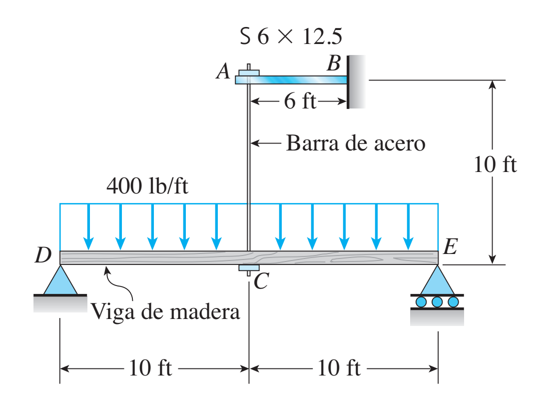
Determine los momentos flexionantes máximos $(M_{AB})_{\text{máx}}$ y $(M_{CD})_{\text{máx}}$ en las vigas *AB* y *CD*, respectivamente, debidos a la carga uniforme si la intensidad de la carga es $q = 6.4$ kN/m y la longitud de cada viga es $L = 4$ m.



PROB. 10.4.18

***10.4.19** La viga en voladizo AB que se muestra en la figura es un perfil S 6 ×12.5 de sección I de acero con $E = 30 \times 10^6$ psi. La viga simple DE es de madera con sección transversal de 4 in × 12 in (dimensiones nominales) con $E = 1.5 \times 10^6$ psi. Una barra de acero AC con diámetro de 0.25 in, longitud de 10 ft y $E = 30 \times 10^6$ psi sirve como barra de suspensión uniendo las dos vigas. La barra de suspensión se ajusta firmemente entre las vigas antes de aplicar la carga a la viga DE.

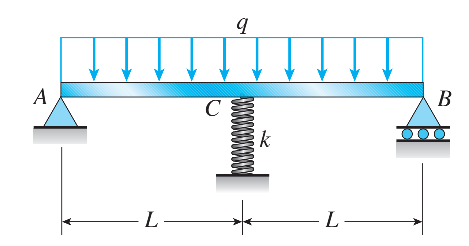
Determine la fuerza de tensión F en la barra de suspensión y los momentos flexionantes máximos M_{AB} y M_{DE} en las dos vigas debidos a la carga uniforme, que tiene una intensidad $q = 400$ lb/ft. (*Sugerencia:* como ayuda para obtener el momento flexionante máximo en la viga DE, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.)



PROB. 10.4.19

***10.4.20** La viga AB que se muestra en la figura está simplemente apoyada en A y B, y está soportada sobre un resorte con rigidez k en su punto medio C. La viga tiene rigidez a la flexión EI y longitud $2L$.

¿Cuál debe ser la rigidez k del resorte a fin de que el momento flexionante máximo en la viga (debido a la carga uniforme) tenga el valor más pequeño posible?



PROB. 10.4.20

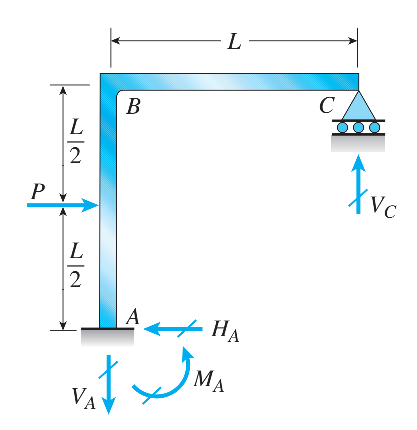


Grúas para el manejo de contenedores de barcos hechas de dos marcos planos

***10.4.21** El marco continuo ABC tiene un apoyo empotrado en A, un apoyo de rodillo en C y el nodo en B es rígido (consulte la figura). Los elementos AB y BC tienen longitud L y rigidez a la flexión EI. Una fuerza horizontal P actúa a la mitad de la altura del elemento AB.

(a) Encuentre todas las reacciones del marco.

(b) ¿Cuál es el momento flexionante máximo $M_{máx}$ en el marco? (*Nota:* no tome en cuenta las deformaciones axiales en el elemento AB y considere sólo los efectos de la flexión.)

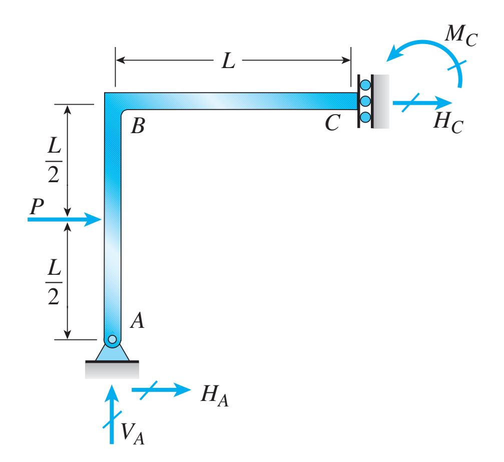


PROB. 10.4.21

***10.4.22** El marco continuo ABC tiene una articulación en A, un apoyo guiado en C y un nodo rígido en B (consulte la figura). Los elementos AB y BC tienen longitud L y rigidez a la flexión EI. Una fuerza horizontal P actúa a la mitad de la altura del elemento AB.

(a) Encuentre todas las reacciones del marco.

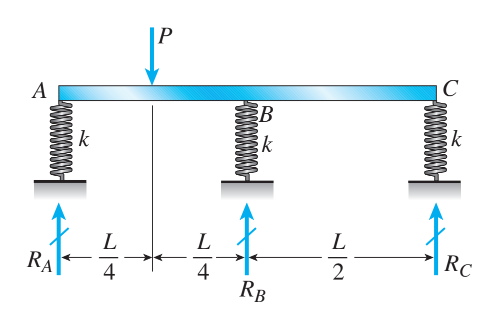
(b) ¿Cuál es el momento flexionante máximo $M_{máx}$ en el marco? (*Nota:* no tome en cuenta las deformaciones axiales en los elementos AB y BC y considere sólo los efectos de la flexión.)



PROB. 10.4.22

***10.4.23** Una viga de patín ancho *ABC* reposa sobre tres apoyos de resorte idénticos en los puntos *A*, *B* y *C* (consulte la figura). La rigidez a la flexión de la viga es $EI = 6912 \times 10^6$ lb-in^2 y cada resorte tiene rigidez $k = 62{,}500$ lb/in. La longitud de la viga es $L = 16$ ft.

Si la carga *P* es 6000 lb, ¿cuáles son las reacciones R_A, R_B y R_C? Además, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga, e identifique todas las ordenadas críticas.



PROB. 10.4.23

****10.4.24** Una viga doblemente empotrada *AB* con longitud *L* está sometida a una carga uniforme de intensidad *q* que actúa sobre la región media de la viga (consulte la figura).

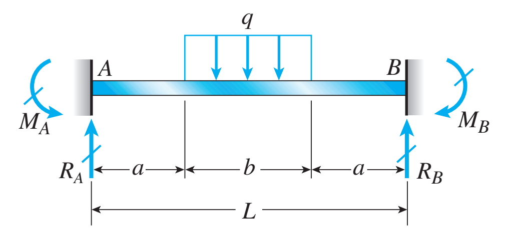
(a) Obtenga una fórmula para los momentos en los empotramientos M_A y M_B en términos de la carga *q*, la longitud *L* y la longitud *b* de la parte cargada de la viga.

(b) Trace una gráfica del momento en el empotramiento M_A contra la longitud *b* de la parte cargada de la viga. Por conveniencia, trace la gráfica en la siguiente forma adimensional:

$$\frac{M_A}{qL^2/12} \quad \text{contra} \quad \frac{b}{L}$$

con la razón b/L variando entre sus valores extremos de 0 y 1.

(c) Para el caso especial en el que $a = b = L/3$, trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga, identificando todas las ordenadas críticas.



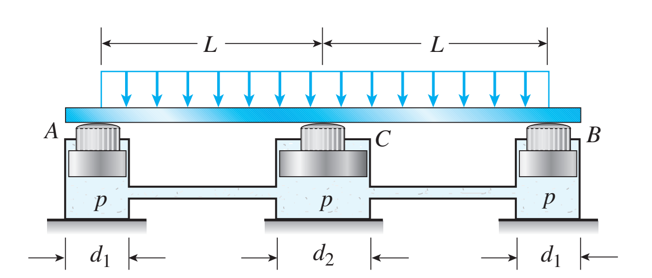
PROB. 10.4.24

****10.4.25** Una viga que soporta una carga uniforme con intensidad *q* en toda su longitud reposa sobre émbolos en los puntos *A*, *C* y *B* (consulte la figura). Los cilindros están llenos de aceite y conectados mediante un tubo de manera que la presión de aceite en cada cilindro es la misma. Los émbolos *A* y *B* tienen diámetro d_1 y el émbolo en *C* tiene diámetro d_2.

(a) Determine la razón entre d_2 y d_1 de modo que el momento flexionante máximo en la viga sea tan pequeño como sea posible.

(b) En estas condiciones óptimas, ¿cuál es el momento flexionante máximo $M_{máx}$ en la viga?

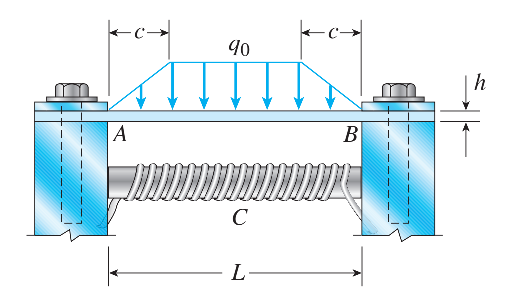
(c) ¿Cuál es la diferencia en elevación entre el punto *C* y los apoyos extremos?



PROB. 10.4.25

*****10.4.26** Un viga delgada de acero AB usada en conjunto con un electroimán en un experimento de física de alta energía está sujeta por pernos a soportes rígidos (consulte la figura). Un campo magnético producido por las bobinas C resulta en una fuerza que actúa sobre la viga. La fuerza tiene distribución trapezoidal con intensidad máxima $q_0 = 18$ kN/m. La longitud de la viga entre los soportes es $L = 200$ mm y la dimensión c de la carga trapezoidal es 50 mm. La viga tiene una sección transversal rectangular con ancho $b = 60$ mm y altura $h = 20$ mm.

Determine el esfuerzo de flexión máximo $\sigma_{máx}$ y la deflexión máxima $\delta_{máx}$ para la viga. (No tome en cuenta los efectos de las deformaciones axiales y considere sólo los efectos de la flexión. Utilice $E = 200$ GPa.)



PROB. 10.4.26

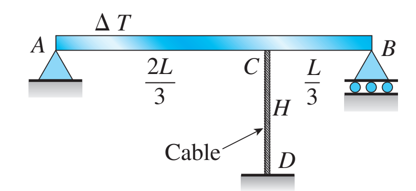
Efectos de temperatura

Las vigas descritas en los problemas para la sección 10.5 tienen rigidez a la flexión constante EI.

10.5.1 Un cable CD con longitud H está sujeto al tercer punto de una viga simple AB con longitud L (consulte la figura). El momento de inercia de la viga es I y el área efectiva de la sección transversal del cable es A. El cable en un inicio está firme pero sin tensión inicial.

(a) Obtenga una fórmula para la fuerza de tensión S en el cable cuando la temperatura disminuye uniformemente en ΔT grados, suponiendo que la viga y el cable están hechos del mismo material (módulo de elasticidad E y coeficiente de dilatación térmica α). Utilice el método de superposición en la solución.

(b) Repita el inciso a para una viga de madera y un cable de acero.

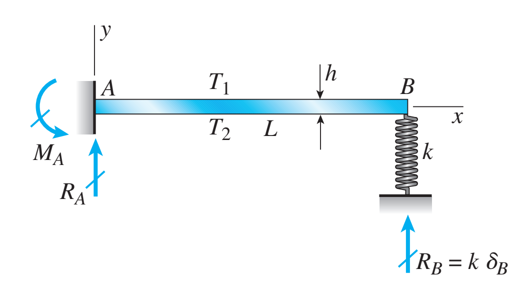


PROB. 10.5.1

10.5.2 Una viga en voladizo apuntalada, fija en el extremo izquierdo A y simplemente apoyada en el extremo B, está sometida a un diferencial de temperatura con temperatura T_1 en su superficie superior y T_2 en su superficie inferior (consulte la figura).

(a) Encuentre todas las reacciones para esta viga. Utilice el método de superposición en la solución. Suponga que el apoyo de resorte no se ve afectado por la temperatura.

(b) ¿Cuáles son las reacciones cuando $k \to \infty$?



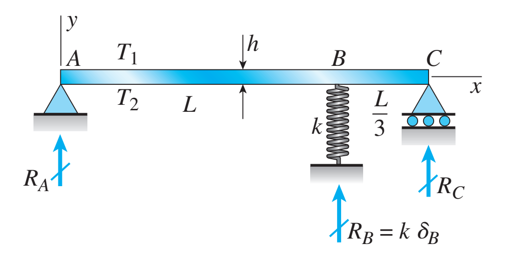
PROBS. 10.5.2 y 10.5.3

10.5.3 Resuelva el problema anterior integrando la ecuación diferencial de la curva de deflexión.

10.5.4 Una viga con dos claros con longitudes L y $L/3$ está sometida a un diferencial de temperatura con temperatura T_1 en su superficie superior y T_2 en su superficie inferior (consulte la figura).

(a) Determine todas las reacciones para esta viga. Utilice el método de superposición en la solución. Suponga que el apoyo de resorte no se ve afectado por la temperatura.

(b) ¿Cuáles son las reacciones cuando $k \to \infty$?



PROBS. 10.5.4 y 10.5.5

***10.5.5** Resuelva el problema anterior al integrar la ecuación diferencial de la curva de deflexión.

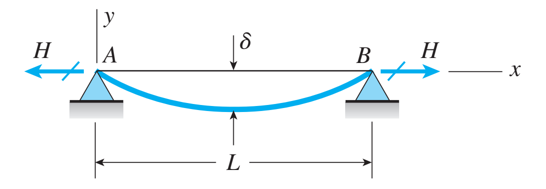
Desplazamientos longitudinales en los extremos de vigas

10.6.1 Suponga que la forma flexionada de una viga AB con apoyos articulados *inmóviles* (consulte la figura) está dada por

la ecuación $v = -\delta$ sen $\pi x/L$, donde δ es la deflexión a la mitad del claro de la viga y L es su longitud. Además, suponga que la viga tiene rigidez axial constante EA.

(a) Obtenga fórmulas para la fuerza longitudinal H en los extremos de la viga y para el esfuerzo de tensión correspondiente σ_t.

(b) Para una viga de una aleación de aluminio con $E = 10 \times 10^6$ psi, calcule el esfuerzo de tensión σ_t cuando la razón entre la deflexión δ y la longitud L es igual a $1/200$, $1/400$ y $1/600$.



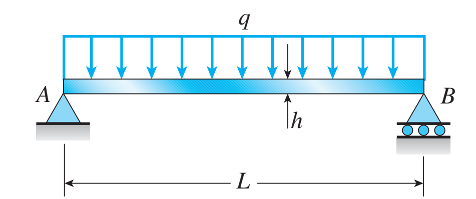
PROB. 10.6.1

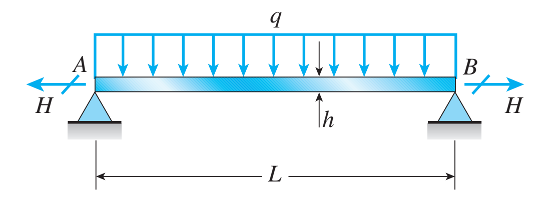
10.6.2 (a) Una viga simple AB con longitud L y altura h soporta una carga uniforme de intensidad q (consulte la *primera parte* de la figura). Obtenga una fórmula para el acortamiento por curvatura λ de esta viga. Además, obtenga una fórmula para el esfuerzo de flexión máximo σ_b en la viga debido a la carga q.

(b) Ahora suponga que los extremos de la viga están articulados de manera que el acortamiento por curvatura se evita y se desarrolla una fuerza horizontal H en los apoyos (consulte la *segunda parte* de la figura). Obtenga una fórmula para el esfuerzo axial de tensión correspondiente σ_t.

(c) Utilice las fórmulas obtenidas en los incisos a y b, para calcular el acortamiento por curvatura λ, el esfuerzo de flexión máximo σ_b y el esfuerzo de tensión σ_t para la viga de acero siguiente: longitud $L = 3$ m, altura $h = 300$ mm, módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y momento de inercia $I = 36 \times 10^6$ mm^4. Además, la carga sobre la viga tiene intensidad $q = 25$ kN/m.

Compare el esfuerzo de tensión σ_t producido por las fuerzas axiales con el esfuerzo de flexión máximo σ_b producido por la carga uniforme.





PROB. 10.6.2



Los elementos críticos de soporte de carga en estructuras como columnas y otros elementos esbeltos en compresión son proclives a fallar por pandeo.

11

Columnas

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

El interés principal en este capítulo es el pandeo de columnas esbeltas que soportan cargas de compresión en estructuras. Primero se define y calcula la carga axial crítica que indica el inicio del pandeo para una variedad de modelos simples compuestos de barras rígidas y resortes elásticos (sección 11.2). Se describen las condiciones de equilibrio estable, neutro e inestable para estas estructuras idealizadas rígidas. Luego se considera el pandeo elástico de columnas esbeltas con condiciones articuladas en sus extremos (sección 11.3). Se deduce y resuelve la ecuación diferencial de la curva de deflexión para obtener las expresiones para la carga de pandeo de Euler (P_{cr}) y la forma pandeada asociada para el modo fundamental. Se definen el esfuerzo crítico (σ_{cr}) y la relación de esbeltez (L/r), y se explica el comportamiento de los efectos de deflexiones grandes, las imperfecciones en columnas, el comportamiento inelástico y las formas óptimas de columnas. A continuación se calculan las cargas críticas y las formas de modo de pandeo para tres casos adicionales de soporte de columnas (empotrado-libre, doblemente empotrado y empotrado-articulado) (sección 11.4), y se introduce el concepto de longitud efectiva (L_e). Si la carga axial de compresión no se aplica en el centroide de la sección transversal de la columna, se debe considerar la excentricidad de la carga en la ecuación diferencial de la curva de deflexión (sección 11.5) y el comportamiento de la columna cambia como se muestra en el diagrama carga-deflexión. Los esfuerzos máximos en columnas con cargas excéntricas se pueden calcular al emplear la fórmula de la secante (sección 11.6). Si el material se somete a esfuerzos más allá del límite de proporcionalidad, se debe considerar el pandeo inelástico (secciones 11.7 y 11.8) al aplicar una de las tres teorías disponibles. Por último, se explican las fórmulas para el diseño de columnas de varios materiales (sección 11.9) y se ilustran con ejemplos.

El capítulo 11 está organizado como sigue:

11.1 INTRODUCCIÓN

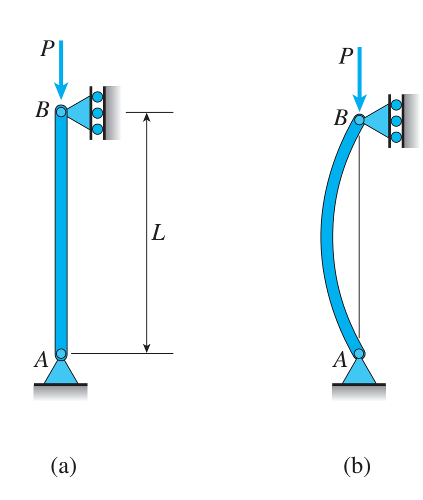


FIGURA 11.1 Pandeo de una columna esbelta debido a una carga *P* de compresión axial.

Las estructuras sometidas a carga pueden fallar de diversas maneras, dependiendo del tipo de estructura, de las condiciones de soporte, de los tipos de cargas y de los materiales empleados. Por ejemplo, el eje de un vehículo puede fracturarse de repente debido a los ciclos repetidos de carga o una viga puede flexionarse de manera excesiva, de tal modo que la estructura ya no puede realizar sus funciones de trabajo. Estos tipos de fallas se evitan diseñando estructuras de forma que los esfuerzos máximos y los desplazamientos máximos permanezcan dentro de límites tolerables. Por tanto, la **resistencia** y **rigidez** son factores importantes en el diseño, como se estudió en todos los capítulos anteriores.

Otro tipo de falla es el **pandeo**, que es el tema de este capítulo. Consideraremos de manera específica el pandeo de **columnas**, que son elementos estructurales largos y esbeltos, cargados axialmente en compresión (figura 11.1a). Si un elemento en compresión es relativamente esbelto, se puede flexionar lateralmente y fallar por flexión (figura 11.1b) en vez de fallar por compresión directa del material. Usted puede demostrar este comportamiento al comprimir una regla de plástico u otro objeto esbelto. Cuando se tiene flexión lateral, decimos que la columna se ha *pandeado*. Ante una carga axial creciente, las deflexiones laterales también aumentan y la columna termina por doblarse completamente.

El fenómeno de pandeo no está limitado sólo a columnas, también puede ocurrir en muchos tipos de estructuras y puede adoptar muchas formas. Cuando usted se para sobre una lata vacía de aluminio, las paredes cilíndricas delgadas se pandean ante su peso y la lata se pliega. Cuando un puente largo se desplomó hace algunos años, los investigadores determinaron que la falla la ocasionó el pandeo de una placa delgada de acero que se arrugó por esfuerzos de compresión. El pandeo es una las causas principales de falla en estructuras y, por tanto, la posibilidad que ocurra siempre se debe considerar en el diseño.

11.2 PANDEO Y ESTABILIDAD

Para ilustrar los conceptos fundamentales de pandeo y estabilidad, analizaremos una **estructura idealizada,** o **modelo de pandeo**, como se muestra en la figura 11.2a. Esta estructura hipotética consiste en dos barras rígidas *AB* y *BC*, cada una con longitud $L/2$, unidas en *B* por un pasador y mantenidas en posición vertical por un resorte rotacional con rigidez β_R.*

Esta estructura idealizada es análoga a la columna de la figura 11.1a, debido a que las dos tienen apoyos simples en los extremos y están comprimidas por una carga axial *P*. Sin embargo, la elasticidad de la estructura

* La relación general para un resorte rotacional es $M = \beta_R\theta$, donde *M* es el momento que actúa sobre el resorte, β_R es la rigidez a la rotación del resorte y θ es el ángulo que gira el resorte. Por tanto, la rigidez a la rotación tiene unidades de momento divididas entre un ángulo, como lb-in/rad o N·m/rad. La relación análoga para un resorte traslacional es $F = \beta\delta$, donde *F* es la fuerza que actúa sobre el resorte, β es la rigidez a la traslación del resorte (o constante del resorte) y δ es el cambio de longitud del resorte. Así, la rigidez a la traslación tiene unidades de fuerza divididas entre una longitud, como lb/in o N/m.

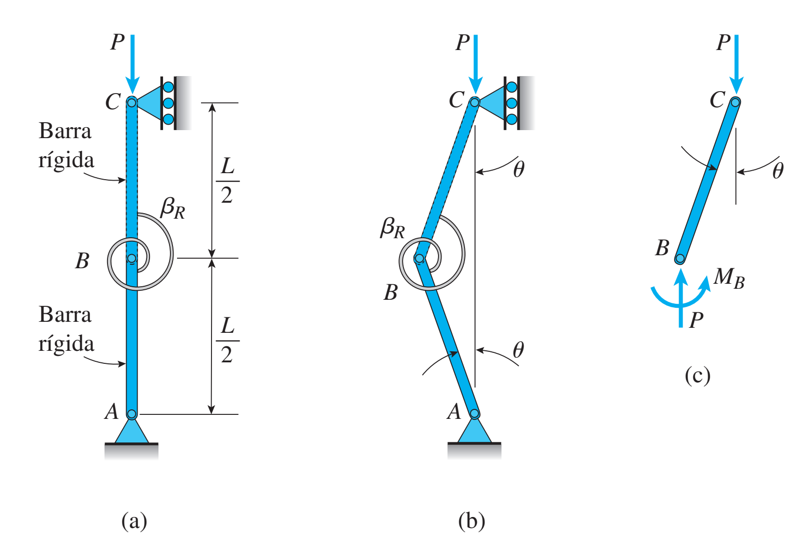


FIGURA 11.2 Pandeo de una estructura idealizada que consiste en dos barras rígidas y un resorte rotacional.

idealizada está "concentrada" en el resorte rotacional, en tanto que una columna real puede flexionarse en toda su longitud (figura 11.1b).

En la estructura idealizada las dos barras están perfectamente alineadas y la carga axial P tiene su línea de acción a lo largo del eje longitudinal (figura 11.2a). En consecuencia, el resorte inicialmente no está sometido a esfuerzo y las barras están en compresión directa.

Ahora suponga que la estructura es perturbada por alguna fuerza externa que causa que el punto B se mueva una distancia pequeña en sentido lateral (figura 11.2b). Las barras rígidas giran ángulos pequeños θ y se desarrolla un momento en el resorte. El sentido de este momento tiende a regresar la estructura a su posición recta original y por tanto se denomina **momento restitutivo.** Sin embargo, al mismo tiempo la tendencia de la fuerza axial de compresión es aumentar el desplazamiento lateral. Por tanto, estas dos acciones tienen efectos opuestos: — el momento restitutivo tiende a *disminuir* el desplazamiento y la fuerza axial tiene a *aumentarlo*.

A continuación considere qué sucede cuando se elimina la fuerza perturbadora. Si la fuerza axial P es relativamente pequeña, la acción del momento restitutivo prevalecerá sobre la acción de la fuerza axial y la estructura regresará a su posición inicial recta. En estas condiciones, se dice que la estructura es **estable**. No obstante, si la carga axial P es grande, el desplazamiento lateral del punto B aumentará y las barras girarán ángulos cada vez mayores hasta que la estructura se colapsa. Ante estas condiciones, la estructura es **inestable** y falla por pandeo lateral.

Carga crítica

La transición entre las condiciones estable e inestable ocurre para un valor especial de la fuerza axial conocido como **carga crítica** (identificada con el símbolo P_{ct}). Podemos determinar la carga crítica de nuestro modelo de

pandeo al considerar la estructura en la posición perturbada (figura 11.2b) e investigar su equilibrio.

Primero consideramos toda la estructura como un cuerpo libre y sumamos momentos con respecto al apoyo A. Este paso conduce a la conclusión de que no hay reacción horizontal en el apoyo C. Segundo, consideramos la barra BC como un cuerpo libre (figura 11.2c) y observamos que está sometida a la acción de las fuerzas axiales P y al momento M_B en el resorte. El momento M_B es igual a la rigidez a la rotación β_R por el ángulo de rotación 2θ del resorte; por tanto

$$M_B = 2\beta_R\theta \qquad \text{(a)}$$

Como el ángulo θ es una cantidad pequeña, el desplazamiento lateral del punto B es $\theta L/2$. Por tanto, obtenemos la siguiente ecuación de equilibrio al sumar momentos con respecto al punto B para la barra BC (figura 11.2c):

$$M_B - P\left(\frac{\theta L}{2}\right) = 0 \qquad \text{(b)}$$

o, al sustituir de la ecuación (a),

$$\left(2\beta_R - \frac{PL}{2}\right)\theta = 0 \qquad (11.1)$$

Una solución de esta ecuación es $\theta = 0$, que es una solución trivial y sólo significa que la estructura está en equilibrio cuando es perfectamente recta, sin importar la magnitud de la fuerza P.

Una segunda solución se obtiene al igualar a cero el término entre paréntesis y despejar la carga P, que es la *carga crítica:*

$$P_{\text{cr}} = \frac{4\beta_R}{L} \qquad (11.2)$$

En el valor crítico de la carga la estructura está en equilibrio cualquiera que sea la magnitud del ángulo θ (siempre que el ángulo permanezca pequeño, debido a que hicimos esa suposición al deducir la ecuación b).

Del análisis anterior observamos que la carga crítica es la *única* para la cual la estructura estará en equilibrio en la posición perturbada. En este valor de la carga, el efecto restitutivo del momento en el resorte coincide con el efecto de pandeo de la carga axial. Por tanto, la carga crítica representa la frontera entre las condiciones estable e inestable.

Si la carga axial es menor que P_{cr}, el efecto del momento en el resorte predomina y la estructura regresa a la posición vertical después de una perturbación pequeña; si la carga axial es mayor que P_{cr}, el efecto de la fuerza axial predomina y la estructura se pandea:

Si $P < P_{\text{cr}}$, la estructura es *estable.*
Si $P > P_{\text{cr}}$, la estructura es *inestable*.

De la ecuación (11.2) observamos que la estabilidad de la estructura se incrementa *al aumentar su rigidez* o *disminuir su longitud*. Más adelante en este capítulo, cuando determinemos las cargas críticas para varios tipos de columnas, veremos que estas mismas observaciones también son válidas.

Resumen

A continuación se resume esumiendo el comportamiento de la estructura idealizada (figura 11.2a) conforme la carga axial P aumenta desde cero hasta un valor grande.

Cuando la carga axial es menor que la carga crítica ($0 < P < P_{cr}$), la estructura está en equilibrio cuando es perfectamente recta. Debido a que el equilibrio es **estable**, la estructura regresa a su posición inicial después de ser perturbada. Por tanto, la estructura está en equilibrio *sólo* cuando está perfectamente recta ($\theta = 0$).

Cuando la carga axial es mayor que la carga crítica ($P > P_{cr}$), la estructura aún está en equilibrio cuando $\theta = 0$ (dado que está en compresión directa y no hay momento en el resorte), pero el equilibrio es **inestable** y no se puede mantener, ya que la perturbación más ligera causará que la estructura se pandee.

En el valor de la carga crítica ($P = P_{cr}$), la estructura está en equilibrio aun cuando el punto B esté desplazado lateralmente una cantidad pequeña. En otras palabras, la estructura está en equilibrio para *cualquier* ángulo pequeño θ, incluyendo $\theta = 0$. Sin embargo, la estructura ni es estable ni inestable, está en la frontera entre estabilidad e inestabilidad. A esta condición se le refiere como **equilibrio neutro.**

P
Equilibrio inestable
B
Equilibrio neutro
P_{cr}
Equilibrio estable
O
θ

FIGURA 11.3 Diagrama de equilibrio para el pandeo de una estructura idealizada.

Las tres condiciones de equilibrio para la estructura idealizada se muestran en la gráfica de la carga axial P contra el ángulo de rotación θ (figura 11.3). Las dos líneas, una vertical y la otra horizontal, representan las condiciones de equilibrio. El punto B, donde el diagrama de equilibrio se bifurca, se denomina *punto de bifurcación*.

La línea horizontal para el equilibrio neutro se extiende hacia la izquierda y la derecha del eje vertical debido a que el ángulo θ puede ser en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. La línea se extiende sólo una distancia corta, sin embargo, dado que nuestro análisis se basa en la suposición de que θ es un ángulo pequeño. (La hipótesis es válida porque θ es en efecto pequeño cuando la estructura se sale por primera vez de su posición vertical. Si el pandeo continúa y θ se vuelve grande, la línea identificada “equilibrio neutro” se curva hacia arriba, como se muestra más adelante en la figura 11.11.)

Las tres condiciones de equilibrio representadas por el diagrama de la figura 11.3 son análogas a las de una bola colocada sobre una superficie lisa (figura 11.4). Si la superficie es cóncava hacia arriba, como el interior de un plato, el equilibrio es estable y la bola siempre regresa al punto bajo cuando es perturbada. Si la superficie es convexa hacia arriba, como un domo, la bola en teoría puede estar en equilibrio sobre la parte superior de la superficie, pero el equilibrio es inestable y en realidad la bola se desplaza. Si la superficie es perfectamente plana, la bola está en equilibrio neutro y permanece en el lugar donde se le coloque.

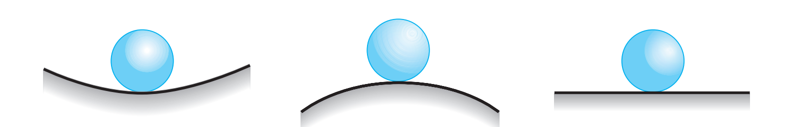


FIGURA 11.4 Bola en equilibrio estable, inestable y neutro.

Como veremos en la siguiente sección, el comportamiento de una columna ideal elástica es análogo al del modelo de pandeo que se muestra en la figura 11.2. Además, muchas otros tipos de sistemas estructurales y mecánicos se ajustan a este modelo.

11.3 COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS

Iniciamos nuestra estudio del comportamiento de la estabilidad de columnas al analizar una columna esbelta con extremos articulados (figura 11.5a). La columna está cargada por una fuerza vertical P que se aplica en el centroide de la sección transversal. La columna es perfectamente recta y está hecha de material linealmente elástico que sigue la ley de Hooke. Como se supone que la columna no tiene imperfecciones, se llama **columna ideal**.

Para fines de análisis, establecemos un sistema coordenado con el origen en el soporte A y con el eje x a lo largo del eje longitudinal de la columna. El eje y está dirigido hacia la izquierda en la figura y el eje z (no se muestra) sale del plano de la figura hacia el observador. Suponemos que el plano xy es un plano de simetría de la columna y que cualquier flexión sucede en ese plano (figura 11.5b). El sistema coordenado es idéntico al empleado en nuestro análisis anterior de vigas, como se puede observar al girar la columna en el sentido de las manecillas del reloj un ángulo de 90°.

Cuando la carga axial P tiene un valor pequeño, la columna permanece perfectamente recta y experimenta compresión axial directa. Los únicos esfuerzos son los de compresión uniforme obtenidos con la ecuación $\sigma = P/A$. La columna está en **equilibrio estable**, lo cual significa que vuelve a la posición recta después de la perturbación. Por ejemplo, si aplicamos una carga lateral pequeña y ocasionamos que la columna se flexione, la deflexión desaparecerá y la columna retornará a su posición original cuando se elimina la carga lateral.

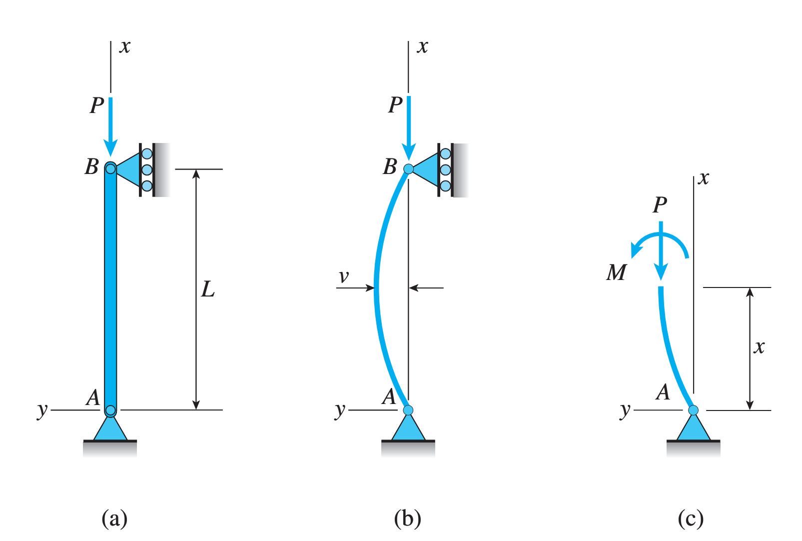


FIGURA 11.5 Columna con extremos articulados: (a) columna ideal, (b) forma pandeada y (c) fuerza axial P y momento flexionante M que actúan en una sección transversal.

Como la carga axial P se aumenta gradualmente, alcanzamos una condición de **equilibrio neutro** en la que la columna puede tener una forma flexionada. El valor correspondiente de la carga es la **carga crítica** P_{cr}. En esta carga la columna puede experimentar deflexiones laterales pequeñas sin cambio en la fuerza axial. Por ejemplo, una carga lateral pequeña producirá una forma flexionada que no desaparece cuando se elimina la carga lateral. Por tanto, la carga crítica puede mantener la columna en equilibrio *ya sea* en la posición recta o bien en una posición ligeramente flexionada.

A valores mayores de la carga, la columna es **inestable** y se puede colapsar por pandeo, es decir, por flexión excesiva. Para el caso ideal que estamos estudiando, la columna estará en equilibrio en la posición recta aun cuando la fuerza axial P sea mayor que la carga crítica. Sin embargo, como el equilibrio es inestable, la perturbación mínima imaginable ocasionará que la columna se flexione en sentido lateral. Una vez que esto sucede, las deflexiones aumentarán de inmediato y la columna fallará por pandeo. El comportamiento es similar al descrito en la sección anterior para el modelo idealizado de pandeo (figura 11.2).

El comportamiento de una columna ideal comprimida por una carga axial P (figuras 11.5a y b) se puede resumir como sigue:

Si $P < P_{cr}$, la columna está en equilibrio estable en la posición recta.
Si $P = P_{cr}$, la columna está en equilibrio neutro en posición recta o en una posición ligeramente flexionada.
Si $P > P_{ct}$, la columna está en equilibrio inestable en la posición recta y se pandeará ante la más pequeña perturbación.

Por supuesto, una columna real no se comporta de esta manera idealizada debido a que siempre tiene imperfecciones. Por ejemplo, la columna no es *perfectamente* recta y la carga no está *exactamente* en el centroide. No obstante, iniciamos estudiando columnas ideales porque nos permite comprender el comportamiento de columnas reales.

Ecuación diferencial para el pandeo de columnas

Para determinar las cargas críticas y las formas flexionadas correspondientes para una columna ideal articulada (figura 11.5a), utilizamos una de las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión de una viga (consulte las ecuaciones 9.12a, b y c en la sección 9.2). Estas ecuaciones son aplicables a una columna pandeada debido a que la columna se flexiona como si fuera una viga (figura 11.5b).

Si bien la ecuación diferencial de cuarto orden (la ecuación de la carga) y la ecuación diferencial de tercer orden (la ecuación de la fuerza cortante) son adecuadas para analizar columnas, elegiremos emplear la ecuación de segundo orden (la ecuación del momento flexionante) puesto que su solución general suele ser la más simple. La **ecuación del momento flexionante** (ecuación 9.12a) es

$$EIv'' = M \tag{11.3}$$

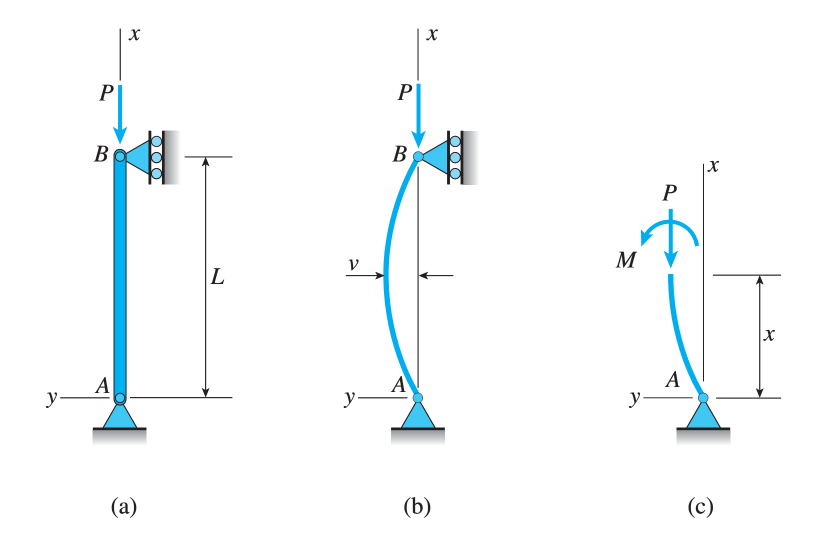


FIGURA 11.5 (Repetida.)

en donde M es el momento flexionante en cualquier sección transversal, v es la deflexión lateral en la dirección y y EI es la rigidez a la flexión en el plano xy.

El momento flexionante M a una distancia x desde el extremo A de la columna pandeada se muestra actuando en su dirección positiva en la figura 11.5c. Observe que la convención de signos para el momento flexionante es la misma que se utilizó en capítulos anteriores, a saber, un momento positivo produce una curvatura positiva (consulte las figuras 9.3 y 9.4).

La fuerza axial P que actúa en la sección transversal también se muestra en la figura 11.5c. Como no hay fuerzas horizontales que actúen en los soportes, no hay fuerzas cortantes en la columna. Por tanto, del equilibrio de momentos con respecto al punto A, obtenemos

$$M + Pv = 0 \quad \text{o} \quad M = -Pv \tag{11.4}$$

donde v es la deflexión en la sección transversal.

Esta misma expresión para el momento flexionante se obtiene si suponemos que la columna se pandea a la derecha en vez de a la izquierda (figura 11.6a). Cuando la columna se flexiona a la derecha, la deflexión es $-v$ y el momento de la fuerza axial con respecto al punto A también cambia de signo. Por tanto, la ecuación de equilibrio para momentos con respecto al punto A (consulte la figura 11.6b) es

$$M - P(-v) = 0$$

que da la misma expresión para el momento flexionante M que antes.

La **ecuación diferencial de la curva de deflexión** (ecuación 11.3) ahora se convierte en

$$EIv'' + Pv = 0 \tag{11.5}$$

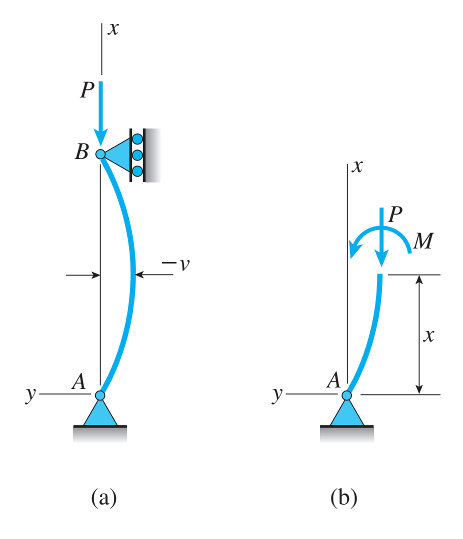


FIGURA 11.6 Columna con extremos articulados (dirección alternativa del pandeo).

Al resolver esta ecuación, que es una *ecuación diferencial de segundo orden, homogénea, lineal y con coeficientes constantes*, podemos determinar la magnitud de la carga crítica y la forma flexionada de la columna pandeada.

Observe que analizamos el pandeo de columnas al resolver la misma ecuación diferencial básica que resolvimos en los capítulos 9 y 10 al determinar deflexiones de vigas. Sin embargo, hay una diferencia fundamental en los dos tipos de análisis. En el caso de deflexiones de vigas, el momento flexionante M que aparece en la ecuación (11.3) es una función sólo de las cargas y no depende de las deflexiones de la viga. En el caso de pandeo, el momento flexionante es una función de las propias deflexiones (ecuación 11.4).

Es así que ahora encontramos un nuevo aspecto del análisis de la flexión. En nuestro trabajo anterior no consideramos la forma flexionada de la estructura y las ecuaciones de equilibrio se basaron en la geometría de la estructura *no deformada*. Sin embargo, ahora se toma en cuenta la geometría de la estructura *deformada* al escribir las ecuaciones de equilibrio.

Solución de la ecuación diferencial

Por conveniencia al escribir la solución de la ecuación diferencial (ecuación 11.5), introducimos la notación

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{11.6a,b}$$

en donde k siempre se toma como una cantidad positiva. Observe que k tiene unidades del recíproco de la longitud y por tanto las cantidades como kx y kL son adimensionales.

Con esta notación podemos rescribir la ecuación (11.5) en la forma

$$v'' + k^2 v = 0 \tag{11.7}$$

De las matemáticas sabemos que la **solución general** de esta ecuación es

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx \tag{11.8}$$

en donde C_1 y C_2 son constantes de integración (pendientes de evaluarse a partir de las condiciones de frontera o de las condiciones de los extremos de la columna). Observe que el número de constantes arbitrarias en la solución (dos en este caso) concuerda con el orden de la ecuación diferencial. Observe también que podemos verificar la solución al sustituir la expresión para v (ecuación 11.8) en la ecuación diferencial (ecuación 11.7) y al reducirla a una identidad.

Para evaluar las **constantes de integración** que aparecen en la solución (ecuación 11.8), empleamos las condiciones de frontera en los extremos de

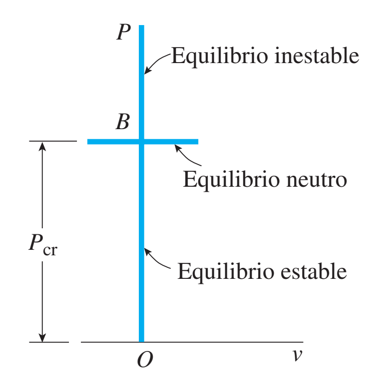


FIGURA 11.7 Diagrama carga-deflexión para una columna ideal linealmente elástica.

la columna; a saber, la deflexión es cero cuando $x = 0$ y $x = L$ (consulte la figura 11.5b):

$$v(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(L) = 0 \tag{a,b}$$

La primera condición da $C_2 = 0$ y, por tanto,

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx \tag{c}$$

La segunda ecuación da

$$C_1 \operatorname{sen} kL = 0 \tag{d}$$

A partir de esta ecuación concluimos que $C_1 = 0$ o bien sen $kL = 0$. Consideraremos las dos posibilidades.

Caso 1. Si la constante C_1 es igual a cero, la deflexión v también es cero (consulte la ecuación c) y, por tanto, la columna permanece recta. Además, observamos que cuando C_1 es igual a cero, la ecuación (d) se satisface para *cualquier* valor de la cantidad kL. En consecuencia, la carga axial P también puede tener cualquier valor (consulte la ecuación 11.6b). Esta solución de la ecuación diferencial (conocida en matemáticas como *solución trivial*) está representada por el eje vertical del diagrama carga-deflexión (figura 11.7) y proporciona el comportamiento de una columna ideal que está en equilibrio (ya sea estable o inestable) en la posición recta (sin deflexión) ante la acción de la carga de compresión P.

Caso 2. La segunda posibilidad para satisfacer la ecuación (d) está dada por la ecuación siguiente, conocida como **ecuación de pandeo:**

$$\operatorname{sen} kL = 0 \tag{11.9}$$

Esta ecuación se satisface cuando $kL = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ Sin embargo, como $kL = 0$, significa que $P = 0$, esta solución no es de interés y entonces las soluciones que consideraremos son

$$kL = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{e}$$

o (consulte la ecuación 11.6a):

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.10}$$

Esta fórmula da los valores de P que satisfacen la ecuación de pandeo y proporciona soluciones (además de la solución trivial) de la ecuación diferencial.

La ecuación de la **curva de deflexión** (de las ecuaciones c y e) es

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.11}$$

Sólo cuando P tiene uno de los valores dados por la ecuación (11.10) es teóricamente posible que la columna tenga una forma flexionada (dada por la ecuación 11.11). Para todos los otros valores de P, la columna está en equilibrio sólo si permanece recta. Por tanto, los valores de P dados por la ecuación (11.10) son las **cargas críticas** para esta columna.

Cargas críticas

La carga crítica menor para una columna con extremos articulados (figura 11.8a) se obtiene cuando $n = 1$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (11.12)$$

La forma pandeada correspondiente (denominada en ocasiones *forma modal*) es

$$v = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \qquad (11.13)$$

como se muestra en la figura 11.8b. La constante C_1 representa la deflexión en el punto medio de la columna y puede tener cualquier valor pequeño, sea positivo o negativo. Por tanto, la parte del diagrama carga-deflexión correspondiente a P_{cr} es una línea recta horizontal (figura 11.7). Entonces, la deflexión en la carga crítica es *indefinida*, aunque debe permanecer pequeña para que nuestras ecuaciones sean válidas. Arriba del punto de bifurcación B el equilibrio es inestable y debajo de éste es estable.

El pandeo de una columna articulada en el primer modo se denomina **caso fundamental** de pandeo de la columna.

El tipo de pandeo descrito en esta sección se denomina **pandeo de Euler** y la carga crítica para una columna ideal elástica a menudo se denomina **carga de Euler.** El famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783), reconocido por lo general como el matemático más grande de todos los tiempos, fue el primero en investigar el pandeo de una columna esbelta y en determinar la carga crítica (Euler publicó sus resultados en 1744); consulte la referencia 11.1.

Al tomar valores mayores del índice n en las ecuaciones (11.10) y (11.11), obtenemos un número infinito de cargas críticas y formas modales correspondientes. La forma modal para $n = 2$ tiene dos semiondas, como se representa en la figura 11.8c. La carga crítica correspondiente es cuatro veces mayor que la carga crítica para el caso fundamental. Las magnitudes de las cargas críticas son proporcionales al cuadrado de n y el número de semiondas en la forma pandeada es igual a n.

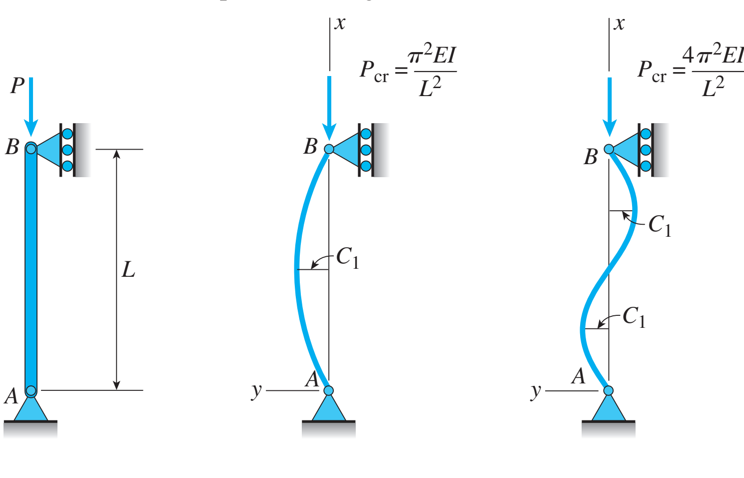


FIGURA 11.8 Formas pandeadas para una columna ideal con extremos articulados: (a) columna inicialmente recta, (b) forma pandeada para $n = 1$ y (c) forma pandeada para $n = 2$.

Con frecuencia, las formas pandeadas para los **modos superiores** no son de interés práctico debido a que la columna se pandea cuando la carga axial *P* alcanza su valor crítico mínimo. La única forma de obtener modos de pandeo mayores que el primero es proporcionar un soporte lateral a la columna en puntos intermedios, como en el punto medio de la columna que se muestra en la figura 11.8 (consulte el ejemplo 11.1 al final de esta sección).

Comentarios generales

A partir de la ecuación (11.2) vemos que la carga crítica de una columna es proporcional a la rigidez a la flexión *EI* e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud. De interés particular es el hecho de que la propia *resistencia* del material, representada por una cantidad como el límite de proporcionalidad o el esfuerzo de fluencia, no aparece en la ecuación para la carga crítica. Por tanto, aumentar una propiedad de resistencia no incrementa la carga crítica de una columna. Sólo se pude aumentar incrementando la rigidez a la flexión, reduciendo la longitud o proporcionando soporte lateral adicional.

La *rigidez a la flexión* se puede aumentar al emplear un material "más rígido" (es decir, un material con un módulo de elasticidad *E* mayor) o al distribuir el material de tal manera que aumente el momento de inercia *I* de la sección transversal, de la misma forma que una viga puede hacerse más rígida al aumentar el momento de inercia, el cual se incrementa al distribuir el material más alejado del centroide de la sección transversal. De aquí, un elemento tubular hueco suele ser más económico para utilizarse como una columna que un elemento sólido con la misma área de la sección transversal.

Al reducir el *espesor de la pared* de un elemento hueco y aumentar sus dimensiones laterales (mientras se mantiene constante el área de sección transversal) también aumenta la carga crítica debido a que se aumenta el momento de inercia. Sin embargo, este proceso tiene un límite práctico ya que al final la pared misma se vuelve inestable. Cuando eso sucede, se presenta el pandeo localizado en forma de corrugaciones o arrugas pequeñas en las paredes de la columna. Por tanto, debemos distinguir entre *pandeo* global de una columna, que se estudia en este capítulo y *pandeo local* de sus partes. Este último requiere de investigaciones más detalladas y está fuera de los objetivos de este libro.

En el análisis anterior (consulte la figura 11.8), supusimos que el plano *xy* era un plano de simetría de la columna y que el pandeo tenía lugar en él. La última suposición se cumplirá si la columna tiene soportes laterales perpendiculares al plano de la figura, de tal modo que la columna esté restringida a pandearse en el plano *xy*. Si la columna está soportada sólo en sus extremos y es libre de pandearse en *cualquier* dirección, entonces la flexión ocurrirá con respecto al eje centroidal principal que tenga el momento de inercia menor.

Por ejemplo, considere las secciones transversales rectangular y de patín ancho que se muestran en la figura 11.9. En cada caso, el momento de inercia I_1 es mayor que el momento de inercia I_2; por tanto la columna se pandeará en el plano 1-1 y se debe emplear el momento de inercia I_2 menor en la fórmula para la carga crítica. Si la sección transversal es cuadrada o circular, todos los ejes centroidales tienen el mismo momento de inercia y el pandeo puede ocurrir en cualquier plano longitudinal.

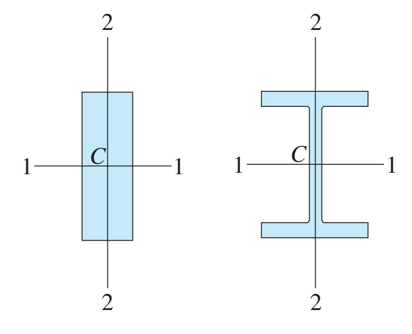


FIGURA 11.9 Secciones transversales de columnas que muestran los ejes centroidales con $I_1 > I_2$.

Esfuerzo crítico

Después de determinar la carga crítica para una columna, podemos calcular el **esfuerzo crítico** correspondiente al dividir la carga entre el área de la sección transversal. Para el caso fundamental de pandeo (figura 11.8b), el esfuerzo crítico es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \qquad (11.14)$$

en donde I es el momento de inercia para el eje principal con respecto al cual ocurre el pandeo. Esta ecuación se puede escribir en una forma más útil al introducir la notación

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad (11.15)$$

en donde r es el **radio de giro** de la sección transversal en el plano de flexión.* Entonces la ecuación para el esfuerzo crítico se convierte en

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad (11.16)$$

en donde L/r es una razón adimensional denominada **relación de esbeltez:**

$$\text{Relación de esbeltez} = \frac{L}{r} \qquad (11.17)$$

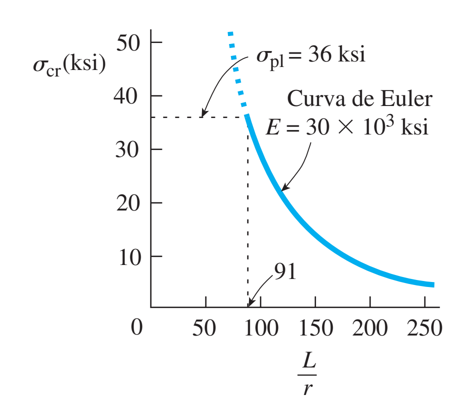


FIGURA 11.10 Gráfica de la curva de Euler (de la ecuación 11.16) para acero estructural con $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\sigma_{pl} = 36$ ksi.

Observe que la relación de esbeltez depende sólo de las dimensiones de la columna. Una columna que es larga y esbelta tendrá una relación de esbeltez alta y, por tanto, un esfuerzo crítico bajo. Una columna que es corta y robusta tendrá una relación de esbeltez baja y se pandeará con un esfuerzo elevado. Los valores comunes de la relación de esbeltez para columnas reales se encuentran entre 30 y 150.

El esfuerzo crítico es el esfuerzo de compresión promedio sobre la sección transversal en el instante que la carga alcanza su valor crítico. Podemos trazar una gráfica de este esfuerzo como una función de la relación de esbeltez y obtener una curva conocida como **curva de Euler** (figura 11.10). La curva que se muestra en la figura está trazada para un acero estructural con $E = 30 \times 10^3$ ksi, y es válida sólo cuando el esfuerzo crítico es menor que el límite de proporcionalidad del acero debido a que las ecuaciones se dedujeron con el empleo de la ley de Hooke. Por tanto, trazamos una línea horizontal en la gráfica en el límite de proporcionalidad del acero (supuesto igual a 36 ksi) y terminamos la curva de Euler en ese nivel del esfuerzo.**

*El radio de giro se describe en la sección 12.4.

**La curva de Euler no es una forma geométrica común. Algunas veces, de manera equivocada, se le llama hipérbola, pero las hipérbolas son gráficas de ecuaciones polinomiales de segundo grado con dos variables, en tanto que la curva de Euler es una gráfica de una ecuación de tercer grado con dos variables.

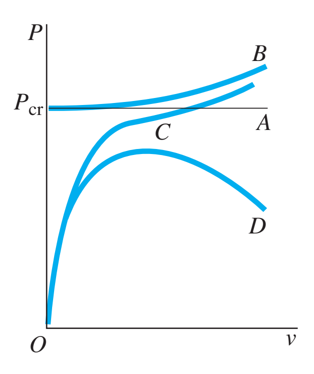


FIGURA 11.11 Diagrama carga-deflexión para columnas: línea A, columna ideal elástica con deflexiones pequeñas; curva B, columna ideal elástica con deflexiones grandes; curva C, columna elástica con imperfecciones y curva D, columna inelástica con imperfecciones.

Efectos de deflexiones grandes, imperfecciones y comportamiento inelástico

Las ecuaciones para las cargas críticas se dedujeron para columnas ideales, es decir, aquellas en las que las cargas se aplican con precisión, la construcción es perfecta y el material sigue la ley de Hooke. Como consecuencia, determinamos que las magnitudes de las deflexiones pequeñas en el pandeo estaban indefinidas.* Por tanto, cuando $P = P_{cr}$, la columna puede tener cualquier deflexión pequeña, una condición representada por la línea horizontal identificada A en el diagrama de carga-deflexión de la figura 11.11. (En esta figura, mostramos sólo la mitad derecha del diagrama, pero las dos mitades son simétricas con respecto al eje vertical.)

La teoría para columnas ideales está limitada a deflexiones pequeñas debido a que empleamos la segunda derivada v'' para la curvatura. Un análisis más puntual, basado en la expresión exacta para la curvatura (ecuación 9.13 de la sección 9.2), muestra que no hay indefinición en las magnitudes de las deflexiones durante el pandeo. Más bien, para una columna ideal, linealmente elástica, el diagrama de carga-deflexión sube de acuerdo con la curva B de la figura 11.11. Así, después de que una columna linealmente elástica empieza a pandearse, se requiere una carga creciente para causar un aumento en las deflexiones.

Ahora suponga que la columna no está construida perfectamente; por ejemplo, la columna podría tener una imperfección en la forma de una pequeña curvatura inicial, de manera que la columna sin carga no es perfectamente recta. Las imperfecciones producen deflexiones desde el inicio de la carga, como lo muestra curva C en la figura 11.11. Para deflexiones pequeñas, la curva C se aproxima a la línea A como una asíntota. Sin embargo, conforme aumentan las deflexiones, se asemeja a la curva B. Entre mayores sean las imperfecciones, más se mueve la curva C hacia la derecha, alejándose de la línea vertical. Por el contrario, si la columna está construida con precisión razonable, la curva C tiende al eje vertical y a la línea horizontal identificada como A. Al comparar las líneas, A, B y C, observamos que para fines prácticos la carga crítica representa la capacidad de carga máxima de una columna elástica, dado que en la mayor parte de las aplicaciones no se toleran deflexiones grandes.

Por último, considere qué sucede cuando los esfuerzos sobrepasan el límite de proporcionalidad y el material ya no sigue la ley de Hooke. Por supuesto, el diagrama de carga-deflexión no cambia hasta el nivel de carga en el que se alcanza el límite de proporcionalidad. Entonces, la curva para comportamiento inelástico (curva D) se separa de la curva elástica, continúa hacia arriba, alcanza un máximo y se dirige hacia abajo.

*En terminología matemática, resolvimos un *problema lineal de valores propios*. La carga crítica es un *valor propio* y la forma modal pandeada es una *función propia*.

Las formas precisas de las curvas en la figura 11.11 dependen de las propiedades del material y de las dimensiones de la columna, pero la naturaleza general del comportamiento está representada en general por las curvas mostradas.

Sólo las columnas mucho muy esbeltas permanecen elásticas hasta la carga crítica. Las columnas más robustas se comportan de manera inelástica y siguen una curva como la *D*. Así, la carga máxima que puede soportar una columna inelástica puede ser considerablemente menor que la carga de Euler para esa misma columna. Además, la parte descendente de la curva *D* representa un colapso repentino y catastrófico, debido a que se requieren cargas cada vez menores para mantener deflexiones crecientes. En contraste, las curvas para columnas elásticas son muy estables, ya que continúan hacia arriba conforme aumentan las deflexiones, y por lo tanto se requieren cargas cada vez mayores para causar un aumento en la deflexión. (El pandeo inelástico se describe con más detalle en las secciones 11.7 y 11.8.)

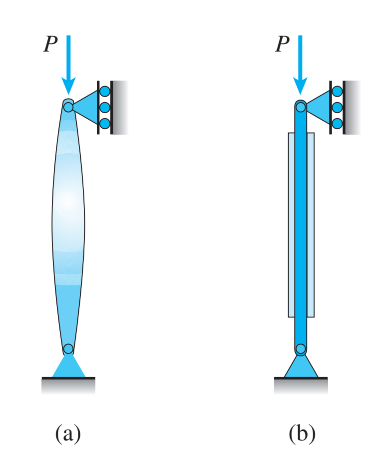


FIGURA 11.12 Columnas no prismáticas.

Formas óptimas de columnas

Es usual que los elementos en compresión tengan las mismas secciones transversales en toda su longitud, por lo que en este capítulo sólo analizamos las columnas prismáticas. Sin embargo, las columnas prismáticas no son la forma óptima si se desea tener peso mínimo. La carga crítica de una columna con una cantidad dada de material se puede aumentar al variar la forma de manera que la columna tenga secciones transversales mayores en las regiones donde los momentos flexionantes son mayores. Considere, por ejemplo, una columna con sección transversal circular sólida y extremos articulados. Una columna con la forma que se muestra en la figura 11.12a tendrá una carga crítica mayor que una columna prismática hecha con el mismo volumen de material. Como un medio para aproximar esta forma óptima, las columnas prismáticas en ocasiones se refuerzan en parte de sus longitudes (figura 11.12b).

Ahora considere una columna prismática con extremos articulados que es libre para pandearse en *cualquier* dirección lateral (figura 11.13a). Además, suponga que la columna tiene una sección transversal sólida, en forma de círculo, cuadrado, triángulo, rectángulo o hexágono (figura 11.13b). Surge una pregunta interesante: para un área transversal dada, ¿cuál de estas formas hace a la columna más eficiente? O, en términos más precisos, ¿qué sección transversal da la carga crítica mayor? Por supuesto, estamos suponiendo que la carga crítica se calcula con la fórmula de Euler $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ empleando el momento de inercia menor para la sección transversal.

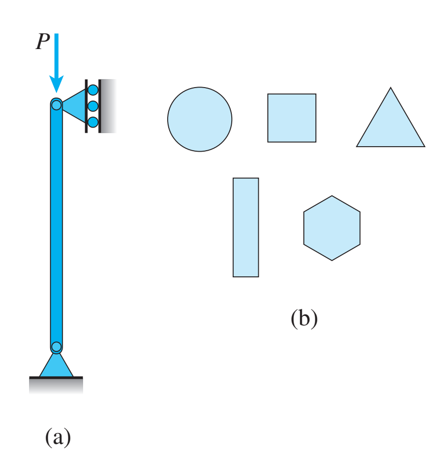


FIGURA 11.13 ¿Qué sección transversal es la óptima para una columna prismática?

Aunque una respuesta común a esta pregunta es “la forma circular,” es fácil demostrar que una sección transversal en forma de triángulo equilátero da una carga crítica 21 por ciento mayor que una sección transversal circular con la misma área (consulte el problema 11.3.11). La carga crítica para un triángulo equilátero también es mayor que las cargas obtenidas para las otras formas; por ende, un triángulo equilátero es la sección transversal óptima (con base sólo en consideraciones teóricas). Para ver un análisis matemático de los perfiles óptimos de columnas, incluyendo columnas con secciones transversales variables, consulte la referencia 11.4.

Ejemplo 11.1



Columna esbelta de acero con soporte lateral cerca de su altura media

Una columna larga y esbelta *ABC* está articulada en los extremos y se comprime por una carga axial *P* (figura 11.14). La columna tiene soporte lateral en el punto medio *B* en el plano de la figura. Sin embargo, sólo cuenta con soporte lateral perpendicular al plano de la figura en los extremos.

La columna está construida con un perfil de acero de patín ancho (W 8 × 28) con módulo de elasticidad $E = 29 \times 10^3$ ksi y límite de proporcionalidad $\sigma_{pl} = 42$ ksi. La longitud total de la columna es $L = 25$ ft.

Determine la carga permisible P_{perm} empleando un factor de seguridad $n = 2.5$ con respecto al pandeo de Euler de la columna.

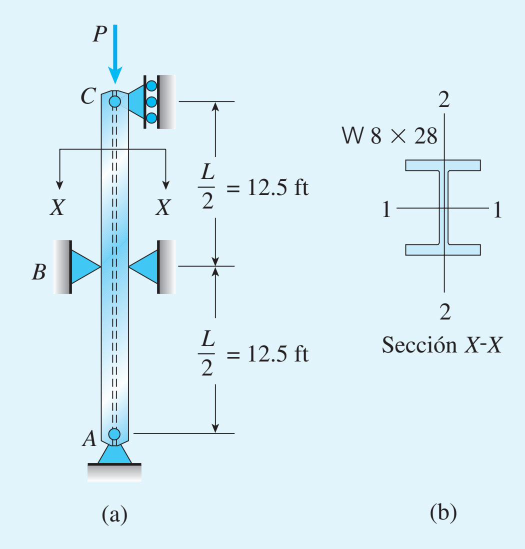


FIGURA 11.14 Ejemplo 11.1. Pandeo de Euler de una columna esbelta.

Solución

Debido a la forma en que está soportada, esta columna se puede pandear en cualquiera de los dos planos principales de flexión. Como primera posibilidad, puede pandearse en el plano de la figura, en cuyo caso la distancia entre los soportes laterales es $L/2 = 12.5$ ft y la flexión ocurre con respecto al eje 2-2 (consulte la figura 11.8c para ver la forma modal de pandeo).

Como segunda posibilidad, la columna puede pandearse perpendicular al plano de la figura con flexión con respecto al eje 1.1. Dado que el único soporte lateral en esta dirección está en los extremos, la distancia entre soportes laterales es $L = 25$ ft (consulte la figura 11.8b para ver la forma modal de pandeo).

Propiedades de la columna. De la tabla E.1, apéndice E, obtenemos los momentos de inercia y el área transversal siguientes para una columna W 8 × 28:

$$I_1 = 98.0 \text{ in}^4 \qquad I_2 = 21.7 \text{ in}^4 \qquad A = 8.25 \text{ in}^2$$

Cargas críticas. Si la columna se pandea en el plano de la figura, la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI_2}{L^2}$$

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_2}{L^2} = \frac{4\pi^2(29 \times 10^3 \text{ ksi})(21.7 \text{ in}^4)}{[(25 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})]^2} = 276 \text{ k}$$

Si la columna se pandea perpendicular al plano de la figura, la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{L^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^3 \text{ ksi})(98.0 \text{ in}^4)}{[(25 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})]^2} = 312 \text{ k}$$

Por tanto, la carga crítica para la columna (el menor de los dos valores anteriores) es

$$P_{cr} = 276 \text{ k}$$

y el pandeo ocurre en el plano de la figura.

Esfuerzos críticos. Como los cálculos para las cargas críticas son válidos sólo si el material sigue la ley de Hooke, necesitamos verificar que los esfuerzos críticos no excedan el límite de proporcionalidad del material. En el caso de la carga crítica mayor, obtenemos el siguiente esfuerzo crítico:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{312 \text{ k}}{8.25 \text{ in}^2} = 37.8 \text{ ksi}$$

Dado que este esfuerzo es menor que el límite de proporcionalidad ($\sigma_{pl} = 42$ ksi), los dos cálculos de la carga crítica son satisfactorios.

Carga permisible. La carga axial permisible para la columna, con base en el pandeo de Euler, es

$$P_{perm} = \frac{P_{cr}}{n} = \frac{276 \text{ k}}{2.5} = 110 \text{ k}$$

en donde $n = 2.5$ es el factor de seguridad deseado.

11.4 COLUMNAS CON OTRAS CONDICIONES DE SOPORTE



Columnas esbeltas de concreto empotradas en la base y libres en su parte superior durante su construcción

El pandeo de una columna con extremos articulados (descrito en la sección anterior) suele considerarse como el caso más básico de pandeo. Sin embargo, en la práctica encontramos muchas otras condiciones en los extremos, como extremos empotrados, extremos libres y soportes elásticos. Las cargas críticas para columnas con varios tipos de condiciones de soporte se pueden determinar a partir de la ecuación diferencial de la curva de deflexión siguiendo el mismo procedimiento que empleamos al analizar una columna con extremos articulados.

El **procedimiento** es el siguiente: primero, se supone que la columna está en el estado pandeado y se obtiene una expresión para el momento flexionante en la columna. Segundo, establecemos la ecuación diferencial de la curva de deflexión, mediante la ecuación del momento flexionante ($Eilv'' = M$). Tercero, resolvemos la ecuación y obtenemos su solución general, que contiene dos constantes de integración más cualesquiera cantidades desconocidas. Cuarto, aplicamos condiciones de frontera relativas a la deflexión v y a la pendiente v' y obtenemos un conjunto de ecuaciones simultáneas. Por último, resolvemos estas ecuaciones para obtener la carga crítica y la forma flexionada de la columna pandeada.

Este procedimiento matemático directo se ilustra en el siguiente análisis de tres tipos de columnas.

Columna empotrada en la base y libre en la parte superior

El primer caso que consideraremos es una columna ideal que está empotrada en la base, libre en la parte superior y sometida a una carga axial P (figura 11.15a).* La forma flexionada de la columna pandeada se muestra en la figura 11.15b. En esta figura observamos que el momento flexionante a una distancia x de la base es

$$M = P(\delta - v) \tag{11.18}$$

donde δ es la deflexión en el extremo libre de la columna. La **ecuación diferencial** de la curva de deflexión se transforma en

$$EIv'' = M = P(\delta - v) \tag{11.19}$$

en donde I es el momento de inercia para el pandeo en el plano xy.

Utilizando la notación $k^2 = P/EI$ (ecuación 11.6a), podemos reacomodar la ecuación (11.19) en la forma

$$v'' + k^2 v = k^2 \delta \tag{11.20}$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Sin embargo, es una ecuación más complicada que la ecuación para una columna con extremos articulados (consulte la ecuación 11.7) debido a que tiene un término diferente de cero en el lado derecho.

La **solución general** de la ecuación (11.20) consiste en dos partes: (1) la *solución homogénea*, que es la solución de la ecuación homogénea obtenida reemplazando el lado derecho con cero y (2) la *solución particular*, que es la solución de la ecuación (11.20) que produce el término en el lado derecho.

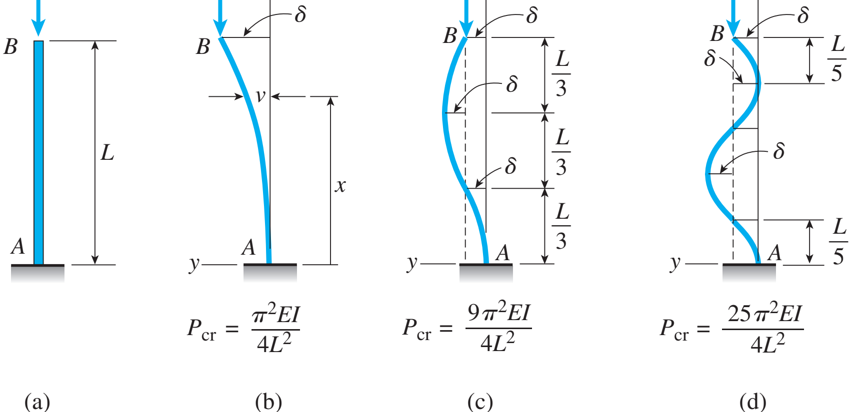


FIGURA 11.15 Columna ideal empotrada en la base y libre en la parte superior: (a) columna inicialmente recta, (b) forma pandeada para $n = 1$, (c) forma pandeada para $n = 3$ y (d) forma pandeada para $n = 5$.

*Esta columna es de interés especial debido a que fue la primera que analizó Euler en 1744.

La solución homogénea (también llamada *solución complementaria*) es la misma que la solución de la ecuación (11.7); de aquí que

$$v_H = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx \tag{a}$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Observe que cuando v_H se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación diferencial (ecuación 11.20), se obtiene el valor cero.

La solución particular de la ecuación diferencial es

$$v_P = \delta \tag{b}$$

Cuando v_p se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, se produce el miembro de lado derecho, es decir, el término $k^2\delta$. En consecuencia, la *solución general* de la ecuación, igual a la suma de v_H y v_p, es

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + \delta \tag{11.21}$$

Esta ecuación contiene tres cantidades desconocidas (C_1, C_2 y δ) y, por tanto, se necesitan tres **condiciones de frontera** para completar la solución.

En la base de la columna, tanto la deflexión como la pendiente son iguales a cero. Por tanto, obtenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$v(0) = 0 \qquad v'(0) = 0$$

Al aplicar la primera condición a la ecuación (11.21), obtenemos

$$C_2 = -\delta \tag{c}$$

Para aplicar la segunda condición, primero derivamos la ecuación (11.21) para obtener la pendiente:

$$v' = C_1 k \cos kx - C_2 k \operatorname{sen} kx \tag{d}$$

Al aplicar la segunda condición a esta ecuación, determinamos que $C_1 = 0$.

Ahora podemos sustituir las expresiones para C_1 y C_2 en la solución general (ecuación 11.21) y obtenemos la **ecuación de la curva de deflexión** para la columna pandeada:

$$v = \delta(1 - \cos kx) \tag{11.22}$$

Observe que esta ecuación da sólo la *forma* de la curva de deflexión; la amplitud δ permanece indefinida. Por tanto, cuando la columna se pandea, la deflexión dada por la ecuación (11.22) puede tener una magnitud arbitraria, excepto que debe permanecer pequeña (debido a que la ecuación diferencial se basa en deflexiones pequeñas).

La tercera condición de frontera se aplica al extremo superior de la columna donde la deflexión v es igual a δ:

$$v(L) = \delta$$

Al emplear esta condición con la ecuación (11.22), obtenemos

$$\delta \cos kL = 0 \tag{11.23}$$

De esta ecuación concluimos que $\delta = 0$ o $\cos kL = 0$. Si $\delta = 0$, no hay deflexión de la barra (consulte la ecuación 11.22) y tenemos la *solución trivial*; la columna permanece recta y no ocurre pandeo. En ese caso, la ecuación (11.23) se satisfará para cualquier valor de la cantidad kL; es decir, para cualquier valor de la carga P. Esta conclusión está representada por la línea vertical en el diagrama de carga-deflexión de la figura 11.7.

La otra posibilidad para resolver la ecuación (11.23) es

$$\cos kL = 0 \tag{11.24}$$

que es la **ecuación de pandeo.** En este caso, la ecuación (11.23) se satisface sin importar el valor de la deflexión δ. Por tanto, como ya se mencionó, δ es indefinida y puede tener cualquier valor pequeño.

La ecuación $\cos kL = 0$ se satisface cuando

$$kL = \frac{n\pi}{2} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{11.25}$$

Con la expresión $k^2 = P/EI$, obtenemos la siguiente fórmula para las **cargas críticas**:

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{4L^2} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{11.26}$$

Además, las **formas modales pandeadas** se obtienen con la ecuación (11.22):

$$v = \delta\left(1 - \cos\frac{n\pi x}{2L}\right) \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{11.27}$$

La carga crítica menor se obtiene sustituyendo $n = 1$ en la ecuación (11.26):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{11.28}$$

La forma pandeada correspondiente (de la ecuación 11.27) es

$$v = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{11.29}$$

y se muestra en la figura 11.15b.

Si tomamos valores mayores del índice n, en teoría podemos obtener un número infinito de cargas críticas con la ecuación (11.26). Las formas modales de pandeo correspondientes tienen ondas adicionales en ellas. Por ejemplo, cuando $n = 3$ la columna pandeada tiene la forma que se muestra en la figura 11.15c y P_{cr} es nueve veces mayor que para $n = 1$. De manera similar, la forma pandeada para $n = 5$ tiene incluso más ondas (figura 11.15d) y la carga crítica es veinticinco veces mayor.

Longitudes efectivas de columnas

Las cargas críticas para columnas con varias condiciones de soporte se pueden relacionar con la carga crítica de una columna con extremos articulados mediante el concepto de **longitud efectiva**. Para ilustrar esta idea, considere

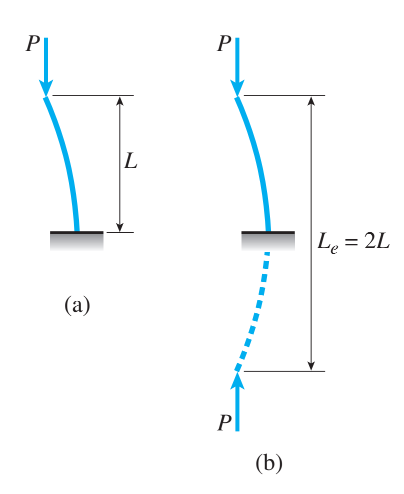


FIGURA 11.16 Curvas de deflexión que muestran la longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en la parte superior.

la forma flexionada de una columna empotrada en la base y libre en su parte superior (figura 11.16a). Esta columna se pandea en una curva que es un cuarto de una onda senoidal completa. Si prolongamos la curva de deflexión (figura 11.16b), ésta se vuelve la mitad de una onda senoidal completa, que es la curva de deflexión para una columna con extremos articulados.

La longitud efectiva L_e para cualquier columna es la longitud de la columna equivalente con extremos articulados, es decir, es la longitud de una columna con extremos articulados con una curva de deflexión que concuerda exactamente con toda o parte de la curva de deflexión de la viga original.

Otra manera de expresar esta idea es decir que la longitud efectiva de una columna es la distancia entre puntos de inflexión (es decir, puntos con momento igual a cero) en su curva de deflexión, suponiendo que la curva se extiende (si fuera necesario) hasta alcanzar los puntos de inflexión. Por tanto, para una columna con extremos empotrados (figura 11.16), la longitud efectiva es

$$L_e = 2L \tag{11.30}$$

Como la longitud efectiva es la longitud de una columna equivalente con extremos articulados, podemos escribir una fórmula general para las cargas críticas:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \tag{11.31}$$

Si conocemos la longitud efectiva de una columna (sin importar cuán complejas puedan ser las condiciones de los extremos), podemos sustituirla en la ecuación anterior y determinar la carga crítica. Por ejemplo, en el caso de una columna con extremos empotrados, podemos sustituir $L_e = 2L$ y obtener la ecuación (11.28).

La longitud efectiva a menudo se expresa en términos de un **factor de longitud efectiva** K:

$$L_e = KL \tag{11.32}$$

donde L es la longitud real de la columna. Por tanto, la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{11.33}$$

El factor K es igual a 2 para una columna empotrada en la base y libre en la parte superior y es igual a 1 para una columna con extremos articulados. El factor de longitud efectiva se suele incluir en las fórmulas de diseño para columnas, como se ilustra en la sección 11.9.

Columna con los dos extremos empotrados para evitar rotación

A continuación consideremos una columna con los dos extremos empotrados para evitar rotación (figura 11.17a). Observe que en esta figura usamos el símbolo estándar para el empotramiento en la base de la columna. Sin embargo, como la columna tiene libertad de acortarse ante una carga axial, debemos introducir un símbolo nuevo en la parte superior de la columna. Este símbolo nuevo muestra un bloque rígido que está restringido de tal

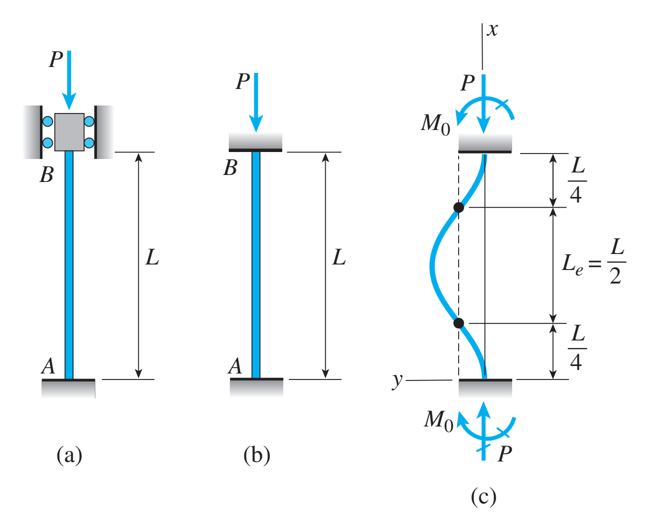


FIGURA 11.17 Pandeo de una columna con sus dos extremos empotrados para evitar rotación.

manera que se evitan la rotación y el desplazamiento horizontal pero puede ocurrir movimiento vertical. (Por conveniencia, al hacer bosquejos, a menudo reemplazamos este símbolo más preciso con el símbolo estándar para un empotramiento, consulte la figura 11.17b, entendiéndose que la columna puede acortarse.)

La forma pandeada de la columna en el primer modo se muestra en la figura 11.17c. Observe que la curva de deflexión es simétrica (con pendiente cero en el punto medio) y tiene pendiente cero en los extremos. Dado que se evita la rotación en los extremos, se desarrollan momentos reactivos M_0 en los soportes. Estos momentos, así como la fuerza reactiva en la base, se muestran en la figura.

Con base en las soluciones anteriores de la ecuación diferencial, sabemos que la ecuación de la curva de deflexión comprende funciones seno y coseno. Además, sabemos que la curva es simétrica con respecto al punto medio. Por tanto, de inmediato observamos que la curva debe tener puntos de inflexión en las distancias $L/4$ desde los extremos. Se infiere que la parte media de la curva de deflexión tiene la misma forma que la curva de deflexión para una columna con extremos articulados. Por tanto, la longitud efectiva de una columna con extremos empotrados, igual a la distancia entre puntos de inflexión, es

$$L_e = \frac{L}{2} \qquad (11.34)$$

Al sustituir en la ecuación (11.31) se obtiene la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \qquad (11.35)$$

Esta fórmula muestra que la carga crítica para una columna con extremos empotrados es cuatro veces la de una columna con extremos articulados. Como verificación, este resultado se puede revisar al resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión (consulte el problema 11.4.9).

Columna empotrada en la base y articulada en la parte superior

La carga crítica y la forma modal de pandeo para una columna que está empotrada en la base y articulada en la parte superior (figura 11.18a) se puede determinar al resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión. Cuando la columna se pandea (figura 11.18b), se genera un momento reactivo M_0 en la base debido a que no puede haber rotación en ese punto. Entonces, del equilibrio de toda la columna, sabemos que debe haber reacciones horizontales R en cada extremo de manera que

$$M_0 = RL \tag{e}$$

El momento flexionante en la columna pandeada, a una distancia x de la base, es

$$M = M_0 - Pv - Rx = -Pv + R(L - x) \tag{11.36}$$

y, por tanto, la **ecuación diferencial** es

$$EIv'' = M = -Pv + R(L - x) \tag{11.37}$$

Al sustituir de nuevo $k^2 = P/EI$ y reacomodando términos, obtenemos

$$v'' + k^2 v = \frac{R}{EI}(L - x) \tag{11.38}$$

La **solución general** de esta ecuación es

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + \frac{R}{P}(L - x) \tag{11.39}$$

en donde los dos primeros términos en el lado derecho constituyen la solución homogénea y el último término es la solución particular. Esta solución se puede verificar mediante la sustitución en la ecuación diferencial (ecuación 11.37).

Dado que la solución contiene tres cantidades desconocidas (C_1, C_2 y R), necesitamos tres **condiciones de frontera**, que son

$$v(0) = 0 \qquad v'(0) = 0 \qquad v(L) = 0$$

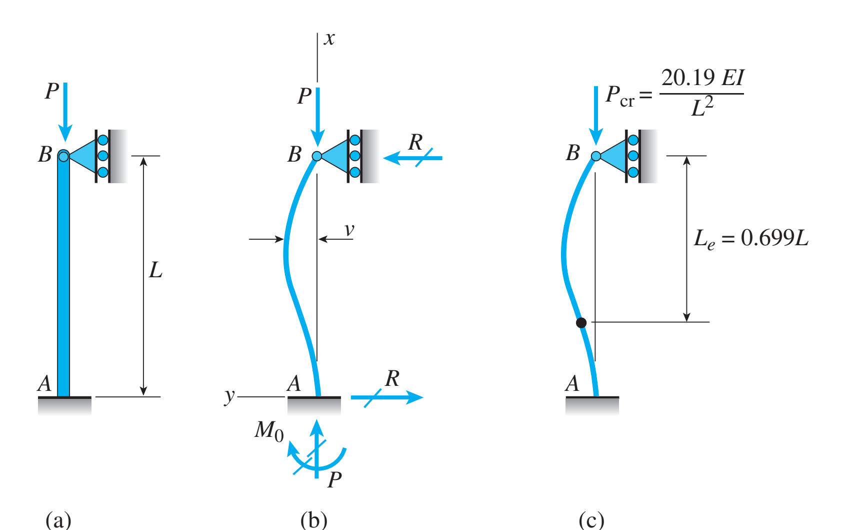


FIGURA 11.18 Columna empotrada en la base y articulada en la parte superior.

Al aplicar estas condiciones a la ecuación (11.39) se obtiene

$$C_2 + \frac{RL}{P} = 0 \qquad C_1 k - \frac{R}{P} = 0 \qquad C_1 \tan kL + C_2 = 0 \qquad \text{(f,g,h)}$$

Las tres ecuaciones se satisfacen si $C_1 = C_2 = R = 0$, en cuyo caso tenemos la solución trivial y la deflexión es cero.

Para obtener la solución por pandeo, debemos resolver las ecuaciones (f), (g) y (h) de una manera más general. Un método de solución es eliminar R en las primeras dos ecuaciones, lo cual produce

$$C_1 kL + C_2 = 0 \quad \text{o} \quad C_2 = -C_1 kL \qquad \text{(i)}$$

Luego sustituimos esta expresión para C_2 en la ecuación (h) y obtenemos la **ecuación de pandeo**:

$$kL = \tan kL \qquad (11.40)$$

La solución de esta ecuación da la carga crítica.

Como la ecuación de pandeo es trascendental, no se puede resolver en forma explicita.* No obstante, los valores de kL que satisfacen la ecuación se pueden determinar de manera numérica empleando un programa de cómputo para encontrar raíces de ecuaciones. El valor menor diferente de cero de kL que satisface la ecuación (11.40) es

$$kL = 4.4934 \qquad (11.41)$$

La **carga crítica** correspondiente es

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} = \frac{2.046\pi^2 EI}{L^2} \qquad (11.42)$$

que (como se esperaba) es mayor que la carga crítica para una columna con extremos articulados y menor que la carga crítica para una columna con extremos empotrados (consulte las ecuaciones 11.12 y 11.35).

La **longitud efectiva** de la columna se puede obtener comparando las ecuaciones (11.42) y (11.31); por tanto

$$L_e = 0.699L \approx 0.7L \qquad (11.43)$$

Esta longitud es la distancia desde el extremo articulado de la columna hasta el punto de inflexión en la forma pandeada (figura 11.18c).

La ecuación de la **forma modal de pandeo** se obtiene sustituyendo $C_2 = -C_1 kL$ (ecuación i) y $R/P = C_1 k$ (ecuación g) en la solución general (ecuación 11.39):

$$v = C_1[\text{sen } kx - kL \cos kx + k(L - x)] \qquad (11.44)$$

*En una ecuación trascendente, las variables están contenidas dentro de funciones trascendentes. Una función trascendente no se puede expresar mediante un número finito de operaciones algebraicas; de aquí que las funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales y otras más son trascendentes.

en donde $k = 4.4934/L$. El término entre corchetes da la forma modal para la deflexión de la columna pandeada. Sin embargo, la amplitud de la curva de deflexión es indefinida debido a que C_1 puede tener cualquier valor (dentro de la limitación usual de que la deflexión debe permanecer pequeña).

Limitaciones

Además del requisito de deflexiones pequeñas, la teoría del pandeo de Euler empleada en esta sección es válida sólo si la columna es perfectamente recta antes de la aplicación de la carga, si la columna y sus soportes no tienen imperfecciones y si la columna está hecha de un material linealmente elástico que sigue la ley de Hooke. Estas limitaciones se explicaron en la sección 11.3.

Resumen de resultados

Las cargas críticas menores y las longitudes efectivas correspondientes para las cuatro columnas que hemos analizado se resumen en la figura 11.19.

(a) Columna articulada-articulada	(b) Columna empotrada-libre	(c) Columna empotrada-empotrada	(d) Columna empotrada-articulada
$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{2.046\ \pi^2 EI}{L^2}$
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0.5$	$K = 0.699$

FIGURA 11.19 Cargas críticas, longitudes efectivas y factores de longitud efectiva para columnas ideales.

Ejemplo 11.2

Una plataforma de observación en un parque zoológico (figura 11.20a) está soportada por una fila de columnas tubulares de aluminio con longitud $L = 3.25$ m y diámetro exterior $d = 100$ mm. Las bases de las columnas están empotradas en zapatas de concreto y las partes superiores de las columnas están soportadas lateralmente por la plataforma. Las columnas se deben diseñar para soportar cargas de compresión $P = 100$ kN.

Determine el espesor mínimo requerido t de las columnas (figura 11.20b) si se requiere un factor de seguridad $n = 3$ con respecto al pandeo de Euler. (Para el aluminio, utilice un módulo de elasticidad de 72 GPa y 480 MPa para el límite de proporcionalidad.)

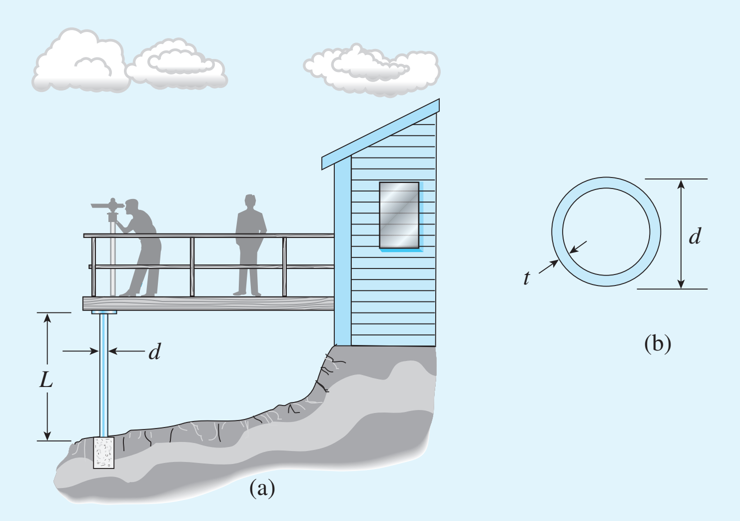


FIGURA 11.20 Ejemplo 11.2. Columna tubular de aluminio.

Solución

Carga crítica. Debido a la manera en que están construidas las columnas, consideraremos cada columna como una columna empotrada-articulada (consulte la figura 11.19d). Por tanto, la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{2.046\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{(j)}$$

en donde I es el momento de inercia de la sección transversal tubular:

$$I = \frac{\pi}{64}\left[d^4 - (d - 2t)^4\right] \qquad \text{(k)}$$

Al sustituir el diámetro exterior $d = 100$ mm (o 0.1 m), obtenemos

$$I = \frac{\pi}{64}\left[(0.1 \text{ m})^4 - (0.1 \text{ m} - 2t)^4\right] \qquad \text{(l)}$$

en donde t está expresado en metros.

Espesor requerido de las columnas. Como la carga por columna es 100 kN y el factor de seguridad es 3, cada columna se debe diseñar para la carga crítica siguiente:

$$P_{cr} = nP = 3(100 \text{ kN}) = 300 \text{ kN}$$

Sustituimos este valor de P_{cr} en la ecuación (j) y también reemplazamos I con su expresión de la ecuación (l), y obtenemos

$$300{,}000 \text{ N} = \frac{2.046\pi^2(72 \times 10^9 \text{ Pa})}{(3.25 \text{ m})^2}\left(\frac{\pi}{64}\right)\left[(0.1 \text{ m})^4 - (0.1 \text{ m} - 2t)^4\right]$$

Observe que todos los términos en esta ecuación están expresados en newtons y metros.

Después de realizar las multiplicaciones y divisiones, la ecuación anterior se simplifica a

$$44.40 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = (0.1 \text{ m})^4 - (0.1 \text{ m} - 2t)^4$$

o

$$(0.1 \text{ m} - 2t)^4 = (0.1 \text{ m})^4 - 44.40 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 55.60 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

de donde obtenemos

$$0.1 \text{ m} - 2t = 0.08635 \text{ m} \quad \text{y} \quad t = 0.006825 \text{ m}$$

Por tanto, el espesor mínimo requerido de la columna para cumplir con las condiciones especificadas es

$$t_{\text{mín}} = 6.83 \text{ mm}$$

Cálculos suplementarios. Conocidos el diámetro y el espesor de la columna, ahora podemos calcular su momento de inercia, área transversal y radio de giro. Al emplear el espesor mínimo de 6.83 mm, obtenemos

$$I = \frac{\pi}{64}\left[d^4 - (d - 2t)^4\right] = 2.18 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (d - 2t)^2\right] = 1999 \text{ mm}^2 \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = 33.0 \text{ mm}$$

La relación de esbeltez L/r de la columna es casi 98, que se encuentra en el intervalo usual para columnas esbeltas y la razón entre diámetro y espesor d/t es casi 15, que debe ser adecuada para evitar el pandeo local de la columna.

El esfuerzo crítico en la columna debe ser menor que el límite proporcional del aluminio para que la fórmula para la carga crítica (ecuación j) sea válida. El esfuerzo crítico es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{300 \text{ kN}}{1999 \text{ mm}^2} = 150 \text{ MPa}$$

que es menor que el límite de proporcionalidad (480 MPa). Por tanto, nuestro cálculo de la carga crítica empleando la teoría de Euler es satisfactorio.

11.5 COLUMNAS CON CARGAS AXIALES EXCÉNTRICAS

En las secciones 11.3 y 11.4 analizamos columnas ideales en las que las cargas axiales actuaban en los centroides de las secciones transversales. En estas condiciones, las columnas permanecen rectas hasta que se alcanzan las cargas críticas, después de lo cual puede puede ocurrir flexión.

Ahora supondremos que una columna se comprime por cargas P que se aplican con una excentricidad e pequeña, medida desde el eje de la columna (figura 11.21a). Cada carga axial excéntrica es equivalente a una carga céntrica P y a un par de momento $M_0 = P_e$ (figura 11.21b). Este momento existe desde el instante en que se aplica la carga y, por tanto, la columna comienza a flexionarse al inicio de la carga. Luego la deflexión aumenta de manera continua conforme se incrementa la carga.

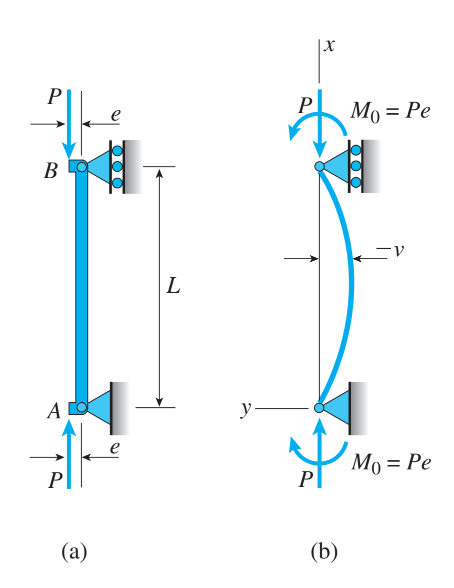


FIGURA 11.21 Columnas con cargas axiales excécentricas.

Para analizar la columna con extremos articulados que se muestra en la figura 11.21, hacemos las mismas suposiciones que en las secciones anteriores; es decir, la columna está perfectamente recta al inicio, el material es linealmente elástico y el plano xy es un plano de simetría. El momento flexionante en la columna a una distancia x del extremo inferior (figura 11.21b) es

$$M = M_0 + P(-v) = Pe - Pv \tag{11.45}$$

donde v es la deflexión de la columna (positiva cuando es en la dirección positiva del eje y). Observe que las deflexiones de la columna son negativas cuando la excentricidad de la carga es positiva.

La **ecuación diferencial** de la curva de deflexión es

$$EIv'' = M = Pe - Pv \tag{11.46}$$

o

$$v'' + k^2v = k^2e \tag{11.47}$$

en donde $k^2 = P/EI$, igual que antes. La solución general de esta ecuación es

$$v = C_1 \text{ sen } kx + C_2 \cos kx + e \tag{11.48}$$

en donde C_1 y C_2 son constantes de integración en la solución homogénea y e es la solución particular. Como siempre, podemos verificar la solución sustituyéndola en la ecuación diferencial.

Las **condiciones de frontera** para determinar las constantes C_1 y C_2 se obtienen de las deflexiones en los extremos de la columna (figura 11.21b):

$$v(0) = 0 \qquad v(L) = 0$$

Estas condiciones dan

$$C_2 = -e \qquad C_1 = -\frac{e(1 - \cos kL)}{\text{sen } kL} = -e \tan \frac{kL}{2}$$

Por tanto, la **ecuación de la curva de deflexión** es

$$v = -e\left(\tan \frac{kL}{2} \text{ sen } kx + \cos kx - 1\right) \tag{11.49}$$

Para una columna con cargas P conocidas y excentricidad e conocida, podemos utilizar esta ecuación para calcular la deflexión en cualquier punto a lo largo del eje x.

El comportamiento de una columna con una carga excéntrica es muy diferente del de una columna cargada en el centro, como se puede comprobar al comparar la ecuación (11.49) con las ecuaciones (11.13), (11.27) y (11.44). La ecuación (11.49) muestra que cada valor de la carga excéntrica P produce un valor definido de la deflexión, al igual que cada valor de la carga sobre una viga produce una deflexión definida. Por el contrario, las ecuaciones de deflexión para columnas cargadas en el centro dan la forma modal de pandeo (cuando $P = P_{cr}$) pero con la amplitud indefinida.

Como la columna que se muestra en la figura 11.21 tiene extremos articulados, su carga crítica (cuando se carga en el centro) es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{11.50}$$

Esta es la fórmula que utilizaremos como una cantidad de referencia en algunas de las siguientes ecuaciones.

Deflexión máxima

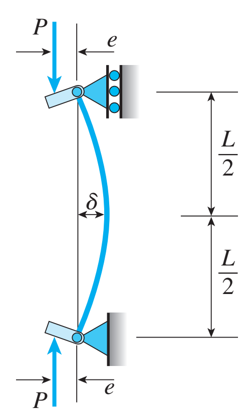


FIGURA 11.22 Deflexión máxima δ de una columna con cargas axiales excéntricas.

La deflexión máxima δ producida por las cargas excéntricas ocurre en la mitad de la columna (figura 11.22) y se obtiene igualando x a $L/2$ en la ecuación (11.49):

$$\delta = -v\left(\frac{L}{2}\right) = e\left(\tan\frac{kL}{2}\ \text{sen}\ \frac{kL}{2} + \cos\frac{kL}{2} - 1\right)$$

o bien, después de simplificar,

$$\delta = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right) \tag{11.51}$$

Esta ecuación se puede escribir de manera ligeramente diferente reemplazando la cantidad k con su valor equivalente en términos de la carga crítica (consulte la ecuación 11.50):

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{P\pi^2}{P_{cr}L^2}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \tag{11.52}$$

Por tanto, el término adimensional kL se convierte en

$$kL = \pi\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \tag{11.53}$$

y la ecuación (11.51) para la **deflexión máxima** se transforma en

$$\delta = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] \tag{11.54}$$

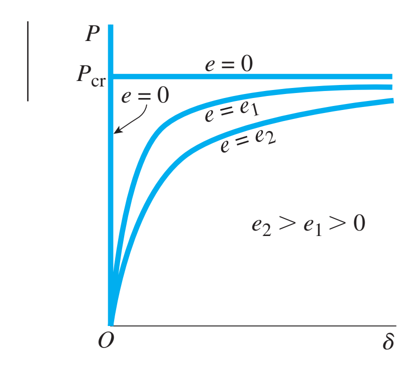


FIGURA 11.23 Diagrama carga-deflexión para una columna con cargas axiales excéntricas (consulte la figura 11.22 y la ecuación 11.54).

Como casos especiales, observamos lo siguiente: (1) la deflexión δ es cero cuando la excentricidad e es cero y P no es igual a P_{cr}, (2) la deflexión es cero cuando la carga axial P es cero y (3) la deflexión se vuelve infinitamente grande cuando P tiende a P_{cr}. Estas características se muestran en el **diagrama carga-deflexión** de la figura 11.23.

Para trazar el diagrama carga-deflexión, seleccionamos un valor particular e_1 de la excentricidad y luego calculamos δ para varios valores de la carga P. La curva resultante está identificada $e = e_1$ en la figura 11.23. De inmediato observamos que la deflexión δ aumenta cuando P aumenta, pero la relación no es lineal. Por tanto, *no podemos* emplear el principio de superposición para calcular deflexiones debidas a más de una carga, aunque el material de la columna sea linealmente elástico. Como ejemplo, la deflexión debida a una carga axial $2P$ *no* es igual al doble de la deflexión causada por una carga axial P.

Curvas adicionales, como la curva identificada $e = e_2$, se trazan de manera similar. Dado que la deflexión δ es lineal con respecto a e (ecuación 11.54), la curva para $e = e_2$ tiene la misma *forma* que la curva para $e = e_1$, pero las abscisas son mayores en la razón e_2/e_1.

Cuando la carga P tiende a la carga crítica, la deflexión δ aumenta sin límite y la línea horizontal correspondiente a $P = P_{cr}$ se convierte en una asíntota para las curvas. En el límite, cuando e tiende a cero, las curvas en el diagrama se aproximan a dos líneas rectas, una vertical y una horizontal (compare con la figura 11.7). Por tanto, como se esperaba, una columna ideal con una carga aplicada en el centro ($e = 0$) es el caso límite de una columna con una carga excéntrica ($e > 0$).

Si bien las curvas trazadas en la figura 11.23 son matemáticamente correctas, tenga en cuenta que la ecuación diferencial es válida para deflexiones pequeñas. Por lo tanto, cuando las deflexiones se vuelven grandes, las curvas ya no son físicamente válidas y se deben modificar para compensar la presencia de deflexiones grandes y (si el límite de proporcionalidad del material se excede) los efectos de la flexión inelástica (consulte la figura 11.11).

La razón para la relación no lineal entre cargas y deflexiones, aun cuando estas últimas sean pequeñas y sea válida la ley de Hooke, se puede comprender si observamos de nuevo que las cargas axiales P equivalen a cargas P aplicadas en el centro más pares Pe que actúan en los extremos de la columna (figura 11.21b). Los pares Pe, si actúan solos, producirán deflexiones por flexión de la columna de la misma manera que en una viga. En una viga, la presencia de las deflexiones no cambia la acción de las cargas y los momentos flexionantes son los mismos ya sea que existan o no deflexiones. Sin embargo, cuando se aplica una carga axial al elemento, la existencia de deflexiones aumenta los momentos flexionantes (los aumentos son iguales al producto de la carga axial y las deflexiones). Cuando los momentos flexionantes aumentan, las deflexiones aumentan aún más, de aquí que los momentos aumenten aún más, etcétera. Por tanto, los momentos flexionantes en una columna dependen de las deflexiones, las cuales a su vez dependen de los momentos flexionantes. Este tipo de comportamiento resulta en una relación no lineal entre las cargas axiales y las deflexiones.

En general, un elemento estructural recto sometido tanto a cargas de flexión como a cargas axiales de compresión se denomina **viga-columna.** En el caso de una columna con cargas excéntricas (figura 11.21), las cargas de flexión son los momentos $M_0 = Pe$ y las cargas axiales son las fuerzas P.

Momento flexionante máximo

El momento flexionante máximo en una columna cargada de manera excéntrica ocurre en el punto medio donde la deflexión es un máximo (figura 11.22):

$$M_{\text{máx}} = P(e + \delta) \qquad (11.55)$$

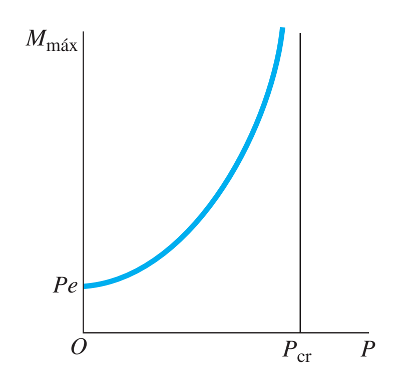


FIGURA 11.24 Momento flexionante máximo en una columna con cargas axiales excéntricas (consulte la figura 11.22 y la ecuación 11.56).

Al sustituir δ de las ecuaciones (11.51) y (11.54), obtenemos

$$M_{\text{máx}} = Pe \sec \frac{kL}{2} = Pe \sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \qquad (11.56)$$

La manera en que $M_{\text{máx}}$ varía como una función de la carga axial P se muestra en la figura 11.24.

Cuando P es pequeña, el momento máximo es igual a Pe, lo cual significa que el efecto de las deflexiones es despreciable. Conforme P aumenta, el momento flexionante crece de manera no lineal y en teoría se vuelve infinitamente grande cuando P tiende a la carga crítica. Sin embargo, como se explicó antes, nuestras ecuaciones son válidas sólo cuando las deflexiones son pequeñas y no se pueden emplear cuando la carga axial tiende a la carga crítica. No obstante, las ecuaciones anteriores y las gráficas adjuntas indican el comportamiento general de las vigas-columnas.

Otras condiciones de los extremos

Las ecuaciones dadas en esta sección se dedujeron para una columna con extremos articulados como se muestra en las figuras 11.21 y 11.22. Si una columna está empotrada en su base y libre en la parte superior (figura 11.19b), podemos utilizar las ecuaciones 11.51 y 11.56 reemplazando la longitud real L con la longitud equivalente $2L$ (consulte el problema 11.5.9). Sin embargo, las ecuaciones no se aplican a una columna que está empotrada en la base y articulada en la parte superior (figura 11.19d). El uso de una longitud equivalente igual a $0.699L$ da resultados erróneos; por lo que debemos regresar a la ecuación diferencial y deducir un nuevo conjunto de ecuaciones.

En el caso de una columna con los dos extremos fijos (empotrados) contra rotación (figura 11.19c), el concepto de una carga axial excéntrica que actúa en el extremo de la columna no tiene significado. Cualquier momento aplicado en el extremo de la columna es resistido directamente por los soportes y no produce flexión de la columna.

Ejemplo 11.3

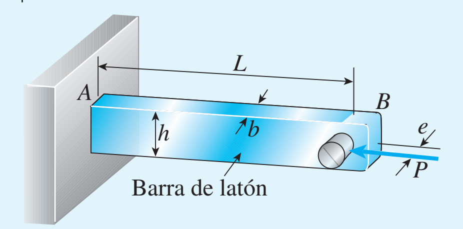


FIGURA 11.25 Ejemplo 11.3. Barra de latón con una carga axial excéntrica.

Una barra AB de latón que sobresale del costado de una máquina está cargada en el extremo B por una fuerza $P = 1500$ lb que actúa con una excentricidad $e = 0.45$ in (figura 11.25). La barra tiene sección transversal rectangular con altura $h = 1.2$ in y ancho $b = 0.6$ in.

¿Cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la barra si la deflexión en el extremo está limitada a 0.12 in? (Para el latón, utilice $E = 16 \times 10^6$ psi.)

Solución

Carga crítica. Consideraremos esta barra como una columna esbelta que está empotrada en el extremo A y libre en el extremo B. Por tanto, la carga crítica (consulte la figura 11.19b) es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{a}$$

El momento de inercia para el eje con respecto al cual ocurre la flexión es

$$I = \frac{hb^3}{12} = \frac{(1.2 \text{ in})(0.6 \text{ in})^3}{12} = 0.02160 \text{ in}^4$$

Por tanto, la expresión para la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(16{,}000{,}000 \text{ psi})(0.02160 \text{ in}^4)}{4L^2} = \frac{852{,}700 \text{ lb-in}^2}{L^2} \tag{b}$$

en donde P_{cr} tiene unidades de libras y L tiene unidades de pulgadas.

Deflexión. La deflexión en el extremo de la barra está dada por la ecuación (11.54), que es aplicable a una columna empotrada-libre así como a una columna articulada en sus extremos:

$$\delta = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] \tag{c}$$

En esta ecuación P_{cr} está dada por la ecuación (a).

Longitud. Para determinar la longitud máxima permisible de la barra, sustituimos el valor límite de δ de 0.12 in, $e = 0.45$ in y $P = 1500$ lb, y luego sustituimos la expresión para P_{cr} de la ecuación (b). Por tanto,

$$0.12 \text{ in} = (0.45 \text{ in})\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1500 \text{ lb}}{852{,}700/L^2}}\right) - 1\right]$$

La única incógnita en esta ecuación es la longitud L (pulgadas). Para despejar L, realizamos las diversas operaciones aritméticas en la ecuación y luego reacomodamos términos. El resultado es

$$0.2667 = \sec(0.06588\, L) - 1$$

Empleando radianes y resolviendo esta ecuación, obtenemos $L = 10.03$ in. Por lo que la longitud máxima permisible de la barra es

$$L_{máx} = 10.0 \text{ in}$$

Si se emplea una barra más larga, la deflexión excederá el valor permisible de 0.12 in.

11.6 FÓRMULA DE LA SECANTE PARA COLUMNAS

En la sección anterior determinamos la deflexión máxima y el momento flexionante máximo en una columna articulada sometida a cargas axiales excéntricas. En esta sección investigaremos los esfuerzos máximos en la columna y obtendremos una fórmula especial para calcularlos.

Los esfuerzos máximos en una columna con cargas axiales excéntricas ocurren en la sección transversal donde la deflexión y el momento flexionante tienen sus valores máximos; es decir, a la mitad de la columna (figura 11.26a). En esta sección transversal actúan la fuerza de compresión P y el momento flexionante $M_{máx}$ (figura 11.26b). Los esfuerzos debidos a la fuerza P son iguales a P/A, donde A es el área de la sección transversal de la columna y los esfuerzos debidos al momento flexionante $M_{máx}$ se obtienen con la fórmula de la flexión.

Por tanto, el esfuerzo de compresión máximo, que ocurre en el lado cóncavo de la columna, es

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{M_{máx}c}{I} \tag{11.57}$$

en donde I es el momento de inercia en el plano de flexión y c es la distancia del eje centroidal al punto extremo en el lado cóncavo de la columna. Observe que en esta ecuación consideramos que los esfuerzos de compresión son positivos, ya que son esfuerzos importantes en una columna.

El momento flexionante $M_{máx}$ se obtiene con la ecuación (11.56), que se repite aquí:

$$M_{máx} = Pe \sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)$$

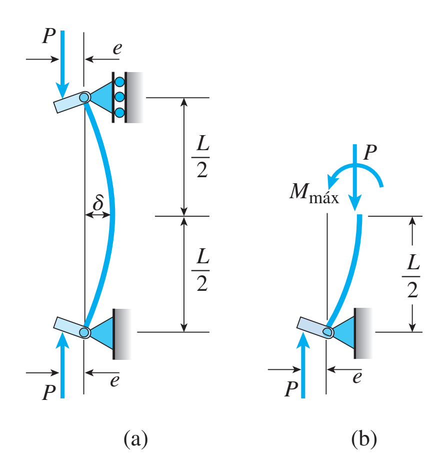


FIGURA 11.26 Columna con cargas axiales excéntricas.

Como $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ para una columna con extremos articulados y dado que $I = Ar^2$, donde r es el radio de giro en el plano de flexión, la ecuación anterior se convierte en

$$M_{\text{máx}} = Pe \sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right) \tag{11.58}$$

Al sustituir en la ecuación (11.57), obtenemos la siguiente fórmula para el **esfuerzo de compresión máximo:**

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)$$

o

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{11.59}$$

Esta ecuación se conoce comúnmente como la **fórmula de la secante** para una columna cargada excéntricamente con extremos articulados.

La fórmula de la secante proporciona el esfuerzo de compresión máximo en la columna como una función del esfuerzo de compresión promedio P/A, del módulo de elasticidad E y de dos razones adimensionales: la relación de esbeltez L/r (ecuación 11.17) y la **relación de excentricidad**:

$$\text{Relación de excentricidad} = \frac{ec}{r^2} \tag{11.60}$$

Como su nombre lo implica, la relación de excentricidad es una medida de la excentricidad de la carga comparada con las dimensiones de la sección transversal. Su valor numérico depende de la posición de la carga, pero sus valores comunes se encuentran en el intervalo de 0 a 3 y sus valores más comunes son menores que 1.

Al analizar una columna podemos utilizar la fórmula de la secante para calcular el esfuerzo de compresión máximo cuando se conocen la carga axial P y su excentricidad e. Luego, el esfuerzo máximo se puede comparar con el esfuerzo permisible para determinar si la columna es adecuada para soportar la carga.

También podemos emplear la fórmula de la secante de manera inversa, es decir, si conocemos el esfuerzo permisible, podemos calcular el valor correspondiente de la carga P. Sin embargo, debido a que la fórmula de la secante es trascendente, no es práctico deducir una fórmula para la carga P. En cambio, podemos resolver la ecuación (11.59) de forma numérica en cada caso individual.

En la figura 11.27 se muestra una **gráfica de la fórmula de la secante.** La abscisa es la relación de esbeltez L/r y la ordenada es el esfuerzo de compresión promedio P/A. La gráfica está trazada para una columna de acero con módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^3$ ksi y esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}} = 36$ ksi. Las curvas están trazadas para varios valores de la relación de excentricidad ec/r^2. Estas curvas son válidas sólo cuando el esfuerzo máximo es menor que el límite de proporcionalidad del material, debido a que la fórmula de la secante se dedujo empleando la ley de Hooke.

Un caso especial se origina cuando la excentricidad de la carga desaparece ($e = 0$), ya que entonces tenemos una columna ideal con una carga

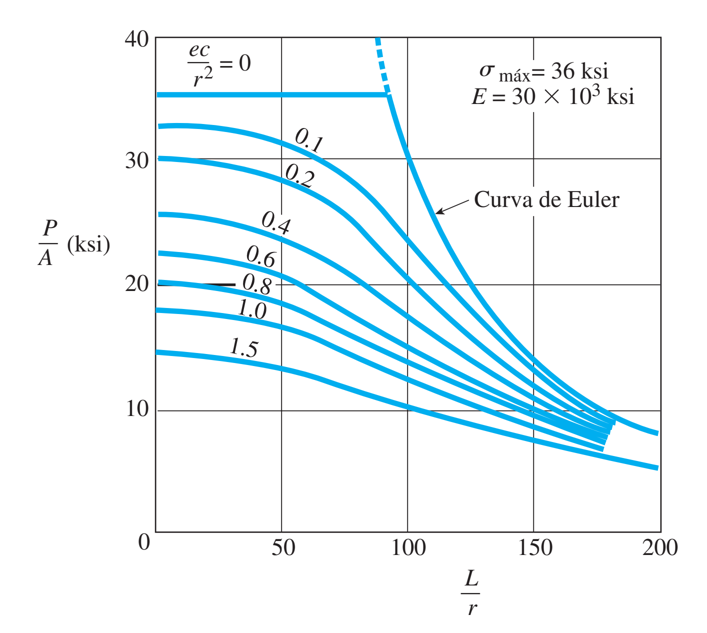


FIGURA 11.27 Gráfica de la fórmula de la secante (ecuación 11.59) para $\sigma_{\text{máx}} = 36$ ksi y $E = 30 \times 10^3$ ksi.

aplicada en el centro. En estas condiciones la carga máxima es la carga crítica ($P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ y el esfuerzo máximo correspondiente es el esfuerzo crítico (consulte las ecuaciones 11.14 y 11.16):

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{11.61}$$

Como esta ecuación da el esfuerzo P/A en términos de la relación de esbeltez L/r, podemos trazarlo en la gráfica de la fórmula de la secante (figura 11.27) como la **curva de Euler.**

Ahora supongamos que el límite de proporcionalidad del material es igual que el esfuerzo máximo seleccionado, es decir, 36 ksi. Entonces, trazamos una línea horizontal en la gráfica a un valor de 36 ksi y terminamos la curva de Euler en ese esfuerzo. La línea horizontal y la curva de Euler representan los límites de las curvas de la fórmula de la secante cuando la excentricidad e tiende a cero.

Análisis de la fórmula de la secante

La gráfica de la fórmula de la secante muestra que la capacidad de carga de una columna disminuye de manera significativa cuando la relación de esbeltez L/r aumenta, en especial en la región intermedia de valores L/r. Por tanto, las columnas largas esbeltas son mucho menos estables que las columnas cortas robustas. La gráfica también muestra que la capacidad de

carga disminuye con una excentricidad e creciente; además, este efecto es relativamente mayor para columnas cortas que para largas.

La fórmula de la secante se dedujo para una columna con extremos articulados, pero también se puede emplear para una columna empotrada en su base y libre en la parte superior. Todo lo que se requiere es reemplazar la longitud L en la fórmula de la secante con la longitud equivalente $2L$. Sin embargo, debido a que se basa en la ecuación (11.56), la fórmula de la secante no es válida para las otras condiciones de los extremos que hemos analizado.

Ahora consideremos una columna real, que inevitablemente difiere de una columna ideal debido a imperfecciones como la curvatura inicial del eje longitudinal, las condiciones de apoyo imperfectas y la falta de homogeneidad del material. Además, aun cuando se supone que la carga se aplica en el centro, habrá excentricidades inevitables en su dirección y punto de aplicación. La extensión de estas imperfecciones varía de una columna a otra y, por tanto, hay una dispersión considerable en los resultados de pruebas de laboratorio realizadas con columnas reales.

Todas las imperfecciones tienen el efecto de producir flexión además de compresión directa. Por tanto, es razonable suponer que el comportamiento de una columna imperfecta cargada en el centro es similar al de una columna ideal cargada excéntricamente. En esos casos la fórmula de la secante se puede utilizar eligiendo un valor aproximado de la relación de excentricidad ec/r^2 para tomar en cuenta los efectos combinados de las diversas imperfecciones. Por ejemplo, un valor de uso común de la relación de excentricidad para columnas con extremos articulados en diseño de acero estructural es $ec/r^2 = 0.25$. El uso de la fórmula de la secante de esta manera para columnas con cargas aplicadas en el centro proporciona un medio racional para tomar en cuenta los efectos de imperfecciones, en vez de tomarlos en cuenta simplemente aumentando el factor de seguridad. (Para análisis adicionales de la fórmula de la secante y de los efectos de imperfecciones, consulte la referencia 11.5 y libros de texto sobre pandeo y estabilidad).

El procedimiento para analizar una columna cargada en el centro mediante la fórmula de la secante depende de las condiciones particulares. Por ejemplo, si el objetivo es determinar la carga permisible, el procedimiento es como sigue. Suponga un valor de la relación de excentricidad ec/r^2 basado en resultados de pruebas, valores de códigos o experiencia práctica. Sustituya este valor en la fórmula de la secante, junto con los valores de L/r, A y E para la columna real. Asigne un valor a $\sigma_{\text{máx}}$, como el esfuerzo de fluencia σ_Y o el límite de proporcionalidad σ_{pl}. Luego de la fórmula de la secante despeje la carga $P_{\text{máx}}$ que produzca el esfuerzo máximo. (Esta carga siempre será menor que la carga crítica P_{cr} para la columna.) La carga permisible sobre la columna es igual a la carga $P_{\text{máx}}$ dividida entre el factor de seguridad n.

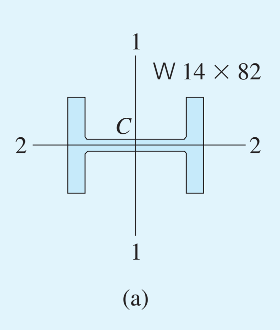
El ejemplo siguiente ilustra cómo se puede emplear la fórmula de la secante para determinar el esfuerzo máximo en una columna cuando se conoce la carga y también cómo determinar la carga cuando se da el esfuerzo máximo.

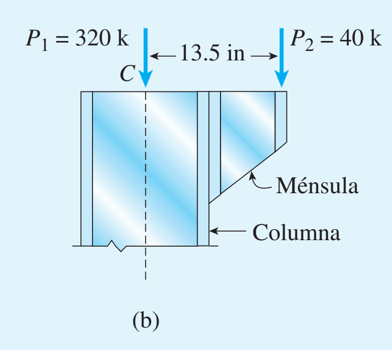
Ejemplo 11.4

Una columna hecha con un perfil de acero W 14 × 82 de patín ancho (figura 11.28a) está articulada en los extremos y tiene una longitud de 25 ft. La columna soporta una carga P_1 = 320 k aplicada en el centro y una carga P_2 = 40 k aplicada excéntricamente (figura 11.28b). La flexión tiene lugar con respecto al eje 1-1 de la sección transversal y la carga excéntrica actúa sobre el eje 2-2 a una distancia de 13.5 in del centroide C.

(a) Emplee la fórmula de la secante y suponga que E = 30,000 ksi, para calcular el esfuerzo de compresión máximo en la columna.

(b) Si el esfuerzo de fluencia del acero es σ_Y = 42 ksi, ¿cuál es el factor de seguridad con respecto a la fluencia?





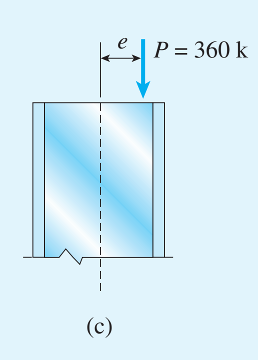


FIGURA 11.28 Ejemplo 11.4. Columna con una carga axial aplicada excéntricamente.

Solución

(a) *Esfuerzo de compresión máximo*. Las dos cargas P_1 y P_2 que actúan como se muestra en la figura 11.28b son estáticamente equivalentes a una sola carga P = 360 k que actúa con una excentricidad e = 1.5 in (figura 11.28c). Puesto que ahora la columna está cargada por una sola fuerza P con una excentricidad e, podemos emplear la fórmula de la secante para encontrar el esfuerzo máximo.

Las propiedades requeridas del perfil W 14 × 82 de patín ancho se obtienen de la tabla E.1 del apéndice E:

$$A = 24.1 \text{ in}^2 \qquad r = 6.05 \text{ in} \qquad c = \frac{14.31 \text{ in}}{2} = 7.155 \text{ in}$$

Los términos requeridos en la fórmula de la secante (ecuación 11.59) se calculan como sigue:

$$\frac{P}{A} = \frac{360 \text{ k}}{24.1 \text{ in}^2} = 14.94 \text{ ksi}$$

$$\frac{ec}{r^2} = \frac{(1.5 \text{ in})(7.155 \text{ in})}{(6.05 \text{ in})^2} = 0.2932$$

$$\frac{L}{r} = \frac{(25 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})}{6.05 \text{ in}} = 49.59$$

$$\frac{P}{EA} = \frac{360 \text{ k}}{(30,000 \text{ ksi})(24.1 \text{ in}^2)} = 497.9 \times 10^{-6}$$

Sustituimos estos valores en la fórmula de la secante y obtenemos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

$$= (14.94 \text{ ksi})(1 + 0.345) = 20.1 \text{ ksi}$$

Este esfuerzo de compresión ocurre a la mitad de la columna sobre el lado cóncavo (el lado derecho en la figura 11.28b).

(b) *Factor de seguridad con respecto a la fluencia.* Para determinar el factor de seguridad necesitamos determinar el valor de la carga P que actúa con excentricidad e y que producirá un esfuerzo máximo igual al esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 42$ ksi. Como este valor de la carga es apenas suficiente para producir la fluencia inicial del material, lo denotaremos P_Y.

Observe que no podemos determinar P_Y multiplicando la carga P (igual a 360 k) por la razón $\sigma_Y/\sigma_{\text{máx}}$. La explicación es que estamos tratando con una relación no lineal entre carga y esfuerzo. Entonces, debemos sustituir $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y = 42$ ksi en la fórmula de la secante y luego despejar la carga correspondiente P, que se convierte en P_Y. En otras palabras, debemos encontrar el valor de P_Y que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\sigma_Y = \frac{P_Y}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P_Y}{EA}}\right)\right] \qquad (11.62)$$

Al sustituir valores numéricos, obtenemos

$$42 \text{ ksi} = \frac{P_Y}{24.1 \text{ in}^2}\left[1 + 0.2939 \sec\left(\frac{49.59}{2}\sqrt{\frac{P_Y}{(30,000 \text{ ksi})(24.1 \text{ in}^2)}}\right)\right]$$

o

$$1012 \text{ k} = P_Y\left[1 + 0.2939 \sec\left(0.02916\sqrt{P_Y}\right)\right]$$

en donde P_Y tiene unidades de kips. Resolvemos numéricamente esta ecuación y obtenemos

$$P_Y = 716 \text{ k}$$

Esta carga producirá la fluencia del material (en compresión) en la sección transversal con momento flexionante máximo.

Dado que la carga real es $P = 360$ k, el factor de seguridad contra la fluencia es

$$n = \frac{P_Y}{P} = \frac{716 \text{ k}}{360 \text{ k}} = 1.99$$

Este ejemplo ilustra dos de las muchas maneras en que se puede emplear la fórmula de la secante. Otros tipos de análisis se ilustran en los problemas al final del capítulo.

11.7 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO E INELÁSTICO DE COLUMNAS

En las secciones anteriores describimos el comportamiento de columnas cuando el material está sometido a esfuerzos menores que el límite de proporcionalidad. Iniciamos considerando una columna ideal sometida a una carga aplicada en el centro (pandeo de Euler) y llegamos al concepto de carga crítica P_{cr}. Luego consideramos columnas con cargas axiales excéntricas y dedujimos la fórmula de la secante. Representamos los resultados de estos análisis en un diagrama de esfuerzo de compresión promedio P/A contra la relación de esbeltez L/r (consulte la figura 11.27). El comportamiento de una columna ideal está representado en la figura 11.27 mediante la curva de Euler, y el comportamiento de columnas con cargas excéntricas se representa por la familia de curvas que tienen varios valores de la relación de excentricidad ec/r^2.

Ahora ampliaremos nuestro análisis para incluir el **pandeo inelástico**, es decir, el pandeo de columnas cuando se sobrepasa el límite de proporcionalidad. Representaremos el comportamiento en el mismo tipo de diagrama que antes, es decir, un diagrama del esfuerzo de compresión promedio P/A contra la relación de esbeltez L/r (consulte la figura 11.29). Observe que la curva de Euler se muestra en este diagrama marcado como ECD. Esta curva es válida sólo en la región CD donde el esfuerzo es menor que el límite de proporcionalidad σ_{pl} del material. Por tanto, la parte de la curva de Euler por arriba del límite de proporcionalidad se muestra mediante una línea discontinua.

El valor de la relación de esbeltez arriba del cual es válida la curva de Euler se obtiene igualando el esfuerzo crítico (ecuación 11.61) con el límite de proporcionalidad σ_{pl} y despejando la relación de esbeltez. Así, si $(L/r)_c$ representa la **relación de esbeltez crítica** (figura 11.29), obtenemos

$$\left(\frac{L}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pl}}} \tag{11.63}$$

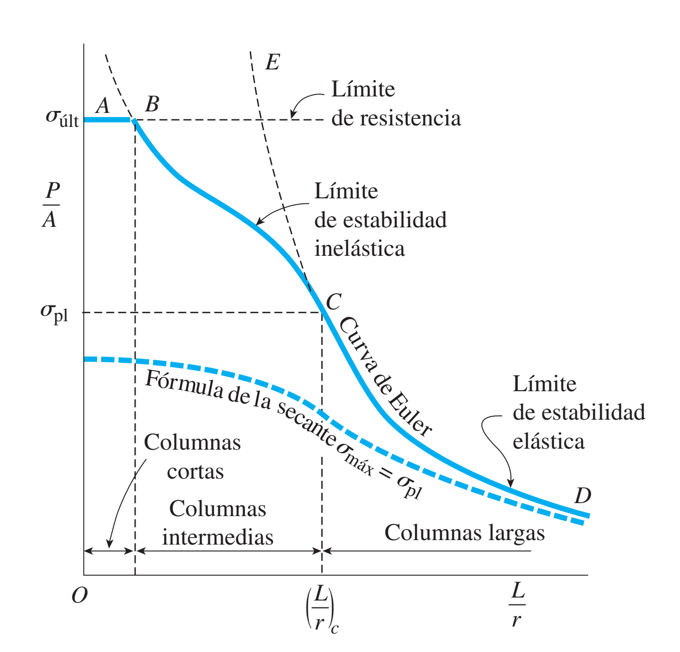


FIGURA 11.29 Diagrama del esfuerzo de compresión promedio P/A contra la relación de esbeltez L/r.

Como ejemplo considere el acero estructural con $\sigma_{pl} = 36$ ksi y $E = 30{,}000$ ksi. Entonces, la relación de esbeltez crítica $(L/r)_c$ es igual a 90.7. Arriba de este valor, una columna se pandea elásticamente y la carga de Euler es válida. Abajo de este valor, el esfuerzo en la columna excede el límite de proporcionalidad y la columna se pandea inelásticamente.

Si tomamos en cuenta los efectos de las excentricidades en la carga o de las imperfecciones en la construcción, obtenemos una curva como la identificada "Fórmula de la secante" en la figura 11.29. Esta curva está trazada para un esfuerzo máximo $\sigma_{máx}$ igual al límite de proporcionalidad σ_{pl}.

Al comparar la curva de la fórmula de la secante con la curva de Euler, debemos recordar una distinción importante. En el caso de la curva de Euler, el esfuerzo P/A no sólo es proporcional a la carga aplicada P, sino también es el esfuerzo máximo real en la columna cuando se presenta el pandeo. En consecuencia, conforme nos movemos de C a D a lo largo de la curva de Euler, tanto el esfuerzo máximo P/A (igual al esfuerzo crítico) como la carga axial P disminuyen. Sin embargo, en el caso de la curva de la fórmula de la secante, el esfuerzo *promedio* P/A disminuye conforme nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la curva (y, por tanto, la carga axial P también disminuye) pero el esfuerzo máximo (igual al límite de proporcionalidad) permanece constante.

De la curva de Euler observamos que las **columnas largas** con relaciones de esbeltez grandes se pandean a valores bajos del esfuerzo de compresión promedio P/A. Esta condición no se puede mejorar empleando un material con mayor resistencia, debido a que el colapso resulta de inestabilidad de la columna como un todo y no de la falla del propio material. El esfuerzo sólo se puede aumentar reduciendo la relación de esbeltez L/r o empleando un material con un módulo de elasticidad E mayor.

Cuando un elemento en compresión es muy **corto**, falla por fluencia y aplastamiento del material, y no se implican consideraciones de pandeo o estabilidad. En tal caso, podemos definir un esfuerzo de compresión último $\sigma_{últ}$ como el esfuerzo de falla para el material. Este esfuerzo establece un **límite de resistencia** para la columna, representado por la línea horizontal AB en la figura 11.29. El límite de resistencia es mucho mayor que el límite de proporcionalidad, dado que representa el esfuerzo último en compresión.

Entre las regiones de columnas cortas y largas, hay un intervalo de **relaciones de esbeltez intermedias** demasiado pequeño para que gobierne la estabilidad y demasiado grande para gobiernen las consideraciones de resistencia solas. Una columna de longitud intermedia falla por pandeo inelástico, lo que significa que los esfuerzos máximos están arriba del límite de proporcionalidad cuando ocurre el pandeo. Dado que se sobrepasa el límite de proporcionalidad, la pendiente de la curva esfuerzo-deformación para el material es menor que el módulo de elasticidad; de aquí que la carga crítica para pandeo inelástico siempre sea menor que la carga de Euler (consulte la sección 11.8).

Las líneas divisorias entre columnas cortas, intermedias y largas no son precisas; no obstante, es útil hacer estas distinciones debido a que la capacidad máxima de carga de columnas en cada categoría se basa en tipos diferentes de comportamiento. La capacidad máxima de carga de una columna particular (en función de su longitud) está representada por la curva $ABCD$ en la figura 11.19. Si la longitud es muy pequeña (región AB), la columna

falla por compresión directa; si la columna es más larga (región BC), falla por pandeo inelástico y si es aún más larga (región CD), falla por pandeo elástico (es decir, pandeo de Euler). La curva $ABCD$ se aplica a columnas con varias condiciones de soporte si la longitud L en la relación de esbeltez se reemplaza con la longitud efectiva L_e.

Los resultados de **pruebas de carga** en columnas concuerdan razonablemente bien con la curva $ABCD$. Cuando los resultados de prueba se trazan en el diagrama por lo general forman una banda que se encuentra justo debajo de esta curva. Se debe esperar una dispersión considerable de los resultados de prueba debido a que el desempeño de las columnas es sensible a aspectos como la exactitud de su construcción, el alineamiento de las cargas y los detalles de las condiciones de soporte. Para tomar en cuenta estas variables, es usual obtener el esfuerzo permisible para una columna dividiendo el esfuerzo máximo (de la curva $ABCD$) entre un **factor de seguridad** adecuado, que a menudo tiene un valor de aproximadamente 2. Puesto que las imperfecciones tienden a aumentar con el aumento de la longitud, en ocasiones se utiliza un factor de seguridad variable (que aumenta conforme L/r aumenta). En la sección 11.9 se dan algunas fórmulas comunes para los esfuerzos permisibles.

11.8 PANDEO INELÁSTICO

La carga crítica para pandeo elástico es válida sólo para columnas relativamente largas, como se explicó antes (consulte la curva CD en la figura 11.29). Si una columna es de longitud intermedia, el esfuerzo sobre ella alcanzará el límite de proporcionalidad antes de que inicie el pandeo (curva BC en la figura 11.29). Para calcular cargas críticas en este intervalo intermedio necesitamos una teoría de **pandeo inelástico**. En esta sección se describen tres teorías de este tipo, la teoría del módulo tangente, la teoría del módulo reducido y la teoría de Shanley.

Teoría del módulo tangente

Consideremos de nuevo una columna ideal articulada en sus extremos y sometida a una fuerza axial P (figura 11.30a). Se supone que la columna tiene una relación de esbeltez L/r que es menor que la relación de esbeltez crítica (ecuación 11.63) y por tanto el esfuerzo axial P/A alcanza el límite de proporcionalidad antes de que se llegue a la carga crítica.

El **diagrama esfuerzo-deformación** en compresión para el material de la columna se muestra en la figura 11.31. El límite de proporcionalidad del material se indica con σ_{pl} y el esfuerzo real σ_A en la columna (igual a P/A) está representado con el punto A (que está arriba del límite de proporcionalidad). Si se aumenta la carga, de manera que ocurra un aumento pequeño en el esfuerzo, la relación entre el incremento de esfuerzo y el incremento correspondiente de deformación está dada por la *pendiente* del diagrama esfuerzo-deformación en el punto A. Esta pendiente, igual a la pendiente de la línea tangente en A, se denomina **módulo tangente** y se denota con E_t; entonces

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \tag{11.64}$$

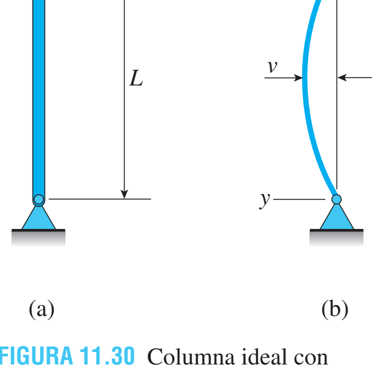


FIGURA 11.30 Columna ideal con longitud intermedia que se pandea inelásticamente.

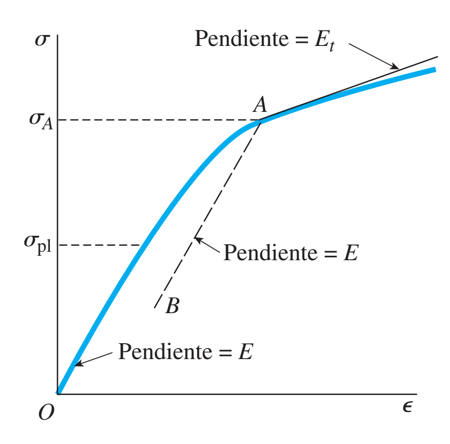


FIGURA 11.31 Diagrama de esfuerzo de compresión-deformación para el material de la columna que se muestra en la figura 11.30.

Observe que el módulo tangente *disminuye* cuando el esfuerzo aumenta más allá del límite de proporcionalidad. Cuando el esfuerzo está por debajo del límite de proporcionalidad, el módulo tangente es igual que el módulo de elasticidad E ordinario.

De acuerdo con la **teoría del módulo tangente** de pandeo inelástico, la columna que se muestra en la figura 10.30a permanece recta hasta que se alcanza la carga crítica inelástica. En ese valor de carga, la columna puede experimentar una deflexión lateral pequeña (figura 11.30b). Los esfuerzos de flexión resultantes se sobreponen a los esfuerzos axiales de compresión σ_A. Como la columna empieza a flexionarse desde una posición recta, los esfuerzos de flexión iniciales representan sólo un incremento pequeño del esfuerzo. Por tanto, la relación entre los esfuerzos de flexión y las deformaciones resultantes está dada por el módulo tangente. Dado que las deformaciones varían linealmente a través de la sección transversal de la columna, los esfuerzos de flexión iniciales también varían linealmente y, por tanto, las expresiones para la curvatura son las mismas que las de la flexión linealmente elástica, excepto que E_t reemplaza a E:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E_t I} \qquad (11.65)$$

(compárela con las ecuaciones 9.5 y 9.7)

Debido a que el momento flexionante $M = -Pv$ (consulte la figura 11.30b), la ecuación diferencial de la curva de deflexión es

$$E_t I v'' + Pv = 0 \qquad (11.66)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación para el pandeo elástico (ecuación 11.5), excepto que E_t aparece en lugar de E. Por tanto, podemos resolverla de la misma manera que antes y obtener la ecuación siguiente para la **carga del módulo tangente:**

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \qquad (11.67)$$

Esta carga representa la carga crítica para la columna de acuerdo con la teoría del módulo tangente. El esfuerzo crítico correspondiente es

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \qquad (11.68)$$

que tiene forma similar a la ecuación (11.61) para el esfuerzo crítico de Euler.

Como el módulo tangente E_t varía con el esfuerzo de compresión $\sigma = P/A$ (figura 11.31), es usual obtener la carga del módulo tangente mediante un procedimiento iterativo. Iniciamos estimando el valor de P_t. Este valor de prueba, que llamaremos P_1, debe ser ligeramente mayor que $\sigma_{pl} A$, que es la carga axial cuando el esfuerzo justo alcanza el límite de proporcionalidad. Al conocer P_1, podemos calcular el esfuerzo axial correspondiente $\sigma_1 = P_1/A$ y determinar el módulo tangente E_t con diagrama de esfuerzo-deformación. Luego, con la ecuación (11.67) obtenemos una segunda estimación de P_t, que llamaremos P_2. Si P_2 es muy cercano a P_1, podemos aceptar a P_2 como la carga del módulo tangente. Sin embargo, es más probable que se requieran ciclos adicionales de iteración hasta alcanzar la carga que concuerde con la carga de prueba anterior. Este valor es la carga del módulo tangente.

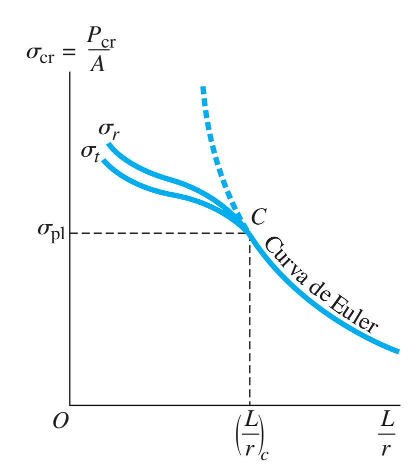


FIGURA 11.32 Diagrama del esfuerzo crítico contra la relación de esbeltez.

En la figura 11.32 se presenta un diagrama que muestra cómo varía el esfuerzo crítico σ_t con la relación de esbeltez L/r, para una columna metálica común con extremos articulados. Observe que la curva está arriba del límite de proporcionalidad y debajo de la curva de Euler.

Las fórmulas del módulo tangente se pueden emplear para columnas con varias condiciones de soporte utilizando la longitud efectiva L_e en lugar de la longitud real L.

Teoría del módulo reducido

La teoría del módulo tangente se distingue por su simplicidad y facilidad de uso. Sin embargo, su concepto tiene deficiencias debido a que no toma en cuenta el comportamiento completo de la columna. Para explicar la dificultad, consideraremos de nuevo la columna que se muestra en la figura 11.30a. Cuando esta columna se sale por primera vez de la posición recta (figura 11.30b), los esfuerzos de flexión se suman a los esfuerzos de compresión existentes P/A. Estos esfuerzos adicionales son de compresión sobre el lado cóncavo de la columna y de tensión sobre el lado convexo. Por tanto, los esfuerzos de compresión en la columna se vuelven mayores sobre el lado cóncavo y menores sobre el otro lado.

Ahora imagine que el esfuerzo axial P/A está representado por el punto A en el diagrama esfuerzo-deformación (figura 11.31). En el lado cóncavo de la columna (donde el esfuerzo de compresión se incrementa), el material sigue el módulo tangente E_t. Sin embargo, en el lado convexo (donde el esfuerzo de compresión disminuye), el material sigue la línea de descarga AB en el diagrama esfuerzo-deformación. Esta línea es paralela a la parte lineal inicial del diagrama y, por tanto, su pendiente es igual al módulo elástico E. Por tanto, en el inicio de la flexión, la columna se comporta como si estuviera hecha de dos materiales diferentes, un material con módulo E_t en el lado cóncavo y un material con módulo E en el lado convexo.

Un análisis de flexión de esa columna se puede efectuar empleando las teorías de flexión para una viga de dos materiales (secciones 6.2 y 6.3). Los resultados de esos estudios muestran que la columna se flexiona como si el material tuviera un módulo de elasticidad entre los valores de E y E_t. Este “módulo efectivo” se conoce como **módulo reducido** E_r y su valor depende no sólo de la magnitud del esfuerzo (debido a que E_t depende de la magnitud del esfuerzo) sino también de la forma de la sección transversal de la columna. Así, el módulo reducido E_r es más difícil de determinar que el módulo tangente E_t. En el caso de una columna con *sección transversal rectangular*, la ecuación para el módulo reducido es

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \tag{11.69}$$

Para una *viga de patín ancho* sin tomar en cuenta el área del alma, el módulo reducido para flexión con respecto al eje fuerte es

$$E_r = \frac{2EE_t}{E + E_t} \tag{11.70}$$

El módulo reducido E_r también se denomina *módulo doble*.

Como el módulo reducido representa un módulo efectivo que rige la flexión de la columna cuando se sale por primera vez de la posición recta, podemos formular una teoría del módulo reducido para el pandeo inelástico. Continuamos de la misma manera que en la teoría del módulo reducido, comenzamos con una ecuación para la curvatura y luego escribimos la ecuación diferencial de la curva de deflexión. Estas ecuaciones son las mismas que las ecuaciones (11.65) y (11.66) excepto que E_r aparece en lugar de E_t. De esta manera, llegamos a la ecuación siguiente para la **carga del módulo reducido:**

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \tag{11.71}$$

La ecuación correspondiente para el esfuerzo crítico es

$$\sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \tag{11.72}$$

Para encontrar la carga del módulo reducido P_r, de nuevo debemos emplear un procedimiento iterativo, debido a que E_r depende de E_t. El esfuerzo crítico de acuerdo con la teoría del módulo reducido se muestra en la figura 11.32. Observe que la curva para σ_r está arriba de la curva para σ_t, dado que E_r siempre es mayor que E_t.

La teoría del módulo reducido es difícil de usar en la práctica debido a que E_r depende de la forma de la sección transversal así como de la curva esfuerzo-deformación y se debe evaluar para cada columna particular. Además, esta teoría también tiene un defecto conceptual. Para que el módulo reducido E_r sea aplicable, el material en el lado convexo de la columna debe experimentar una reducción del esfuerzo. Sin embargo, esa reducción del esfuerzo no puede ocurrir hasta que la flexión tenga lugar en realidad. Por tanto, la carga axial P, aplicada a una columna recta ideal, en realidad nunca puede alcanzar la carga del módulo reducido P_r. Para alcanzar esa carga se requeriría que la flexión ya exista, lo cual es una contradicción.

Teoría de Shanley

Del análisis anterior vemos que ni la teoría del módulo tangente ni la teoría del módulo reducido son racionales por completo al explicar el fenómeno del pandeo inelástico. No obstante, es necesario comprender las dos teorías para desarrollar una teoría más completa y lógicamente consistente. Una teoría así fue desarrollada por F. R. Shanley en 1946 (consulte la nota histórica siguiente) y en la actualidad se denomina *teoría del pandeo inelástico de Shanley*.

La teoría de Shanley supera las dificultades de las teorías del módulo tangente y del módulo reducido, Al reconocer que no es posible que una columna se pandee elásticamente de una manera que sea análoga al pandeo de Euler, en cuyo caso se alcanza una carga crítica a la cual la columna está en equilibrio neutro, representado por la línea horizontal en el diagrama carga-deflexión (figura 11.33). Como ya se explicó, ni la carga del módulo tangente P_t ni la carga del módulo reducido P_r pueden representar este tipo de comportamiento. En los dos casos llegamos a una contradicción si tratamos de asociar la carga con una condición de equilibrio neutro.

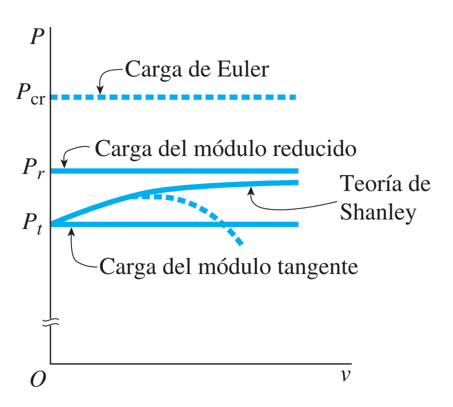


FIGURA 11.33 Diagrama carga-deflexión para pandeo elástico e inelástico.

En vez de equilibrio neutro, en el que de repente es posible tener una forma flexionada sin cambiar la carga, debemos considerar que una columna tiene una carga axial siempre creciente. Cuando la carga alcanza la carga del módulo tangente (que es menor que la carga del módulo reducido), la flexión sólo puede iniciar si la carga continúa aumentando. En estas condiciones, la flexión ocurre de manera simultánea con un aumento en la carga, lo que resulta en un decremento en la deformación del lado convexo de la columna. Por tanto, el módulo efectivo del material en toda la sección transversal se vuelve mayor que E_t y, por tanto, es posible un aumento en la carga. Sin embargo, el módulo efectivo no es tan grande como E_r, debido a que E_r se basa en la inversión total de la deformación en el lado convexo de la columna. En otras palabras, E_r se basa en la cantidad de inversión de la deformación que existe si la columna se flexiona sin un cambio en la fuerza axial, en tanto que la presencia de una fuerza axial creciente significa que la reducción en la deformación no es tan grande.

De esta manera, en vez de equilibrio neutro, en el que donde la relación entre carga y deflexión está indefinida, ahora tenemos una relación definida entre cada valor de la carga y la deflexión correspondiente. Este comportamiento se muestra por la curva identificada como "teoría de Shanley" en la figura 11.33. Observe que el pandeo inicia en la carga del módulo tangente; luego la carga aumenta pero no alcanza la carga del módulo reducido hasta que la deflexión se vuelve infinitamente grande (en teoría). Sin embargo, otros efectos se vuelven importantes conforme la deflexión aumenta y en realidad la curva finalmente va hacia arriba, como se muestra mediante la línea discontinua.

El concepto de Shanley de pandeo inelástico ha sido verificado por muchos investigadores y mediante muchas pruebas. No obstante, la carga máxima lograda por columna reales (observe la curva discontinua con tendencia descendente en la figura 11.33) está sólo ligeramente arriba de la carga del módulo tangente P_t. Además, la carga del módulo tangente es muy simple de calcular. Por tanto, para muchos fines prácticos es razonable adoptar la **carga del módulo tangente** como la carga crítica para el pandeo inelástico de columnas.

Los estudios anteriores de pandeo elástico e inelástico se basan en condiciones idealizadas. Si bien los conceptos teóricos son importantes para comprender el comportamiento de las columnas, en el diseño real de éstas se deben tomar en cuenta factores adicionales no considerados en la teoría. Por ejemplo, las columnas de acero siempre contienen esfuerzos residuales producidos por el proceso de laminado. Estos esfuerzos varían en gran medida en partes diferentes de la sección transversal y, por tanto, el nivel de esfuerzo requerido para producir fluencia varía en toda la sección transversal. Por esas razones se ha desarrollado una variedad de fórmulas empírica para emplearlas en el diseño de columnas. Algunas de las fórmulas de uso común se dan en la siguiente sección.

Nota histórica Transcurrieron más de 200 años entre el primer cálculo de una carga de pandeo por Euler (en 1744) y el desarrollo final de la teoría de Shanley (en 1946). Varios investigadores famosos en el campo de la mecánica contribuyeron a este desarrollo y sus trabajos se describen en esta nota.

Después de los estudios pioneros de Euler (referencia 11.1), se progresó muy poco hasta 1845, cuando el ingeniero francés A. H. E. Lamarle señaló que la fórmula de Euler debería emplearse sólo para relaciones de esbeltez más allá de cierto límite

y que se dependía de los datos experimentales para columnas con relaciones menores (referencia 11.6). Luego, en 1889, otro ingeniero francés, A. G. Considère, publicó los resultados de las primeras pruebas completas sobre columnas (referencia 11.7). Él destacó que los esfuerzos sobre el lado cóncavo disminuían con E_t y los esfuerzos sobre el lado convexo disminuían con E. Así, demostró por qué la fórmula de Euler no era aplicable a pandeo inelástico y estableció que el módulo efectivo estaba entre E y E_t. Aunque no trató evaluar el módulo efectivo fue responsable de haber iniciado la teoría del módulo reducido.

En el mismo año y de manera independiente, el ingeniero alemán F. Engesser, sugirió la teoría del módulo tangente (referencia 11.8). Él denotó el módulo tangente con la letra T (igual a $d\sigma/d\epsilon$) y propuso que se usará T en vez de E en la fórmula de Euler para la carga crítica. Después, en marzo de 1895, Engesser de nuevo presentó la teoría del módulo tangente (referencia 11.9), obviamente sin conocer el trabajo de Considère. En la actualidad, la teoría del módulo tangente a menudo se denomina *teoría de Engesser*.

Tres meses más tarde, F. S. Jasinsky, polaco de nacimiento, entonces profesor en San Petersburgo, señaló que la teoría del módulo tangente de Engesser era incorrecta, destacó el trabajo de Considère y presentó la teoría del módulo reducido (referencia 11.10). Él también estableció que el módulo reducido no se podía calcular teoréticamente. En respuesta, y después de un mes, Engesser reconoció el error en la aproximación del módulo tangente y demostró cómo calcular el módulo reducido para cualquier sección transversal (referencia 11.11). De esta manera, la teoría del módulo reducido también se conoce como *teoría de Considère-Engesser*.

La teoría del módulo reducido también la presentó el famoso científico Theodore von Kármán en 1908 y 1910 (referencias 11.12, 11.13 y 11.14), aparentemente de manera independiente de las primeras investigaciones. En la referencia 11.13 dedujo las fórmulas para E_r tanto para secciones rectangulares como idealizadas de patín ancho (es decir, secciones de patín ancho sin alma). Amplió la teoría para incluir los efectos de excentricidades de la carga de pandeo y demostró que la carga máxima disminuye rápidamente conforme aumenta la excentricidad.

La teoría del módulo reducido fue aceptada para explicar el pandeo inelástico hasta 1946, cuando el profesor estadounidense de ingeniería aeronáutica F. R. Shanley señaló las paradojas lógicas tanto en la teoría del módulo tangente como en la del módulo reducido. En un artículo extraordinario de una página (referencia 11.15), Shanley no sólo explicó los errores de las teorías generalmente aceptadas, sino que también propuso su propia teoría que resolvió las paradojas. En un segundo artículo, cinco meses después, proporcionó análisis adicionales para apoyar su teoría anterior y dio resultados a partir de pruebas sobre columnas (referencia 11.16). Desde entonces, muchas otras investigaciones han confirmado y ampliado el concepto de Shanley.

Para leer análisis excelentes del problema de pandeo de columnas, consulte los artículos muy completos de Hoff (referencias 11.17 y 11.18) y para un relato histórico, consulte el artículo de Johnston (referencia 11.19).

11.9 FÓRMULAS PARA DISEÑO DE COLUMNAS

En las secciones anteriores de este capítulo analizamos la capacidad de carga teórica de columnas tanto para el pandeo elástico como el inelástico. Teniendo en cuenta estos antecedentes, ahora podemos examinar algunas fórmulas prácticas que se utilizan en el diseño de columnas. Estas fórmulas de diseño se basan no sólo en análisis teóricos, sino también en el comportamiento de columnas reales como se observaron en pruebas de laboratorio.

Los resultados teóricos están representados por las curvas de columna que se muestran en las figuras 11.29 y 11.32. Un procedimiento común de diseño es aproximar estas curvas en el intervalo inelástico de pandeo (valores bajos de la relación de esbeltez) mediante fórmulas empíricas y emplear la fórmula de Euler en el intervalo elástico (valores altos de la relación de esbeltez). Por supuesto, se puede aplicar un factor de seguridad para obtener las cargas permisibles a partir de las cargas máximas (u obtener los esfuerzos permisibles a partir de los esfuerzos máximos).

Los siguientes ejemplos de fórmulas de diseño de columnas son aplicables a columnas cargadas en el centro, de acero estructural, aluminio y madera. Las fórmulas dan los esfuerzos permisibles en términos de las propiedades de la columna, como longitud, dimensiones de la sección transversal y condiciones de soporte. Entonces, para una columna dada, el esfuerzo permisible se puede obtener con facilidad.*

Una vez conocido el esfuerzo permisible, podemos determinar la **carga permisible** multiplicándolo por el área de la sección transversal:

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A \tag{11.73}$$

La carga permisible debe ser mayor que la carga real si no se quiere sobrepasar el esfuerzo permisible.

La selección de una columna a menudo requiere un procedimiento iterativo o de prueba y error que es necesario cuando no sabemos de antemano qué fórmula de diseño usar. Como cada fórmula es válida sólo para un cierto intervalo de relaciones de esbeltez y como la relación de esbeltez es una incógnita hasta después de seleccionar la columna, por lo general no sabemos qué fórmula es aplicable hasta que hayamos hecho al menos una prueba.

Un **procedimiento común de prueba y error** para seleccionar una columna para soportar una carga axial dada es el siguiente:

1. Estime el esfuerzo permisible σ_{perm}. (Observe que un límite superior para σ_{perm} es el esfuerzo permisible para una columna con longitud cero. Este esfuerzo se obtiene con facilidad a partir de fórmulas de diseño y el esfuerzo estimado debe ser igual a o menor que este límite superior).
2. Calcule un valor aproximado del área de la sección transversal A dividiendo la carga axial P dada entre el esfuerzo permisible estimado.
3. Determine un tamaño y/o forma que proporcione el área requerida, ya sea calculando una dimensión requerida o seleccionando una columna de una tabla de formas disponibles.
4. Conocidas las dimensiones de una columna de prueba del paso (3), determine el esfuerzo permisible σ_{perm} en la columna con la fórmula de diseño apropiada.
5. Al utilizar la ecuación (11.73), calcule la carga permisible P_{perm} y compárela con la carga real P.
6. Si la columna no es adecuada para soportar la carga dada, seleccione una columna mayor y repita el proceso. Si la columna parece estar diseñada con un exceso (debido a que la carga permisible es mucho mayor

*Las fórmulas de diseño dadas en esta sección son muestras de las muchas fórmulas que se utilizan en todo el mundo, y su propósito es resolver los problemas al final del capítulo y no se deben emplear en un diseño real, el cual requiere muchas consideraciones adicionales. Consulte la subsección intitulada "Limitaciones" al final de esta sección.

que la carga dada), seleccione una columna menor y repita el proceso. Por lo general, es suficiente con dos o tres tanteos para encontrar una columna adecuada.

Muchas variaciones de este procedimiento son posibles, dependiendo del tipo de columna y qué cantidades se conozcan de antemano. En ocasiones se puede concebir un procedimiento directo de diseño sin los pasos de prueba y error.

Acero estructural

Iniciemos con las fórmulas para diseño de columnas de acero estructural cargadas en el centro. Las siguientes fórmulas fueron adoptadas por el American Institute of Steel Construction (AISC), una organización técnica que prepara especificaciones para los diseñadores de acero estructural (referencia 5.4) y proporciona muchos otros servicios a ingenieros. Las fórmulas del AISC para el esfuerzo permisible en una columna se obtienen al dividir el esfuerzo máximo entre un factor de seguridad apropiado. El término "esfuerzo máximo" significa el esfuerzo obtenido tomando la carga máxima (o carga última) que la columna puede soportar y dividirla entre el área de la sección transversal.

Cuando la relación de esbeltez L/r es grande, el esfuerzo máximo se basa en la **carga de Euler:**

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \tag{11.74}$$

donde se utiliza la longitud efectiva KL de modo que la fórmula se pueda aplicar a una variedad de condiciones de apoyo.

La ecuación (11.74) es válida sólo cuando los esfuerzos en la columna son menores que el límite de proporcionalidad σ_{pl}. En condiciones ordinarias suponemos que el límite de proporcionalidad del acero es igual al esfuerzo de fluencia σ_Y. Sin embargo, las secciones de acero laminado (como las secciones de patín ancho) contienen esfuerzos residuales significativos, que pueden ser tan grandes como la mitad del esfuerzo de fluencia. Para una columna en estas condiciones, el límite de proporcionalidad se alcanza cuando el esfuerzo axial $\sigma_{\text{máx},}$ debido a la carga de compresión, es igual a la mitad del esfuerzo de fluencia:

$$\sigma_{\text{máx}} = 0.5\sigma_Y \tag{11.75}$$

Para determinar la relación de esbeltez menor para la cual es aplicable la ecuación (11.74), igualamos $\sigma_{\text{máx}}$ a $0.5\sigma_Y$ y despejamos el valor de KL/r correspondiente, que se conoce como *relación de esbeltez crítica* (compárela con la ecuación 11.63):

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} \tag{11.76}$$

Si la relación de esbeltez real es igual a o mayor que $(KL/r)_c$, se puede utilizar la fórmula de Euler para el esfuerzo máximo (ecuación 11.74). Por tanto, la relación de esbeltez crítica dada por la ecuación (11.76) determina la frontera entre el pandeo elástico y el inelástico para columnas de acero laminado.

La ecuación (11.74) se puede expresar en forma adimensional al dividir entre el esfuerzo de fluencia σ_Y y luego sustituir en la ecuación (11.76):

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_Y} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_Y (KL/r)^2} = \frac{(KL/r)_c^2}{2(KL/r)^2} \qquad \frac{KL}{r} \geq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \tag{11.77}$$

Esta ecuación está trazada en la figura 11.34 identificada como *curva de Euler*.

Para la región de **pandeo inelástico**, donde $KL/r \leq (KL/r)_c$, el esfuerzo máximo está dado por una fórmula parabólica:

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_Y} = 1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2} \qquad \frac{KL}{r} \leq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \tag{11.78}$$

Esta fórmula empírica también aparece en la figura 11.34. Observe que la curva es una parábola con una tangente horizontal en $KL/r = 0$, donde el esfuerzo máximo es igual a σ_Y. En la relación de esbeltez crítica $(KL/r)_c$ la curva se une suavemente con la curva de Euler (las dos curvas tienen la misma pendiente en el punto donde se unen). Entonces, la fórmula empírica proporciona una curva de diseño que se ajusta a la forma general de las curvas teóricas (figuras 11.29 y 11.31) y que también es fácil de aplicar. La validez de la fórmula para su uso en el diseño se ha verificado mediante numerosas pruebas.

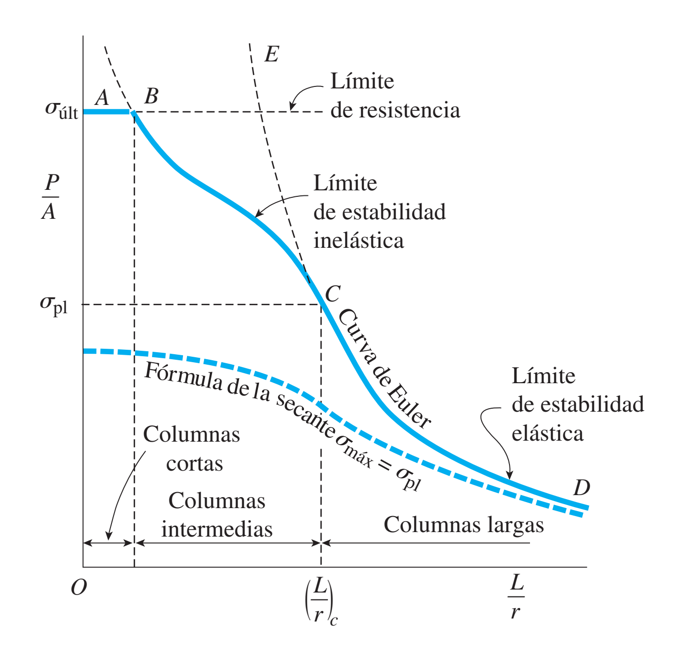


FIGURA 11.29 (Repetida.)

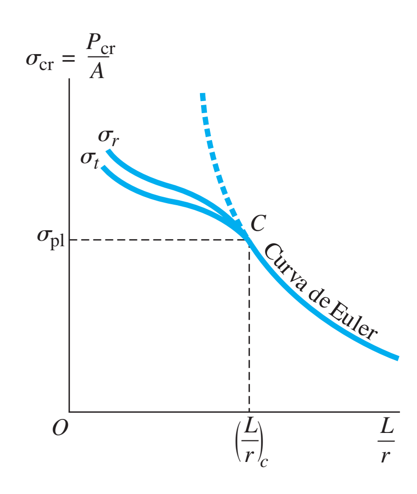


FIGURA 11.32 (Repetida.)

Para obtener los esfuerzos permisibles a partir de esfuerzos máximos, el AISC adoptó las siguientes fórmulas para los **factores de seguridad:**

$$n_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3} \qquad \frac{KL}{r} \leq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \tag{11.79}$$

$$n_2 = \frac{23}{12} \approx 1.92 \qquad \frac{KL}{r} \geq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \tag{11.80}$$

Por tanto, el factor de seguridad es $5/3$ cuando $KL/r = 0$ y aumenta gradualmente a $23/12$ cuando $KL/r = (KL/r)_c$. Para relaciones de esbeltez mayores, el factor de seguridad permanece constante en ese valor.

Ahora los **esfuerzos permisibles** se obtienen al dividir los esfuerzos máximos $\sigma_{máx}$ entre el factor de seguridad apropiado (n_1 o n_2); es decir,

$$\frac{\sigma_{perm}}{\sigma_Y} = \frac{1}{n_1}\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right] \qquad \frac{KL}{r} \leq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \tag{11.81}$$

$$\frac{\sigma_{perm}}{\sigma_Y} = \frac{(KL/r)_c^2}{2n_2(KL/r)^2} \qquad \frac{KL}{r} \geq \left(\frac{KL}{r}\right)_c \tag{11.82}$$

Estas ecuaciones para los esfuerzos permisibles también están trazadas en la figura 11.34.

Las especificaciones del AISC fijan un límite superior de 200 para la relación de esbeltez KL/r y especifican el módulo de elasticidad E igual a 29,000 ksi. Además, los símbolos empleados en las especificaciones del AISC difieren ligeramente de los utilizados en las fórmulas anteriores. Por ejemplo, la relación de esbeltez crítica se denota C_c, el esfuerzo permisible F_a y el esfuerzo de fluencia F_y.

Todas las fórmulas de diseño anteriores para el acero estructural se pueden utilizar con unidades inglesas o SI. Las fórmulas son aplicables a secciones de patín ancho y otras formas laminadas, así como a columnas con secciones transversales rectangulares y circulares.

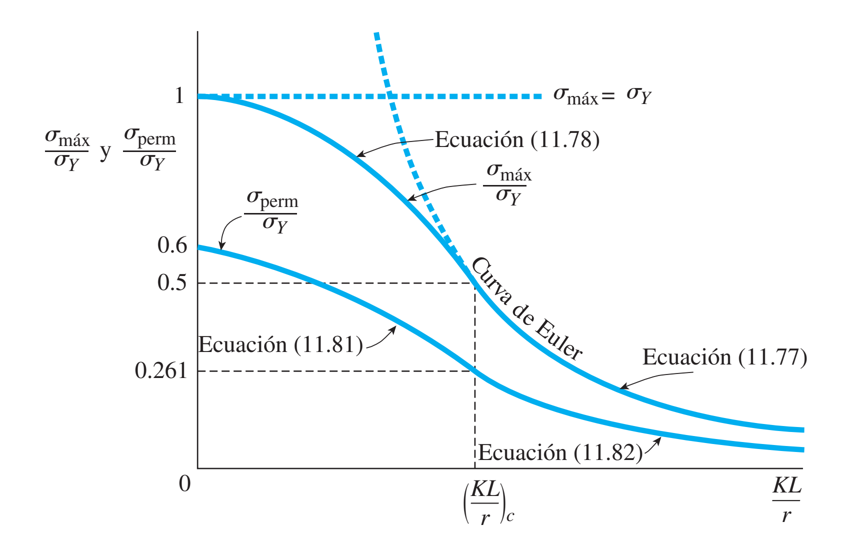


FIGURA 11.34 Fórmulas de diseño para columnas de acero estructural.

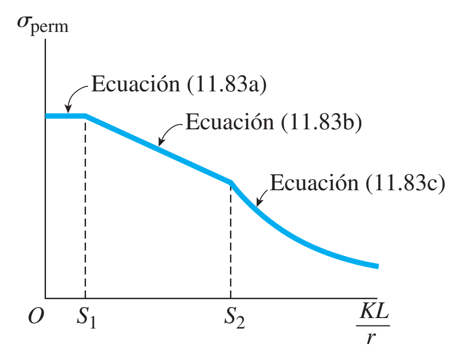


FIGURA 11.35 Fórmulas de diseño para columnas de aluminio.

Aluminio

Las fórmulas de diseño presentadas a continuación para columnas de aluminio se tomaron de las especificaciones de la Aluminum Association (referencia 5.5). Al igual que las fórmulas para el diseño de columnas de acero, las fórmulas para aluminio se basan en curvas teóricas dadas en las figuras 11.29 y 11.32.

La forma general de las curvas de diseño para aluminio se muestra en la figura 11.35, donde la ordenada es el esfuerzo permisible y la abscisa es la relación de esbeltez efectiva KL/r. La relación de esbeltez S_1 separa a las columnas cortas de las intermedias y la relación S_2 separa a las columnas intermedias de las largas (compare esta figura con la figura 11.29). El esfuerzo permisible en la región de columnas cortas se basa en la resistencia a la fluencia del material; en la región de columnas intermedias se basa en la fórmula del módulo tangente y en la región de columnas largas se basa en la fórmula de Euler.

Para columnas de aluminio en compresión directa, las fórmulas de diseño generales se expresan como sigue:

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_Y}{n_Y} \qquad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq S_1 \tag{11.83a}$$

$$\sigma_{perm} = \frac{1}{n_u}\left(B_c - D_c\frac{KL}{r}\right) \qquad S_1 \leq \frac{KL}{r} \leq S_2 \tag{11.83b}$$

$$\sigma_{perm} = \frac{\pi^2 E}{n_u(KL/r)^2} \qquad \frac{KL}{r} \geq S_2 \tag{11.83c}$$

En estas ecuaciones, KL/r es la relación de esbeltez efectiva, el esfuerzo σ_Y es el esfuerzo de fluencia en compresión (desplazamiento de 0.2 por ciento), n_Y es el factor de seguridad con respecto al esfuerzo de fluencia, n_u es el factor de seguridad con respecto al esfuerzo último y B_c y D_c son constantes.

Los valores de las diversas cantidades que aparecen en las ecuaciones (11.83a, b y c) dependen de la aleación de aluminio particular, del templado del producto terminado y del uso que se le dará. Se dispone de numerosas aleaciones y temples, por lo que la Aluminum Association proporciona tablas de valores con base en el material y su uso propuesto.

Como ejemplos, las fórmulas siguientes se aplican a dos aleaciones empleadas en estructuras de edificios y aeronaves. En estos casos particulares la región de columnas cortas es muy pequeña y se puede combinar con la región de columnas intermedias; por tanto, para estos materiales, la relación de esbeltez S_1 se toma igual a cero.

Caso 1. Aleación 2014-T6 $\quad S_1 = 0, S_2 = 55$

$$\sigma_{perm} = 30.7 - 0.23\left(\frac{KL}{r}\right) \text{ ksi} \qquad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq 55 \tag{11.84a}$$

$$\sigma_{perm} = \frac{54{,}000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} \qquad \frac{KL}{r} \geq 55 \tag{11.84b}$$

Caso 2. Aleación 6061-T6 $S_1 = 0, S_2 = 66$

$$\sigma_{\text{perm}} = 20.2 - 0.126\left(\frac{KL}{r}\right)\text{ksi} \qquad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq 66 \quad (11.85a)$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{51{,}000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} \qquad \frac{KL}{r} \geq 66 \quad (11.85b)$$

Observe que estas fórmulas dan los esfuerzos permisibles, por lo cual ya incorporan los factores de seguridad, que son 1.65 y 1.95 para n_Y y n_U, respectivamente. Observe también que los esfuerzos permisibles tienen unidades de kips por pulgada cuadrada (ksi). Por último, observe que las curvas de diseño (figura 11.35 en la página anterior) coinciden en la relación de esbeltez S_2 con formas muy distintas.

Madera

Los elementos estructurales de madera se pueden obtener con facilidad en forma de madera aserrada, madera laminada encolada, y polines y pilotes redondos. Su resistencia depende de muchos factores, siendo la especie el más importante (como el abeto Douglas o el pino del sur) y el grado (como estructural seleccionado o de construcción). Entre los otros factores que afectan la resistencia se encuentran el contenido de humedad y la duración de la carga (la madera soportará cargas mayores durante duraciones breves que durante periodos grandes).

El diseño de elementos estructurales de madera, al igual que los de acero y aluminio, está gobernado por códigos y especificaciones. En Estados Unidos los códigos de diseño de uso más común para madera son los de la American Forest and Paper Association (referencia 5.6), que publica las *National Design Specifications for Wood Construction* y manuales relacionados. Las fórmulas y los requerimientos descritos en esta sección se tomaron de esas especificaciones. Limitaremos nuestro análisis a columnas con sección transversal rectangular construidas con madera aserrada o con madera laminada encolada.

El esfuerzo permisible en compresión de una columna, paralelo a la veta de la madera, sobre la sección transversal de una columna se denota en las especificaciones como F'_c, que es lo mismo que σ_{perm} en la notación de este libro. Por tanto, la **carga axial permisible** para una columna cargada en el centro es

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A = F'_c A \quad (11.86)$$

en donde A es el área de la sección transversal de la columna.

El **esfuerzo permisible** F'_c que se debe emplear en la ecuación anterior está dado en las especificaciones como

$$F'_c = F_c C^* C_P = F^*_c C_P \quad (11.87)$$

en donde F_c es el esfuerzo de compresión de diseño para la especie específica y grado de la madera, C^* es una factor de ajuste para varios condiciones de servicio, C_p es el factor de estabilidad de la columna y F^*_c es el esfuerzo de compresión ajustado de diseño (igual al producto de F_c y el factor de ajuste C^*). A continuación se describe cada uno de estos términos.

El **esfuerzo de diseño** F_c se basa en pruebas de laboratorio de probetas de madera y se enlista en tablas en las especificaciones. Por ejemplo, los valores comunes de F_c para grados estructurales de abeto Douglas y pino del sur se encuentran en el intervalo de 700 a 2000 psi (5 a 14 MPa).

El **factor de ajuste** C^* toma en cuenta las condiciones de servicio, es decir, las condiciones reales de uso, incluyendo la duración de la carga, las condiciones de humedad y las altas temperaturas. Al resolver problemas en este libro, supondremos que $C^* = 1.0$, lo que es razonable para condiciones ordinarias en el interior.

El **factor de estabilidad de la columna** C_P se basa en consideraciones de pandeo análogas a las descritas con relación a las figuras 11.29 y 11.32. Para columnas de madera se ha planteado una sola fórmula de pandeo que abarca toda la región del comportamiento de la columna, incluyendo columnas cortas, intermedias y largas. La fórmula, que se presenta como la ecuación (11.89), da el factor de estabilidad C_P en términos de diversas variables, una de las cuales es la **relación de esbeltez de la madera:**

$$\text{Relación de esbeltez de la madera} = \frac{L_e}{d} \qquad (11.88)$$

en donde L_e es la longitud efectiva de pandeo y d es el ancho de la sección transversal en el plano de pandeo.

La **longitud efectiva** L_e que aparece en la relación de esbeltez de la madera es igual que la longitud efectiva KL en nuestros estudios anteriores (consulte la figura 11.19). Sin embargo, observe con cuidado que la relación de esbeltez L_e/d **no** es igual que la relación de esbeltez L/r empleada antes (consulte la ecuación 11.17). La dimensión d es el *ancho* de la sección transversal en el plano de pandeo, en tanto que r es el *radio de giro* de la sección transversal en el plano de pandeo. También observe que el valor máximo permisible de la relación de esbeltez de la madera L_e/d es 50.

El **factor de estabilidad de la columna** C_P se calcula a partir de la fórmula siguiente:

$$C_P = \frac{1 + (F_{cE}/F_c^*)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (F_{cE}/F_c^*)}{2c}\right]^2 - \frac{F_{cE}/F_c^*}{c}} \qquad (11.89)$$

en donde F_{cE} es el coeficiente de pandeo de Euler (ecuación 11.90), F_c^* es el esfuerzo de compresión ajustado de diseño (consulte la ecuación 11.87) y c es una constante que depende del tipo de columna (por ejemplo, $c = 0.8$ para madera aserrada y 0.9 para madera laminada encolada).

El **coeficiente de pandeo de Euler** se define como sigue:

$$F_{cE} = \frac{K_{cE}E'}{(L_e/d)^2} \qquad (11.90)$$

en donde K_{cE} es un coeficiente de pandeo, E' es un módulo de elasticidad ajustado y L_e/d es la relación de esbeltez de la madera.

El coeficiente K_{cE} se basa en el método de clasificación y es igual a 0.3 para madera clasificada visualmente y 0.418 para madera laminada encolada. El módulo ajustado E' es igual al módulo de elasticidad E multiplicado por un factor de ajuste para condiciones de servicio. Al resolver problemas en este libro, supondremos que estos factores de ajuste son iguales a 1.0

y, por tanto, $E' = E$. Los valores comunes del módulo E para madera estructural se encuentran en el intervalo de 1,200,000 a 2,000,000 psi (8 a 14 GPa).

En resumen, las ecuaciones (11.86) a (11.90) son las **ecuaciones generales** para el pandeo de columnas de madera. Sin embargo, al resolver problemas en este libro, supondremos las **condiciones específicas** siguientes:

1. Las columnas tienen secciones transversales rectangulares y están construidas de madera aserrada o bien de madera laminada encolada.
2. El factor de ajuste $C^* = 1.0$ y, por tanto, las tres relaciones siguientes se pueden emplear:

$$F'_c = \sigma_{\text{perm}} = F_c C_P \qquad F^*_c = F_c \tag{11.91a,b}$$

$$P_{\text{perm}} = F'_c A = F_c C_P A \tag{11.92}$$

3. La constante $c = 0.8$ o 0.9 (para madera aserrada y madera laminada encolada, respectivamente).
4. El coeficiente $K_{cE} = 0.3$ o 0.418 (para madera aserrada y madera laminada encolada, respectivamente).
5. El módulo $E' = E$.

Con estas condiciones, la ecuación para el coeficiente de pandeo de Euler (ecuación 11.90) se convierte en:

$$F_{cE} = \frac{K_{cE}E}{(L_e/d)^2} \tag{11.93}$$

y la relación adimensional F_{cE}/F^*_c, que denotaremos con la letra griega ϕ, se convierte en

$$\phi = \frac{F_{cE}}{F^*_c} = \frac{K_{cE}E}{F_c(L_e/d)^2} \tag{11.94}$$

Con esta notación simplificada, la ecuación para el factor de estabilidad de la columna es

$$C_P = \frac{1 + \phi}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + \phi}{2c}\right]^2 - \frac{\phi}{c}} \tag{11.95}$$

Observe que la relación de esbeltez L_e/d entra en el cálculo de C_p mediante la relación ϕ.

En la figura 11.36 se muestra una **gráfica del factor de estabilidad**. Las curvas para C_p están trazadas para dos valores de la relación E/F_c. Observe que las dos curvas tienen pendiente cero para L_e/d igual a cero y terminan en $L_e/d = 50$, que es el límite superior permitido en las especificaciones. Si bien estas curvas están trazadas para valores específicos de varios parámetros, muestran en general cómo varía el factor de estabilidad con la relación de esbeltez L_e/d.

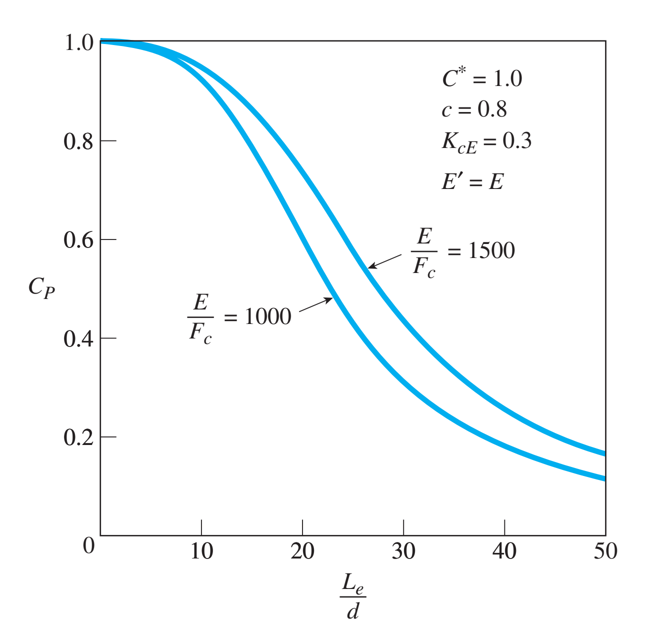


FIGURA 11.36 Curvas características del factor de estabilidad de la columna C_p (columnas rectangulares de madera).

Limitaciones

Las fórmulas anteriores para el diseño de columnas de acero, aluminio y madera sólo se deben utilizar para resolver problemas en este libro. No se deben emplear para el diseño real de columnas, debido a que representan sólo una parte pequeña del proceso completo de diseño. En el diseño de columnas intervienen muchos factores además de los mencionados aquí y, por tanto, se deben consultar libros de texto u otras referencias sobre diseño estructural para una aplicación específica.

Además, todas las fórmulas de diseño presentadas en las especificaciones y códigos, como las que se dan en esta sección, requieren de cierta experiencia para su uso. Hay muchos casos de estructuras que “cumplen con el código” y que no obstante se colapsan o fallan en su desempeño adecuado. Satisfacer los requisitos del código no es suficiente para un diseño seguro, también es esencial la experiencia práctica en el diseño.

Ejemplo 11.5

Una columna de acero está construida con un perfil W 10 × 60 de patín ancho (figura 11.37). Suponga que la columna tiene soportes articulados y que se puede pandear en cualquier dirección. Suponga también que el acero tiene módulo de elasticidad $E = 29{,}000$ ksi y esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 36$ ksi.

(a) Si la longitud de la columna es $L = 20$ ft, ¿cuál es la carga axial permisible?

(b) Si la columna está sometida a una carga axial $P = 200$ k, ¿cuál es la longitud máxima permisible?

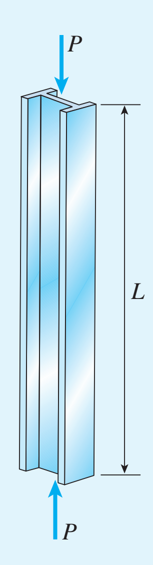


FIGURA 11.37 Ejemplo 11.5. Columna de acero de patín ancho.

Solución

Utilizaremos las fórmulas del AISC (ecuaciones 11.79 a 11.82) al analizar esta columna, como la columna tiene apoyos articulados, el factor de longitud efectiva es $K = 1$. Además, dado que la columna se pandeará con respecto al eje débil de flexión, emplearemos el radio de giro menor: $r = 2.57$ in, valor obtenido en la tabla E.1 del apéndice E. La relación de esbeltez crítica (ecuación 11.76) es

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(29{,}000 \text{ ksi})}{36 \text{ ksi}}} = 126.1 \qquad \text{(a)}$$

(a) *Carga axial permisible*. Si la longitud $L = 20$ ft, la relación de esbeltez de la columna es

$$\frac{L}{r} = \frac{(20 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})}{2.57 \text{ in}} = 93.4$$

continúa

que es menor que la relación crítica (ecuación a). Por tanto, emplearemos las ecuaciones (11.79) y (11.81) para obtener el factor de seguridad y el esfuerzo permisible, respectivamente:

$$n_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(93.4)}{8(126.1)} - \frac{(93.4)^3}{8(126.1)^3} = 1.89$$

$$\frac{\sigma_{\text{perm}}}{\sigma_Y} = \frac{1}{n_1}\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right] = \frac{1}{1.89}\left[1 - \frac{(93.4)^2}{2(126.1)^2}\right] = 0.384$$

$$\sigma_{\text{perm}} = 0.384\sigma_Y = 0.384(36 \text{ ksi}) = 13.8 \text{ ksi}$$

Como el área de la sección transversal de la columna es $A = 17.6 \text{ in}^2$ (de la tabla E.1), la carga axial permisible es

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A = (13.8 \text{ ksi})(17.6 \text{ in}^2) = 243 \text{ k}$$

(b) *Longitud máxima permisible*. Para determinar la longitud máxima cuando la carga axial $P = 200$ k, iniciamos con un valor estimado de la longitud y luego usamos un procedimiento de prueba y error. Observe que cuando la carga $P = 200$ k, la longitud máxima es mayor que 20 ft (debido a que una longitud de 20 ft corresponde a una carga axial de 243 k). Por tanto, como valor de prueba supondremos $L = 25$ ft. La relación de esbeltez correspondiente es

$$\frac{L}{r} = \frac{(25 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})}{2.57 \text{ in}} = 116.7$$

que es menor que la relación crítica. Por tanto, de nuevo usaremos las ecuaciones (11.79) y (11.81) para obtener el factor de seguridad y el esfuerzo permisible:

$$n_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(116.7)}{8(126.1)} - \frac{(116.7)^3}{8(126.1)^3} = 1.915$$

$$\frac{\sigma_{\text{perm}}}{\sigma_Y} = \frac{1}{n_1}\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right] = \frac{1}{1.915}\left[1 - \frac{(116.7)^2}{2(126.1)^2}\right] = 0.299$$

$$\sigma_{\text{perm}} = 0.299\sigma_Y = 0.299(36 \text{ ksi}) = 10.8 \text{ ksi}$$

Entonces, la carga axial permisible correspondiente a una longitud $L = 25$ ft es

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A = (10.8 \text{ ksi})(17.6 \text{ in}^2) = 190 \text{ k}$$

que es menor que la carga dada de 200 k. Por tanto, la longitud permisible es menor que 25 ft.

Al realizar cálculos similares para $L = 24.0$ ft y $L = 24.5$ ft, obtenemos los resultados siguientes:

$$L = 24.0 \text{ ft} \qquad P_{\text{perm}} = 201 \text{ k}$$
$$L = 24.5 \text{ ft} \qquad P_{\text{perm}} = 194 \text{ k}$$
$$L = 25.0 \text{ ft} \qquad P_{\text{perm}} = 190 \text{ k}$$

Si interpolamos entre estos resultados, vemos que una carga de 200 k corresponde a una longitud de 24.1 ft. Por tanto, la longitud máxima permisible de la columna es

$$L_{\text{máx}} = 24.1 \text{ ft}$$

Ejemplo 11.6

Determine el espesor mínimo requerido $t_{\text{mín}}$ para una columna tubular de acero con longitud $L = 3.6$ m y diámetro exterior $d = 160$ mm que soporta una carga axial $P = 240$ kN (figura 11.38). La columna está empotrada en su base y libre en su parte superior. (Utilice $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.)

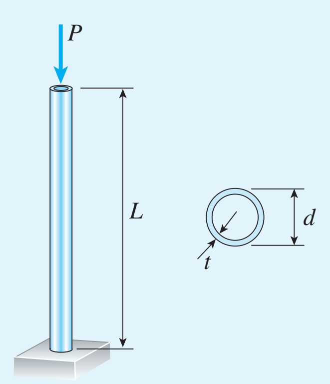


FIGURA 11.38 Ejemplo 11.6. Columna tubular de acero.

Solución

Utilizaremos las fórmulas del AISC (ecuaciones 11.79 a 11.82) al analizar esta columna. Como la columna tiene condiciones de extremo empotrado y libre, la longitud efectiva es

$$L_e = KL = 2(3.6\text{ m}) = 7.2\text{ m}$$

Además, la relación de esbeltez crítica (ecuación 11.76) es

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\text{ GPa})}{250\text{ MPa}}} = 125.7 \qquad \text{(b)}$$

Primera prueba. Para determinar el espesor requerido de la columna, emplearemos un método de prueba y error. Iniciemos suponiendo un valor de prueba $t = 7.0$ mm. Entonces el momento de inercia del área de la sección transversal es

$$I = \frac{\pi}{64}\left[d^4 - (d - 2t)^4\right] = \frac{\pi}{64}\left[(160\text{ mm})^4 - (146\text{ mm})^4\right] = 9.866 \times 10^6\text{ mm}^4$$

continúa

Además, el área de la sección transversal y el radio de giro son

$$A = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (d - 2t)^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[(160 \text{ mm})^2 - (146 \text{ mm})^2\right] = 3365 \text{ mm}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{9.866 \times 10^6 \text{ mm}^4}{3365 \text{ mm}^2}} = 54.15 \text{ mm}$$

Por tanto, la relación de esbeltez de la columna es

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(3.6 \text{ m})}{54.15 \text{ mm}} = 133.0$$

Como esta relación es mayor que la relación de esbeltez crítica (ecuación b), obtenemos el factor de seguridad y el esfuerzo permisible a partir de las ecuaciones (11.80) y (11.82):

$$n_2 = 1.92$$

$$\frac{\sigma_{\text{perm}}}{\sigma_Y} = \frac{(KL/r)_c^2}{2n_2(KL/r)^2} = \frac{(125.7)^2}{2(1.92)(133.0)^2} = 0.2326$$

$$\sigma_{\text{perm}} = 0.2326\sigma_Y = 0.2326(250 \text{ MPa}) = 58.15 \text{ MPa}$$

Por tanto, la carga axial permisible es

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}} A = (58.15 \text{ MPa})(3365 \text{ mm}^2) = 196 \text{ kN}$$

Dado que esta carga es menor que la carga requerida de 240 kN, debemos probar un valor mayor del espesor t.

Pruebas adicionales. Al realizar cálculos similares para $t = 8$ mm y $t = 9$ mm, obtenemos los resultados siguientes:

$$t = 7.0 \text{ mm} \qquad P_{\text{perm}} = 196 \text{ kN}$$

$$t = 8.0 \text{ mm} \qquad P_{\text{perm}} = 220 \text{ kN}$$

$$t = 9.0 \text{ mm} \qquad P_{\text{perm}} = 243 \text{ kN}$$

Por interpolación, vemos que $t = 8.9$ mm corresponde a una carga de 240 kN. Por tanto, el espesor requerido de la columna tubular es

$$t_{\text{mín}} = 8.9 \text{ mm}$$



Ejemplo 11.7

Un tubo de aluminio (aleación 2014-T6) con una longitud efectiva $L = 16.0$ in está comprimido por una fuerza axial $P = 5.0$ k (figura 11.39).

Determine el diámetro exterior mínimo requerido d si el espesor t es igual a un décimo del diámetro exterior.

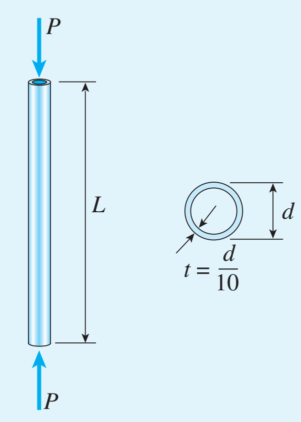


FIGURA 11.39 Ejemplo 11.7. Tubo de aluminio en compresión.

Solución

Utilizaremos las fórmulas de la Aluminum Association para la aleación 2014-T6 (ecuaciones 11.84a y b) para analizar esta columna. Sin embargo, debemos hacer una suposición inicial con respecto a qué fórmula es aplicable, ya que cada fórmula se aplica a un intervalo diferente de relaciones de esbeltez. Supongamos que la relación de esbeltez del tubo es menor que 55, en cuyo caso usamos la ecuación (11.84a) con $K = 1$:

$$\sigma_{\text{perm}} = 30.7 - 0.23\left(\frac{L}{r}\right) \text{ksi} \tag{c}$$

En esta ecuación podemos reemplazar el esfuerzo permisible con el esfuerzo real P/A, es decir, con la carga axial dividida entre el área de la sección transversal. El área de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (d - 2t)^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[d^2 - (0.8d)^2\right] = 0.2827d^2 \tag{d}$$

Por tanto, el esfuerzo P/A es

$$\frac{P}{A} = \frac{5.0 \text{ k}}{0.2827d^2} = \frac{17.69}{d^2}$$

en donde P/A tiene unidades de kips por pulgada cuadrada (ksi) y d tiene unidades de pulgadas (in). Al sustituir en la ecuación (c), obtenemos

$$\frac{17.69}{d^2} = 30.7 - 0.23\left(\frac{L}{r}\right) \text{ksi} \tag{e}$$

continúa

La relación de esbeltez L/r también se puede expresar en términos del diámetro d. Primero, determinamos el momento de inercia y el radio de giro de la sección transversal:

$$I = \frac{\pi}{64}\left[d^4 - (d - 2t)^4\right] = \frac{\pi}{64}\left[d^4 - (0.8d)^4\right] = 0.02898d^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{0.02898d^4}{0.2827d^2}} = 0.3202d$$

Por tanto, la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r} = \frac{16.0 \text{ in}}{0.3202d} = \frac{49.97 \text{ in}}{d} \tag{f}$$

donde (igual que antes) el diámetro d tiene unidades de pulgadas.

Al sustituir en la ecuación (e), obtenemos la siguiente ecuación, en donde d es la única cantidad desconocida:

$$\frac{17.69}{d^2} = 30.7 - 0.23\left(\frac{49.97}{d}\right)$$

Reordenando términos, esta ecuación queda

$$30.7d^2 - 11.49d - 17.69 = 0$$

de donde obtenemos

$$d = 0.97 \text{ in}$$

Este resultado es satisfactorio siempre que la relación de esbeltez sea menor que 55, como se requiere para que la ecuación (c) sea válida. Para verificar que este es el caso, calculamos la relación de esbeltez con la ecuación (f):

$$\frac{L}{r} = \frac{49.97 \text{ in}}{d} = \frac{49.97 \text{ in}}{0.97 \text{ in}} = 51.5$$

Por tanto, la solución es válida y el diámetro mínimo requerido es

$$d_{\text{mín}} = 0.97 \text{ in}$$

Ejemplo 11.8

Un poste de madera con sección transversal rectangular (figura 11.40) está construido de madera de abeto Douglas con un esfuerzo de compresión de diseño $F_c = 11$ MPa y módulo de elasticidad $E = 13$ GPa. La longitud del poste es L y las dimensiones de la sección transversal son b y h. Los soportes en los extremos del poste proporcionan condiciones articuladas, de manera que la longitud L se convierte en la longitud efectiva L_e. Además, el pandeo puede ocurrir libremente con respecto al eje principal de la sección transversal. (*Nota:* como el poste está hecho de madera aserrada, la constante c es igual a 0.8 y el coeficiente K_{cE} es igual a 0.3).

(a) Determine la carga axial permisible P_{perm} si $L = 1.8$ m, $b = 120$ mm y $h = 160$ mm.

(b) Determine la longitud máxima permisible $L_{\text{máx}}$ si la carga axial $P = 100$ kN, $b = 120$ mm y $h = 160$ mm.

(c) Determine el ancho mínimo $b_{\text{mín}}$ de la sección transversal si la columna es cuadrada, $P = 125$ kN y $L = 2.6$ m.

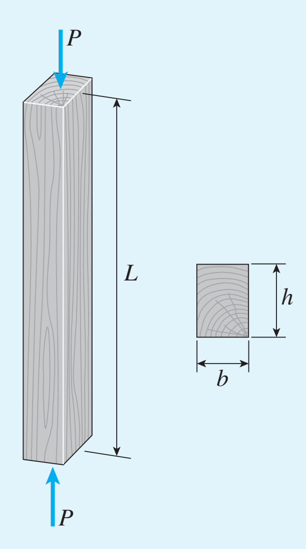


FIGURA 11.40 Ejemplo 11.8. Poste de madera en compresión.

Solución

(a) *Carga axial permisible*. La carga permisible (de la ecuación 11.92) es

$$P_{\text{perm}} = F_c'A = F_cC_PA$$

en donde $F_c = 11$ MPa y

$$A = bh = (120 \text{ mm})(160 \text{ mm}) = 19.2 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

Para encontrar el factor de estabilidad C_P, primero calculamos la relación de esbeltez como se muestra:

$$\frac{L_e}{d} = \frac{1.8 \text{ m}}{120 \text{ mm}} = 15$$

continúa

en donde d es la dimensión menor de la sección transversal. Luego, obtenemos la relación ϕ de la ecuación (11.94):

$$\phi = \frac{F_{cE}}{F_c^*} = \frac{K_{cE}E}{F_c(L_e/d)^2} = \frac{(0.3)(13\text{ GPa})}{(11\text{ MPa})(15)^2} = 1.5758$$

A continuación sustituimos ϕ en la ecuación (11.95) para C_p y también usamos $c = 0.8$ para obtener

$$C_P = \frac{1 + 1.5758}{1.6} - \sqrt{\left[\frac{1 + 1.5758}{1.6}\right]^2 - \frac{1.5758}{0.8}} = 0.8212$$

Por último, la carga axial permisible es

$$P_{\text{perm}} = F_c C_P A = (11\text{ MPa})(0.8212)(19.2 \times 10^3\text{ mm}^2) = 173\text{ kN}$$

(b) *Longitud máxima permisible*. Iniciamos determinando el valor requerido de C_p. Al reacomodar la ecuación (11.92) y reemplazar P_{perm} con la carga P, obtenemos la fórmula para C_p que se muestra a continuación. Luego, sustituimos valores numéricos y obtenemos el resultado siguiente:

$$C_P = \frac{P}{F_c A} = \frac{100\text{ kN}}{(11\text{ MPa})(19.2 \times 10^3\text{ mm}^2)} = 0.47348$$

Al sustituir este valor de C_p en la ecuación (11.95) y también igualando c a 0.8, obtenemos la siguiente ecuación en la cual ϕ es la única cantidad desconocida:

$$C_P = 0.47348 = \frac{1 + \phi}{1.6} - \sqrt{\left[\frac{1 + \phi}{1.6}\right]^2 - \frac{\phi}{0.8}}$$

Al resolver numéricamente mediante prueba y error, obtenemos

$$\phi = 0.55864$$

Por último, de la ecuación (11.94), obtenemos

$$\frac{L}{d} = \sqrt{\frac{K_{cE}E}{\phi F_c}} = \sqrt{\frac{(0.3)(13\text{ GPa})}{(0.55864)(11\text{ MPa})}} = 25.19$$

y

$$L_{\text{máx}} = 25.19d = (25.19)(120 \text{ mm}) = 3.02 \text{ m}$$

Cualquier valor mayor de la longitud L producirá una valor menor de C_p y de aquí una carga P que es menor que la carga real de 100 kN.

(c) *Ancho mínimo de la sección transversal cuadrada*. El ancho mínimo $b_{\text{mín}}$ se puede determinar mediante prueba y error, empleando el procedimiento descrito en el inciso (a). Los pasos son los siguientes:

1. Seleccione un valor de prueba de b (metros).
2. Calcule la relación de esbeltez $L/r = 2.6/b$ (adimensional).
3. Calcule la relación ϕ de la ecuación (11.94):

$$\phi = \frac{K_{cE}E}{F_c(L_e/d)^2} = \frac{(0.3)(13 \text{ GPa})}{(11 \text{ MPa})(2.6/b)^2} = 52.448b^2 \quad \text{(adimensional)}$$

4. Sustituya ϕ en la ecuación (11.95) y calcule C_P (adimensional).
5. Calcule la carga P a partir de la ecuación (11.92):

$$P = F_cC_PA = (11 \text{ MPa})(C_P)(b^2) = 11{,}000\ C_Pb^2 \text{ (kilonewtons)}$$

6. Compare el valor calculado de P con la carga dada de 125 kN. Si P es menor que 125 kN, seleccione un valor de prueba mayor para b y repita los pasos (2) a (7). Si P es mayor que 125 kN en una cantidad significativa, seleccione un valor menor para b y repita los pasos. Continúe hasta que P alcance un valor satisfactorio.

Consideremos un valor de prueba de b igual a 130 mm, o 0.130 m. Entonces los pasos (2) a (5) producen los siguientes resultados:

$$L/d = 2.6/b = 20 \qquad \phi = 52.448\ b^2 = 0.88637$$

$$C_P = 0.64791 \qquad P = 11{,}000\ C_Pb^2 = 120.4 \text{ kN}$$

Como la carga dada es 125 kN, seleccionamos un valor mayor de b, digamos 0.132 m, para la prueba siguiente. Continuando de esta manera con pruebas sucesivas, obtenemos los siguientes resultados:

$$b = 0.132 \text{ m};\ P = 126.3 \text{ kN} \qquad b = 0.131 \text{ m};\ P = 123.4 \text{ kN}$$

Por tanto, el ancho mínimo de la sección transversal cuadrada es

$$b_{\text{mín}} = 0.132 \text{ m} = 132 \text{ mm}$$

RESUMEN Y REPASO DEL CAPÍTULO

En este capítulo estudiamos el comportamiento elástico e inelástico de elementos cargados axialmente conocidos como columnas. Primero se analizaron los conceptos de pandeo y estabilidad de elementos esbeltos en compresión, empleando el equilibrio de modelos simples de columnas compuestos de barras rígidas y resortes elásticos. Luego se consideraron columnas elásticas con extremos articulados sometidas a cargas centroidales de compresión y se resolvió la ecuación diferencial de la curva de deflexión para obtener la carga de pandeo (P_{cr}) y la forma modal de pandeo; se supuso comportamiento lineal elástico. Se investigaron tres casos adicionales de soporte y se expresó la carga de pandeo para cada caso en términos de la longitud efectiva de la columna, es decir, la longitud de una columna equivalente con extremos articulados. Se estudió el comportamiento de columnas con extremos articulados con cargas axiales excéntricas y se dedujo la fórmula de la secante que define el esfuerzo máximo en estas columnas. Se presentaron tres teorías del pandeo inelástico. Por último, se presentaron y analizaron fórmulas para el diseño de columnas hechas de acero, aluminio y madera.

Los conceptos importantes presentados en este capítulo son los siguientes:

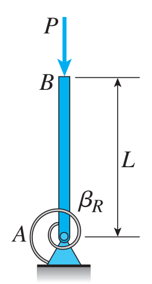
1. La inestabilidad por pandeo de columnas esbeltas es un modo importante de falla que se debe considerar en su diseño (además de la resistencia y la rigidez).
2. Una columna con extremos articulados y longitud L sometida a una carga de compresión en el centroide de la sección transversal y restringida a comportamiento elástico, se pandeará con la carga de pandeo de Euler $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ en el modo fundamental; por tanto, la carga de pandeo depende de la rigidez a la flexión (EI) y de la longitud (L) pero no de la resistencia del material.
3. Al cambiar las condiciones de soporte, o al proporcionar soportes laterales, cambia la carga crítica de pandeo. Sin embargo, para estos y otros casos de soporte se pueden obtener P_{cr} reemplazando la longitud real de la columna (L) con la longitud efectiva (L_e) en la fórmula para P_{cr} anterior. En la figura 11.19 se muestran tres casos adicionales de soporte.
4. Las columnas con cargas axiales excéntricas se comportan de manera muy diferente a las cargadas en el centro. El esfuerzo de compresión máximo en columnas con extremos articulados con la carga P aplicada con la excentricidad e se define mediante la fórmula de la secante; una gráfica de esta fórmula (figura 11.27) muestra que la capacidad de carga de la columna disminuye conforme aumenta la excentricidad.
5. Las columnas largas (es decir, con relaciones de esbeltez grandes L/r) se pandean a valores bajos de esfuerzo de compresión; las columnas cortas (es decir, L/r) baja) fallan por fluencia y aplastamiento del material y las columnas intermedias (con valores de L/r) que se encuentran entre los valores para columnas largas y cortas) fallan por pandeo inelástico. La carga crítica de pandeo para pandeo inelástico siempre es menor que la carga de pandeo de Euler; las líneas divisorias entre columnas cortas, intermedias y largas no están definidas con precisión.
6. Tres teorías para pandeo inelástico de columnas intermedias son: la teoría del módulo tangente, la teoría del módulo reducido y la teoría de Shanley. Sin embargo, en realidad se utilizan fórmulas empíricas para el diseño de columnas debido a que las fórmulas teóricas no toman en cuenta aspectos como esfuerzos residuales en columnas de acero y otros.
7. Las fórmulas de diseño para columnas reales de varios materiales se basan tanto en la teoría como en el comportamiento observado en pruebas de laboratorio.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 11

Modelos idealizados de pandeo

11.2.1 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de una **barra rígida** con conexión articulada y resorte linealmente elástico. La rigidez a la rotación se denota β_R y la rigidez traslacional se denota β.

Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura.

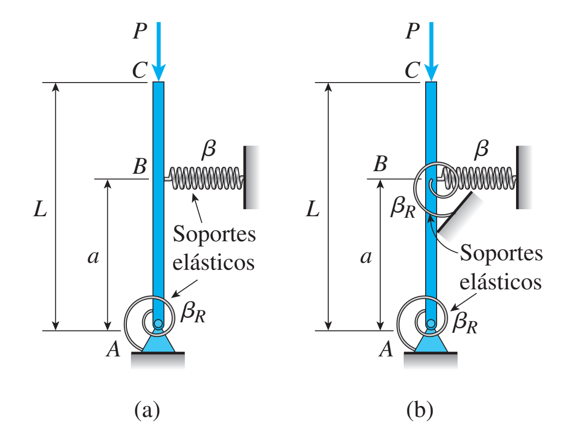


PROB. 11.2.1

11.2.2 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de una o más barras rígidas con conexiones articuladas y resortes linealmente elásticos. La rigidez a la rotación se denota β_R y la rigidez translacional se denota β.

(a) Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura de la parte (a) de la figura.

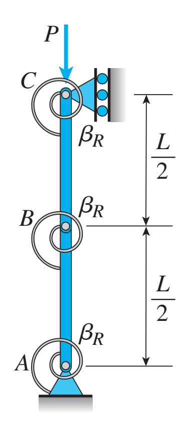
(b) Encuentre P_{cr} si se agrega otro resorte rotacional en B en la parte (b) de la figura.



PROB. 11.2.2

11.2.3 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de una **barra rígida** con conexiones articuladas y resortes linealmente elásticos. La rigidez a la rotación se denota β_R y la rigidez translacional se denota β.

Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura.

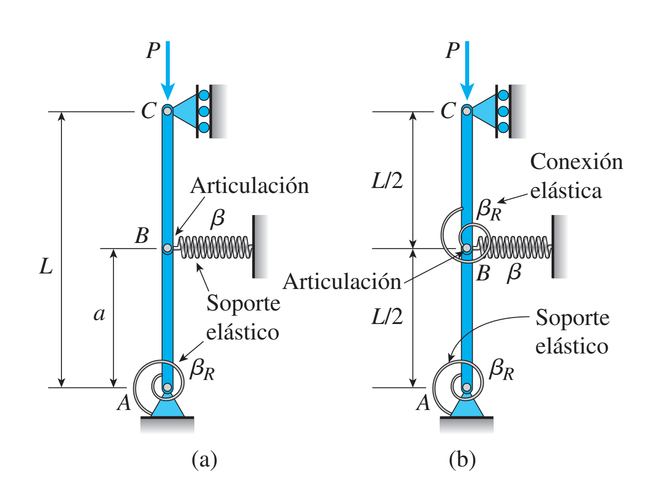


PROB. 11.2.3

11.2.4 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de barras AB y BC que están conectadas empleando una articulación en B y resortes linealmente elásticos en A y B. La rigidez a la rotación se denota β_R y la rigidez a la traslación se denota β.

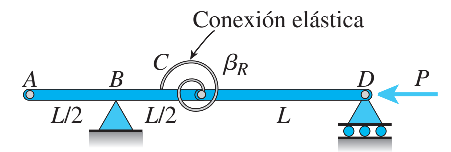
(a) Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura de la parte (a) de la figura.

(b) Encuentre P_{cr} si ahora se utiliza una conexión elástica para conectar los segmentos de las barras AB y BC de la parte (b) de la figura.



PROB. 11.2.4

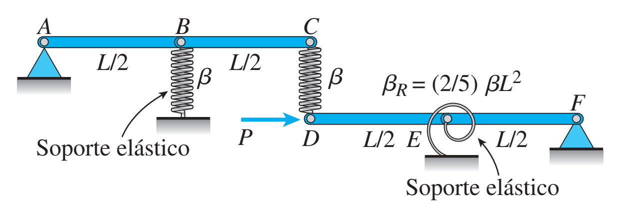
11.2.5 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de dos barras rígidas unidas por una conexión elástica con rigidez a la rotación β_R. Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura.



PROB. 11.2.5

11.2.6 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de barras rígidas *ABC* y *DEF* unidas mediante un resorte linealmente elástico β entre *C* y *D*. La estructura también está soportada por un resorte traslacional elástico β en *B* y un soporte rotacional elástico β_R en *E*.

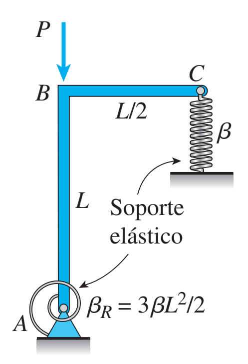
Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura.



PROB. 11.2.6

11.2.7 En la figura se muestra una estructura idealizada que consiste de una estructura de una barra rígida con forma de "L" soportada por resortes linealmente elásticos en *A* y *C*. La rigidez a la rotación se denota β_R y la rigidez a la traslación se denota β.

Determine la carga crítica P_{cr} para la estructura.



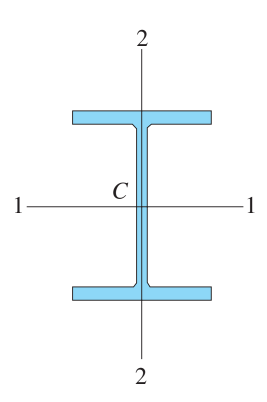
PROB. 11.2.7

Cargas críticas de columnas con soportes articulados

Los problemas de la sección 11.3 se deben resolver empleando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas, prismáticas y linealmente elásticas (pandeo de Euler). El pandeo ocurre en el plano de la figura a menos que se indique lo contrario.

11.3.1 Calcule la carga crítica P_{cr} para una columna de acero W 8 × 35 (consulte la figura) con longitud $L = 24$ ft y $E = 30 \times 10^6$ psi en las condiciones siguientes:

(a) La columna se pandea por flexión con respecto a su eje fuerte (eje 1-1) y (b) la columna se pandea por flexión con respecto a su eje débil (eje 2-2). En los dos casos suponga que la columna tiene extremos articulados.

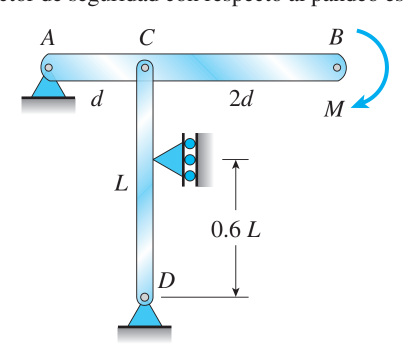


PROBS. 11.3.1 a 11.3.3

11.3-2 Resuelva el problema anterior para una columna de acero W 250 × 89 con longitud $L = 10$ m. Sea $E = 200$ GPa.

11.3.3 Resuelva el problema 11.3.1 para una columna de acero W 10 × 45 con longitud $L = 28$ ft.

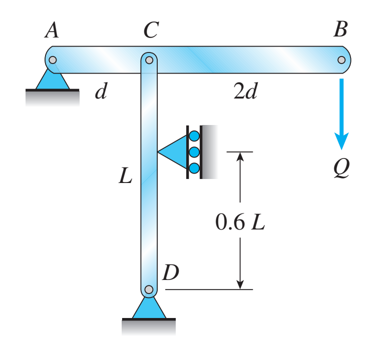
11.3.4 Una viga horizontal *AB* está soportada mediante un pasador en el extremo *A* y soporta un momento *M* en el sentido de las manecillas del reloj en el extremo *B*, como se muestra en la figura. La viga también está soportada en *C* por una columna con extremo articulado de longitud *L*; la columna está restringida lateralmente en 0.6*L* desde la base en *D*. Suponga que la columna sólo se puede pandear en el plano del marco. La columna es una barra sólida de acero ($E = 200$ GPa) con sección transversal cuadrada, tiene longitud $L = 2.4$ m, dimensiones laterales $b = 70$ mm. Sea la dimensión $d = L/2$. Con base en la carga crítica de la columna, determine el momento permisible *M* si el factor de seguridad con respecto al pandeo es $n = 2.0$.



PROB. 11.3.4

11.3.5 Una viga horizontal *AB* está articulada en el extremo *A* y soporta una carga *Q* en el extremo *B*, como se muestra en

la figura. La viga también está soportada en C por una columna con extremos articulados de longitud L; la columna está restringida lateralmente en $0.6L$ desde la base en D. Suponga que la columna sólo se puede pandear en el plano del marco. La columna es una barra sólida de aluminio ($E = 10 \times 10^6$ psi) con sección transversal cuadrada, longitud $L = 30$ in y dimensiones laterales $b = 1.5$ in. Sea la dimensión $d = L/2$. Con base en la carga crítica de la columna, determine la fuerza permisible Q si el factor de seguridad con respecto al pandeo es $n = 1.8$.

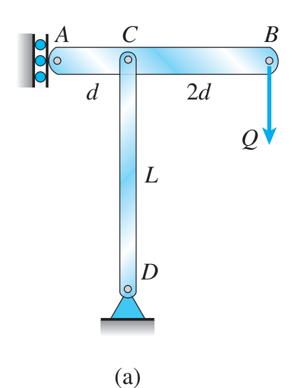


PROB. 11.3.5

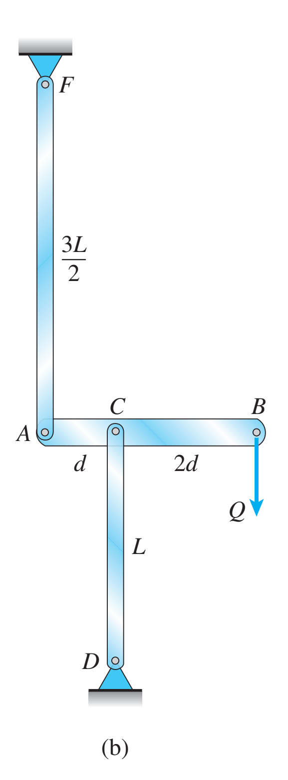
11.3.6 Una viga horizontal AB está soportada en el extremo A y soporta una carga Q en el extremo B, como se muestra en la parte (a) de la figura. La viga también está soportada en C por una columna articulada de longitud L. La columna tiene rigidez a la flexión EI.

(a) Para el caso de un apoyo guiado en A (parte (a) de la figura), ¿cuál es la carga crítica Q_{cr}? (En otras palabras, ¿con qué carga Q_{cr} se colapsa el sistema debido al pandeo de Euler de la columna DC?

(b) Repita el inciso (a) si el apoyo guiado en A se reemplaza con una columna AF con longitud $3L/2$ y rigidez a la flexión EI (consulte la parte (b) de la figura).



(a)



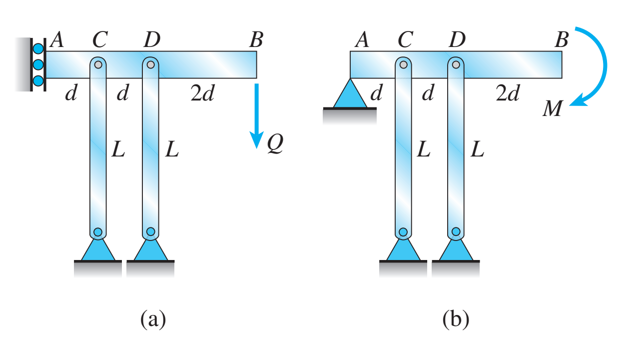
(b)

PROB. 11.3.6

11.3.7 Una viga horizontal AB tiene un apoyo guiado en el extremo A y soporta una carga Q en el extremo B, como se muestra en la parte (a) de la figura. La viga está soportada en C y D por dos columnas articuladas idénticas de longitud L. Cada columna tiene rigidez a la flexión EI.

(a) Encuentre una expresión para la carga crítica Q_{cr}. (En otras palabras, ¿con qué carga Q_{cr} se colapsa el sistema debido al pandeo de Euler de las columnas?)

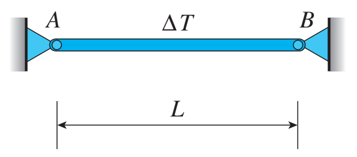
(b) Repita el inciso (a) pero suponga un soporte articulado en A. Encuentre una expresión para el momento crítico M_{cr} (es decir, encuentre el momento M en B para el cual el sistema se colapsa debido al pandeo de Euler de las columnas).



PROB. 11.3.7

11.3.8 Una barra esbelta *AB* con extremos articulados y longitud *L* está sostenida entre apoyos inmóviles (consulte la figura).

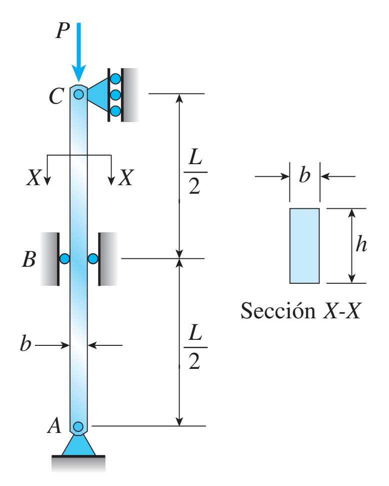
¿Qué incremento ΔT en la temperatura de la barra producirá pandeo en la carga de Euler?



PROB. 11.3.8

11.3.9 Una columna rectangular con dimensiones transversales *b* y *h* está soportada por articulaciones en los extremos *A* y *C* (consulte la figura). A la mitad de su altura la columna está restringida en el plano de la figura, pero puede flexionarse perpendicular al plano de la figura.

Determine la razón h/b de manera que la carga crítica sea la misma para pandeo en los dos planos principales de la columna.

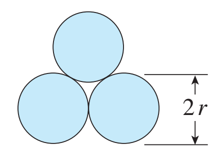


PROB. 11.3.9

11.3.10 Tres barras circulares sólidas idénticas, cada una con radio *r* y longitud *L*, se colocan juntas para formar un elemento en compresión (consulte la sección transversal que se muestra en la figura).

Suponiendo condiciones de extremos articulados, determine la carga crítica P_{cr} como sigue: (a) las barras actúan de manera independiente como columnas individuales y (b) las barras están unidas con pegamento epóxico en toda la longitud tal que funcionan como un solo elemento.

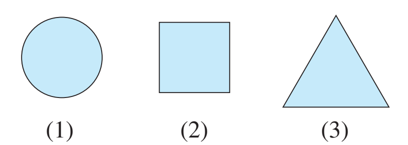
¿Cuál es el efecto en la carga crítica cuando las barras actúan como un solo elemento?



PROB. 11.3.10

11.3.11 Tres columnas articuladas en sus extremos hechas del mismo material tienen la misma longitud y la misma área transversal (consulte la figura). Las columnas pueden pandearse en cualquier dirección. Las secciones transversales de las columnas son las siguientes: (1) un círculo, (2) un cuadrado y (3) un triángulo equilátero.

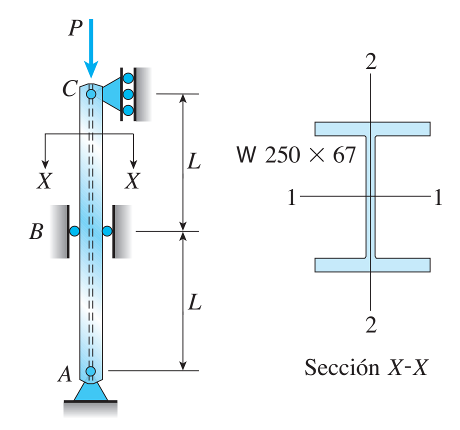
Determine las razones P_1:P_2:P_3 de las cargas críticas para estas columnas.



PROB. 11.3.11

11.3.12 Una columna *ABC* larga y esbelta está articulada en los extremos *A* y *C*, y comprimida por una fuerza axial *P* (consulte la figura). En el punto medio *B* cuenta con soportes laterales para evitar la flexión en el plano de la figura. La columna es una sección de acero de patín ancho (W 250 × 67) con E = 200 GPa. La distancia entre los soportes laterales es L = 5.5 m.

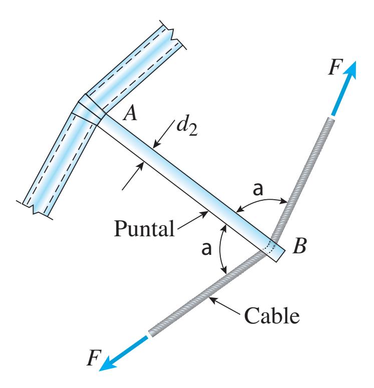
Calcule la carga permisible *P* empleando un factor de seguridad n = 2.4, tomando en cuenta la posibilidad de pandeo de Euler con respecto a cualquiera de los ejes centroidales principales (es decir, el eje 1-1 o el eje 2-2).



PROB. 11.3.12

11.3.13 El techo sobre el recibidor de un aeropuerto está soportado mediante cables pretensados. En un nodo característico en la estructura del techo, un puntal *AB* está comprimido por la acción de fuerzas de tensión *F* en un cable que forma un ángulo α = 75° con el puntal (consulte la figura y la fotografía). El puntal es un tubo circular de acero (E = 30,000 ksi) con diámetro exterior d_2 = 2.5 in y diámetro interior d_1 = 2.0 in. La longitud del puntal es 5.75 ft y se supone que está articulado en sus dos extremos.

Empleando un factor de seguridad n = 2.5 con respecto a la carga crítica, determine la fuerza permisible *F* en el cable.



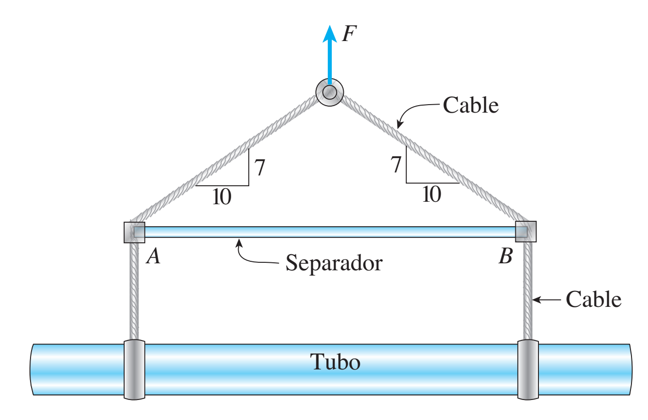
PROB. 11.3.13



Cable y puntal en un nodo característico del techo de un recibidor en un aeropuerto

11.3.14 En la figura se muestra la configuración de izado para levantar un tubo grande. El separador es una sección tubular de acero con diámetro exterior de 70 mm y diámetro interior de 57 mm. Su longitud es 2.6 m y su módulo de elasticidad es 200 GPa.

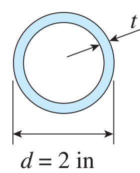
Con base en un factor de seguridad de 2.25 con respecto al pandeo de Euler del separador, ¿cuál es el peso máximo del tubo que se puede izar? (Suponga condiciones articuladas en los extremos del separador.)



PROB. 11.3.14

11.3.15 Un puntal articulado de aluminio (E = 10,400 ksi) con longitud L = 6 ft está construido con un tubo circular que tiene diámetro exterior d = 2 in (consulte la figura). El puntal debe resistir una carga axial P = 4 kips con un factor de seguridad n = 2.0 con respecto a la carga crítica.

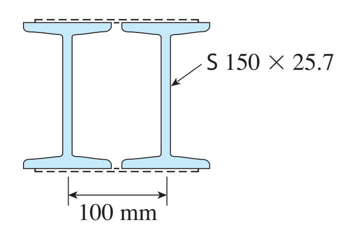
Determine el espesor requerido t del tubo.



PROB. 11.3.15

11.3.16 En la figura se muestra la sección transversal de una columna armada con dos vigas I de acero (secciones S 150 × 25.7). Las vigas están conectadas por barras espaciadoras, o *de enlace*, para garantizar que actúen en conjunto como una sola columna. (El enlace está representado por líneas discontinuas en la figura.)

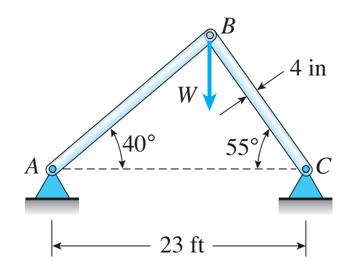
Se supone que la columna tiene extremos articulados y que se puede pandear en cualquier dirección. Suponiendo E = 200 GPa y L = 8.5 m, calcule la carga crítica P_{cr} para la columna.



PROB. 11.3.16

11.3.17 La armadura *ABC* que se muestra en la figura soporta una carga vertical *W* en el nodo *B*. Cada elemento es un tubo de acero, circular y esbelto (E = 30,000 ksi) con diámetro exterior de 4 in y espesor de pared de 0.25 in. La distancia entre soportes es 23 ft. El nodo *B* está restringido contra desplazamiento en sentido perpendicular al plano de la armadura.

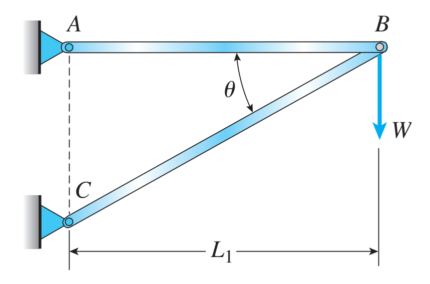
Determine el valor crítico W_{cr} de la carga.



PROB. 11.3.17

***11.3.18** Una armadura *ABC* soporta una carga *W* en el nodo *B*, como se muestra en la figura. La longitud L_1 del elemento *AB* es fija, pero la longitud del puntal *BC* varía al cambiar el ángulo θ. El puntal *BC* tiene una sección transversal circular sólida. El nodo *B* está restringido contra desplazamiento en sentido perpendicular al plano de la armadura.

Si se supone que el colapso ocurre por pandeo de Euler del puntal, determine el ángulo θ para tener peso mínimo del puntal.



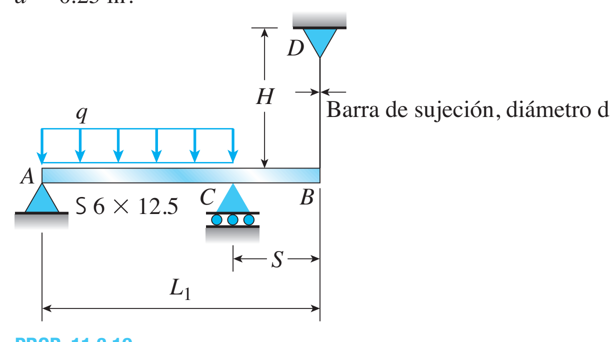
PROB. 11.3.18

11.3.19 Una viga en voladizo *AB* hecha de una sección S 6 × 12.5 está soportada por un cable se sujeción en *B* como se muestra en la figura. La barra de sujeción solo está tensa cuando se agrega un soporte de rodillo en *C* a una distancia *S* a la izquierda de *B*, luego se aplica la carga distribuida *q* al segmento de la viga *AC*. Suponga $E = 30 \times 10^6$ psi y no tome en cuenta los pesos de la viga y de la barra de sujeción. Consulte la tabla E.2(a) en el apéndice *E* para obtener las propiedades de la viga de sección S.

(a) ¿Qué valor de la carga uniforme *q*, si se sobrepasa, resultará en pandeo de la barra de sujeción si L_1 = 6 ft, S = 2 ft, H = 3 ft, d = 0.25 in?

(b) ¿Qué momento de inercia mínimo I_b en la viga se requiere para evitar el pandeo de la barra de sujeción si q = 200 lb/ft, L_1 = 6 ft, H = 3 ft, d = 0.25 in, S = 2 ft?

(c) ¿Para qué distancia *S* la barra de sujeción estará a punto de pandearse si q = 200 lb/ft, L_1 = 6 ft, H = 3 ft, d = 0.25 in?



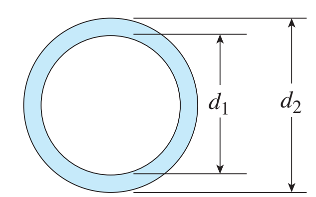
PROB. 11.3.19

Columnas con otras condiciones de soporte

Los problemas de la sección 11.4 se deben resolver empleando las suposiciones de columnas ideales, esbeltas, prismáticas y linealmente elásticas (pandeo de Euler). El pandeo ocurre en el plano de la figura a menos que se indique lo contrario.

11.4.1 Una columna tubular de aluminio (E = 10,400 ksi) con longitud L = 10.0 ft tiene diámetros interior y exterior d_1 = 5.0 in y d_2 = 6.0 in, respectivamente (consulte la figura). La columna está soportada sólo en los extremos y se puede pandear en cualquier dirección.

Calcule la carga crítica P_{cr} para las condiciones de extremo siguientes: (1) articulado-articulado, (2) empotrado-libre, (3) empotrado-articulado y (4) empotrado-empotrado.

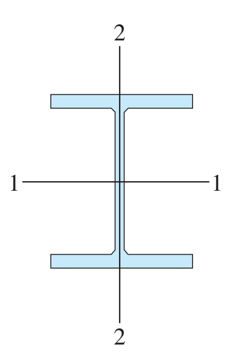


PROBS. 11.4.1 y 11.4.2

11.4.2 Resuelva el problema anterior para un columna tubular de acero (E = 210 GPa) con longitud L = 1.2 m, diámetro interior d_1 = 36 mm y diámetro exterior d_2 = 40 mm.

11.4.3 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) hecha con un perfil W 12 × 87 de patín ancho (consulte la figura) tiene longitud L = 28 ft, está soportada sólo en los extremos y se puede pandear en cualquier dirección.

Calcule la carga permisible P_{perm} con base en la carga crítica con un factor de seguridad n = 2.5. Considere las siguientes condiciones de extremos: (1) articulado-articulado, (2) empotrado-libre, (3) empotrado-articulado y (4) empotrado-empotrado.

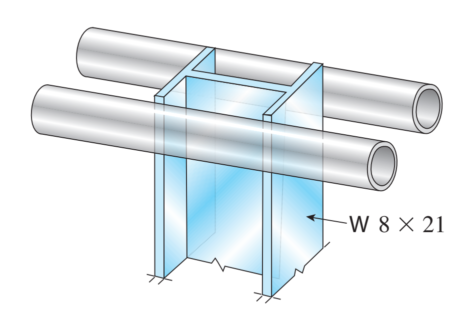


PROBS. 11.4.3 y 11.4.4

11.4.4 Resuelva el problema anterior para un perfil W 250 × 89 con longitud $L = 7.5$ m y $E = 200$ GPa.

11.4.5 El extremo superior de una columna de acero W 8 × 21 de patín ancho ($E = 30 \times 10^3$ ksi) está soportada lateralmente entre dos tubos (consulte la figura). Los tubos no están sujetos a la columna y la fricción entre los tubos y la columna no es confiable. La base de la columna proporciona un soporte fijo y la columna tiene 13 ft de longitud.

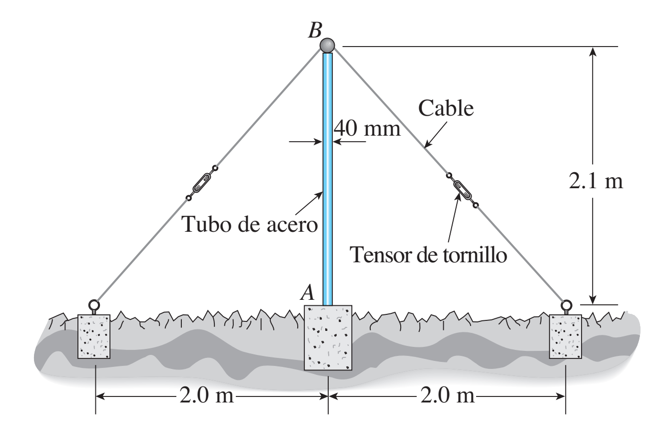
Determine la carga crítica para la columna, considere el pandeo de Euler en el plano del alma y también perpendicular al plano del alma.



PROB. 11.4.5

11.4.6 Un poste vertical *AB* está empotrado en un cimiento de concreto y sostenido en la parte superior por dos cables (consulte la figura). El poste es un tubo hueco de acero con módulo de elasticidad de 200 GPa, diámetro exterior de 40 mm y espesor de 5 mm. Los cables se atirantan igualmente por tensores de tornillo.

Si se desea un factor de seguridad de 3.0 contra el pandeo de Euler en el plano de la figura, ¿cuál es la fuerza de tensión máxima permisible T_{perm} en los cables?

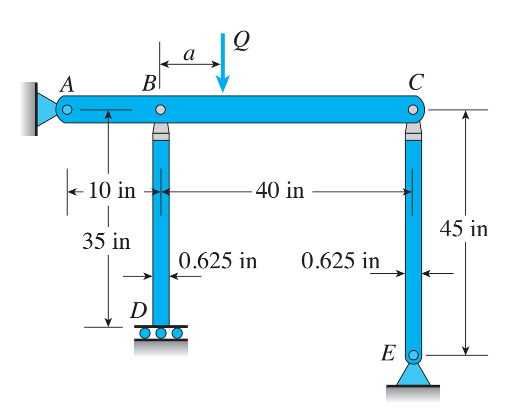


PROB. 11.4.6

11.4.7 La viga horizontal *ABC* que se muestra en la figura está soportada por las columnas *BD* y *CE*. El apoyo articulado en el extremo *A* evita que la viga se mueva en sentido horizontal. Cada columna está articulada en su parte superior con la viga, pero en los extremos inferiores el soporte *D* es un soporte guiado y el soporte *E* está articulado. Las dos columnas son barras sólidas de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) de sección transversal cuadrada con ancho igual a 0.625 in. Una carga *Q* actúa a una distancia *a* de la columna *BD*.

(a) Si la distancia $a = 12$ in, ¿cuál es el valor crítico Q_{cr} de la carga?

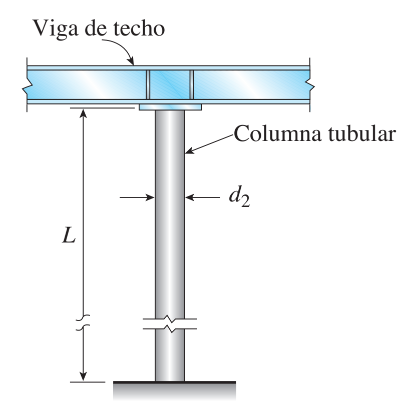
(b) Si la distancia *a* puede variar entre 0 y 40 in, ¿cuál es el valor máximo posible de Q_{cr}? ¿Cuál es el valor correspondiente de la distancia *a*?



PROB. 11.4.7

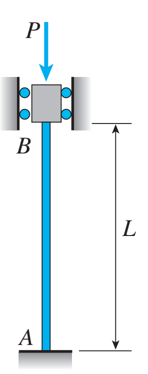
11.4.8 Las vigas del techo de un almacén están soportadas por columnas tubulares (consulte la figura) con diámetro exterior $d_2 = 100$ mm y diámetro interior $d_1 = 90$ mm. Las columnas tienen longitud $L = 4.0$ m, módulo $E = 210$ GPa y soportes empotrados en la base.

Calcule la carga crítica P_{cr} de una de las columnas empleando las suposiciones siguientes: (1) el extremo superior está articulado y la viga evita el desplazamiento horizontal; (2) el extremo superior está fijo contra la rotación y la viga evita el desplazamiento horizontal; (3) el extremo superior está articulado pero la viga se puede mover en sentido horizontal y (4) el extremo superior está fijo contra la rotación pero la viga puede moverse en sentido horizontal.



PROB. 11.4.8

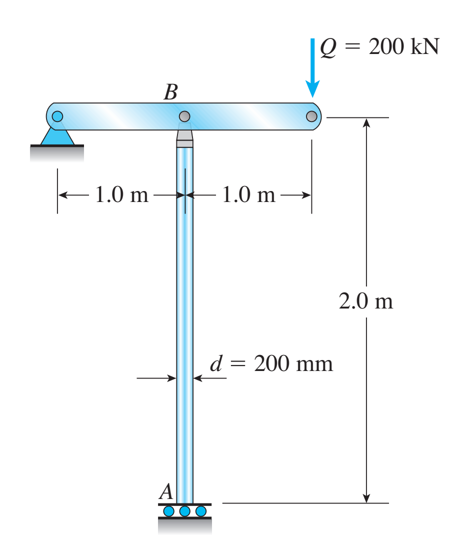
11.4.9 Determine la carga crítica P_{cr} y la ecuación de la forma pandeada para una columna ideal con extremos fijos contra la rotación (consulte la figura) resolviendo la ecuación diferencial de la curva de deflexión. (También consulte la figura 11.17.)



PROB. 11.4.9

11.4.10 Un tubo de aluminio AB con sección transversal circular tiene un soporte guiado en la base y está articulado en la parte superior con una viga horizontal que soporta una carga $Q = 200$ kN (consulte la figura).

Determine el espesor requerido t del tubo si su diámetro exterior d es 200 mm y el factor de seguridad deseado con respecto al pandeo de Euler es $n = 3.0$. (Suponga $E = 72$ GPa.)



PROB. 11.4.10

***11.4.11** El marco ABC consiste de dos elementos AB y BC que están conectados rígidamente en el nodo B, como se muestra en la parte (a) de la figura. El marco tiene soportes articulados en A y C. Una carga concentrada P actúa en el nodo B y de esta manera somete al elemento AB a compresión directa.

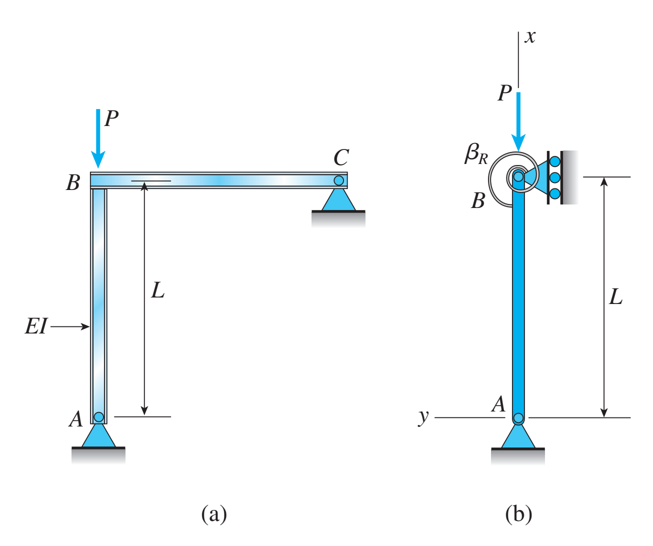
Como ayuda para determinar la carga de pandeo para el elemento AB, lo representamos como una columna articulada en sus extremos, como se muestra en la parte (b) de la figura. En la parte superior de la columna, un resorte rotacional con rigidez β_R representa la acción restrictiva de la viga horizontal BC sobre la columna (observe que la viga horizontal proporciona resistencia a la rotación del nodo B cuando la columna se pandea). Además, considere sólo los efectos de flexión en el análisis (es decir, no tome en cuenta los efectos de las deformaciones axiales).

(a) Al resolver la ecuación diferencial de la curva de deflexión, deduzca la siguiente ecuación de pandeo para esta columna:

$$\frac{\beta_R L}{EI}(kL \cot kL - 1) - k^2L^2 = 0$$

en donde L es la longitud de la columna y EI es su rigidez a la flexión.

(b) Para el caso particular cuando el elemento BC es idéntico al elemento AB, la rigidez a la rotación β_R es igual a $3EI/L$ (consulte el caso 7, en la tabla G.2 del apéndice G). Para este caso especial, determine la carga crítica P_{cr}.



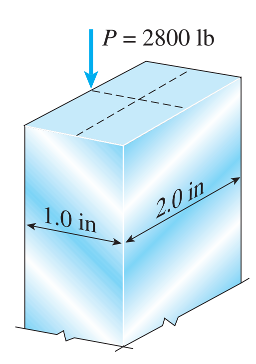
PROB. 11.4.11

Columnas con cargas axiales excéntricas

Al resolver los problemas de la sección 11.5 suponga que la flexión ocurre en el plano principal que contiene la carga axial excéntrica.

11.5.1 Una barra de aluminio con sección transversal rectangular (2.0 in × 1.0 in) y longitud L = 30 in está comprimida por cargas axiales que tienen una resultante P = 2800 lb que actúa en el punto medio del lado largo de la sección transversal (consulte la figura).

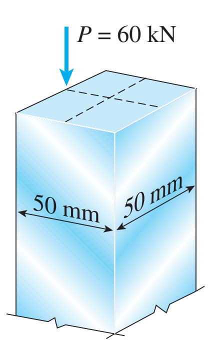
Suponiendo que el módulo de elasticidad E es igual a 10×10^6 psi y que los extremos de la barra están articulados, calcule la deflexión máxima δ y el momento flexionante máximo $M_{máx}$.



PROB. 11.5.1

11.5.2 Una barra de acero con sección transversal cuadrada (50 mm × 50 mm) y longitud L = 2.0 m está comprimida por cargas axiales que tienen una resultante P = 60 kN que actúa en el punto medio de un lado de la sección transversal (consulte la figura).

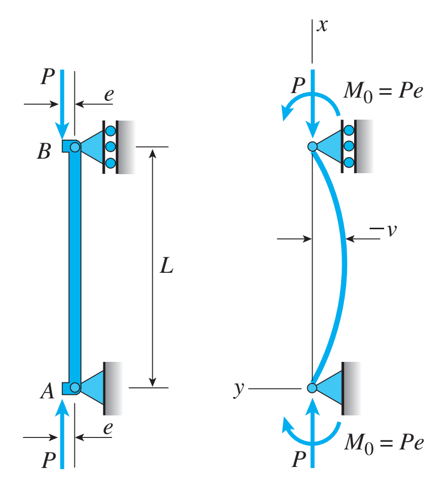
Suponiendo que el módulo de elasticidad E es igual a 210 GPa y que los extremos de la barra están articulados, calcule la deflexión máxima δ y el momento flexionante máximo $M_{máx}$.



PROB. 11.5.2

11.5.3 Determine el momento flexionante M en la columna con extremos articulados sometida a cargas axiales excéntricas que se muestra en la figura. Luego trace el diagrama de momento flexionante para una carga axial $P = 0.3P_{cr}$.

Nota: exprese el momento como una función de la distancia x desde el extremo de la columna y trace el diagrama en forma adimensional con M/Pe como la ordenada y x/L como la abscisa.



PROBS. 11.5.3 a 11.5.5

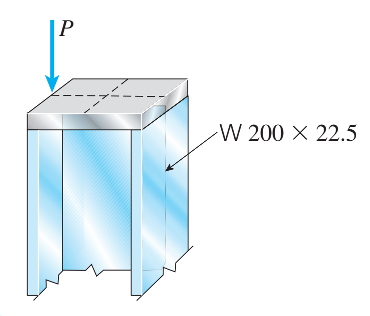
11.5.4 Trace el diagrama de carga-deflexión para una columna con extremos articulados con cargas axiales excéntricas (consulte la figura) si la excentricidad e de la carga es 5 mm y la columna tiene longitud L = 3.6 m, momento de inercia $I = 9.0 \times 10^6$ mm^4 y módulo de elasticidad E = 210 GPa.

Nota: trace la carga axial como la ordenada y la deflexión en el punto medio como la abscisa.

11.5.5 Resuelva el problema anterior para una columna con $e = 0.20$ in, $L = 12$ ft, $I = 21.7$ in^4 y $E = 30 \times 10^6$ psi.

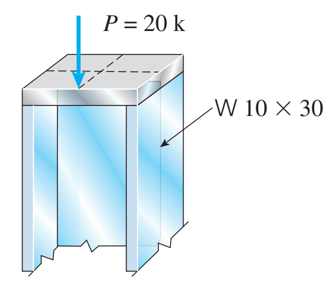
11.5.6 Un elemento de patín ancho (W 200 × 22.5) está comprimido por cargas axiales que tienen una resultante P que actúa en el punto que se muestra en la figura. El elemento tiene módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y condiciones de extremos articulados. Soportes laterales impiden la flexión con respecto al eje débil de la sección transversal.

Si la longitud del elemento es 6.2 m y la deflexión está limitada a 6.5 mm, ¿cuál es la carga máxima permisible P_{perm}?



PROB. 11.5.6

11.5.7 Un elemento de patín ancho (W 10 × 30) está comprimido por cargas axiales que tienen una resultante $P = 20$ k que actúa en el punto que se muestra en la figura. El material es acero con módulo de elasticidad $E = 29{,}000$ ksi. Suponiendo condiciones de extremo articuladas, determine la longitud máxima permisible $L_{\text{máx}}$ si la deflexión no debe sobrepasar 1/400 de la longitud.

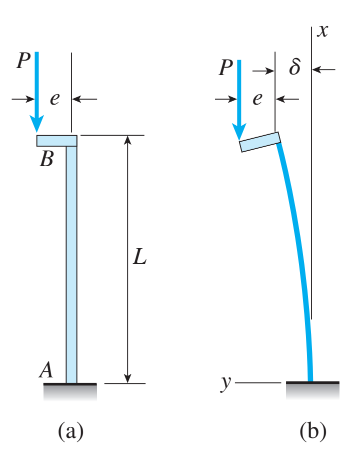


PROBS. 11.5.7 y 11.5.8

11.5.8 Resuelva el problema anterior (W 250 × 44.8) si la fuerza resultante P es igual a 110 kN y $E = 200$ GPa.

11.5.9 La columna que se muestra en la figura está empotrada en la base y libre en la parte superior. Una fuerza P de compresión actúa en la parte superior de la columna con una excentricidad e desde el eje de la columna.

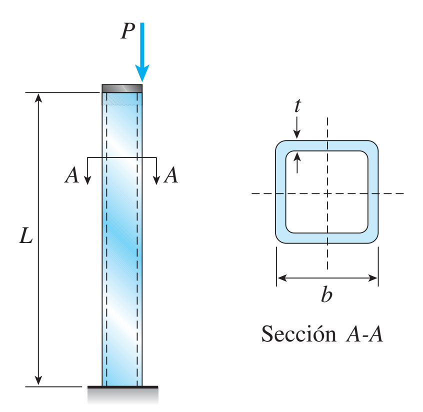
A partir de la ecuación diferencial de la curva de deflexión, deduzca fórmulas para la deflexión máxima δ de la columna y del momento flexionante máximo $M_{\text{máx}}$ en la columna.



PROB. 11.5.9

11.5.10 Una columna de caja de aluminio con sección transversal cuadrada está empotrada en la base y libre en la parte superior (consulte la figura). La dimensión exterior b de cada lado es 100 mm y el espesor t de la pared es 8 mm. La resultante de las cargas de compresión que actúan sobre la parte superior de la columna es una fuerza $P = 50$ kN que actúa en el borde exterior de la columna en el punto medio de un lado,

¿Cuál es la longitud máxima permisible $L_{\text{máx}}$ de la columna si la deflexión en la parte superior no debe sobrepasar 30 mm? (Suponga $E = 73$ GPa).



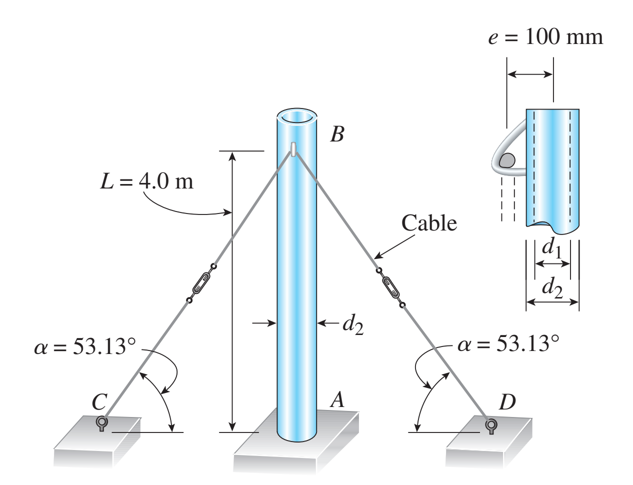
PROBS. 11.5.10 y 11.5.11

11.5.11 Resuelva el problema anterior para una columna de aluminio con $b = 6$ in, $t = 0.5$ in, $P = 30$ k y $E = 10.6 \times 10^3$ ksi. La deflexión en la parte superior está limitada a 2.0 in.

11.5.12 Un poste de acero AB con sección transversal hueca está empotrado en la base y libre en la parte superior (consulte la figura). Los diámetros interior y exterior son $d_1 = 96$ mm y $d_2 = 110$ mm, respectivamente, y la longitud es $L = 4.0$ m.

Un cable CBD pasa por un aditamento soldado a un lado del poste. La distancia entre el plano del cable (plano CBD) y el eje del poste es $e = 100$ mm y los ángulos entre el cable y el suelo son $\alpha = 53.13°$. El cable se pretensa apretando los tensores de tornillo.

Si la deflexión δ en la parte superior del poste está limitada a $\delta = 20$ mm, ¿cuál es la fuerza de tensión máxima permisible T en el cable? (Suponga $E = 205$ GPa.)

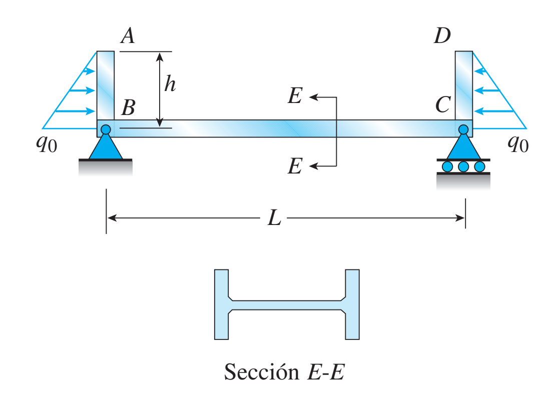


PROB. 11.5.12

11.5.13 La estructura *ABCD* está construida de elementos de acero de patín ancho (W 8 × 21; $E = 30 \times 10^6$ psi) y está sometida a cargas con distribución triangular e intensidad máxima q_0 que actúan a lo largo de los elementos verticales (consulte la figura). La distancia entre los apoyos es $L = 20$ ft y la altura de la estructura es $h = 4$ ft. Los elementos están conectados rígidamente en B y C.

(a) Calcule la intensidad de la carga q_0 requerida para producir un momento flexionante máximo de 80 k-in en el elemento horizontal *BC*.

(b) Si la carga q_0 se reduce a la mitad del valor que se calculó en el inciso a, ¿cuál es el momento flexionante máximo en el elemento *BC*? ¿Cuál es la razón entre este momento y el momento de 80 k-in en el inciso a?



PROB. 11.5.13

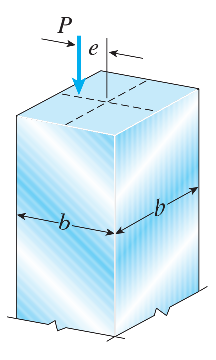
Fórmula de la secante

Al resolver los problemas de la sección 11.6, suponga que la flexión ocurre en el plano principal que contiene la carga axial excéntrica.

11.6.1 Una barra de acero tiene sección transversal cuadrada con ancho $b = 2.0$ in (consulte la figura). La barra tiene apoyos articulados en los extremos y su longitud es de 3.0 ft. Las fuerzas axiales que actúan en el extremo de la barra tienen una resultante $P = 20$ k ubicada a la distancia $e = 0.75$ in del centro de la sección transversal. Además, el módulo de elasticidad del acero es 29,000 ksi.

(a) Determine el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{máx}$ en la barra.

(b) Si el esfuerzo permisible en el acero es 18,000 psi, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la barra?



PROBS. 11.6.1 a 11.6.3

11.6.2 Una barra de latón ($E = 100$ GPa) con sección transversal cuadrada está sometida a fuerzas axiales que tienen una resultante P que actúa a la distancia e del centro (consulte la figura). La barra está soportada por pasadores en los extremos y tiene una longitud de 0.6 m. La dimensión lateral b de la barra es 30 mm y la excentricidad e de la carga es 10 mm.

Si el esfuerzo permisible en el latón es 150 MPa, ¿cuál es la fuerza axial permisible P_{perm}?

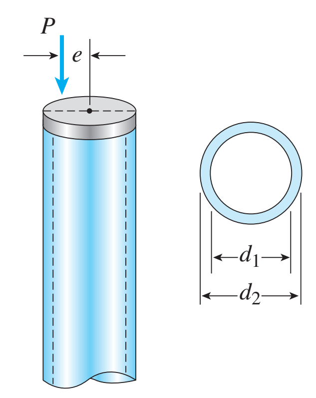
11.6.3 Una barra cuadrada de aluminio con extremos articulados soporta una carga $P = 25$ k que actúa a la distancia $e = 2.0$ in del centro (consulte la figura). La barra tiene longitud $L = 54$ in y módulo de elasticidad $E = 10{,}600$ ksi.

Si el esfuerzo en la barra no debe sobrepasar 6 ksi, ¿cuál es el ancho mínimo permisible $b_{mín}$ de la barra?

11.6.4 Una columna articulada en sus extremos con longitud $L = 2.1$ m está construida con un tubo de acero ($E = 210$ GPa) que tiene diámetro interior $d_1 = 60$ mm y diámetro exterior $d_2 = 68$ mm (consulte la figura). Una fuerza de compresión $P = 10$ kN actúa con excentricidad $e = 30$ mm.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{máx}$ en la columna?

(b) Si el esfuerzo permisible en el acero es 50 MPa, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna?



PROBS. 11.6.4 a 11.6.6

11.6.5 Un puntal articulado en sus extremos con longitud $L = 5.2$ ft está construido con un tubo de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) que tiene un diámetro interior $d_1 = 2.0$ in y diámetro exterior $d_2 = 2.2$ in (consulte la figura). Una carga de compresión $P = 2.0$ k se aplica con excentricidad $e = 1.0$ in.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{máx}$ en el puntal?

(b) ¿Cuál es la carga permisible $P_{máx}$ si se requiere un factor de seguridad $n = 2$ con respecto a la fluencia? (Suponga que el esfuerzo de fluencia σ_Y del acero es 42 ksi.)

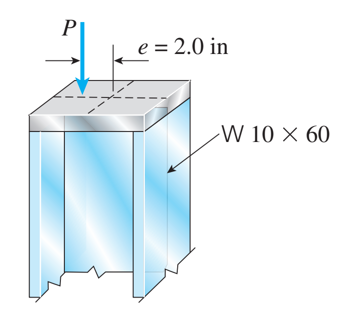
11.6.6 Un tubo circular de aluminio con extremos articulados soporta una carga $P = 18$ kN que actúa a la distancia $e = 50$ mm del centro (consulte la figura). La longitud del tubo es 3.5 m y su módulo de elasticidad es 73 GPa.

Si el esfuerzo máximo permisible en el tubo es 20 MPa, ¿cuál es el diámetro exterior requerido d_2 si la razón de los diámetros debe ser $d_1/d_2 = 0.9$?

11.6.7 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) con extremos articulados está construida con un perfil W 10 × 60 de patín ancho (consulte la figura). La longitud de la columna es 24 ft. La resultante de las cargas axiales que actúan sobre la columna es una fuerza P que actúa con una excentricidad $e = 2.0$ in.

(a) Si $P = 120$ k, determine el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{máx}$ en la columna.

(b) Determine la carga permisible P_{perm} si el esfuerzo de fluencia es $\sigma_Y = 42$ ksi y el factor de seguridad con respecto a la fluencia del material es $n = 2.5$.

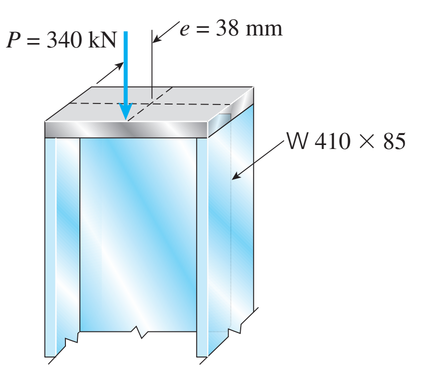


PROB. 11.6.7

11.6.8 Una columna de acero W 410 × 85 se comprime por una fuerza $P = 340$ kN que actúa con una excentricidad $e = 38$ mm, como se muestra en la figura. La columna tiene extremos articulados y longitud L. además, el acero tiene módulo de elasticidad $E = 200$ GPa y esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 250$ MPa.

(a) Si la longitud $L = 3$ m, ¿cuál es el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{máx}$ en la columna?

(b) Si se requiere un factor de seguridad $n = 2.0$ con respecto a la fluencia, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna?

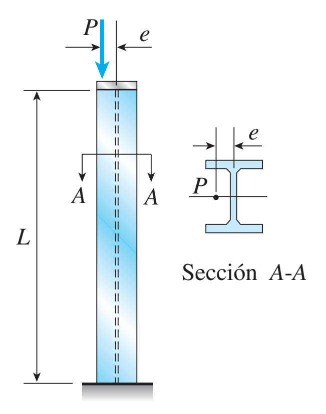


PROB. 11.6.8

11.6.9 Una columna de acero ($E = 30 \times 10^3$ ksi) que está empotrada en la base y libre en la parte superior está construida con un perfil W 8 × 35 de patín ancho (consulte la figura). La columna tiene longitud de 9.0 ft. La fuerza P que actúa en la parte superior de la columna tiene una excentricidad $e = 1.25$ in.

(a) Si $P = 40$ k, ¿cuál es el esfuerzo de compresión máximo en la columna?

(b) Si el esfuerzo de fluencia es 36 ksi y el factor de seguridad requerido con respecto a la fluencia es 2.1, ¿cuál es la carga permisible P_{perm}?



PROBS. 11.6.9 y 11.6.10

11.6.10 Una columna de acero W 310 × 74 de patín ancho con longitud $L = 3.8$ m está empotrada en la base y libre en la parte superior (consulte la figura). La carga P que actúa sobre la columna tiene que aplicarse en el centro, pero debido a discrepancias inevitables en su construcción, se especifica una razón de excentricidad de 0.25. Además, se proporcionan los datos siguientes: $E = 200$ GPa, $\sigma_Y = 290$ MPa y $P = 310$ kN.

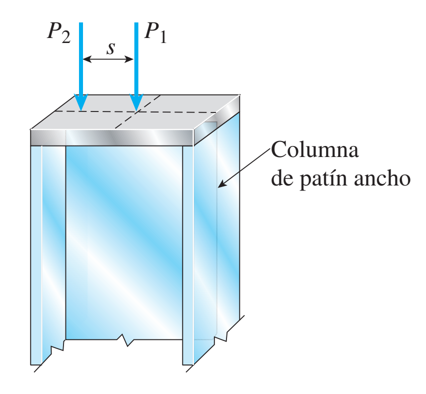
(a) ¿Cuál es el esfuerzo de compresión máximo $\sigma_{máx}$ en la columna?

(b) ¿Cuál es el factor de seguridad n con respecto la fluencia del acero?

11.6.11 Una columna con extremos articulados y longitud $L = 18$ ft está construida con un perfil W 12 × 87 de patín ancho (consulte la figura). La columna está sometida a una carga aplicada en el centro $P_1 = 180$ k y a una carga aplicada excéntricamente $P_2 = 75$ k. La carga P_2 actúa a la distancia $s = 5.0$ in del centroide de la sección transversal. Las propiedades del acero son $E = 29{,}000$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi.

(a) Calcule el esfuerzo de compresión máximo en la columna.

(b) Determine el factor de seguridad con respecto a la fluencia.



PROBS. 11.6.11 y 11.6.12

11.6.12 La columna de patín ancho con extremos articulados que se muestra en la figura soporta dos cargas, una fuerza $P_1 = 450$ kN que actúa en el centroide y una fuerza $P_2 = 270$ kN que actúa a una distancia $s = 100$ mm del centroide. La columna es un perfil W 250 × 67 con $L = 4.2$ m, $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 290$ MPa.

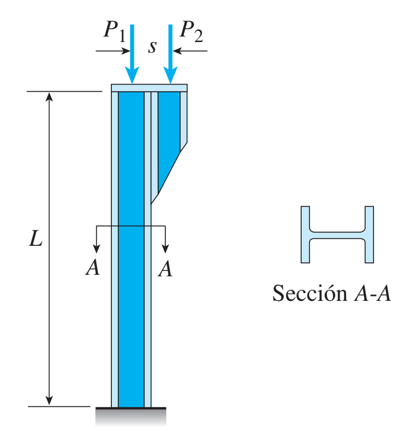
(a) ¿Cuál es el esfuerzo de compresión máximo en la columna?

(b) Si la carga P_1 permanece en 450 kN, ¿cuál es el valor máximo permisible de la carga P_2 a fin de mantener un factor de seguridad de 2.0 con respecto a la fluencia?

11.6.13 Una columna construida con un perfil W 14 × 53 de patín ancho con longitud $L = 15$ ft está empotrada en la base y libre en la parte superior (consulte la figura). La columna soporta una cargada en el centro $P_1 = 120$ k y una carga $P_2 = 40$ k soportada por una ménsula. La distancia desde el centroide de la columna hasta la carga P_2 es $s = 12$ in. Además, el módulo de elasticidad es $E = 29{,}000$ ksi y el esfuerzo de fluencia es $\sigma_Y = 36$ ksi.

(a) Calcule el esfuerzo de compresión máximo en la columna.

(b) Determine el factor de seguridad con respecto a la fluencia.



PROBS. 11.6.13 y 11.6.14

11.6.14 Una columna de patín ancho con una ménsula está empotrada en la base y libre en la parte superior (consulte la figura). La columna soporta una carga $P_1 = 340$ kN que actúa en el centroide y una carga $P_2 = 110$ kN que actúa sobre la ménsula a una distancia $s = 250$ mm de la carga P_1. La columna es un perfil W 310 × 52 con $L = 5$ m, $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 290$ MPa.

(a) ¿Cuál es el esfuerzo de compresión máximo en la columna?

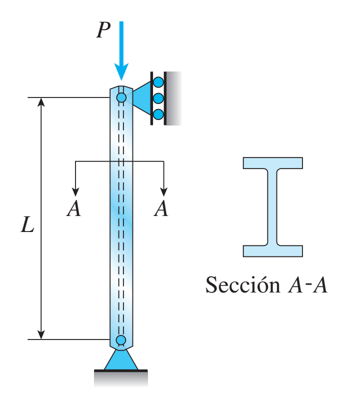
(b) Si la carga P_1 permanece en 340 kN, ¿cuál es el valor máximo permisible de la carga P_2 a fin de mantener un factor de seguridad de 1.8 con respecto a la fluencia?

Fórmulas para diseño de columnas

Los problemas de la sección 11.9 se deben resolver suponiendo que las cargas axiales se aplican en el centro en los extremos de las columnas. A menos que se indique lo contrario, las columnas se pandean en cualquier dirección.

Columnas de acero

11.9.1 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una columna de acero W 10 × 45 de patín ancho con extremos articulados (consulte la figura) para cada una de las longitudes siguientes: L = 8 ft, 16 ft, 24 ft y 32 ft. (Suponga E = 29,000 ksi y σ_Y = 36 ksi.)



PROBS. 11.9.1 a 11.9.6

11.9.2 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una columna de acero W 310 × 129 de patín ancho con extremos articulados (consulte la figura) para cada una de las longitudes siguientes: L = 3 m, 6 m, 9 m y 12 m. (Suponga E = 200 GPa y σ_Y = 340 MPa.)

11.9.3 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una columna de acero W 10 × 60 de patín ancho con extremos articulados (consulte la figura) para cada una de las longitudes siguientes: L = 10 ft, 20 ft, 30 ft y 40 ft. (Suponga E = 29 000 ksi y σ_Y = 36 ksi.)

11.9.4 Seleccione una columna de acero de patín ancho con altura nominal de 250 mm (perfil W 250) para soportar una carga axial P = 800 kN (consulte la figura). La columna tiene extremos articulados y longitud L = 4.25 m. Suponga E = 200 GPa y σ_Y = 250 MPa. (*Nota:* la selección de columnas está limitada a la que se presentan en la tabla E.1(b) del apéndice E.)

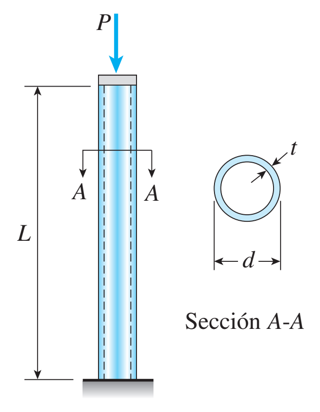
11.9.5 Seleccione una columna de acero de patín ancho con altura nominal de 12 in (perfil W 12) para soportar una carga axial P = 175 k (consulte la figura). La columna tiene extremos articulados y longitud L = 35 ft. Suponga E = 29,000 ksi y σ_Y = 36 ksi. (*Nota:* la selección de columnas está limitada a las que se presentan en la tabla E.1 del apéndice E.)

11.9.6 Seleccione una columna de acero de patín ancho con altura nominal de 360 mm (perfil W 360) para soportar una carga axial P = 1100 kN (consulte la figura). La columna tiene extremos articulados y longitud L = 6 m. Suponga E = 200 GPa y σ_Y = 340 MPa. (*Nota:* la selección de columnas está limitada a las presentadas en la tabla E.1(b) del apéndice E.)

11.9.7 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una *columna tubular con extremos articulados* que tiene diámetro exterior de 4.5 in y espesor de pared de 0.237 in para cada una de las longitudes siguientes: L = 6 ft, 12 ft, 18 ft y 24 ft. (Suponga E = 29,000 ksi y σ_Y = 36 ksi.)

11.9.8 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una *columna tubular de acero con extremos articulados* que tiene diámetro exterior de 220 mm y espesor de pared de 12 mm para cada una de las longitudes siguientes: L = 2.5 m, 5 m, 7.5 m y 10 m. (Suponga E = 200 GPa y σ_Y = 250 MPa.)

11.9.9 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una columna tubular que está empotrada en la base y libre en la parte superior (consulte la figura) para cada una de las longitudes siguientes: L = 6 ft, 9 ft, 12 ft y 15 ft. La columna tiene diámetro exterior d = 6.625 in y espesor de pared t = 0.280 in. (Suponga E = 29,000 ksi y σ_Y = 36 ksi.)



PROBS. 11.9.9 a 11.9.12

11.9.10 Determine la carga axial permisible P_{perm} para una columna tubular de acero que está empotrada en la base y libre en la parte superior (consulte la figura) para cada una de las siguientes longitudes: L = 2.6 m, 2.8 m, 3.0 m y 3.2 m. La columna tiene diámetro exterior d = 140 mm y espesor de pared t = 7 mm. (Suponga E = 200 GPa y σ_Y = 250 MPa.)

11.9.11 Determine la longitud máxima permisible $L_{máx}$ para una columna tubular que está empotrada en la base y libre en

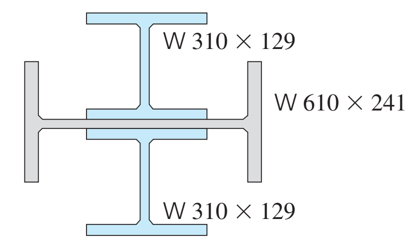
la parte superior y debe soportar una carga axial $P = 40$ k (consulte la figura). La columna tiene diámetro exterior $d = 4.0$ in, espesor de pared $t = 0.226$ in, $E = 20{,}000$ ksi y $\sigma_Y = 42$ ksi.

11.9.12 Determine la longitud máxima permisible $L_{máx}$ para una columna tubular de acero que está empotrada en la base y libre en la parte superior y debe soportar una carga axial $P = 500$ kN (consulte la figura). La columna tiene diámetro exterior $d = 200$ mm, espesor de pared $t = 10$ mm, $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

11.9.13 Una columna tubular de acero con *extremos articulados* soporta una carga axial $P = 21$ k. El tubo tiene diámetros exterior e interior de 3.5 in y 2.9 in, respectivamente. ¿Cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna si $E = 29{,}000$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi?

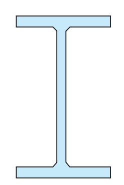
11.9.14 Las columnas de acero empleadas en un centro recreativo universitario tienen longitud de 16.75 m y se arman soldando tres secciones de patín ancho (consulte la figura). Las columnas están articuladas en sus extremos y pueden pandearse en cualquier dirección.

Calcule la carga permisible P_{perm} para una columna, suponiendo $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.



PROBS. 11.9.14

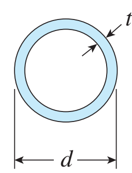
11.9.15 Una columna de acero W 8 × 28 de patín ancho con extremos articulados soporta una carga axial P. ¿Cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna si (a) $P = 50$ k y (b) $P = 100$ k? (Suponga $E = 29{,}000$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi.)



PROBS. 11.9.15 y 11.9.16

11.9.16 Una columna de acero W 250 × 67 de patín ancho con extremos articulados soporta una carga axial P. ¿Cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna si (a) $P = 560$ kN y (b) $P = 890$ kN? (Suponga $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 290$ MPa.)

11.9.17 Determine el diámetro d exterior requerido para una columna tubular de acero (consulte la figura) con longitud $L = 20$ ft que está articulada en los dos extremos y debe soportar una carga $P = 25$ K. Suponga que el espesor de pared t es igual a $d/20$. (Utilice $E = 29{,}000$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi.)



PROBS. 11.9.17 a 11.9.20

11.9.18 Determine el diámetro d exterior requerido para una columna tubular de acero (consulte la figura) con longitud $L = 3.5$ m que está articulada en los dos extremos y debe soportar una carga axial $P = 130$ kN. Suponga que el espesor de pared t es igual a $d/20$. (Utilice $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 275$ MPa).

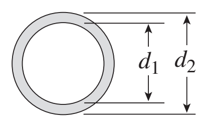
11.9.19 Determine el diámetro d exterior requerido para una columna tubular de acero (consulte la figura) con longitud $L = 11.5$ ft que está articulada en los dos extremos y debe soportar una carga axial $P = 80$ k. Suponga que el espesor de pared t es 0.30 in. (Utilice $E = 29{,}000$ ksi y $\sigma_Y = 42$ ksi.)

11.9.20 Determine el diámetro d exterior requerido para una columna tubular de acero (consulte la figura) con longitud $L = 3.0$ m que está articulada en los dos extremos y debe soportar una carga axial $P = 800$ kN. Suponga que el espesor de pared t es 9 mm. (Utilice $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa.)

Columnas de aluminio

11.9.21 Una columna tubular de aluminio (aleación 2014-T6) con extremos articulados tiene diámetro exterior $d_2 = 5.60$ in y diámetro interior $d_1 = 4.80$ in (consulte la figura).

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las longitudes siguientes: $L = 6$ ft, 8 ft, 10 ft y 12 ft.



PROBS. 11.9.21 a 11.9.24

11.9.22 Una columna tubular de aluminio (aleación 2014-T6) con extremos articulados tiene diámetro exterior $d_2 = 120$ mm y diámetro interior $d_1 = 110$ mm (consulte la figura).

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las longitudes siguientes: $L = 1.0$ m, 2.0 m, 3.0 m y 4.0 m.

(*Sugerencia:* convierta los datos dados en unidades inglesas, determine las cantidades requeridas y luego convierta de nuevo en unidades SI.)

11.9.23 Una columna tubular de aluminio (aleación 6061-T6) que está empotrada en la base y libre en la parte superior tiene diámetro exterior $d_2 = 3.25$ in y diámetro interior $d_1 = 3.00$ in (consulte la figura).

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las siguientes longitudes: $L = 2$ ft, 3 ft, 4 ft y 5 ft.

11.9.24 Una columna tubular de aluminio (aleación 6061-T6) que está empotrada en la base y libre en la parte superior tiene diámetro exterior $d_2 = 80$ mm y diámetro interior $d_1 = 72$ mm (consulte la figura).

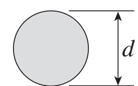
Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las siguientes longitudes: $L = 0.6$ m, 0.8 m, 1.0 m y 1.2 m.

(*Sugerencia:* convierta los datos dados en unidades inglesas, determine las cantidades requeridas y luego convierta de nuevo en a unidades SI.)

11.9.25 Una barra redonda circular de aluminio con diámetro d (consulte la figura) está comprimida por una fuerza axial $P = 60$ k. La barra tiene soportes articulados y está hecha de una aleación 2014-T6.

(a) Si el diámetro $d = 2.0$ in, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la barra?

(b) Si la longitud $L = 30$ in, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido $d_{mín}$?



PROBS. 11.9.25 a 11.9.28

11.9.26 Una barra redonda sólida de aluminio con diámetro d (consulte la figura) está comprimida por una fuerza axial $P = 175$ kN. La barra tiene soportes articulados y está hecha de una aleación 2014-T6.

(a) Si el diámetro $d = 40$ mm, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la barra?

(b) Si la longitud $L = 0.6$ m, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido $d_{mín}$?

(*Sugerencia:* convierta los datos dados en unidades inglesas, determine las cantidades requeridas y luego convierta de nuevo en unidades SI.)

11.9.27 Una barra redonda sólida de aluminio con diámetro d (consulte la figura) está comprimida por una fuerza axial $P = 10$ k. La barra tiene soportes articulados y está hecha de una aleación 6061-T6.

(a) Si el diámetro $d = 1.0$ in, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la barra?

(b) Si la longitud $L = 20$ in, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido $d_{mín}$?

11.9.28 Una barra redonda sólida de aluminio con diámetro d (consulte la figura) está comprimida por una fuerza axial $P = 60$ kN. La barra tiene soportes articulados y está hecha de una aleación 6061-T6.

(a) Si el diámetro $d = 30$ mm, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la barra?

(b) Si la longitud $L = 0.6$ m, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido $d_{mín}$?

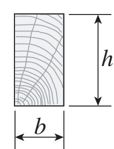
(*Sugerencia:* convierta los datos dados en unidades inglesas, determine las cantidades requeridas y luego convierta de nuevo en a unidades SI.)

Columnas de madera

Al resolver los problemas para columnas de madera, suponga que están hechas de madera aserrada ($c = 0.8$ y $K_{cE} = 0.3$) y que tienen extremos articulados. Además, el pandeo puede ocurrir con respecto a cualquier eje principal de la sección transversal).

11.9.29 Un poste de madera con sección transversal rectangular (consulte la figura) está construido de madera de abeto Douglas de grado estructural con sección transversal de 4 in × 6 in ($F_c = 2000$ psi, $E = 1{,}800{,}000$ psi). Las dimensiones netas de la sección transversal del poste son $b = 3.5$ in y $h = 5.5$ in (consulte el apéndice F).

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las longitudes siguientes: $L = 5.0$ ft, 7.5 ft y 10.0 ft.



PROBS. 11.9.29 a 11.9.32

11.9.30 Un poste de madera con sección transversal rectangular (consulte la figura) está construido de madera de pino del sur de grado estructural ($F_c = 14$ MPa, $E = 12$ GPa). Las dimensiones de la sección transversal del poste (dimensiones reales) son $b = 100$ mm y $h = 150$ mm.

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las siguientes longitudes: $L = 1.5$ m, 2.0 m y 2.5 m.

11.9.31 Una columna de madera con sección transversal rectangular de 4 in × 8 in (consulte la figura) está construida con madera de pinabete de grado estructural ($F_c = 1000$ psi, $E = 1{,}300{,}000$ psi).

Las dimensiones netas de la sección transversal de la columna son $b = 3.5$ in y $h = 7.25$ in (consulte el apéndice F).

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las longitudes siguientes: $L = 6$ ft, 8 ft y 10 ft.

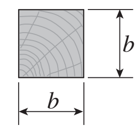
11.9.32 Una columna de madera con sección transversal rectangular (consulte la figura) está construida con abeto Douglas de grado estructural (F_c = 12 MPa, E = 10 GPa). Las dimensiones de la sección transversal de la columna (dimensiones reales) son b = 140 mm y h = 210 mm).

Determine la carga axial permisible P_{perm} para cada una de las siguientes longitudes: L = 2.5 m, 3.5 m y 4.5 m.

11.9.33 Una columna cuadrada de madera con dimensiones laterales b (consulte la figura) está construida de madera de abeto Douglas de grado estructural para la cual F_c = 1700 psi y E = 1,400,000 psi. Una fuerza axial P = 40 k actúa sobre la columna.

(a) Si la dimensión b = 5.5 in, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna?

(b) Si la longitud L = 11 ft, ¿cuál es la dimensión mínima requerida $b_{mín}$?



PROBS. 11.9.33 a 11.9.36

11.9.34 Una columna cuadrada de madera con dimensiones b (consulte la figura) está construida de pino del sur de grado estructural para el cual F_c = 10.5 MPa y E = 12 GPa. Una fuerza axial P = 200 kN actúa sobre la columna.

(a) Si la dimensión b = 150 mm, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna?

(b) Si la longitud L = 4.0 m, ¿cuál es la dimensión mínima requerida $b_{mín}$?

11.9.35 Una columna cuadrada de madera con dimensiones laterales b (consulte la figura) está construida de picea de grado estructural para la cual F_c = 900 psi y E = 1,500,000 psi. Una fuerza axial P = 8.0 k actúa sobre la columna.

(a) Si la dimensión b = 3.5 in, ¿cuál es la longitud máxima permisible $L_{máx}$ de la columna?

(b) Si la longitud L = 10 ft, ¿cuál es la dimensión mínimo requerida $b_{mín}$?

11.9.36 Una columna cuadrada de madera con dimensiones laterales b (consulte la figura) está construida de pino blanco del este de grado estructural para el cual F_c = 8.0 MPa y E = 8.5 GPa. Una fuerza axial P = 100 kN actúa sobre la columna.

(a) Si la dimensión b = 120 mm, ¿cuál es la longitud máxima requerida $L_{máx}$ de la columna?

(b) Si la longitud L = 4.0 m, ¿cuál es la dimensión mínima requerida $b_{mín}$?



Los elementos de acero se producen en una gran variedad de formas; para su análisis y diseño es necesario conocer las propiedades de su sección transversal.

12

Repaso de centroides y momentos de inercia

ASPECTOS GENERALES DEL CAPÍTULO

Entre los temas que se analizan en el capítulo 12 se incluyen los centroides y cómo localizarlos (secciones 12.2 y 12.3), los momentos de inercia (sección 12.4), el teorema de los ejes paralelos (sección 12.5), los momentos polares de inercia (sección 12.6), los productos de inercia (sección 12.7), la rotación de ejes (sección 12.8) y los ejes principales (sección 12.9). Sólo se consideraron áreas planas. En este capítulo se incluyen muchos ejemplos así como problemas al final del mismo para su repaso.

En el apéndice D se proporciona una tabla de centroides y momentos de inercia de una variedad de formas geométricas comunes para contar con una referencia conveniente.

El capítulo 12 está organizado como sigue:

12.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo es un repaso de las definiciones y fórmulas relativas a los centroides y momentos de inercia de las áreas planas. La palabra “repaso” es apropiada debido a que estos temas por lo general se estudian en cursos anteriores, como en matemáticas y estática para ingenieros y, por tanto, la mayoría de los lectores ya habrán tenido contacto con el material. Sin embargo, como los centroides y los momentos de inercia se usan de manera continua en todos los capítulos anteriores, el lector los debe comprender con claridad, además, las definiciones y fórmulas esenciales deben resultarle accesibles.

La terminología empleada en este y en capítulos anteriores puede parecer confusa para algunos lectores. Por ejemplo, el término “momento de inercia” es obvio que es un nombre equivocado cuando se refiere a propiedades de un área, ya que no se implica la masa. Incluso la palabra “área” se utiliza de manera inapropiada. Cuando decimos “área plana”, en realidad queremos decir “superficie plana”. Al hablar en sentido estricto, área es una medida del *tamaño* de una superficie y no es lo mismo que la propia superficie. A pesar de sus deficiencias, la terminología empleada en este libro está tan arraigada en la bibliografía de ingeniería que raras veces causa confusión.

12.2 CENTROIDES DE ÁREAS PLANAS

La posición del centroide de un área plana es una propiedad geométrica importante. Para obtener las fórmulas para localizar los centroides nos referiremos a la figura 12.1, que muestra un área plana de forma irregular con su centroide en el punto C. El sistema coordenado xy está orientado de manera arbitraria con su origen en cualquier punto O. El **área** de la figura geométrica está definida por la siguiente integral:

$$A = \int dA \qquad (12.1)$$

en donde dA es un elemento diferencial de área con coordenadas x y y (figura 12.1) y A es el área total de la figura.

Los **momentos estáticos** del área con respecto a los ejes x y y se definen, respectivamente, como sigue:

$$Q_x = \int y\, dA \qquad Q_y = \int x\, dA \qquad (12.2a,b)$$

Entonces, los momentos estáticos representan las sumas de los productos de las áreas diferenciales y sus coordenadas. Los momentos estáticos pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la posición de los ejes xy. Además, los momentos estáticos tienen unidades de longitud elevada a la tercera potencia; por ejemplo, in^3 o mm^3.

Las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del **centroide** C (figura 12.1) son iguales a los momentos estáticos divididos entre el área:

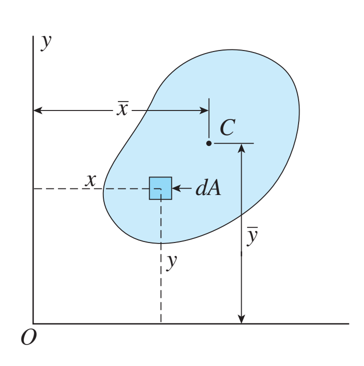


FIGURA 12.1 Área plana de forma arbitraria con centroide C.

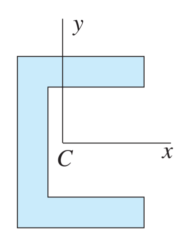


FIGURA 12.2 Área con un eje de simetría.

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} \tag{12.3a,b}$$

Si las fronteras del área están definidas por expresiones matemáticas simples, podemos evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (12.3a) y (12.3b) en forma cerrada y de allí obtener fórmulas para $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Las fórmulas que aparecen en el apéndice D se obtuvieron de esta manera. En general, las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ pueden ser positivas o negativas, dependiendo de la posición del centroide con respecto a los ejes de referencia.

Si un área es **simétrica con respecto a un eje,** el centroide debe encontrarse sobre dicho eje debido a que el momento estático con respecto a un eje de simetría es igual a cero. Por ejemplo, el centroide del área simétrica simple que se muestra en la figura 12.2 debe estar sobre el eje *x*, que es el eje de simetría. Por tanto, para localizar el centroide *C* sólo se debe calcular una coordenada.

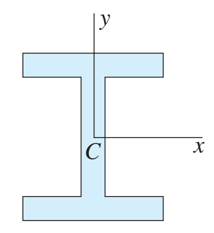


FIGURA 12.3 Área con dos ejes de simetría.

Si un área tiene **dos ejes de simetría**, como se ilustra en la figura 12.3, la posición del centroide se puede determinar por inspección debido a que se encuentra en la intersección de los ejes de simetría.

Un área del tipo mostrado en la figura 12.4 es **simétrica con respecto a un punto.** No tiene ejes de simetría, pero existe un punto (denominado **centro de simetría**) de manera que cada línea trazada por ese punto hace contacto con el área de una manera simétrica. El centroide de esa área coincide con el centro de simetría y, por tanto, el centroide se puede localizar por inspección.

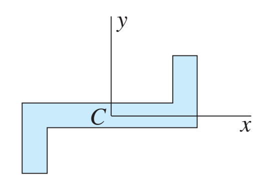


FIGURA 12.4 Área simétrica con respecto a un punto.

Si un área tiene **fronteras irregulares** no definidas mediante expresiones matemáticas simples, podemos ubicar el centroide al evaluar de manera numérica las integrales en las ecuaciones (12.3a) y (12.3b). El procedimiento más simple es dividir la figura geométrica en elementos finitos pequeños y reemplazar las integraciones con sumatorias. Si denotamos el área de elemento *i*ésimo con ΔA_i entonces las expresiones para las sumatorias son

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad Q_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \Delta A_i \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \Delta A_i \tag{12.4a,b,c}$$

en donde *n* es el número total de elementos, $\bar{y}_i$ es la coordenada *y* del centroide del elemento *i*ésimo y $\bar{x}_i$ es la coordenada *x* del centroide del elemento *i*ésimo. Al reemplazar las integrales en las ecuaciones (12.3a) y (12.3b) con las sumatorias correspondientes, obtenemos las siguientes fórmulas para las coordenadas del centroide:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \,\Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \,\Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i} \tag{12.5a,b}$$



El centroide de perfiles de acero de patín ancho se encuentra en la intersección de los ejes de simetría

La exactitud de los cálculos para $\bar{x}$ y $\bar{y}$ depende de la precisión con que se ajusten los elementos seleccionados al área real. Si se ajustan bien, los resultados son exactos. Muchos programas de cómputo para localizar centroides utilizan un esquema numérico similar al expresado por las ecuaciones (12.5a) y (12.5b).

Ejemplo 12.1

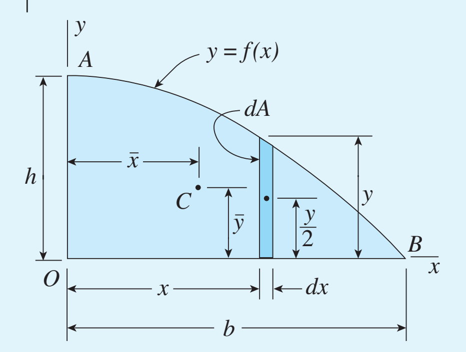


FIGURA 12.5 Ejemplo 12.1. Centroide de un semisegmento parabólico.

Un semisegmento parabólico *OAB* está limitado por el eje *x*, el eje *y* y una curva parabólica que tiene su vértice en *A* (figura 12.5). La ecuación de la curva es

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \tag{a}$$

en donde *b* es la base y *h* es la altura del semisegmento.

Localice el centroide *C* del semisegmento.

Solución

Para determinar las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide *C* (figura 12.5), utilizaremos las ecuaciones (12.3a) y (12.3b). Iniciamos seleccionando un elemento de área *dA* en la forma de una franja vertical delgada con ancho *dx* y altura *y*. El área de este elemento diferencial es

$$dA = y\,dx = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx \tag{b}$$

Por tanto, el área del semisegmento parabólico es

$$A = \int dA = \int_0^b h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx = \frac{2bh}{3} \tag{c}$$

Observe que esta área es 2/3 del área del rectángulo que la rodea.

El momento estático de un elemento de área *dA* con respecto a un eje se obtiene multiplicando el área del elemento por la distancia desde su centroide hasta el eje. Como las coordenadas *x* y *y* del centroide del elemento que se muestra en la figura 12.5 son *x* y *y*/2, respectivamente, los momentos estáticos del elemento con respecto a los ejes *x* y *y* son

$$Q_x = \int \frac{y}{2}\,dA = \int_0^b \frac{h^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^2 dx = \frac{4bh^2}{15} \tag{d}$$

$$Q_y = \int x\,dA = \int_0^b hx\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx = \frac{b^2h}{4} \tag{e}$$

en donde sustituimos el valor de *dA* de la ecuación (b).

Ahora podemos determinar las coordenadas del centroide *C*:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{2h}{5} \tag{f,g}$$

Estos resultados concuerdan con las fórmulas del apéndice D, caso 17.

Notas: el centroide *C* del semisegmento parabólico también se puede localizar al tomar el elemento de área *dA* como una franja horizontal con altura *dy* y ancho

$$x = b\sqrt{1 - \frac{y}{h}} \tag{h}$$

Esta expresión se obtiene al despejar *x* en la ecuación (a) en términos de *y*.

12.3 CENTROIDES DE ÁREAS COMPUESTAS

En el trabajo de ingeniería rara vez necesitamos localizar los centroides por integración debido a que los centroides de figuras geométricas comunes ya se conocen y están tabulados. Sin embargo, con frecuencia necesitamos localizar los centroides de áreas compuestas de varias partes, cada una con una forma geométrica familiar, como un rectángulo y un círculo. Ejemplos de **áreas compuestas** son las secciones transversales de vigas y columnas, que es usual que consistan de elementos rectangulares (por ejemplo, consulte las figuras 12.2, 12.3 y 12.4).

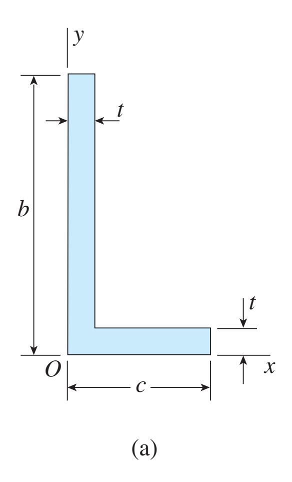
Las **áreas y los momentos estáticos** de áreas compuestas se pueden calcular al sumar las propiedades correspondientes de las partes constitutivas. Supongamos que un área compuesta está dividida en un total de n partes y denotemos el área de la parte $i$ésima con A_i. Entonces, podemos obtener el área y los momentos estáticos mediante las siguientes sumatorias:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad Q_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i \qquad (12.6a,b,c)$$

en donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide de la parte $i$ésima.

Las **coordenadas del centroide** del área compuesta son

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad (12.7a,b)$$



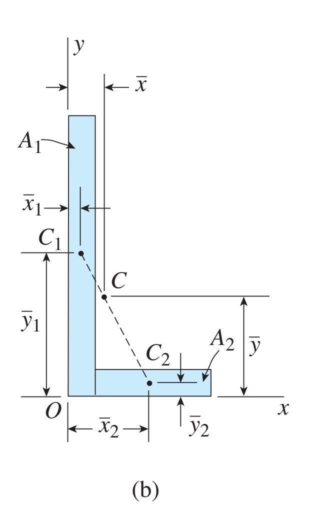


FIGURA 12.6 Centroide de un área compuesta que consiste en dos partes.

Dado que el área compuesta está representada exactamente por las n partes, las ecuaciones anteriores dan resultados exactos para las coordenadas del centroide.

Para ilustrar como se utilizan las ecuaciones (12.7a) y (12.7b), considere el área en forma de L (o sección angular) que se muestra en la figura 12.6a. Esta área tiene dimensiones laterales b y c, y espesor t. El área se puede dividir en dos rectángulos con áreas A_1 y A_2 con centroides C_1 y C_2, respectivamente (figura 12.6b). Las áreas y las coordenadas centroidales de estas dos partes son

$$A_1 = +bt \qquad \bar{x}_1 = \frac{t}{2} \qquad \bar{y}_1 = \frac{b}{2}$$

$$A_2 = (c - t)t \qquad \bar{x}_2 = \frac{c + t}{2} \qquad \bar{y}_2 = \frac{t}{2}$$

Por tanto, el área y los momentos estáticos del área compuesta (de las ecuaciones 12.6a, b y c) son

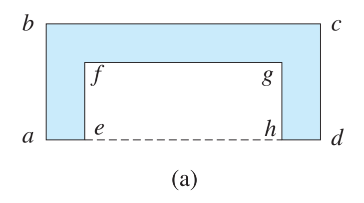
$$A = A_1 + A_2 = t(b + c - t)$$

$$Q_x = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 = \frac{t}{2}(b^2 + ct - t^2)$$

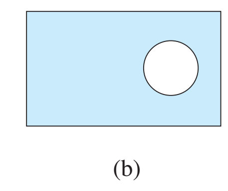
$$Q_y = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 = \frac{t}{2}(bt + c^2 - t^2)$$

Por último, podemos obtener las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide C del área compuesta (figura 12.6b) con las ecuaciones (12.7a) y (12.7b):

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{bt + c^2 - t^2}{2(b + c - t)} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{b^2 + ct - t^2}{2(b + c - t)} \qquad (12.8a,b)$$



(a)



(b)

FIGURA 12.7 Áreas compuestas con un recorte y un orificio.

Se puede emplear un procedimiento similar para áreas más complejas, como se ilustra en el ejemplo 12.2.

Nota 1: cuando un área compuesta está dividida en sólo dos partes, el centroide C de toda el área se encuentra sobre la línea que une los centroides C_1 y C_2 de las dos partes (como se muestra en la figura 12.6b para el área en forma de L).

Nota 2: al utilizar las fórmulas para áreas compuestas (ecuaciones 12.6 y 12.7), podemos manejar la *ausencia* de un área mediante una resta. Este procedimiento es útil cuando hay recortes u orificios en la figura.

Por ejemplo, considere el área que se muestra en la figura 12.7a. Podemos analizar esta figura como un área compuesta al restar las propiedades del rectángulo interior *efgh* de las propiedades correspondientes del rectángulo exterior *abcd*. (Desde otro punto de vista, podemos considerar el rectángulo exterior como un "área positiva" y el rectángulo interior como un "área negativa".)

De manera similar, si un área tiene un orificio (figura 12.7b), podemos restar las propiedades del área del orificio de las del rectángulo exterior. (De nuevo, se logra el mismo efecto si tratamos el rectángulo exterior como un "área positiva" y el orificio como un "área negativa".)



Los recortes en vigas se deben considerar en los cálculos del centroide y del momento de inercia

Ejemplo 12.2

La sección transversal de una viga de acero está construida con una sección W 18 × 71 de patín ancho con una cubreplaca de 6 in × 1/2 in soldada al patín superior y una sección en canal C 10 × 30 soldada al patín inferior (figura 12.8).

Localice el centroide C del área de la sección transversal.

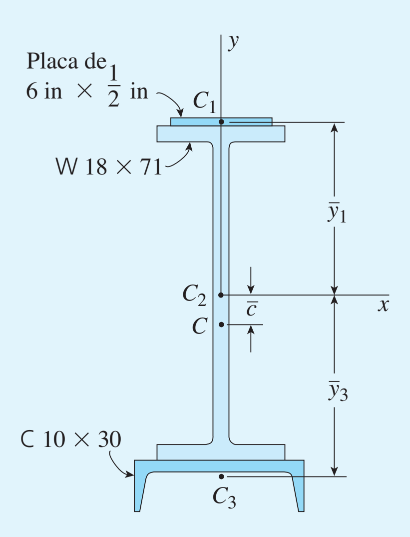


FIGURA 12.8 Ejemplo 12.2. Centroide de un área compuesta.

Solución

Denotemos las áreas de la cubreplaca, de la sección de patín ancho y de la sección en canal A_1, A_2 y A_3, respectivamente. Los centroides de estas tres áreas están identificados C_1, C_2 y C_3, respectivamente, en la figura 12.8. Observe que el área compuesta tiene un eje de simetría y por lo tanto todos los centroides se encuentran sobre ese eje. Las tres áreas parciales son

$$A_1 = (6\text{ in})(0.5\text{ in}) = 3.0\text{ in}^2 \qquad A_2 = 20.8\text{ in}^2 \qquad A_3 = 8.82\text{ in}^2$$

en donde las áreas A_1 y A_3 se obtienen de las tablas E.1 y E.3 del apéndice E.

Coloquemos el origen de los ejes x y y en el centroide C_2 de la sección de patín ancho. Entonces, las distancias desde el eje x hasta los centroides de las tres áreas son las siguientes:

$$\bar{y}_1 = \frac{18.47\text{ in}}{2} + \frac{0.5\text{ in}}{2} = 9.485\text{ in}$$

$$\bar{y}_2 = 0 \qquad \bar{y}_3 = \frac{18.47\text{ in}}{2} + 0.649\text{ in} = 9.884\text{ in}$$

continúa

en donde las dimensiones pertinentes de las secciones de patín ancho y en canal se obtienen de las tablas E.1 y E.3.

El área A y el momento estático Q_x de toda la sección transversal se obtienen con las ecuaciones (12.6a) y (12.6b) como se muestra:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= 3.0 \text{ in}^2 + 20.8 \text{ in}^2 + 8.82 \text{ in}^2 = 32.62 \text{ in}^2$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3$$

$$= (9.485 \text{ in})(3.0 \text{ in}^2) + 0 - (9.884 \text{ in})(8.82 \text{ in}^2) = -58.72 \text{ in}^3$$

Ahora podemos obtener la coordenada $\bar{y}$ hasta el centroide C del área compuesta con la ecuación (12.7b):

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{-58.72 \text{ in}^3}{32.62 \text{ in}^2} = -1.80 \text{ in}$$

Como $\bar{y}$ es positiva en la dirección positiva del eje y, el signo menos significa que el centroide C del área compuesta está localizado debajo del eje x, como se muestra en la figura 12.8. Por tanto, la distancia $\bar{c}$ entre el eje x y el centroide C es

$$\bar{c} = 1.80 \text{ in}$$

Observe que la posición del eje de referencia (el eje x) es arbitraria; sin embargo, en este ejemplo lo colocamos en el centroide de la sección de patín ancho debido a que simplifica ligeramente los cálculos.

12.4 MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS PLANAS



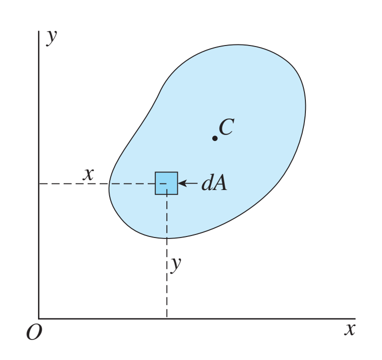


FIGURA 12.9 Área plana con forma arbitraria.

Los **momentos de inercia** de un área plana (figura 12.9) con respecto a los ejes x y y, respectivamente, están definidos por las integrales

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA \tag{12.9a,b}$$

en donde x y y son las coordenadas del elemento diferencial de área dA. Dado que el elemento dA se multiplica por el cuadrado de la distancia desde el eje de referencia, los momentos de inercia también se denominan **segundos momentos de inercia.** Además, vemos que los momentos de inercia de las áreas (a diferencia de los momentos estáticos) siempre son cantidades positivas.

Para ilustrar cómo se obtienen los momentos de inercia por integración, consideraremos un rectángulo con ancho b y altura h (figura 12.10). Los ejes x y y tienen su origen en el centroide C. Por conveniencia, utilizamos un elemento diferencial de área dA en forma de una franja horizontal delgada de ancho b y altura dy (por tanto, $dA = b\,dy$). Como todas las partes de la franja elemental están a la misma distancia del eje x, podemos expresar el momento de inercia I_x con respecto al eje x de la siguiente manera:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\,dy = \frac{bh^3}{12} \tag{a}$$

De manera similar, podemos utilizar un elemento de área en forma de una franja vertical con área $dA = h\,dx$ y obtener el momento de inercia con respecto al eje y:

$$I_y = \int x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h\,dx = \frac{hb^3}{12} \tag{b}$$

Si se selecciona un conjunto diferente de ejes, los momentos de inercia tendrán valores diferentes. Por ejemplo, considere el eje BB en la base del rectángulo (figura 12.10). Si se selecciona este eje como la referencia, debemos definir y como la distancia coordenada desde ese eje hasta el elemento de área dA. Entonces los cálculos para el momento de inercia son

$$I_{BB} = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b\,dy = \frac{bh^3}{3} \tag{c}$$

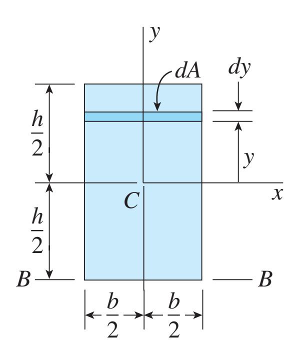
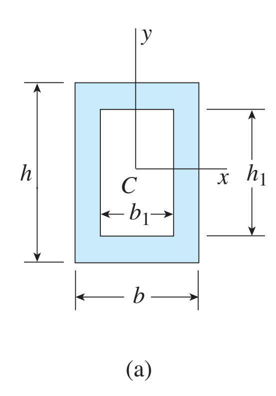


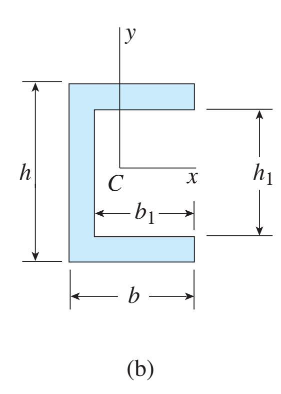
FIGURA 12.10 Momentos de inercia de un rectángulo.

Observe que el momento de inercia con respecto al eje BB es mayor que el momento de inercia con respecto al eje centroidal x. En general, el momento de inercia aumenta conforme el eje de referencia se mueve paralelamente a sí mismo alejándose del centroide.

El momento de inercia de un **área compuesta** con respecto a cualquier eje particular es la suma de los momentos de inercia de sus partes



(a)



(b)

FIGURA 12.11 Áreas compuestas.

con respecto a ese mismo eje. Un ejemplo es la sección de caja hueca que se muestra en la figura 12.11a, donde los ejes x y y son ejes de simetría en el centroide C. El momento de inercia I_x con respecto al eje x es igual a la suma algebraica de los momentos de inercia de los rectángulos exterior e interior (como ya se explicó, podemos considerar el rectángulo interior como un "área negativa" y el rectángulo exterior como un "área positiva"). Por tanto,

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12} \qquad \text{(d)}$$

Esta misma fórmula se aplica a la sección en canal que se muestra en la figura 12.11b, donde podemos considerar el recorte como un "área negativa".

Para la sección en caja hueca podemos usar una técnica similar para obtener el momento de inercia I_y con respecto al eje vertical. Sin embargo, en el caso de la sección en canal, la determinación del momento de inercia I_y requiere utilizar el teorema de los ejes paralelos que se describe en la sección siguiente (sección 12.5).

Las **fórmulas para los momentos de inercia** se dan en el apéndice D. Para las formas que no se muestran, los momentos de inercia usualmente se pueden obtener empleando las fórmulas dadas junto con el teorema de los ejes paralelos. Si un área tiene una forma tan irregular que sus momentos de inercia no se puedan obtener de esta manera, entonces podemos utilizar métodos numéricos. El procedimiento es dividir el área en elementos pequeños de área ΔA_i, multiplicar cada área por el cuadrado de su distancia desde el eje de referencia y luego sumar los productos.

Radio de giro

En ocasiones en mecánica se encuentra una distancia conocida como **radio de giro.** El radio de giro de un área plana se define como la raíz cuadrada del momento de inercia del área dividida entre la propia área; por tanto,

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad \text{(12.10a,b)}$$

en donde r_x y r_y denotan los radios de giro con respecto a los ejes x y y, respectivamente. Como el momento de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia y el área tiene unidades de longitud a la segunda potencia, el radio de giro tiene unidades de longitud.

Si bien el radio de giro de un área no tiene un significado físico obvio, lo podemos considerar como la distancia (desde el eje de referencia) a la que toda el área podría concentrarse y aún tener el mismo momento de inercia que el área original.

Ejemplo 12.3

Determine los momentos de inercia I_x e I_y para el semisegmento parabólico *OAB* que se muestra en la figura 12.12. La ecuación de la frontera parabólica es

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \tag{e}$$

(Esta misma área se consideró antes en el ejemplo 12.1.)

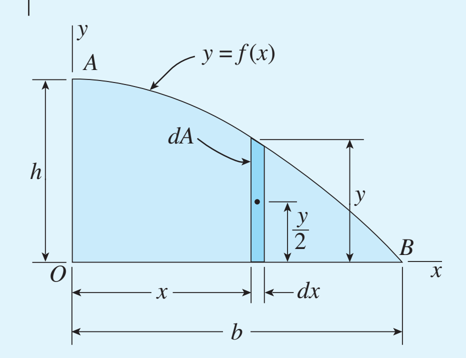


FIGURA 12.12 Ejemplo 12.13. Momentos de inercia de un semisegmento parabólico.

Solución

Para determinar los momentos de inercia por integración, utilizaremos las ecuaciones (12.9a) y (12.9b). El elemento diferencial de área *dA* se selecciona como una franja vertical de ancho *dx* y altura *y*, como se muestra en la figura 12.12. El área de este elemento es

$$dA = y\,dx = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx \tag{f}$$

Como cada punto en este elemento está a la misma distancia desde el eje *y*, el momento de inercia del elemento con respecto al eje *y* es $x^2 dA$. Por tanto, el momento de inercia de toda el área con respecto al eje *y* se obtiene como se muestra:

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx = \frac{2hb^3}{15} \tag{g}$$

Para obtener el momento de inercia con respecto al eje *x*, observamos que el elemento diferencial de área *dA* tiene un momento de inercia dI_x con respecto al eje *x* igual a

$$dI_x = \frac{1}{3}(dx)y^3 = \frac{y^3}{3}dx$$

como se obtuvo con la ecuación (c). De aquí, el momento de inercia de toda el área con respecto al eje *x* es

$$I_x = \int_0^b \frac{y^3}{3}dx = \int_0^b \frac{h^3}{3}\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^3 dx = \frac{16bh^3}{105} \tag{h}$$

Estos mismos resultados para I_x e I_y se pueden obtener empleando un elemento en forma de una franja horizontal de área $dA = x\,dy$ o utilizando un elemento rectangular de área $dA = dx\,dy$ y realizando una integración doble. Además, observe que las fórmulas anteriores para I_x e I_y concuerdan con las dadas en el caso 17 del apéndice D.

12.5 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA MOMENTOS DE INERCIA

En esta sección deduciremos un teorema muy útil relativo a momentos de inercia de áreas planas, que se conoce como **teorema de los ejes paralelos** y que proporciona la relación entre el momento de inercia con respecto al eje centroidal y el momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo.

Para deducir el teorema, consideramos un área con forma arbitraria con centroide *C* (figura 12.13). También, consideramos dos conjuntos de ejes coordenados: (1) los ejes $x_c y_c$ con origen en el centroide y (2) un conjunto de ejes paralelos *xy* con origen en cualquier punto *O*. Las distancias entre los dos conjuntos de ejes paralelos se denotan d_1 y d_2. Además, identificamos un elemento de área *dA* con coordenadas *x* y *y* con respecto a los ejes centroidales.

Con base en la definición de momento de inercia, podemos escribir la siguiente ecuación para el momento de inercia I_x con respecto al eje *x*:

$$I_x = \int (y + d_1)^2 dA = \int y^2 dA + 2d_1 \int y\, dA + d_1^2 \int dA \qquad \text{(a)}$$

La primera integral en el lado derecho es el momento de inercia I_{x_c} con respecto al eje x_c. La segunda integral es el momento estático del área con respecto al eje x_c (esta integral es igual a cero debido a que el eje x_c pasa por el centroide). La tercera integral es la propia área *A*. Por tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \qquad \text{(12.11a)}$$

Al continuar de la misma manera para el momento de inercia con respecto al eje *y*, obtenemos

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2 \qquad \text{(12.11b)}$$

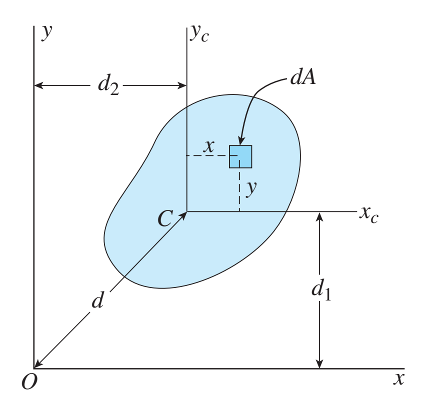


FIGURA 12.13 Deducción del teorema de los ejes paralelos.

Las ecuaciones (12.11a) y (12.11b) representan el **teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia:**

> *El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.*

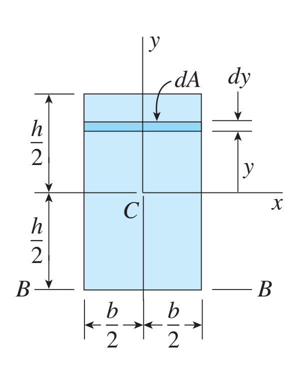


FIGURA 12.10 Momentos de inercia de un rectángulo. (Repetida.)

Para ilustrar el uso del teorema, considere de nuevo el rectángulo que se muestra en la figura 12.10. Como sabemos que el momento de inercia con respecto al eje x, que pasa por el centroide, es igual a $bh^3/12$ (consulte la ecuación a de la sección 12.4), podemos determinar el momento de inercia I_{BB} con respecto a la base del rectángulo empleando el teorema de los ejes paralelos:

$$I_{BB} = I_x + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

Este resultado concuerda con el momento de inercia obtenido antes por integración (ecuación c de la sección 12.4).

Del teorema de los ejes paralelos observamos que el momento de inercia aumenta cuando el eje se mueve paralelamente a sí mismo alejándose del centroide. Por tanto, el momento de inercia con respecto a un eje centroidal es el momento de inercia menor de un área (para una dirección dada del eje).

Al utilizar el teorema de los ejes paralelos es esencial recordar que uno de los dos ejes paralelos *debe* ser un eje centroidal. Si es necesario encontrar el momento de inercia I_2 con respecto a un eje no centroidal 2-2 (figura 12.14) cuando se conoce el momento de inercia I_1 con respecto a otro eje no centroidal (y paralelo) 1-1, debemos aplicar el teorema de los ejes paralelos dos veces. Primero, determinamos el momento de inercia centroidal I_{x_c} a partir del momento de inercia conocido I_1:

$$I_{x_c} = I_1 - Ad_1^2 \tag{b}$$

Luego encontramos el momento de inercia I_2 a partir del momento de inercia centroidal:

$$I_2 = I_{x_c} + Ad_2^2 = I_1 + A(d_2^2 - d_1^2) \tag{12.12}$$

Esta ecuación muestra de nuevo que el momento de inercia aumenta al incrementarse la distancia desde el centroide del área.

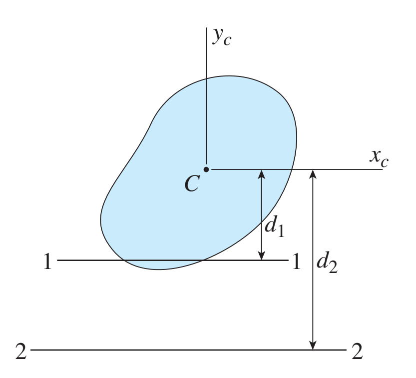


FIGURA 12.14 Área plana con dos ejes paralelos no centroidales (ejes 1-1 y 2-2).

Ejemplo 12.4

El semisegmento parabólico OAB que se muestra en la figura 12.15 tiene base b y altura h. Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia I_{x_c} e I_{y_c} con respecto a los ejes centroidales x_c y y_c.

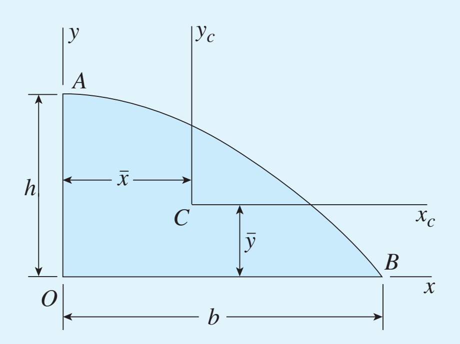


FIGURA 12.15 Ejemplo 12.4. Teorema de los ejes paralelos.

Solución

Podemos utilizar el teorema de los ejes paralelos (en vez de integración) para determinar los momentos de inercia centroidales dado que ya conocemos el área A, las coordenadas centroidales $\bar{x}$ y $\bar{y}$ y los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y. Estas cantidades se obtuvieron antes en los ejemplos 12.1 y 12.3. También se dan en el caso 17 del apéndice D y se repiten aquí:

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5} \qquad I_x = \frac{16bh^3}{105} \qquad I_y = \frac{2hb^3}{15}$$

Para obtener el momento de inercia con respecto al eje x_c, utilizamos la ecuación (b) y escribimos el teorema de los ejes paralelos como sigue:

$$I_{x_c} = I_x - A\bar{y}^2 = \frac{16bh^3}{105} - \frac{2bh}{3}\left(\frac{2h}{5}\right)^2 = \frac{8bh^3}{175} \qquad (12.13a)$$

De manera similar, obtenemos el momento de inercia con respecto al eje y_c:

$$I_{y_c} = I_y - A\bar{x}^2 = \frac{2hb^3}{15} - \frac{2bh}{3}\left(\frac{3b}{8}\right)^2 = \frac{19hb^3}{480} \qquad (12.13b)$$

De esta manera hemos determinado los momentos de inercia centroidales del semisegmento.

Ejemplo 12.5

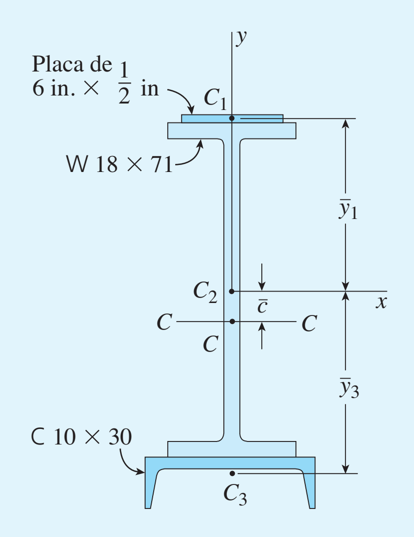


FIGURA 12.16 Ejemplo 12.5. Momento de inercia de un área compuesta.

Determine el momento de inercia I_c con respecto al eje horizontal *C-C* que pasa por el centroide *C* de la sección transversal de la viga que se muestra en la figura 12.16. (La posición del centroide *C* se determinó antes en el ejemplo 12.2 de la sección 12.3.)

Nota: de la teoría de vigas (capítulo 5), sabemos que el eje *C-C* es el eje neutro por flexión de esta viga, y por tanto el momento de inercia I_c se debe determinar a fin de calcular los esfuerzos y las deflexiones de esta viga.

Solución

Determinaremos el momento de inercia I_c con respecto al eje *C-C* aplicando el teorema de los ejes paralelos a cada parte individual del área compuesta. El área se divide naturalmente en tres partes: (1) la cubreplaca, (2) la sección de patín ancho y (3) la sección en canal. Las áreas y distancias centroidales siguientes se obtuvieron antes en el ejemplo 12.2:

$$A_1 = 3.0 \text{ in}^2 \qquad A_2 = 20.8 \text{ in}^2 \qquad A_3 = 8.82 \text{ in}^2$$

$$\bar{y}_1 = 9.485 \text{ in} \qquad \bar{y}_2 = 0 \qquad \bar{y}_3 = 9.884 \text{ in} \qquad \bar{c} = 1.80 \text{ in}$$

Los momentos de inercia de las tres partes con respecto a ejes horizontales a través de sus propios centroides C_1, C_2 y C_3 son como sigue:

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(6.0 \text{ in})(0.5 \text{ in})^3 = 0.063 \text{ in}^4$$

$$I_2 = 1170 \text{ in}^4 \qquad I_3 = 3.94 \text{ in}^4$$

Los momentos de inercia I_2 e I_3 se obtienen de las tablas E.1 y E.3, respectivamente, del apéndice E.

Ahora podemos usar el teorema de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia con respecto al eje *C-C* para cada una de las tres partes del área compuesta:

$$(I_c)_1 = I_1 + A_1(\bar{y}_1 + \bar{c})^2 = 0.063 \text{ in}^4 + (3.0 \text{ in}^2)(11.28 \text{ in})^2 = 382 \text{ in}^4$$

$$(I_c)_2 = I_2 + A_2\bar{c}^2 = 1170 \text{ in}^4 + (20.8 \text{ in}^2)(1.80 \text{ in})^2 = 1240 \text{ in}^4$$

$$(I_c)_3 = I_3 + A_3(\bar{y}_3 - \bar{c})^2 = 3.94 \text{ in}^4 + (8.82 \text{ in}^2)(8.084 \text{ in})^2 = 580 \text{ in}^4$$

La suma de estos momentos de inercia individuales da el momento de inercia de toda el área de la sección transversal con respecto a su eje centroidal *C-C*:

$$I_c = (I_c)_1 + (I_c)_2 + (I_c)_3 = 2200 \text{ in}^4$$

Este ejemplo muestra cómo calcular momentos de inercia de áreas compuestas empleando el teorema de los ejes paralelos.

12.6 MOMENTOS POLARES DE INERCIA

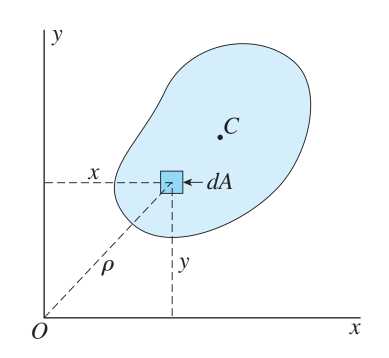


FIGURA 12.17 Área plana con forma arbitraria.

Los momentos de inercia analizados en la sección anterior se definen con respecto a ejes que se encuentran en el plano de la propia área, como los ejes x y y en la figura 12.17. Ahora consideraremos un eje *perpendicular* al plano del área y que interseque el plano en el origen O. El momento de inercia con respecto a este eje perpendicular se denomina **momento polar de inercia** y se denota con el símbolo I_P.

El momento polar de inercia con respecto a un eje en el punto O perpendicular al plano de la figura se define por la integral

$$I_P = \int \rho^2 dA \qquad (12.14)$$

en donde ρ es la distancia desde el punto O hasta el elemento diferencial de área dA (figura 12.17). Esta integral tiene forma similar a las de los momentos de inercia I_x e I_y (consulte las ecuaciones 12.9a y 12.9b).

Puesto que $\rho^2 = x^2 + y^2$, donde x y y son las coordenadas rectangulares del elemento dA, obtenemos la siguiente expresión para I_P:

$$I_P = \int \rho^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

Así, obtenemos la relación importante:

$$I_P = I_x + I_y \qquad (12.15)$$

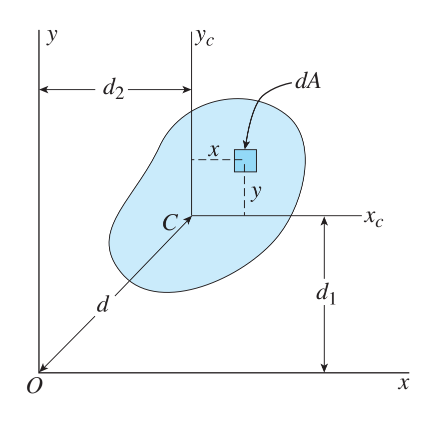


FIGURA 12.13 Deducción del teorema de los ejes paralelos. (Repetida.)

Esta ecuación muestra que el momento polar de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura en cualquier punto O es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares *cualesquiera* x y y que pasen por ese mismo punto y que se encuentren en el plano de la figura.

Por conveniencia, es usual referirnos a I_P simplemente como el momento polar de inercia con respecto al punto O, sin mencionar que el eje es perpendicular al plano de la figura. Además, para distinguirlos de los momentos **polares** de inercia, en ocasiones nos referimos a I_x e I_y como momentos **rectangulares** de inercia.

Los momentos polares de inercia con respecto a varios puntos en el plano de un área están relacionados por el **teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia.** Podemos deducir este teorema refiriéndonos de nuevo a la figura 12.13. Denotemos los momentos polares de inercia con respecto al origen O y al centroide C con $(I_P)_O$ e $(I_P)_C$, respectivamente. Entonces, al emplear la ecuación (12.15), podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$(I_P)_O = I_x + I_y \qquad (I_P)_C = I_{x_c} + I_{y_c} \qquad \text{(a)}$$

Ahora refiérase al teorema de los ejes paralelos deducidos en la sección 12.5 para momentos rectangulares de inercia (ecuaciones 12.11a y 12.11b). Al sumar estas dos ecuaciones, obtenemos

$$I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

Sustituimos en las ecuaciones (a) y observando también que $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ (figura 12.13), obtenemos

$$(I_P)_O = (I_P)_C + Ad^2 \tag{12.16}$$

Esta ecuación representa el **teorema de los ejes paralelos** para momentos polares de inercia:

El momento polar de inercia de un área con respecto a cualquier punto O en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al centroide C más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los puntos O y C.

Para ilustrar la determinación de los momentos polares de inercia y el uso del teorema de los ejes paralelos, considere un círculo con radio r (figura 12.18). Tomemos un elemento diferencial de área dA en forma de un anillo delgado con radio ρ y espesor $d\rho$ (por tanto, $dA = 2\pi\rho\, d\rho$). Como cada punto en el elemento está a la misma distancia ρ desde el centro del círculo, el momento polar de inercia de todo el círculo con respecto al centro es

$$(I_P)_C = \int \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} \tag{12.17}$$

Este resultado aparece en el caso 9 del apéndice D.

El momento polar de inercia del círculo con respecto a cualquier punto B en su circunferencia (figura 12.18) se puede obtener con el teorema de los ejes paralelos:

$$(I_P)_B = (I_P)_C + Ad^2 = \frac{\pi r^4}{2} + \pi r^2(r^2) = \frac{3\pi r^4}{2} \tag{12.18}$$

Por cierto, observe que el momento polar de inercia tiene su valor menor cuando el punto de referencia es el centroide del área.

Un círculo es un caso especial en que el momento polar de inercia se puede determinar por integración. Sin embargo, la mayor parte de las formas encontradas en el trabajo de ingeniería no se prestan para esta técnica, por lo que es usual que los momentos polares de inercia se obtengan sumando los momentos rectangulares de inercia para dos ejes perpendiculares (ecuación 12.15).

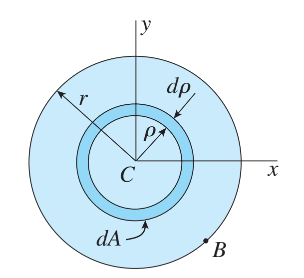


FIGURA 12.18 Momento polar de inercia de un círculo.

12.7 PRODUCTOS DE INERCIA

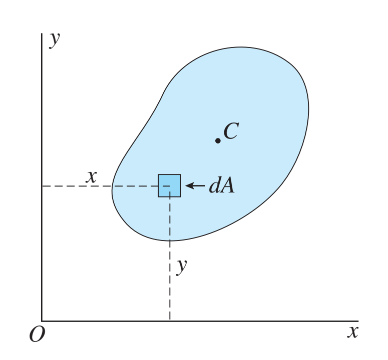


FIGURA 12.19 Área plana con forma arbitraria.

El producto de inercia de un área plana se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares que se encuentran en el plano del área. Entonces, con referencia al área que se muestra en la figura 12.19, definimos el **producto de inercia** con respecto a los ejes x y y como sigue:

$$I_{xy} = \int xy\, dA \tag{12.19}$$

De acuerdo con esta definición observamos que cada elemento diferencial de área dA se multiplica por el producto de sus coordenadas. Como consecuencia, los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o cero dependiendo de la posición de los ejes xy con respecto al área.

Si el área se encuentra por completo en el primer cuadrante de los ejes (como en la figura 12.19), entonces el producto de inercia es positivo debido a que cada elemento dA tiene coordenadas x y y positivas. Si el área se encuentra por completo en el segundo cuadrante, el producto de inercia es negativo dado que cada elemento tiene una coordenada y positiva y una coordenada x negativa. De manera similar, las áreas que estén por completo dentro del tercero y cuarto cuadrantes tienen productos de inercia positivos y negativos, respectivamente. Cuando el área se encuentra en más de un cuadrante, el signo del producto de inercia depende de la distribución del área dentro de los cuadrantes.

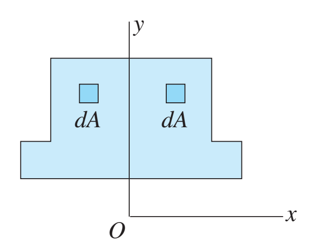


FIGURA 12.20 El producto de inercia es cero cuando alguno de los ejes es el de simetría.

Un caso especial se origina cuando uno de los ejes es un **eje de simetría** del área. Por ejemplo, considere el área que se muestra en la figura 12.20, que es simétrica con respecto al eje y. Para cada elemento dA con coordenadas x y y existe un elemento dA igual y simétricamente ubicado con la misma coordenada y pero con una coordenada x con signo opuesto. Por tanto, los productos $xy\,dA$ se cancelan entre sí y la integral en la ecuación (12.19) desaparece. Por tanto, *el producto de inercia de un área es cero con respecto a cualquier par de ejes en el cual al menos uno de ellos es un eje de simetría del área*.

Como ejemplos de la regla anterior, el producto de inercia I_{xy} es igual a cero para las áreas que se muestran en las figuras 12.10, 12.11, 12.16 y 12.18. Por el contrario, el producto de inercia I_{xy} tiene un valor positivo diferente de cero para el área que se muestra en la figura 12.15. (Estas observaciones son válidas para productos de inercia con respecto a los ejes xy particulares que se muestran en la las figuras. Si los ejes se desplazan a otra posición, el producto de inercia puede cambiar.)

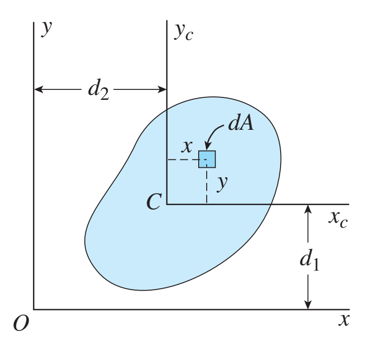


FIGURA 12.21 Área plana con forma arbitraria.

Los productos de inercia de un área con respecto a conjuntos de ejes paralelos están relacionados por un **teorema de los ejes paralelos** que es análogo a los teoremas correspondientes para momentos rectangulares de inercia y momentos polares de inercia. Para obtener este teorema, considere el área que se muestra en la figura 12.21, que tiene centroide C y ejes

centroidales x_cy_c. El producto de inercia I_{xy} con respecto a cualquier otro conjunto de ejes, paralelos a los ejes x_cy_c, es

$$I_{xy} = \int (x + d_2)(y + d_1)dA = \int xy\,dA + d_1\int x\,dA + d_2\int y\,dA + d_1d_2\int dA$$

en donde d_1 y d_2 son las coordenadas del centroide C con respecto a los ejes xy (por tanto, d_1 y d_2 pueden ser valores positivos o negativos).

La primera integral en la última expresión es el producto de inercia $I_{x_cy_c}$ con respecto a los ejes centroidales; la segunda y tercera integrales son iguales a cero debido a que son los momentos estáticos del área con respecto a los ejes centroidales y la última integral es el área A. Por tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$I_{xy} = I_{x_cy_c} + Ad_1d_2 \qquad (12.20)$$

Esta ecuación representa el **teorema de los ejes paralelos para productos de inercia:**

El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes en su plano es igual al producto de inercia con respecto a ejes centroidales paralelos más el producto del área y las coordenadas del centroide con respecto al par de ejes.

Para demostrar el uso de este teorema de los ejes paralelos, determinemos el producto de inercia de un rectángulo con respecto a los ejes xy que tienen su origen en el punto O en la esquina inferior izquierda del rectángulo (figura 12.22). El producto de inercia con respecto a los ejes x_cy_c es cero debido a la simetría. Además, las coordenadas del centroide con respecto a los ejes xy son

$$d_1 = \frac{h}{2} \qquad d_2 = \frac{b}{2}$$

Sustituimos en la ecuación (12.20) y obtenemos

$$I_{xy} = I_{x_cy_c} + Ad_1d_2 = 0 + bh\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b^2h^2}{4} \qquad (12.21)$$

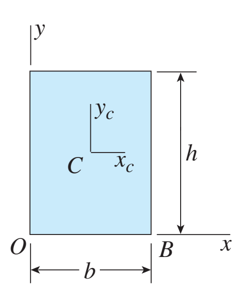


FIGURA 12.22 Teorema de los ejes paralelos para productos de inercia.

Este producto de inercia es positivo debido a que toda el área se encuentra en el primer cuadrante. Si los ejes xy se trasladan en sentido horizontal de manera que el origen se mueva al punto B en la esquina inferior derecha del rectángulo (figura 12.22), toda el área se encuentra en el segundo cuadrante y el producto de inercia será $-b^2h^2/4$.

El ejemplo siguiente también ilustra el uso del teorema de los ejes paralelos para productos de inercia.

Ejemplo 12.6

Determine el producto de inercia I_{xy} de la sección Z que se muestra en la figura 12-23. La sección tiene ancho b, altura h y espesor constante t.

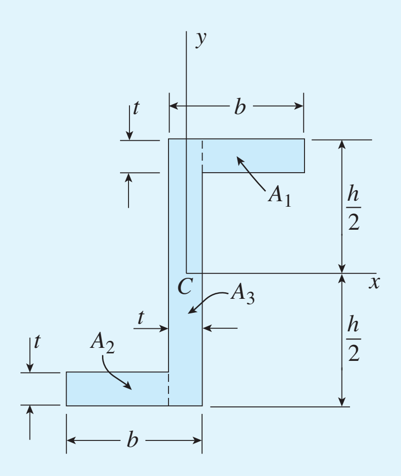


FIGURA 12.23 Ejemplo 12.6. Producto de inercia de una sección Z.

Solución

Para obtener el producto de inercia con respecto a los ejes xy que pasan por el centroide, dividimos el área en tres partes y utilizamos el teorema de los ejes paralelos. Las partes son las siguientes: (1) un rectángulo de ancho $b – t$ y espesor t en el patín superior, (2) un rectángulo similar en el patín inferior y (3) un rectángulo del alma con altura h y espesor t.

El producto de inercia del rectángulo del alma con respecto a los ejes xy es cero (por la simetría). El producto de inercia $(I_{xy})_1$ del rectángulo del patín superior (con respecto a los ejes xy) se determina empleando el teorema de los ejes paralelos:

$$(I_{xy})_1 = I_{x_c y_c} + Ad_1 d_2 \tag{a}$$

en donde $I_{x_c y_c}$ es el producto de inercia del rectángulo con respecto a su propio centroide, A es el área del rectángulo, d_1 es la coordenada y del centroide del rectángulo y d_2 es la coordenada x del centroide del rectángulo. Por tanto,

$$I_{x_c y_c} = 0 \qquad A = (b - t)(t) \qquad d_1 = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \qquad d_2 = \frac{b}{2}$$

Al sustituir en la ecuación (a), obtenemos el producto de inercia del rectángulo en el patín superior:

$$(I_{xy})_1 = I_{x_c y_c} + Ad_1 d_2 = 0 + (b - t)(t)\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{bt}{4}(h - t)(b - t)$$

El producto de inercia del rectángulo en el patín inferior es el mismo. Por tanto, el producto de inercia de toda la sección Z es el doble de $(I_{xy})_1$, o

$$I_{xy} = \frac{bt}{2}(h - t)(b - t) \tag{12.22}$$

Observe que este producto de inercia es positivo debido a que los patines se encuentran en el primero y segundo cuadrantes.

12.8 ROTACIÓN DE EJES

Los momentos de inercia de un área plana dependen de la posición del origen y de la orientación de los ejes de referencia. Para un origen dado, los momentos de inercia y el producto de inercia varían conforme se giran los ejes con respecto a ese origen. La forma en que varían y las magnitudes de los valores máximo y mínimo se analizan en esta y en la siguiente sección.

Consideremos el área plana que se muestra en la figura 12.24 y supongamos que los ejes *xy* son un par de ejes de referencia ubicados de manera arbitraria. Los momentos y productos de inercia con respecto a dichos ejes son

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA \tag{a,b,c}$$

en donde *x* y *y* son las coordenadas de un elemento diferencial de área *dA*.

Los ejes x_1 y y_1 tienen el mismo origen que los ejes *xy* pero están girados un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a esos ejes. Los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 se denotan I_{x_1}, I_{y_1} e $I_{x_1y_1}$, respectivamente. Para obtener estas cantidades necesitamos las coordenadas del elemento de área *dA* con respecto a los ejes x_1y_1. Estas coordenadas se pueden expresar en términos de las coordenadas *xy* y del ángulo θ por geometría, como sigue:

$$x_1 = x \cos\,\theta + y \,\text{sen}\,\theta \qquad y_1 = y \cos\,\theta - x\,\text{sen}\,\theta \tag{12.23a,b}$$

Entonces el momento de inercia con respecto al eje x_1 es

$$I_{x_1} = \int y_1^2 dA = \int (y \cos\,\theta - x\,\text{sen}\,\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 dA + \text{sen}^2\theta \int x^2 dA - 2\,\text{sen}\,\theta \cos\,\theta \int xy\, dA$$

o, con las ecuaciones (a), (b) y (c),

$$I_{x_1} = I_x \cos^2\theta + I_y\,\text{sen}^2\theta - 2I_{xy}\,\text{sen}\,\theta \cos\theta \tag{12.24}$$

Ahora introducimos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$2\,\text{sen}\,\theta \cos\theta = \text{sen}\,2\theta$$

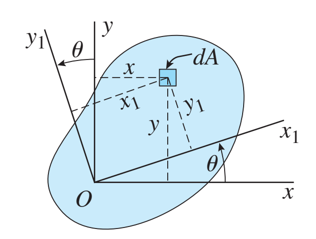


FIGURA 12.24 Rotación de ejes.

Entonces la ecuación (12.24) se convierte en

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \text{ sen } 2\theta \qquad (12.25)$$

De manera similar podemos obtener el producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1:

$$I_{x_1y_1} = \int x_1 y_1 \, dA = \int (x \cos \theta + y \text{ sen } \theta)(y \cos \theta - x \text{ sen } \theta) dA$$

$$= (I_x - I_y)\text{sen } \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \qquad (12.26)$$

De nuevo empleando identidades trigonométricas, obtenemos

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \text{ sen } 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \qquad (12.27)$$

Las ecuaciones (12.25) y (12.27) dan el momento de inercia I_{x_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ con respecto a los ejes girados en términos de los momentos y el producto de inercia para los ejes originales. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia.**

Observe que estas ecuaciones de transformación tienen la misma forma que las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano (ecuaciones 7.4a y 7.4b de la sección 7.2). Al comparar los dos conjuntos de ecuaciones, observamos que I_{x_1} corresponde a σ_{x_1}, $I_{x_1y_1}$ corresponde a $-\tau_{x_1y_1}$, I_x, corresponde a σ_x, I_y corresponde a σ_y e I_{xy} corresponde a $-\tau_{xy}$. Por tanto, también podemos analizar momentos y productos de inercia con el **círculo de Mohr** (consulte la sección 7.4).

El momento de inercia I_{y_1} se puede obtener mediante el mismo procedimiento que utilizamos para determinar I_{x_1} e $I_{x_1y_1}$. Sin embargo, un procedimiento más simple es reemplazar θ con $\theta + 90°$ en la ecuación (12.25). El resultado es

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \text{ sen } 2\theta \qquad (12.28)$$

Esta ecuación muestra cómo varía el momento de inercia I_{y_1}conforme se giran los ejes con respecto al origen.

Una ecuación útil relacionada con los momentos de inercia se obtiene sumando I_{x_1} y I_{y_1} (ecuaciones 12.25 y 12.28). El resultado es

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \qquad (12.29)$$

Esta ecuación indica que la suma de los momentos de inercia con respecto a un par de ejes permanece constante conforme se giran los ejes con respecto al origen. Esta suma es el momento polar de inercia del área con respecto al origen. Observe que la ecuación (12.29) es análoga a la ecuación (7.6) para esfuerzos y a la ecuación (7.72) para deformaciones.

12.9 EJES PRINCIPALES Y MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES

Las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia (ecuaciones 12.25, 12.27 y 12.28) muestran cómo varían los momentos y productos de inercia conforme varía el ángulo de rotación θ. De interés especial son los valores máximo y mínimo del momento de inercia. Estos valores se conocen como **momentos de inercia principales** y los ejes correspondientes se conocen como **ejes principales.**

Ejes principales

Para determinar los valores del ángulo θ que hacen al momento de inercia I_{x_1} un máximo o un mínimo, derivamos con respecto a θ la expresión en el lado derecho de la ecuación (12.25) e igualamos el resultado a cero:

$$(I_x - I_y)\text{sen } 2\theta + 2I_{xy}\cos 2\theta = 0 \tag{a}$$

Despejamos θ de esta ecuación y obtenemos

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{12.30}$$

en donde θ_p denota el ángulo que define un eje principal. Este mismo resultado se obtiene si efectuamos la derivada de I_{y_1} (ecuación 12.28).

La ecuación (12.30) produce dos valores del ángulo $2\theta_p$ en el intervalo de 0 a 360°, estos valores difieren en 180°. Los valores correspondientes de θ_p difieren en 90° y definen los dos ejes principales perpendiculares. Uno de estos ejes corresponde al momento de inercia máximo y el otro corresponde al momento de inercia mínimo.

Ahora examinemos la variación en el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ conforme θ varía (consulte la ecuación 12.27). Si $\theta = 0$, obtenemos $I_{x_1y_1} = I_{xy}$, como se esperaba. Si $\theta = 90°$, obtenemos $I_{x_1y_1} = -I_{xy}$. Por tanto, durante una rotación de 90° el producto de inercia cambia de signo, lo cual significa que para una orientación intermedia de los ejes, el producto de inercia debe ser igual a cero. Para determinar esta orientación, igualamos a cero $I_{x_1y_1}$ (ecuación 12.27):

$$(I_x - I_y)\text{sen } 2\theta + 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Esta ecuación es igual que la ecuación (a), que define el ángulo θ_p con respecto a los ejes principales. Por tanto, concluimos que *el producto de inercia es cero para los ejes principales*.

En la sección 12.7 demostramos que el producto de inercia de un área con respecto a un par de ejes es igual a cero si al menos uno de los ejes es de simetría. Se deduce que si un área tiene un eje de simetría, ese eje y cualquier eje perpendicular a él constituyen un conjunto de ejes principales.

Las observaciones anteriores se pueden resumir así: (1) los ejes principales que pasan por un origen O son un par de ejes ortogonales para los cuales los momentos de inercia son un máximo y un mínimo; (2) la orientación de los ejes principales está dada por el ángulo θ_p obtenido con la ecuación (12.30); (3) el producto de inercia es cero para ejes principales y (4) un eje de simetría siempre es un eje principal.

Puntos principales

Ahora consideremos un par de ejes con origen en un punto dado O. Si existe un par *diferente* de ejes principales que pase por ese mismo punto, entonces *cada* par de ejes en ese punto es un conjunto de ejes principales. Además, el momento de inercia debe ser constante conforme se varía el ángulo θ.

La conclusión anterior se deduce de la naturaleza de la ecuación de transformación para I_{x_1} (ecuación 12.25). Dado que esta ecuación contiene funciones trigonométricas del ángulo 2θ, hay un valor máximo y un valor mínimo de I_{x_1} conforme 2θ varía a lo largo de un intervalo de 360° (o conforme θ varía a lo largo de un intervalo de 180°). Si existe un segundo máximo, entonces la única posibilidad es que I_{x_1} permanezca constante, lo cual significa que cada par de ejes es un conjunto de ejes principales y todos los momentos de inercia son iguales.

Un punto ubicado de manera que cada eje que pase por él sea un eje principal y de aquí que los momentos de inercia sean iguales para todos los ejes en el punto se denomina **punto principal.**

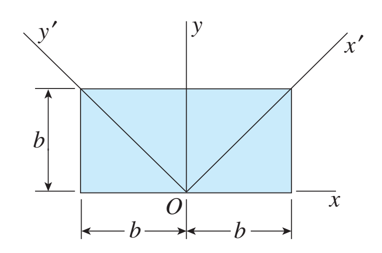
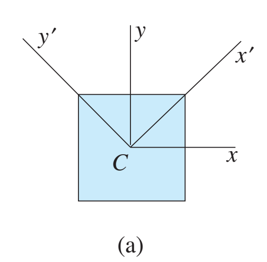


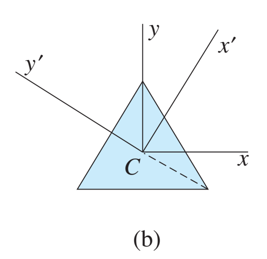
FIGURA 12.25 Rectángulo para el cual cada eje (en el plano del área) que pasa por el punto O es un eje principal.

Una ilustración de esta situación es el rectángulo de ancho $2b$ y altura b que se muestra en la figura 12.25. Los ejes xy, con origen en el punto O, son ejes principales del rectángulo debido a que el eje y es un eje de simetría. Los ejes $x'y'$, con el mismo origen, también son ejes principales porque el producto de inercia $I_{x'y'}$ es igual a cero (debido a que los triángulos están simétricamente ubicados con respecto a los ejes x' y y'). Se deduce que cada par de ejes que pasa por O es un conjunto de ejes principales y cada momento de inercia es el mismo (e igual a $2b^4/3$). Por tanto, el punto O es un punto principal para el rectángulo. (Un segundo punto principal está ubicado donde el eje y interseca el lado superior del rectángulo.)

Un corolario útil de los conceptos descritos en los cuatro párrafos anteriores se aplica a los ejes que pasan por el centroide de un área. Considere un área con *dos pares diferentes* de ejes centroidales de manera que al menos un eje en cada par es un eje de simetría. En otras palabras, existen dos ejes de simetría diferentes que no son perpendiculares entre sí. Entonces se deduce que el centroide es un punto principal.



(a)



(b)

FIGURA 12.36 Ejemplos de áreas para las cuales cada eje centroidal es un eje principal y el centroide C es un punto principal.

En la figura 12.26 se muestran dos ejemplos, un cuadrado y un triángulo equilátero. En cada caso los ejes xy son ejes centroidales principales debido a que su origen está en el centroide C y al menos uno de ellos es un eje de simetría. Además, un segundo par de ejes centroidales (los ejes $x'y'$) tiene al menos un eje de simetría. Se infiere que tanto los ejes xy como los ejes $x'y'$ son principales. Por tanto, cada eje que pasa por el centroide C es un eje principal y cada uno de ellos tiene el mismo momento de inercia.

Si un área tiene *tres ejes de simetría diferentes*, aun si dos de ellos son perpendiculares, las condiciones descritas en el párrafo anterior se cumplen automáticamente. Por tanto, si un área tiene tres o más ejes de simetría, el centroide es un punto principal y cada eje que pasa por el centroide es un eje principal y tiene el mismo momento de inercia. Estas condiciones se cumplen para un círculo, para todos los polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, etcétera) y para muchas otras formas simétricas.

En general, cada área plana tiene dos puntos principales. Éstos son equidistantes con respecto al centroide sobre el eje centroidal principal que tiene el momento de inercia principal mayor. Un caso especial ocurre cuando los dos momentos de inercia centroidales principales son iguales; enton-

ces los dos puntos principales coinciden en el centroide, que se convierte en el único punto principal.

Momentos de inercia principales

Ahora determinemos los momentos de inercia principales suponiendo que I_x, I_y e I_{xy} se conocen. Un método es determinar los dos valores de θ_p (que difieren en 90°) con la ecuación (12.30) y luego sustituir estos valores en la ecuación (12.25) para I_{x_1}. Los dos valores resultantes son los momentos de inercia principales, denotados con I_1 e I_2. La ventaja de este método es que sabemos cuál de los dos ángulos principales θ_p corresponde a cada momento de inercia principal.

También es posible obtener fórmulas generales para los momentos de inercia principales. Observamos en la ecuación (12.30) y en la figura 12.27 (que es una representación geométrica de la ecuación 12.30) que

$$\cos 2\theta_p = \frac{I_x - I_y}{2R} \qquad \text{sen } 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{R} \qquad (12.31a,b)$$

en donde

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (12.32)$$

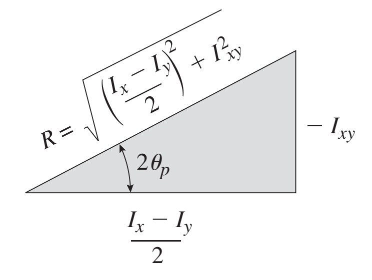


FIGURA 12.27 Representación geométrica de la ecuación (12.30).

es la hipotenusa del triángulo. Al evaluar R, siempre tomamos la raíz cuadrada positiva.

Ahora sustituimos las expresiones para cos $2\theta_p$ y sen $2\theta_p$ (de las ecuaciones 12.31a y b) en la ecuación (12.25) para I_{x_1} y obtenemos el mayor algebraicamente de los dos momentos de inercia principales, denotado con el símbolo I_1:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (12.33a)$$

El momento de inercia principal menor, denotado con I_2, se puede obtener con la ecuación

$$I_1 + I_2 = I_x + I_y$$

(consulte la ecuación 12.29). Al sustituir la expresión para I_1 en esta ecuación y despejando I_2, obtenemos

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (12.33b)$$

Las ecuaciones (12.33a) y (12.33b) proporcionan una forma conveniente para calcular los momentos de inercia principales.

El ejemplo siguiente ilustra el método para localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia principales.

Ejemplo 12.7

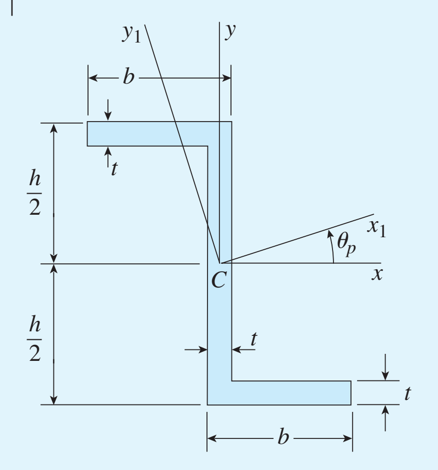


FIGURA 12.28 Ejemplo 12.7. Ejes principales y momentos de inercia principales para una sección Z.

Determine las orientaciones de los ejes centroidales principales y las magnitudes de los momentos de inercia centroidales principales para el área de la sección transversal de la sección Z que se muestra en la figura 12.28. Utilice los datos numéricos siguientes: altura $h = 200$ mm, ancho $b = 90$ mm y espesor constante $t = 15$ mm.

Solución

Utilicemos los ejes xy (figura 12.28) como los ejes de referencia que pasan por el centroide C. Los momentos y el producto de inercia con respecto a estos ejes se pueden obtener al dividir el área en tres rectángulos y emplear los teoremas de los ejes paralelos. Los resultados de esos cálculos son:

$$I_x = 29.29 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_y = 5.667 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_{xy} = -9.366 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Al sustituir estos valores en la ecuación para el ángulo θ_p (ecuación 12.30), obtenemos

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0.7930 \qquad 2\theta_p = 38.4° \text{ y } 218.4°$$

Por tanto, los dos valores de θ_p son

$$\theta_p = 19.2° \text{ y } 109.2°$$

Al utilizar estos valores de θ_p en la ecuación de transformación para I_{x_1} (ecuación 12.25), obtenemos $I_{x_1} = 32.6 \times 10^6$ mm^4 y 2.4×10^6 mm^4, respectivamente. Estos mismos valores se obtienen si sustituimos en las ecuaciones (12.33a) y (12.33b). Entonces, los momentos de inercia principales y los ángulos con respecto a los ejes principales correspondientes son

$$I_1 = 32.6 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \theta_{p_1} = 19.2°$$
$$I_2 = 2.4 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \theta_{p_2} = 109.2°$$

Los ejes principales se muestran en la figura 12.28 como los ejes x_1y_1.

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 12

Centroides de áreas

Los problemas de la sección 12.2 se deben resolver por integración.

12.2.1 Determine las distancias $\bar{x}$ y $\bar{y}$ al centroide C de un triángulo rectángulo con base b y altura h (consulte el caso 6, apéndice D).

12.2.2 Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide C de un trapezoide con bases a y b, y altura h (consulte el caso 8, apéndice D).

12.2.3 Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide C de un semicírculo con radio r (consulte el caso 10, apéndice D).

12.2.4 Determine las distancias $\bar{x}$ y $\bar{y}$ al centroide C de un tímpano parabólico con base b y altura h (consulte el caso 18, apéndice D).

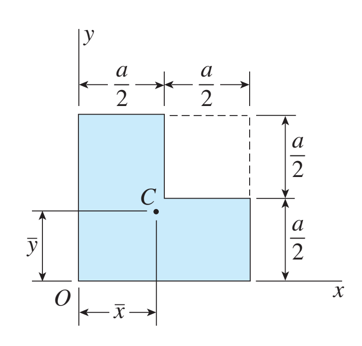
12.2.5 Determine las distancias $\bar{x}$ y $\bar{y}$ al centroide C de un semisegmento de grado n-ésimo con base b y altura h (consulte el caso 19, apéndice D).

Centroides de áreas compuestas

Los problemas de la sección 12.3 se deben resolver empleando las fórmulas para áreas compuestas.

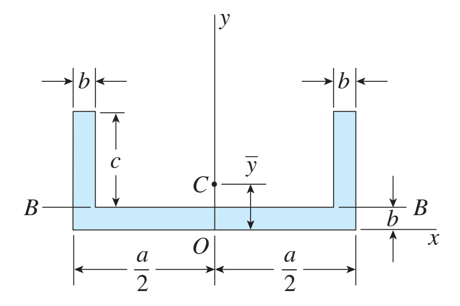
12.3.1 Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide C de un trapezoide con bases a y b, y altura h (consulte el caso 8, apéndice D) al dividir el trapezoide en dos triángulos.

12.3.2 Se quita la cuarta parte de un cuadrado con lado a (consulte la figura). ¿Cuáles son las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide C del área restante?



PROBS. 12.3.2 y 12.5.2

12.3.3 Calcule la distancia $\bar{y}$ al centroide C de la sección en canal que se muestra en la figura si $a = 6$ in, $b = 1$ in y $c = 2$ in.

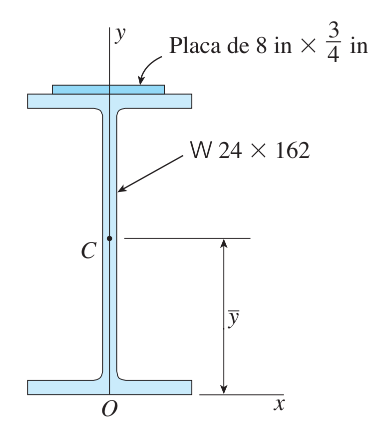


PROBS. 12.3.3, 12.3.4 y 12.5.3

12.3.4 ¿Cuál debe ser la relación entre las dimensiones a, b y c de la sección en canal que se muestra en la figura a fin de que el centroide C se encuentre sobre la línea BB?

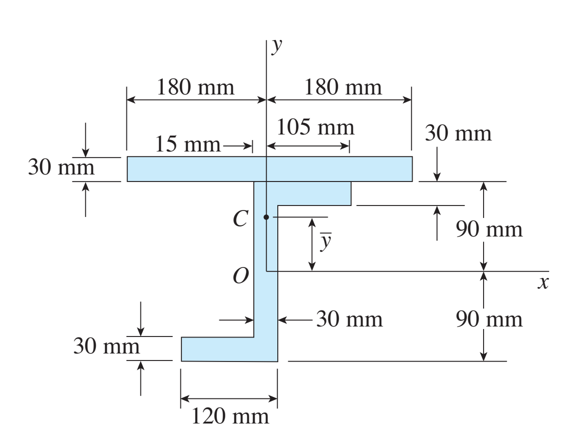
12.3.5 En la figura se muestra la sección transversal de una viga construida con una sección W 24 × 162 de patín ancho y una cubreplaca de 8 in × 3/4 in soldada al patín superior.

Determine la distancia $\bar{y}$ desde la base de la viga hasta el centroide C del área de la sección transversal.



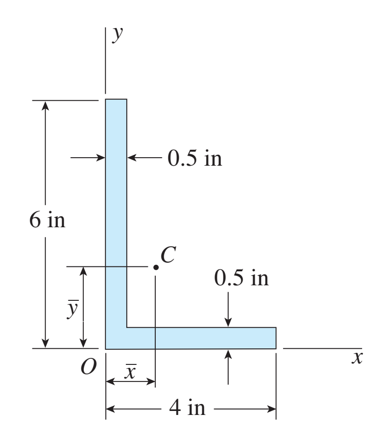
PROBS. 12.3.5 y 12.5.5

12.3.6 Determine la distancia $\bar{y}$ al centroide C del área compuesta que se muestra en la figura.



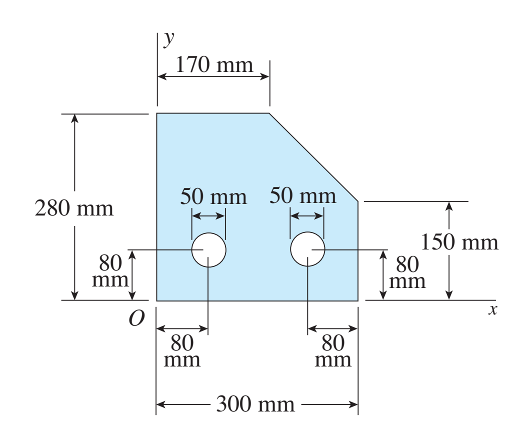
PROBS. 12.3.6, 12.5.6 y 12.7.6

12.3.7 Determine las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide C del área en forma de L que se muestra en la figura.



PROBS. 12.3.7, 12.4.7, 12.5.7 y 12.7.7

12.3.8 Determine las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide C del área que se muestra en la figura.



PROB. 12.3.8

Momentos de inercia

Los problemas 12.4.1 a 12.4.4 se deben resolver por integración.

12.4.1 Determine el momento de inercia I_x del triángulo con base b y altura h con respecto a su base (consulte el caso 4, apéndice D).

12.4.2 Determine el momento de inercia I_{BB} de un trapezoide con bases a y b, y altura h con respecto a su base (consulte el caso 8, apéndice D).

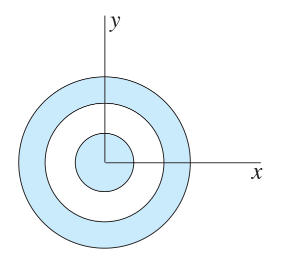
12.4.3 Determine el momento de inercia I_x de un tímpano parabólico con base b y altura h con respecto a su base (consulte el caso 18, apéndice D).

12.4.4 Determine el momento de inercia I_x de un círculo con radio r con respecto al diámetro (consulte el caso 9, apéndice D).

Los problemas 12.4.5 a 12.4.9 se deben resolver considerando el área como un área compuesta.

12.4.5 Determine el momento de inercia I_{BB} de un rectángulo con longitudes en sus lados b y h con respecto a una diagonal del rectángulo (consulte el caso 2, apéndice D).

12.4.6 Calcule el momento de inercia I_x para el área circular compuesta que se muestra en la figura. El origen de los ejes está en el centro de los círculos concéntricos y los tres diámetros son 20, 40 y 60 mm.

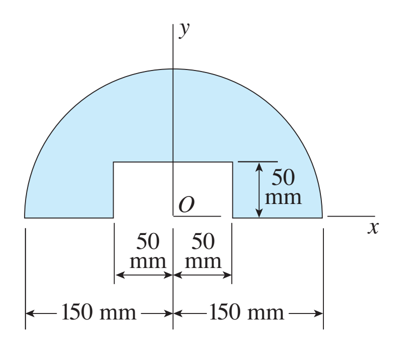


PROB. 12.4.6

12.4.7 Calcule los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y para el área en forma de L que se muestra en la figura para el problema 12.3.7.

12.4.8 Un área semicircular con radio de 150 mm tiene un recorte rectangular con dimensiones de 50 mm × 100 mm (consulte la figura).

Calcule los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes x y y. Además, calcule los radios de giro correspondientes r_x y r_y.



PROB. 12.4.8

12.4.9 Calcule los momentos de inercia I_1 e I_2 de una sección W 16 × 100 de patín ancho, empleando las dimensiones transversales dadas en la tabla E.1, apéndice E. (No tome en cuenta las áreas transversales de los filetes.) Además, calcule los radios de giro correspondientes r_1 y r_2, respectivamente.

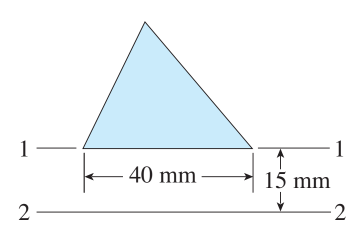
Teorema de los ejes paralelos

12.5.1 Calcule el momento de inercia I_b de una sección W 12 × 50 de patín ancho con respecto a su base. (Utilice datos de la tabla E.1, apéndice E).

12.5.2 Determine el momento de inercia I_c con respecto a un eje que pasa por el centroide C y es paralelo al eje x para la figura geométrica descrita en el problema 12.3.2.

12.5.3 Para la sección en canal descrita en el problema 12.3.3, calcule el momento de inercia I_{x_c} con respecto a un eje que pasa por el centroide C y es paralelo al eje x.

12.5.4 El momento de inercia con respecto al eje 1-1 del triangulo escaleno que se muestra en la figura es 90×10^3 mm^4. Calcule su momento de inercia I_2 con respecto al eje 2-2.



PROB. 12.5.4

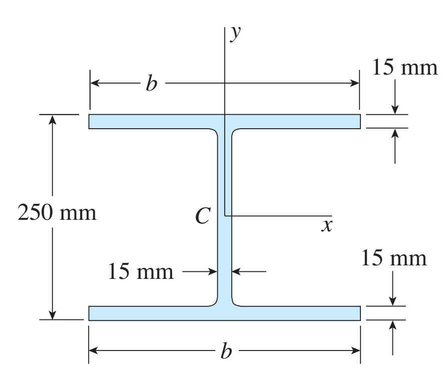
12.5.5 Para la sección transversal de la viga descrita en el problema 12.3.5, calcule los momentos de inercia centroidales I_{x_c} y I_{y_c} con respecto a los ejes que pasan por el centroide C de manera que el eje x_c sea paralelo al eje x y el eje y_c coincida con el eje y.

12.5.6 Calcule el momento de inercia I_{x_c} con respecto a un eje que pasa por el centroide C y paralelo al eje x para el área compuesta que se muestra en la figura para el problema 12.3.6.

12.5.7 Calcule los momentos de inercia centroidales I_{x_c} e I_{y_c} con respecto a ejes que pasan por el centroide C y son paralelos a los ejes x y y, respectivamente, para el área en forma de L que se muestra en la figura para el problema 12.3.7.

12.5.8 La sección transversal de la viga de patín ancho que se muestra en la figura tiene una altura total de 250 mm y un espesor constante de 15 mm.

Determine el ancho del patín b si se requiere que los momentos de inercia centroidales I_x e I_y tengan una razón de 3 a 1, respectivamente.



PROB. 12.5.8

Momentos polares de inercia

12.6.1 Determine el momento polar de inercia I_P de un triángulo isósceles con base b y altura h con respecto a su vértice (consulte el caso 5, apéndice D).

12.6.2 Determine el momento polar de inercia $(I_P)_C$ con respecto al centroide C para un sector circular (consulte el caso 13, apéndice D).

12.6.3 Determine el momento polar de inercia I_P para una sección W 8 × 21 de patín ancho con respecto a una de sus esquinas exteriores.

12.6.4 Obtenga una fórmula para el momento polar de inercia I_p con respecto al punto medio de la hipotenusa para un triángulo rectángulo con base b y altura h (consulte el caso 6, apéndice D).

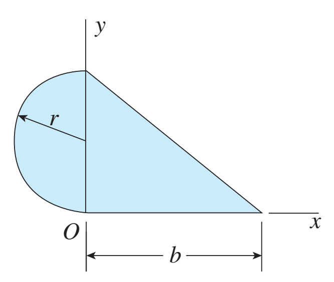
12.6.5 Determine el momento polar de inercia $(I_P)_C$ con respecto al centroide C para un tímpano de un cuadrante circular (consulte el caso 12, apéndice D).

Productos de inercia

12.7.1 Por integración determine el producto de inercia I_{xy} para el semisegmento parabólico que se muestra en la figura 12.5 (consulte también el caso 17 en el apéndice D).

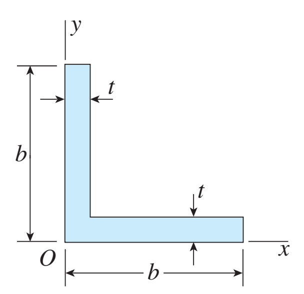
12.7.2 Por integración, determine el producto de inercia I_{xy} para el tímpano del cuadrante circular que se muestra en el caso 12, apéndice D).

12.7.3 Encuentre la relación entre el radio r y la distancia b para el área compuesta que se muestra en la figura a fin de que el producto de inercia I_{xy} sea cero.



PROB. 12.7.3

12.7.4 Obtenga una fórmula para el producto de inercia I_{xy} del área simétrica en forma de L que se muestra en la figura.



PROB. 12.7.4

12.7.5 Calcule el producto de inercia I_{12} con respecto a los ejes centroidales 1-1 y 2-2 para una sección angular L 6 × 6 × 1 in (consulte la tabla E.4, apéndice E). (No tome en cuenta las áreas transversales del filete ni de las esquinas redondeadas.)

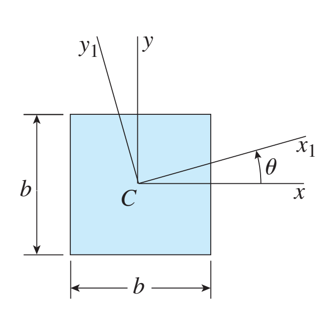
12.7.6 Calcule el producto de inercia I_{xy} para el área compuesta que se muestra en el problema 12.3.6.

12.7.7 Determine el producto de inercia $I_{x_c y_c}$ con respecto a los ejes centroidales x_c y y_c paralelos a los ejes x y y, respectivamente, para el área en forma de L que se muestra en el problema 12.3.7.

Rotación de ejes

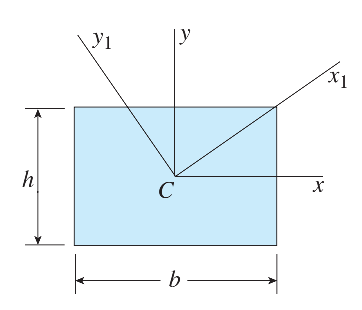
Los problemas de la sección 12.8 se deben resolver empleando las ecuaciones de transformación para momentos y productos de inercia.

12.8.1 Determine los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ para un cuadrado con lados b, como se muestra en la figura. (Observe que los ejes x_1y_1 son ejes centroidales girados un ángulo θ con respecto a los ejes xy.)



PROB. 12.8.1

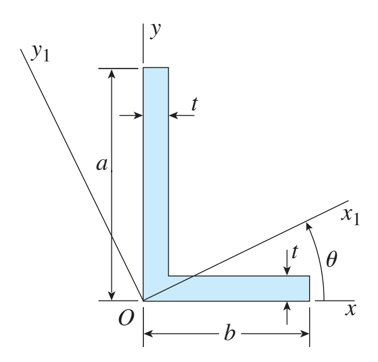
12.8.2 Determine los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x_1y_1 para el rectángulo que se muestra en la figura. (Observe que el eje x_1 es una diagonal del rectángulo.)



PROB. 12.8.2

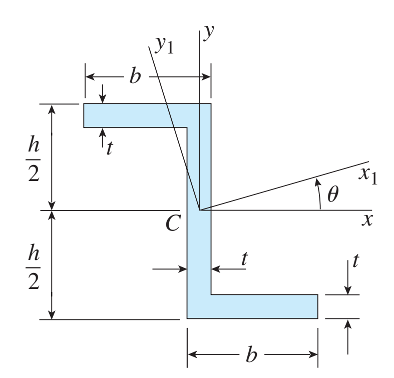
12.8.3 Calcule el momento de inercia I_d para una sección W 12 × 50 de patín ancho con respecto a una diagonal que pasa por el centroide y dos esquinas exteriores de los patines. (Utilice las dimensiones dadas en la tabla E.1.)

***12.8.4** Calcule los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ con respecto a los ejes x_1y_1 para el área en forma de L que se muestra en la figura si $a = 150$ mm, $b = 100$ mm, $t = 15$ mm y $\theta = 30°$.



PROBS. 12.8.4 y 12.9.4

***12.8.5** Calcule los momentos de inercia I_{x_1} e I_{y_1} y el producto de inercia $I_{x_1y_1}$ con respecto a los ejes x_1y_1 para la sección Z que se muestra en la figura si $b = 3$ in, $h = 4$ in, $t = 0.5$ in y $\theta = 60°$.



PROBS. 12.8.5, 12.8.6, 12.9.5 y 12.9.6

***12.8.6** Resuelva el problema anterior si $b = 80$ mm, $h = 120$ mm, $t = 12$ mm y $\theta = 30°$.

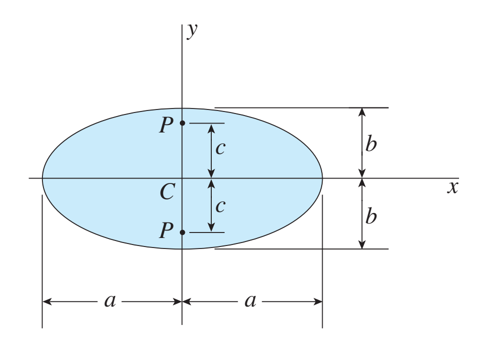
Ejes principales, puntos principales y momentos de inercia principales

12.9.1 En la figura se muestra una elipse con eje mayor de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$.

(a) Determine la distancia c desde el centroide C de la elipse hasta los puntos principales P sobre el eje menor (eje y).

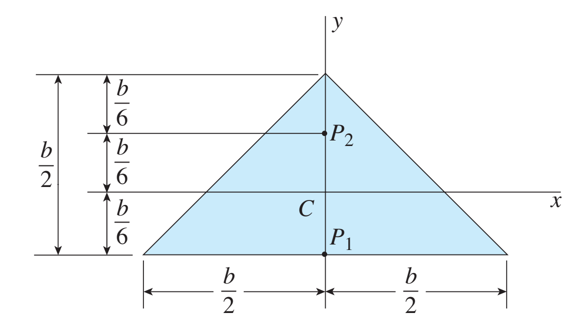
(b) ¿Para qué razón a/b los puntos principales se encuentran sobre la circunferencia de la elipse?

(c) ¿Para qué razones se encuentran dentro de la elipse?



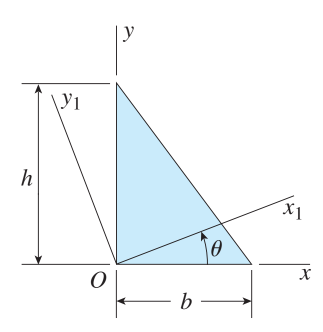
PROB. 12.9.1

12.9.2 Demuestre que los dos puntos P_1 y P_2, ubicados como se muestran en la figura, son los puntos principales del triángulo rectángulo isósceles.



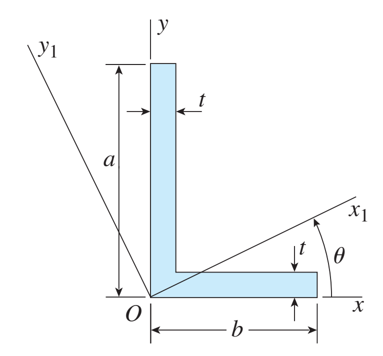
PROB. 12.9.2

12.9.3 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales a través del origen O para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura si $b = 6$ in y $h = 8$ in. Además, calcule los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2.



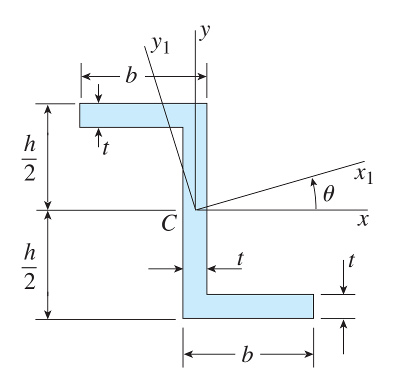
PROB. 12.9.3

12.9.4 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales que pasan por el origen O y los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 para el área con forma L descrita en el problema 12.8.4 (a = 150 mm, b = 100 mm y t = 15 mm).



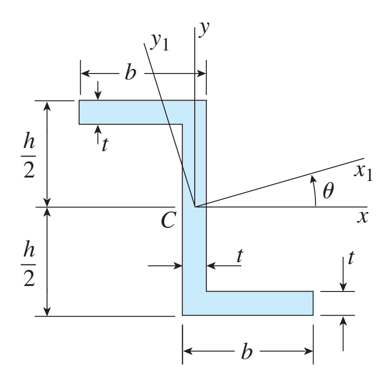
PROBS. 12.8.4 y 12.9.4

12.9.5 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales que pasan por el centroide C y los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 para la sección Z descrita en el problema 12.8.5 (b = 3 in, h = 4 in y t = 0.5 in).



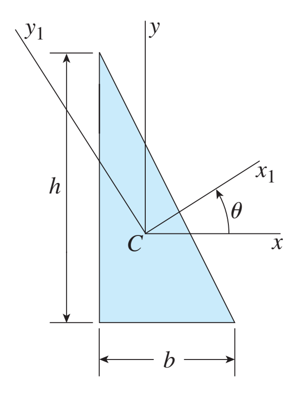
PROBS. 12.8.5, 12.8.6, 12.9.5 y 12.9.6

12.9.6 Resuelva el problema anterior para la sección Z descrita en el problema 12.8-6 (b = 80 mm, h = 120 mm y t = 12 mm).



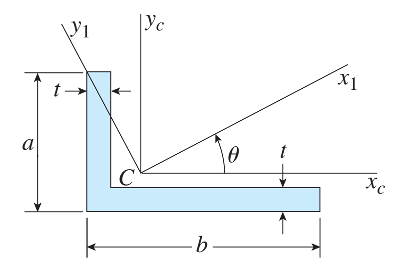
PROBS. 12.8.5, 12.8.6, 12.9.5 y 12.9.6

12.9.7 Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes principales que pasan por el centroide C para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura si $h = 2b$. Además, determine los momentos de inercia centroidales principales correspondientes I_1 e I_2.



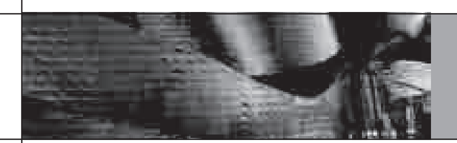
PROB. 12.9.7

***12.9.8** Determine los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2} que definen las orientaciones de los ejes centroidales principales y los momentos de inercia principales correspondientes I_1 e I_2 para el área en forma de L que se muestra en la figura si a = 80 mm, b = 150 mm y t = 16 mm.



PROBS. 12.9.8 y 12.9.9

***12.9.9** Resuelva el problema anterior si a = 3 in, b = 6 in y t = 5/8 in.



Referencias y notas históricas

1.1 Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1983 (publicado originalmente por McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1953).



S. P. Timoshenko (1878-1972)

Nota: Stephen P. Timoshenko (1878-1972) fue un científico, ingeniero y maestro famoso. Nacido en Rusia, emigró a Estados Unidos en 1922. Fue investigador en el Westinghouse Research Laboratory, profesor en la University of Michigan y después profesor en la Stanford University, de la cual se jubiló en 1944.

Timoshenko hizo muchas contribuciones originales, tanto teóricas como experimentales, en el campo de la mecánica aplicada, escribió doce libros de texto innovadores que revolucionaron la enseñanza de la mecánica en Estados Unidos. Estos libros que se publicaron en algunos casos en cinco ediciones y se tradujeron a 35 idiomas, abarcan los temas de estática, dinámica, mecánica de materiales, vibraciones, teoría estructural, estabilidad, elasticidad, placas y cascarones.

1.2 Todhunter, I. y Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Material*, Vols. I y II, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1960 (originalmente publicado por la Cambridge University Press en 1886 y 1893). *Nota:* Isaac Todhunter (1820-1884) y Karl Pearson (1857-1936) fueron matemáticos y educadores ingleses, Pearson fue notable en especial por sus contribuciones originales a la estadística.

1.3 Love, A. E. H., *a Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4a. ed., Dover Publications, Inc. Nueva York, 1944 (publicado originalmente por la Cambridge University Press en 1927); consulte "Historical Introduction", pp. 1-31.

Nota: Augustus Edward Hough Love (1863-1940) fue un inglés distinguido experto en elasticidad que enseñó en la Oxford University. Entre sus muchas investigaciones importantes se incluye el análisis de las ondas sísmicas superficiales, que en la actualidad son llamadas *ondas de Love* por los geofísicos.

1.4 Jacob Bernoulli (1654-1705), también conocido con los nombres de James, Jacques y Jakob, fue un miembro de la famosa familia de matemáticos y científicos de Basel, Suiza (consulte la referencia 9.1). Realizó un trabajo importante en relación con las curvas elásticas de vigas y se hizo famoso por su trabajo en la teoría de probabilidad, geometría analítica y otros campos.

Jean Victor Poncelet (1788-1867) fue un francés que combatió en la campaña de Napoleón contra Rusia y fue dado por muerto en el campo de batalla. Sobrevivió, fue tomado prisionero y más tarde regresó a Francia para continuar su trabajo en matemáticas. Sus contribuciones más importantes a las matemáticas son en geometría; en mecánica es bien conocido por su trabajo sobre las propiedades de los materiales y la dinámica. (Para conocer el trabajo de Bernoulli y Poncelet en relación con los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria, consulte la referencia 1.1, p. 88 y la referencia 1.2, Vol. I, pp. 10, 533 y 873.)

1.5 James y James, *Mathematics Dictionary*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York (última edición).

1.6 Robert Hooke (1635-1703) fue un científico inglés que realizó experimentos con cuerpos elásticos y desarrolló mejoras en relojes. También formuló las leyes de la gravitación de manera independiente de Newton, de quien fue contemporáneo. Al fundarse la Royal Society de Londres en 1662, Hooke fue nombrado su primer curador. (Para conocer los orígenes de la ley de Hooke, consulte la referencia 1.1, pp. 17-20 y la referencia 1.2, Vol. I, p. 5).

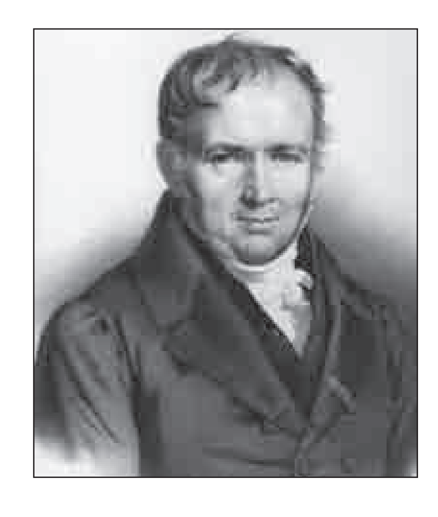
1.7 Thomas Young (1773-1829) fue un destacado científico inglés que realizó investigaciones precursoras en óptica, acústica, impacto y otros temas. (Para conocer más acerca de su

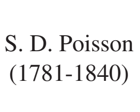
trabajo con materiales, consulte la referencia 1.1, pp. 90-98 y la referencia 1.2, Vol. I, pp. 80-86.)



Thomas Young (1773-1829)

1.8 Siméon Denis Poisson (1781-1840) fue un gran matemático francés. Hizo muchas contribuciones tanto en matemáticas como en mecánica y su nombre ha perdurado en campos diversos, además de la relación de Poisson. Por ejemplo, tenemos la ecuación de Poisson en ecuaciones diferenciales parciales y la distribución de Poisson en teoría de probabilidad. (Para obtener más información acerca de las teorías de Poisson del comportamiento de materiales, consulte la referencia 1.1, pp. 111-114; la referencia 1.2, Vol. I, pp. 208-318 y la referencia 1.3, p. 13).





S. D. Poisson (1781-1840)

2.1 Timoshenko, S. P. y Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3ª ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1970 (consulte la p. 110). *Nota*: James Norman Goodier (1905-1969) es bien conocido por sus contribuciones de investigación a la teoría de la elasticidad, estabilidad, propagación de ondas en sólidos y otras ramas de la mecánica aplicada. Nació en Inglaterra, estudió en la Cambridge University y luego en la University of Michigan. Fue profesor en la Cornell University y después en la Stanford University, donde dirigió el programa de mecánica aplicada.

2.2 Leonhard Euler (1707-1783) fue un famoso matemático suizo, quizá el más grande de todos los tiempos. La referencia 1.1 contiene información acerca de su vida y obra. (Para obtener más información de su trabajo sobre estructuras estáticamente indeterminadas, consulte la referencia 1.1, p. 36 y la referencia 2.3, p. 650.)

2.3 Oravas, G. A. y McLean, L., "Historical development of energetical principles in elastomechanics", en *Applied Mechanics Reviews*, parte I, Vol. 19, Núm. 8, agosto de 1966, pp. 647-658 y parte II, Vol. 19, Núm. 11, noviembre de 1966, pp. 919-933.

2.4 Louis Marie Henri Navier (1785-1836), famoso matemático e ingeniero francés, fue uno de los fundadores de la teoría de la elasticidad. Contribuyó a la teoría de vigas, placas y cascarones, a la teoría de vibraciones y a la teoría de fluidos viscosos. (Consulte las referencias 1.1, p. 75; 1.2, Vol. I, p. 146 y 2-3, p. 652, para ver su análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.)

2.5 Piobert, G., Morin, A. -J. y Didion, I., "Commission des Principes du Tir," en *Mémorial de l'Artillerie*, Vol. 5, 1842, pp. 501-552.

Nota: este artículo describe los experimentos realizados al disparar proyectiles de artillería contra placas de hierro. En la página 505 aparece la descripción de las marcas que son las bandas de deslizamiento. La descripción es muy breve y no hay una indicación de que los autores las atribuyeran a características inherentes del material. Guillaume Piobert (1793-1871) fue un general y matemático francés que realizó muchos estudios de balística; al escribir este artículo era capitán de artillería.

2.6 Lüders, W., "Ueber die Äusserung der elasticität an stahlartigen Einsenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher Stäbe beobachtete Molecularbewegung", en *Dingler´s Polytechnisches Journal*, Vol. 155, 1860, pp. 18-22.

Nota: este artículo describe e ilustra con claridad las bandas que aparecen sobre la superficie pulida de una probeta de acero durante la fluencia. Por supuesto, estas bandas son sólo la manifestación superficial de zonas tridimensionales de deformación; de aquí, las zonas podrían caracterizarse como "cuñas" en vez de bandas.

2.7 Benoit Paul Emile Clapeyron (1799-1864) fue un reconocido ingeniero estructural y diseñador de puentes francés; enseñó ingeniería en la École des Ponts et Chaussées en París. Al parecer, el teorema de Clapeyron, que establece que el trabajo

de las cargas externas que actúan sobre un cuerpo linealmente elástico es igual a la energía de deformación, fue publicado por primera vez en 1833. (Consulte la referencia 1.1, pp. 118 y 288; la referencia 1.2, Vol. I, p. 578 y la referencia 1.2, Vol. II, p. 418.)

2.8 Poncelet investigó las vibraciones longitudinales de una barra debidas a cargas de impacto (consulte la referencia 1.1, p. 88). Consulte la referencia 1.4 donde se encuentra más información sobre su vida y obras.

2.9 Budynas, R. y Young, W. C., *Roark´s Formulas for Stress and Strain*, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 2002.

2.10 Barré de Saint-Venant (1797-1886) generalmente reconocido como el experto en elasticidad más sobresaliente de todos los tiempos. Nació cerca de París, estudió brevemente en la École Polytechnique y después se graduó de la École des Ponts et Chaussées. Su carrera profesional en su parte final fue afectada en gran medida por rehusarse, como postura de conciencia y política, a unirse a sus condiscípulos en los preparativos para la defensa de París en marzo de 1814, justo antes de la abdicación de Napoleón. Como consecuencia, sus logros recibieron mayor reconocimiento en otros países que en Francia.

Algunas de sus aportaciones más conocidas son la formulación de las ecuaciones fundamentales de la elasticidad y el desarrollo de las teorías exactas de las deformaciones plásticas y vibraciones. Su nombre completo fue Adéhmar Jean Claude Barré, Conde de Saint-Venant. (Consulte las referencias 1.1, pp. 229-242; 1-2, Vol. I, pp. 833-872, Vol. II, parte I, pp. 1-286, Vol. II, parte II, pp. 1-51 y 2-1, pp. 39-40.)

2.11 Zaslavsky, A., "A note on Saint-Venant´s principle", en *Israel Journal of Technology*, Vol. 20, 1982, pp. 143-144.

2.12 Ramberg, W. A. y Osgood, W. R., "Description of stress-strain curves by the three parameters", en *National Advisory Committee for Aeronautics*, nota técnica Núm. 902, julio de 1943.

3.1 La relación entre par de torsión y ángulo de torsión en una barra circular fue establecida de manera correcta en 1784 por Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), un famoso científico francés (consulte la referencia 1.1, pp. 51-53, 82 y 92 y la referencia 1.2, Vol. I, p. 69). Coulomb hizo aportaciones en electricidad y magnetismo, viscosidad de fluidos, fricción, flexión en vigas, muros de retención y arcos, torsión y vibraciones torsionales y en otros temas (consulte la referencia 1.1, pp. 47-54).

Thomas Young (referencia 1.7) observó que el par de torsión aplicado está equilibrado por los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal y que dichos esfuerzos son proporcionales a la distancia desde el eje. El ingeniero francés Alphonse J. C. B. Duleau (1789-1832) realizó pruebas en barras en torsión y también desarrolló una teoría para barras circulares (consulte la referencia 1.1, p. 82).



C. A. de Coulomb (1736-1806)

3.2 Bredt, R., "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität," en *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol. 40, 1896, pp. 785-790 y 813-817.

Nota: Rudolph Bredt (1842-1900) fue un ingeniero alemán que estudió en Karlsruhe y Zurich, después trabajó algún tiempo en Crewe, Inglaterra, en una fábrica de trenes, donde aprendió acerca del diseño y construcción de grúas. Esta experiencia formó la base de su trabajo posterior como fabricante de grúas en Alemania. Su teoría de torsión la desarrolló juntamente con el diseño de grúas de vigas de caja.

5.1 Una prueba del teorema de que las secciones transversales de una viga en flexión pura permanecen planas, se encuentra en el artículo de Fazekas, G. A. "A note on the bending of Euler beams", en *Journal of Engineering Education*, Vol. 57, Núm. 5, enero de 1967. La validez del teorema ha sido aceptada desde hace mucho tiempo y fue empleada por los primeros investigadores como Jacob Bernoulli (referencia 1.4) y L. M. H. Navier (referencia 2.4). Para estudiar el análisis del trabajo realizado por Bernoulli y Navier en conjunto con la flexión de vigas, consulte la referencia 1.1, pp. 25-27 y 70-75.

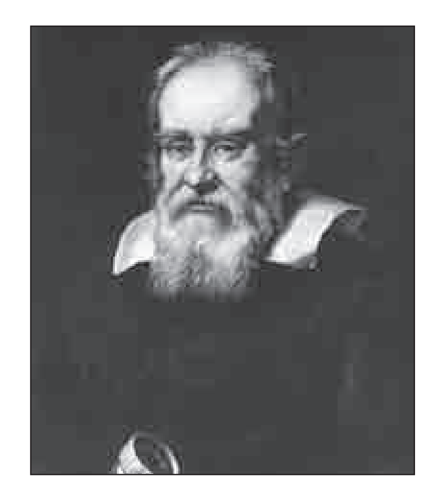
5.2 Galilei, Galileo, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, traducido del italiano y latín al inglés por Henry Crew y Alfonso De Salvio. The Mcmillan Company, Nueva York, 1933 (primera traducción publicada en 1914).

Nota: este libro lo publicó en 1638 Louis Elzevir en Leida, ahora Leiden, Holanda. *Two New Sciences* representa la culminación del trabajo de Galileo sobre dinámica y mecánica de materiales. Se puede decir con seguridad que estos dos temas, como los conocemos en la actualidad, iniciaron con Galileo y la publicación de este famoso libro.

Galileo Galilei nació en Pisa en 1564. Realizó muchos experimentos y descubrimientos célebres, incluyendo los referentes a la caída de cuerpos y el péndulo, que iniciaron la ciencia de la dinámica. Galileo fue un orador elocuente y atra-

jo estudiantes de muchos países. Fue precursor en astronomía e inventó el telescopio con el que realizó muchos descubrimientos astronómicos, incluyendo el carácter montañoso de la Luna, los satélites de Júpiter, las fases de Venus y las manchas solares. Debido a que su interpretación científica del Sistema Solar era opuesta a la teología, fue condenado por la Iglesia de Roma y pasó los últimos años de su vida recluido en Florencia; durante este periodo escribió *Two New Sciences.* Galileo murió en 1642 y fue sepultado en Florencia.





Galileo Galilei
(1564-1642)

5.3 La historia de la teoría de vigas se describe en la referencia 1.1, pp. 11-47 y 135-141 y en la referencia 1-2. Edme Mariotte (1620-1684) fue un físico francés que realizo experimentos nuevos en dinámica, hidrostática, óptica y mecánica. Efectuó pruebas en vigas y formuló una teoría para calcular la capacidad de carga; su teoría fue un perfeccionamiento del trabajo de Galileo, aunque todavía incorrecta. Jacob Bernoulli (1654-1705), a quien se describe en la referencia 1.4, determinó por primera vez que la curvatura es proporcional al momento flexionante. Sin embargo, su constante de proporcionalidad era incorrecta.

Leonhard Euler (1707-1783) obtuvo la ecuación diferencial de la curva de deflexión de una viga y la empleó para resolver muchos problemas de deflexiones pequeñas y grandes (la vida y obra de Euler se describen en la referencia 11.1). La primera persona que obtuvo la distribución de esfuerzos en una viga y relacionó correctamente los esfuerzos con el momento flexionante probablemente fue Antoine Parent (1666-1716), un físico y matemático francés. Después, Saint-Venant (1797-1886) realizó una investigación rigurosa de las deformaciones y los esfuerzos en vigas; consulte la referencia 2-10. Coulomb (referencia 3.1) y Navier (referencia 2.4), también hicieron aportaciones importantes.

5.4 Manual of Steel Construction (ASD/LRFD), publicado por el American Institute of Steel Construction, Inc., One East Wacker Drive (Suite 3100), Chicago, Illinois 60601. (Para otras publicaciones e información adicional, visite su sitio en el internet: www.aisc.org.)

5.5 *Aluminum Design Manual*, publicado por la Aluminum Association, Inc., 900 calle 19a. NW, Washington. D.C. 20006. (Para otras publicaciones e información adicional visite su sitio en el internet: www.aluminum.org.)

5.6 National Design Specification for Wood Construction (ASD/LRFD), publicada por el American Wood Council, una división de la American Forest and Paper Association, 1111 calle 19a. NW, (Suite 800), Washington, D.C. 20036. (Para otras publicaciones e información adicional, visite sus sitios en el internet: www.awc.org y www.afandpa.org.)

5.7 D. J. Jourawski (1821-1891) fue un ingeniero de puentes y ferrocarriles ruso que desarrolló la ahora tan difundida teoría aproximada para esfuerzos cortantes en vigas (consulte la referencia 1.1, pp. 141-144 y la referencia 1.2, vol. II, parte I, pp. 641-642). En 1844, sólo dos años después de graduarse del Institute of Engineers of Ways of Communication en San Petersburgo, le fue asignada la tarea de diseñar y construir un puente importante en la primera línea ferroviaria de Moscú a San Petersburgo. Observó que algunas de las grandes vigas de madera se separaban en sentido longitudinal en los centros de las secciones transversales, donde él sabía que los esfuerzos de flexión eran cero. Jourawski dibujó diagramas de cuerpo libre y de inmediato descubrió la existencia de esfuerzos cortantes horizontales en las vigas. Dedujo la fórmula del cortante y aplicó su teoría a varias formas de vigas. El artículo de Jourawski sobre cortante en vigas se cita en la referencia 5.8. En ocasiones su nombre se translitera como Dimitrii Ivanovich Zhuravskii.

5.8 Jourawski, D. J., "Sur la résistance d'un corps prismatique…", en *Annales des Ponts et Chaussés*, Mémoires et Documents, 3a. serie, Vol. 12, parte 2, 1856, pp. 328-351.

5.9 Zaslavsky, A., "On the limitations of the shearing stress formula", en *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 8, Núm. 1, 1980, pp. 13-19. (Consulte la referencia 2.1, pp. 358-359.)

5.10 Maki, A. C., y Kuenzi, E. W., "Deflection and stresses of tapered wood beams", Research Paper FPL, 34, U. S. Forest Service, Forest Products Laboratory, Madison, Wisconsin, septiembre de 1965, 54 páginas.

6.1 Timoshenko, S. P., "Use of stress functions to study flexure and torsion of prismatic bars" (en ruso), San Petersburgo, 1913 (reimpreso en el Vol. 82 de *Memoirs of the Institute of Ways of Communication*, pp. 1-21).

Nota: en este artículo se determina el punto en la sección transversal de una viga sobre el que debe actuar una fuerza concentrada para eliminar la rotación. Por tanto, este trabajo contiene la primera determinación de un centro de cortante.

La viga que estaba siendo investigada tenía una sección transversal semicircular (consulte la referencia 2.1, pp. 371-373).

7.1 Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue uno de los matemáticos más grandes. Nació en París, ingresó a la École Polytechnique a la edad de 16 años, donde fueron sus maestros Lagrange, Laplace, Fourier y Poisson. Pronto fue reconocido por sus proezas matemáticas y a la edad de 27 años fue profesor en la École y miembro de la Academia de Ciencias. Sus trabajos más importantes en matemáticas puras fueron en teoría de grupos, teoría de números, series, integración, ecuaciones diferenciales y funciones analíticas.

En las matemáticas aplicadas, Cauchy introdujo el concepto de esfuerzo como lo conocemos en la actualidad, desarrolló las ecuaciones de la teoría de la elasticidad e introdujo la noción de esfuerzos principales y deformaciones principales (consulte la referencia 1.1, pp. 107-111). En la referencia 1.2 (consulte el Vol. I, pp. 319-376) se dedica todo un capítulo a su trabajo sobre la teoría de la elasticidad.

7.2 Consulte la referencia 1.1, pp. 229-242. *Nota*: Saint-Venant fue un precursor en muchos aspectos de la teoría de la elasticidad y Todhunter y Pearson le dedicaron su libro, *A History of the Theory of Elasticity* (referencia 1.2). Para mayor información sobre Saint-Venant, consulte la referencia 2.10.

7.3 William John Macquorn Rankine (1820-1872) nació en Edimburgo, Escocia, y enseñó ingeniería en la Glasgow University. Dedujo las ecuaciones de transformación en 1852 e hizo muchas otras contribuciones a la teoría de la elasticidad y la mecánica aplicada (consulte la referencia 1.1, pp. 197-202 y la referencia 1.2, Vol. I, pp. 86 y 287-322). Sus temas de ingeniería incluyen arcos, muros de contención y teoría estructural.

Rankine también alcanzó fama científica por su trabajo con fluidos, luz, acústica y comportamiento de cristales y es especialmente reconocido por sus contribuciones a la física molecular y a la termodinámica. Su nombre perdura en el ciclo de Rankine de la termodinámica y en la escala Rankine de temperatura absoluta.

7.4 El famoso ingeniero civil alemán Otto Christian Mohr (1835-1918) fue un diseñador teórico y práctico. Fue profesor en el Stuttgart Polytechnikum y después en el Dresden Polytechnikum. Desarrolló el círculo de esfuerzos en 1882 (referencias 7.5 y 1.1, pp. 283-288).

Mohr hizo numerosas aportaciones a la teoría de estructuras, incluido el diagrama de Williot-Mohr para deflexiones en armaduras, el método de área-momento para deflexiones de vigas y el método de Maxwell-Mohr para analizar estructuras estáticamente indeterminadas. (*Nota*: Joseph Victor Williot, 1843-1907, fue un ingeniero francés y James Clerk Maxwell, 1831-1879, fue un famoso científico británico).

7.5 Mohr, O., “Úber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes,” en *Zivilingenieur*, 1882, p. 113.

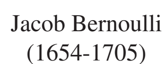
8.1 Karl Culmann (1821-1881) fue un famoso ingeniero alemán ferroviario y de puentes. De 1849 a 1850 pasó dos años viajando por Inglaterra y Estados Unidos para estudiar puentes y después escribió al respecto en Alemania. Diseñó muchas estructuras de puentes en Europa y en 1855 se desempeñó como profesor de estructuras en el recién establecido Zürich Polytechnicum. Culmann hizo muchas innovaciones en los métodos gráficos y escribió el primer libro sobre estática gráfica, publicado en Zürich en 1866. Las trayectorias de esfuerzos son uno de los temas principales presentados en este libro (consulte la referencia 1.1, pp. 190-197).

9.1 El trabajo de Jacob Bernoulli, Euler y muchos otros con respecto a las curvas elásticas se describe en la referencia 1.1. pp. 27 y 30-36 y en la referencia 1.2. Otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), propuso a Euler que obtuviera la ecuación diferencial de la curva de deflexión minimizando la energía de deformación, lo que hizo Euler. Daniel Bernoulli, sobrino de Jacob Bernoulli, es bien reconocido por su trabajo en hidrodinámica, teoría cinética de gases, vibraciones de vigas y otros temas. Su padre, John Bernoulli (1667-1748), hermano menor de Jacob, fue un matemático y científico igualmente famoso que formuló por primera vez el principio de los desplazamientos virtuales y resolvió el problema de la braquistócrona y estableció la regla para obtener el valor límite de la fracción cuando tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Comunicó esta última regla a G. F. A. de L’Hôpital (1661-1704), noble francés que escribió el primer libro sobre cálculo (1696) e incluyó este teorema, que hoy conocemos como la *regla de L’Hôpital*.

El sobrino de Daniel, Jacob Bernoulli (1759-1789), también conocido como James o Jacques, fue un precursor en la teoría de la flexión y vibraciones en placas.

En los libros sobre historia de las matemáticas se puede encontrar mucha información interesante acerca de los mu-





Jacob Bernoulli
(1654-1705)

chos miembros prominentes de la familia Bernoulli, así como de otros precursores en mecánica y matemáticas.

9.2 Castigliano, A., *Théorie de l´équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, A. F. Negro, Turín, 1879, 480 páginas.

Nota: en este libro Castigliano presentó en forma muy completa muchos conceptos fundamentales y principios del análisis estructural. Aunque Castigliano era italiano, escribió este libro en francés a fin de abarcar una audiencia mayor para su trabajo. Fue traducido al alemán e inglés (referencias 9.3 y 9.4). La traducción al inglés fue reproducida en 1966 por Dover Publications y tiene un valor especial debido al material introductorio de Gunhard A. Oravas (referencias 9.5 y 9.6.)

El primero y segundo teoremas de Castigliano aparecen en las páginas 15-16 de la edición de 1966 de su libro. Los identificó como parte 1 y parte 2 del "Teorema de los coeficientes diferenciales del trabajo interno." En forma matemática, aparecen en su libro como

$$F_p = \frac{dW_i}{dr_p} \qquad \text{y} \qquad r_p = \frac{dW_i}{dF_p}$$

Donde W_i es el trabajo interno (o la energía de deformación), F_p representa cualquiera de las fuerzas externas y r_p es el desplazamiento del punto de aplicación de F_p.

Castigliano no reclamó la autoría completa del primer teorema, si bien declaró en el prólogo de su libro que su presentación y demostración eran más generales que cualesquiera otras publicadas antes. El segundo teorema era su propuesta y fue parte de su tesis para obtener el grado de ingeniero civil en el Polytechnic Institute of Turín en 1873.

Carlo Alberto Pio Castigliano nació en una familia pobre en Asti en 1847 y murió de neumonía en 1884, en la cumbre de su productividad. La historia de su vida la narra Oravas en la introducción de la edición de 1966 donde también se presenta una bibliografía de los trabajos de Castigliano y una lista de sus distinciones y premios. Sus contribuciones también están documentadas en las referencias 2.3 y 1.1. Firmaba sus escritos con el nombre de Alberto Castigliano.

9.3 Hauff, E., *Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung*, Carl Gerold's Sohn, Vienna, 1886. (Una traducción del libro de Castigliano, referencia 9.2.)

9.4 Andrews, E. S., *Elastic Stresses in Structures*, Scott, Greenwood and Son, Londres, 1919. (Una traducción del libro de Castigliano, referencia 9.2.)

9.5 Castiglinao, C. A. P., *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, traducido por E. S. Andrews, con una nueva introducción y una sección biográfica con retratos de G. A. Oravas, Dover Publications, Inc, Nueva York, 1966. (Una reimpresión de la referencia 9.4, pero con la adición de material histórico por Oravas.)

9.6 Oravas, G. A., "Historical Review of Extremum Principles in Elastomechanics", una sección introductoria (pp. xx-xxvi) del libro, *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, por C. A. P. Castigliano, traducida por E. S. Andrews, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1966 (referencia 9.5).

9.7 Macaulay, W. H., "Note on the deflection of beams", en *The Messenger of Mathematics*, vol. XLVIII, mayo 1918-abril 1919, Cambridge, 1919, pp. 129-130.

Nota: William Herrick Macaulay, 1853-1936, fue un matemático y miembro del King´s College, Cambridge. En su artículo definió "como $\{f(x)\}_a$ a una función de x que es cero cuando x es menor que a e igual a $f(x)$ cuando x es igual o mayor que a". Luego demostró cómo usar esta función al determinar deflexiones de vigas. Por desgracia, no hizo ninguna referencia al trabajo anterior de Clebsch y Föppl; consulte las referencias 9.8 a 9.10.

9.8 Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, B. G. Teubner, Leipzig, 1862, 424 páginas. (Traducido al francés y anotado por Saint-Venant, *Théorie de l'Élasticité des Corps Solides*, París, 1883. Las notas de Saint-Venant aumentaron tres veces el tamaño del libro de Clebsch).

Nota: el método para determinar deflexiones de vigas por integración a través de los puntos de discontinuidad se presentó primero en este libro; consulte la referencia 1.1, pp. 258-259 y la referencia 9.10. Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1933-1872, fue un matemático y científico alemán. Fue profesor de ingeniería en el Karlsrube Polytechnicum y posteriormente profesor de matemáticas en la Göttingen University.

9.9 Föppl, A., *Vorlesungen üeber technische Mechanik*, Vol. III: Festigkeitslehre, B. G. Teubner, Leipsig, 1897.

Nota: en este libro, Föppl amplió el método de Clebsch para determinar deflexiones de vigas. August Föppl, 1854-1924, fue un matemático e ingeniero alemán. Fue profesor en la University of Leipzig y después en el Polytechnic Institute de Munich.

9.10 Pilkey, W. D., "Clebsch´s method for beam deflections", en *Journal of Engineering Education*, Vol. 54, Núm. 5, enero de 1964, pp. 170-174. Este artículo describe el método de Clebsch y da un recuento histórico muy completo, con muchas referencias.

10.1 Zaslavsky, A., "Beams on immovable supports", en *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol. 25, 1965, pp. 353-362.

11.1 Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes…", en apéndice I, "De curvis elasticis", Bousquet, Lausana y Ginebra, 1744. (Traducción al inglés: Oldfather, W. A., Ellis, C. A. y Brown, D. M., *Isis*, Vol. 20, 1933, pp. 72-160. También reproducido en *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie 1, Vol. 24, 1952).

Nota: Leonhard Euler (1707-1783) hizo muchas aportaciones notables a las matemáticas y a la mecánica y es considerado por la mayoría de los matemáticos como el matemático más productivo de todos los tiempos. Su nombre aparece de manera repetida en los libros actuales; por ejemplo, en mecánica tenemos las ecuaciones de Euler del movimiento de un cuerpo rígido, los ángulos de Euler, las ecuaciones de Euler del flujo de fluidos, la carga de Euler en pandeo de columnas y mucho más; en matemáticas encontramos la famosa constante de Euler, así como los números de Euler, la identidad de Euler ($e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta$), la fórmula de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$), la ecuación diferencial de Euler, la ecuación de Euler de un problema variacional, la fórmula de Euler para cuadratura, la fórmula de la sumatoria de Euler, el teorema de Euler de funciones homogéneas, las integrales de Euler y los cuadrados de Euler (arreglos cuadrados de números que poseen propiedades especiales).



Leonhard Euler
(1707-1783)

En mecánica aplicada, Euler fue el primero en deducir la fórmula para la carga crítica de pandeo de una columna ideal esbelta y el primero en resolver el problema de la elástica. Este trabajo fue publicado en 1744, como se citó antes. Estudió una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior. Después, amplió su trabajo sobre columnas (referencia 11.2). Los numerosos libros de Euler incluyen tratados sobre mecánica celeste, dinámica e hidrodinámica y sus artículos incluyen temas como vibraciones de vigas y placas y estructuras estáticamente indeterminadas.

En el campo de las matemáticas, Euler hizo contribuciones extraordinarias a la trigonometría, álgebra, teoría de números, cálculo diferencial e integral, series infinitas, geometría analítica, ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones y muchos otros temas. Fue el primero en concebir los valores trigonométricos como razones de números y el primero en presentar la famosa ecuación $e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. En sus libros sobre matemáticas, todos los cuales fueron referencias clásicas para muchas generaciones, encontramos el primer desarrollo del cálculo de variaciones así como aspectos intrigantes como la demostración del "último teorema" de Fermat para $n = 3$ y $n = 4$. Euler también resolvió el célebre problema de los siete puentes de Königsberg, un problema de topología, otro campo en el que fue precursor.

Euler nació cerca de Basilea, Suiza y asistió a la Universidad de Basilea, donde tuvo como maestro a John Bernoulli (1667-1748). De 1727 a 1741 vivió y trabajó en San Petersburgo, donde adquirió gran reputación como matemático. En 1741 se mudó a Berlín por invitación de Federico el Grande, Rey de Prusia. Continuó su investigación matemática en Berlín hasta el año de 1766, cuando regresó a San Petersburgo a petición de Catalina II, Emperatriz de Rusia.

Euler continuó su trabajo prolífico hasta su muerte en San Petersburgo a la edad de 76 años; durante este periodo final de su vida escribió más de 400 artículos. En toda su vida el número de libros y artículos que escribió fue 886; dejó muchos manuscritos al morir que fueron publicados por la Academia Rusa de Ciencias en San Petersburgo 47 años después. Todo esto a pesar del hecho de sufrir la ceguera de un ojo en 1735 y del otro en 1766. La historia de la vida de Euler se narra en la referencia 1.1, pp. 28-30 y algunas de sus contribuciones a la mecánica se describen en la referencia 1.1, pp. 30-36 (consulte también las referencias 1.2, 1.3, 2.2 y 5.3).

11.2 Euler, L., "Sur la force des colonnes", en *Historie de L'Académie Royale des Sciences en Belles Lettres*, 1757, publicado en *Memoires* de la Académie, Vol. 13, Berlín, 1759, pp. 252-282. (Consulte la referencia 11.3 donde se encuentra una traducción y un análisis de este artículo.)

11.3 Van den Broek, J. A., "Euler's classic paper 'On the strength of columms'", en *American Journal of Physics*, Vol. 15, Núm. 4, julio-agosto de 1947, pp. 309-318.

11.4 Keller, J. B., "The shape of the strongest column", en *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, Núm. 4, 1960, pp. 275-285.

11.5 Young, D. H., "Rational design of steel columns", en *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 101, 1936, pp. 422-451. *Nota:* Donovan Harold Young (1904-1980) fue un destacado educador en ingeniería. Fue profesor en la University of Michigan y después en la Stanford University. Sus cinco libros en el campo de la mecánica aplicada, escritos con S. P. Timoshenko, se tradujeron a muchos idiomas y se usaron en todo el mundo.

11.6 Lamarle, A. H. E., "Mémoire sur la flexion du bois", en *Annales des Travaux Publiques de Belgique*, parte 1, Vol. 3, 1845, pp. 1-64 y parte 2, Vol. 4, 1846, pp. 1-36. *Nota:* Anatole Henri Ernest Lamarle (1806-1875) fue ingeniero y profesor. Nació en Calais, estudió en París y fue profesor en la Universi-

ty of Ghent, Bélgica, para conocer su trabajo sobre columnas, consulte la referencia 1.1, p. 208.

11.7 Considère, A., "Résistance des pièces comprimées", en *Congrès International des Procédés de Construction*, París, septiembre 9-14, 1889, memorias publicadas por la Librairie Polytechnique, París, Vol. 3, 1891, p. 371. *Nota:* Armand Gabriel Considère (1841-1914) fue un ingeniero francés.

11.8 Engesser, F., "Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe", en *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, Vol. 35, Núm. 4, 1889, pp. 455-462. *Nota:* Friedrich Engesser (1848-1931) fue un ingeniero ferroviario y de puentes alemán. Después, fue profesor en el Karlsruhe Polytechnical Institute, donde hizo importantes avances en la teoría de estructuras, en especial en pandeo y métodos energéticos. Para conocer su trabajo sobre columnas, consulte la referencia 1.1, pp. 292 y 297-299.

11.9 Engeseer, F., "Knickfragen", en *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 25, Núm. 13, marzo 30, 1895, pp. 88-90.

11.10 Jasinski, F., "Noch ein Wort den 'Knickfragen'", en *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 25, Núm. 25, junio 22, de 1895, pp. 172-175. *Nota:* Félix S. Jasinski (1856-1899) nació en Varsovia y estudio en Rusia. Fue profesor en el Instituto de Ingeniería de caminos de Comunicación en San Petersburgo.

11.11 Engeseer, F., "Ueber Knickfragen", en *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 26, Núm. 4, julio 27 de 1895, pp. 24-26.

11.12 Von Kármán, T., "Die Knickfestigkeit gerader Stäbe", en *Physikalische Zeitschrift*, Vol. 9, Núm. 4, 1908, pp. 136-140 (este artículo también aparece en el Vol. I de la referencia 11.14).

Nota: Theodore von Kármán (1881-1963) nació en Hungría y después trabajó en la University of Göttingen en el campo de la aerodinámica. Después de su arribo en 1929 a Estados Unidos fundó el Jet Propulsion Laboratory y fue precursor en la resolución de problemas de aeronáutica y cohetes espaciales. Su investigación también incluyó el pandeo inelástico de columnas y la estabilidad de cascarones.

11.13 Von Kármán, T., "Untersuchungen über Knickfestigkeit", en *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieuwesens, Verein Deutscher Ingenieure,* Berlín, Heft 81, 1910 (este artículo también aparece en la referencia 11.14).

11.14 *Collected Works of Theodore von Kármán*, Vols. I-IV, Butterworths Scientific Publications, Londres, 1956.

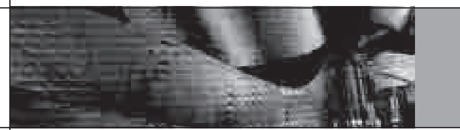
11.15 Shanley, F. R., "The Column paradox", en *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 13, Núm. 12, diciembre de 1946, p. 678. *Nota:* Francis Reynolds Shanley (1904-1968) fue profesor de ingeniería aeronáutica en la University of California en Los Ángeles.

11.16 Shanley, F. R., "Inelastic column theory", en *ibid.,* Vol. 14, Núm. 5, mayo de 1947, pp. 261-267.

11.17 Hoff, N. J., "Buckling and Stability", en The Forty-First Wilbur Wright Memorial Lecture, en *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 58, enero de 1954, pp. 3-52.

11.18 Hoff, N. J., "The idealized column", en *Ingenieur-Archiv*, Vol. 28, 1959 (Festschrift Richard Grammel), pp. 89-98.

11.19 Johnston, B. G., "Column buckling theory: Historical highlights", en *Journal of Structural Engineering*, Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 109, Núm. 9, septiembre de 1983, pp. 2086-2096.



A

Sistemas de unidades y factores de conversión

A.1 SISTEMAS DE UNIDADES

Los sistemas de medición han sido una necesidad desde que la humanidad empezó a construir y comerciar, y cada cultura antigua desarrolló algún tipo de sistema de medición para adecuarlo a sus necesidades. La estandarización de unidades tuvo lugar de manera gradual durante siglos, a menudo mediante edictos reales. El desarrollo del **Sistema Imperial Británico** a partir de estándares de medición anteriores inició en el siglo XIII y para el siglo XVIII ya estaba bien establecido. El sistema británico se difundió a muchos lugares del mundo, incluyendo Estados Unidos, mediante el comercio y la colonización. En Estados Unidos el sistema evolucionó gradualmente en el **Sistema Acostumbrado en USA (USCS)** que aún es de uso común en la actualidad.

El concepto del **sistema métrico** se originó en Francia hace aproximadamente 300 años y se formalizó alrededor de 1790, durante la época de la Revolución Francesa. Francia ordenó el uso del sistema métrico en 1840 y desde entonces muchos otros países han hecho lo mismo. En 1866 el Congreso de Estados Unidos legalizó el sistema métrico, pero sin hacerlo obligatorio.

Cuando el sistema métrico sufrió una revisión importante en la década de 1950 se creó un nuevo sistema de unidades que fue adoptado oficialmente en 1960 y nombrado **Sistema Internacional de Unidades** (Systéme International d'Unités), a este sistema nuevo se le refiere como **SI**. Aunque algunas unidades SI son las mismas que en el sistema métrico anterior, el sistema SI tiene muchos aspectos y simplificaciones nuevos. Por lo que el SI es un sistema métrico mejorado.

La longitud, el tiempo, la masa y la fuerza son los conceptos básicos de la mecánica para los cuales se necesitan unidades de medición. Sin embargo, sólo tres de estas cantidades son independientes dado que las cuatro están relacionadas por la segunda ley del movimiento de Newton:

$$F = ma \tag{A.1}$$

en donde F es la fuerza que actúa sobre una partícula, m es la masa de la partícula y a es su aceleración. Como la aceleración tiene unidades de longitud divididas entre el tiempo al cuadrado, las cuatro cantidades están comprendidas en la segunda ley.

El Sistema Internacional de Unidades, al igual que el sistema métrico, se basa en longitud, tiempo y masa como cantidades fundamentales. En estos sistemas la fuerza de deduce de la segunda ley de Newton. Por tanto, la unidad de fuerza se expresa en términos de las unidades básicas de longitud, tiempo y masa, como se muestra en la siguiente sección.

El SI está clasificado como un **sistema absoluto de unidades** debido a que las mediciones de las tres cantidades fundamentales son independientes de los lugares

donde se hagan las mediciones; es decir, no dependen de los efectos de la gravedad. Por tanto, las unidades SI para longitud, tiempo y masa se deben emplear en cualquier parte en la Tierra, en el espacio, en la Luna o incluso en otro planeta. Esta es una de las razones por las cuales el sistema métrico siempre se ha preferido para el trabajo científico.

El Sistema Imperial Británico y el Sistema Acostumbrado en USA se basan en longitud, tiempo y fuerza como las cantidades fundamentales y la masa se deduce de la segunda ley. Por tanto, en estos sistemas la unidad de masa se expresa en términos de las unidades de longitud, tiempo y fuerza. La unidad de fuerza se define como la fuerza requerida para dar a cierta masa estándar una aceleración igual a la aceleración de la gravedad, lo que significa que la unidad de fuerza varía con la ubicación y la altitud. Por esta razón ambos sistemas se denominan **sistemas gravitatorios de unidades**. Estos sistemas fueron los primeros en evolucionar, quizá debido a que el peso es una propiedad discernible fácilmente y a que las variaciones en la atracción gravitatoria no eran notables. Sin embargo, es claro que en el mundo tecnológico moderno es preferible un sistema absoluto.

A.2 UNIDADES SI

El Sistema Internacional de Unidades tiene siete **unidades básicas** de las cuales se derivan todas las otras unidades. Las unidades base importantes en la mecánica son el metro (m) para longitud, segundo (s) para tiempo y kilogramo (kg) para masa. Otras unidades SI tienen que ver con la temperatura, corriente eléctrica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa.

El **metro** originalmente se definió como la diezmillonésima parte de la distancia del Polo Norte al Ecuador. Más tarde, esta distancia se convirtió en un patrón físico y durante muchos años el patrón para el metro fue la distancia entre dos marcas en una barra de platino-iridio guardada en las oficinas centrales de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures) en Sèvres, un suburbio en el distrito occidental de París, Francia.

Debido a las imprecisiones inherentes en el uso de una barra física como un patrón, la definición del metro se cambió en 1983 a la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299,792,458 de segundo.* Las ventajas de este patón "natural" son que no está sujeto a daño físico y se puede reproducir en laboratorios en cualquier parte del mundo.

El **segundo** originalmente se definió como 1/86,400 de un día medio solar (24 horas es igual a 86,400 segundos). Sin embargo, desde 1967 un reloj atómico muy preciso ha fijado el patrón y en la actualidad un segundo se define como la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133. (La mayoría de los ingenieros quizá prefieran la definición original en vez de la nueva, que no ha cambiado notablemente al segundo pero es necesaria debido a que la velocidad de rotación de la Tierra disminuye gradualmente.)

De las siete unidades base en el SI, el **kilogramo** es la única que aún se define mediante un objeto físico. Dado que la masa de un objeto sólo se puede determinar comparándola de manera experimental con la masa de algún otro objeto, se necesita un patrón físico. Para este fin, un cilindro de platino-iridio de un kilogramo, denominado Kilogramo Prototipo Internacional (KPI), es conservado por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres. (En la actualidad se quiere definir el

*Al calcular el recíproco de este número se obtiene la velocidad de la luz en el vacío (299,792,458 metros por segundo).

kilogramo en términos de una constante fundamental, como el número de Avogadro, para eliminar de esta manera la necesidad de un objeto físico.)

Otras unidades empleadas en mecánica, denominadas **unidades derivadas**, se expresan en términos de las unidades base de metro, segundo y kilogramo. Por ejemplo, la unidad de **fuerza** es el **newton**, que se define como la fuerza requerida para impartir una aceleración de un metro por segundo al cuadrado a una masa de un kilogramo.* De la segunda ley de Newton ($F = ma$), podemos derivar la unidad de fuerza en términos de las unidades base:

1 newton = (1 kilogramo)(1 metro por segundo al cuadrado)

Por tanto, el newton (N) está dado en términos de las unidades base por la fórmula

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad \text{(A.2)}$$

Para proporcionar un punto de referencia, observamos que una manzana pequeña pesa aproximadamente un newton.

La unidad de **trabajo** y **energía** es el **joule**, que se define como el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza de un newton se desplaza una distancia de un metro en la dirección de la fuerza.** Por tanto,

1 joule = (1 newton)(1 metro) = 1 newton metro

o

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m} \qquad \text{(A.3)}$$

Al levantar este libro del escritorio al nivel de los ojos, realiza un trabajo de aproximadamente un joule y al subir un tramo de escaleras, realiza un trabajo de aproximadamente 200 joules.

Los nombres, símbolos y fórmulas para unidades SI de importancia en mecánica se dan en la **tabla A.1.** Algunas de las unidades derivadas tienen nombres especiales, como newton, joule, hertz, watt y pascal. Estas unidades se llaman así en honor de personas notables en la ciencia y la ingeniería y se representan mediante letras mayúsculas (N, J, Hz, W y Pa), aunque los nombres de las unidades mismas se escriben con letras minúsculas. Otras unidades derivadas no tienen nombres especiales (por ejemplo, las unidades de la aceleración, el área y la densidad) y se deben expresar en términos de las unidades base y de otras unidades derivadas.

Las relaciones entre varias unidades SI y algunas unidades métricas de uso común se dan en la **tabla A.2.** Las unidades métricas como la dina, el erg, el gal y el micrón ya no se recomiendan para el uso en ingeniería o científico.

El **peso** de un objeto es la **fuerza de gravedad** que actúa sobre dicho objeto y, por tanto, el peso se mide en newtons. Dado que la fuerza de la gravedad depende de la altitud y posición sobre la Tierra, el peso no es una propiedad invariable de un cuerpo. Además, el peso de un cuerpo medido por una balanza de resorte no sólo se ve afectado por la atracción gravitatoria de la Tierra, sino también por los efectos centrífugos asociados con la rotación de ésta.

En consecuencia, debemos reconocer dos tipos de peso, **peso absoluto** y **peso aparente**. El primero se basa sólo en la fuerza de la gravedad y el segundo incluye los efectos de la rotación. Por tanto, el peso aparente siempre es menor que el peso absoluto (excepto en los polos). El peso aparente, que es el peso de un objeto medido con una balanza de resorte, es el peso que acostumbramos a emplear en los negocios y en la vida cotidiana; el peso absoluto se utiliza en astroingeniería y en ciertos tipos de trabajo científico. En este libro, el término "peso" siempre significará "peso aparente."

---

*Sir Isaac Newton (1642-1727) fue un matemático, físico y astrónomo inglés que inventó el cálculo y descubrió las leyes del movimiento y de la gravitación.

**James Prescott Joule (1818-1889) fue un físico inglés que desarrolló un método para determinar el equivalente mecánico del calor.

TABLA A.1 UNIDADES PRINCIPALES EMPLEADAS EN MECÁNICA

Cantidad	Sistema Internacional (SI)			Sistema Acostumbrado en USA (USCS)		
	Unidad	Símbolo	Fórmula	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración (angular)	radián por segundo cuadrado		rad/s^2	radián por segundo cuadrado		rad/s^2
Aceleración (lineal)	metro por segundo cuadrado		m/s^2	pie por segundo cuadrado		ft/s^2
Área	metro cuadrado		m^2	pie cuadrado		ft^2
Densidad (masa) (Masa específica)	kilogramo por metro cúbico		kg/m^3	slug por pie cúbico		$slug/ft^3$
Densidad (peso) (Peso específico)	newton por metro cúbico		N/m^3	libra por pie cúbico	pcfl	b/ft^3
Energía; trabajo	joule	J	N·m	pie-libra		ft-lb
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	libra	lb	(unidad base)
Fuerza por unidad de longitud (Intensidad de fuerza)	newton por metro		N/m	libra por pie		lb/ft
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	hertz	Hz	s^{-1}
Longitud	metro	m	(unidad base)	pie	ft	(unidad base)
Masa	kilogramo	kg	(unidad base)	slug		$lb\text{-}s^2/ft$
Momento de una fuerza; par de torsión	newton metro		N·m	libra-pie		lb-ft
Momento de inercia (área)	metro a la cuarta potencia		m^4	pulgada a la cuarta potencia		in^4
Momento de inercia (masa)	kilogramo metro cuadrado		$kg \cdot m^2$	slug pie cuadrado		$slug\text{-}ft^2$
Potencia	watt	W	J/s (N·m/s)	pie-libra por segundo		ft-lb/s
Presión	pascal	Pa	N/m^2	libra por pie cuadrado	psf	lb/ft^2
Módulo de sección	metro al cubo		m^3	pulgada al cubo		in^3
Esfuerzo	pascal	Pa	N/m^2	libra por pulgada cuadrada	psi	lb/in^2
Tiempo	segundo	s		segundo	s	(unidad base)
Velocidad (angular)	radián por segundo		rad/s	radián por segundo		rad/s
Velocidad (lineal)	metro por segundo		m/s	pie por segundo	fps	ft/s
Volumen (líquidos)	litro	L	10^{-3} m^3	galón	gal	231 in^3
Volumen (sólidos)	metro cúbico		m^3	pie cúbico	cf	ft^3

Notas: 1 joule (J) = 1 newton metro (N·m) = 1 watt segundo (W·s)
1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo (cps) o 1 revolución por segundo (rev/s)
1 watt (W) = 1 joule por segundo (J/s) = 1 newton metro por segundo (N·m/s)
1 pascal (Pa) 0 1 newton por metro cuadrado (N/m^2)
1 litro (L) = 0.001 metro cúbico (m^3) = 1000 centímetros cúbicos (cm^3)

La **aceleración de la gravedad**, denotada con la letra g, es directamente proporcional a la fuerza de gravedad y, por tanto, también depende de la posición. Por el contrario, la **masa** es una medida de la cantidad de material en un cuerpo y no cambia con la posición.

La relación fundamental entre peso, masa y aceleración de la gravedad se puede obtener con la segunda ley de Newton ($F = ma$), que en este caso se expresa como

$$W = mg \tag{A.4}$$

En esta ecuación W es el peso en newtons (N), m es la masa en kilogramos (kg) y g es la aceleración de la gravedad en metros por segundo al cuadrado (m/s^2). La ecuación (A.4) muestra que *un cuerpo con una masa de un kilogramo tiene un peso en newtons numéricamente igual a g.* Los valores del peso W y de la gravedad g dependen de muchos factores, incluyendo la latitud y la elevación. Sin embargo, para cálculos científicos se ha establecido un valor estándar internacional de

$$g = 9.806650 \text{ m/s}^2 \tag{A.5}$$

TABLA A.2 UNIDADES ADICIONALES DE USO COMÚN

Unidades SI y métricas	
1 gal = 1 centímetro por segundo cuadrado (cm/s^2) por ejemplo, $g \approx 981$ gals 1 área = 100 metros cuadrados (m^2) 1 hectárea (ha) = 10,000 metros cuadrados (m^2) 1 erg = 10^{-7} joules (J) 1 kilowatt-hora (kWh) = 3.6 megajoules (MJ) 1 dina = 10^{-5} newtons (N) 1 kilogramo-fuerza (kgf) = 1 kilopondio (kp) = 9.80665 newtons (N)	1 centímetro (cm) = 10^{-2} metros (m) 1 centímetro cúbico (cm^3) = 1 mililitro (mL) 1 micrón = 1 micrómetro (μm) = 10^{-6} metros (m) 1 gramo (g) = 10^{-3} kilogramos (kg) 1 ton métrica (t) = 1 megagramo (Mg) = 1000 kilogramos (kg) 1 watt (W) = 10^7 ergs por segundo (erg/s) 1 dina por centímetro cuadrado ($dina/cm^2$) = 10^{-1} pascales (Pa) 1 bar = 10^5 pascales (Pa) 1 estéreo = 1 metro cúbico (m^3)
Unidades USCS e imperiales	
1 kilowatt-hora (kWh) = 2,655,220 pie-libra (ft-lb) 1 unidad térmica británica (Btu) = 778.171 pie-libras (ft-lb) 1 kip (k) = 1000 libras (lb) 1 onza (oz) = 1/16 libra (lb) 1 ton = 2000 libras (lb) 1 ton imperial (o ton larga) = 2240 libras (lb) 1 poundal (pdl) = 0.0310810 libras (lb) = 0.138255 newtons (N) 1 pulgada (in) = 1/12 pie (ft) 1 mil = 0.001 pulgada (in) 1 yarda (yd) = 3 pies (ft) 1 milla = 5280 pies (ft) 1 caballo de potencia (hp) = 550 pie-libras por segundo (ft-lb/s)	1 kilowatt (kW) = 737.562 pie-libras por segundo (ft-lb/s) = 1.34102 caballos de potencia (hp) 1 libra por pulgada cuadrada (psi) = 144 libras por pie cuadrado (psf) 1 revolución por minuto (rpm) = $2\pi/60$ radianes por segundo (rard/s) 1 milla por hora (mph) = 22/15 pies por segundo (fps) 1 galón (gal) = 231 pulgadas cúbicas (in^3) 1 cuarto (qt) = 2 pintas = 1/4 galón (gal) 1 pie cúbico (cf) = 576/77 galones = 7.48052 galones (gal) 1 galón imperial = 277.420 pulgadas cúbicas (in^3)

Este valor se debe emplear en condiciones estándar de elevación y latitud (a nivel del mar a una latitud de aproximadamente 45°). El valor recomendado de g para fines de ingeniería ordinarios sobre o cerca de la superficie de la Tierra es

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \tag{A.6}$$

Por tanto, un cuerpo con una masa de un kilogramo tiene un peso de 9.81 newtons.

La **presión atmosférica** varía considerablemente con las condiciones climáticas, el lugar, la altitud y otros factores. En consecuencia, se ha definido un valor internacional estándar para la presión en la superficie de la Tierra:

$$1 \text{ atmósfera estándar} = 101.325 \text{ kilopascales} \tag{A.7}$$

El valor simplificado siguiente se recomienda para el trabajo de ingeniería ordinario:

$$1 \text{ atmósfera estándar} = 101 \text{ kPa} \tag{A.8}$$

Por supuesto, los valores dados en las ecuaciones (A.7) y (A.8) deben emplearse en los cálculos y no representan la presión ambiental real en una localidad dada cualquiera.

Un concepto básico en mecánica es el **momento** o **par de torsión**, especialmente el momento de una fuerza y el momento de un par de torsión. El momento se expresa en unidades de fuerza por longitud, o newton metro (N·m). Otros conceptos importantes en mecánica son **trabajo** y **energía**, que se expresan en joules, una unidad derivada que tiene las mismas unidades (newton metro) que la unidad de momento. Sin embargo, el momento es una cantidad claramente diferente del trabajo o la energía, y el joule *nunca* se debe emplear para momentos o pares de torsión.

La **frecuencia** se mide en unidades de **hertz** (Hz), una unidad derivada igual al recíproco del segundo (1/s o s^{-1}). El hertz se define como la frecuencia de un fenómeno periódico para el cual el periodo es un segundo; entonces, es equivalente a un ciclo por segundo (cps) o una revolución por segundo (rev/s). Se usa comúnmente para las vibraciones mecánicas, ondas sonoras y ondas electromagnéticas, y en ocasiones se emplea para la frecuencia rotacional en vez de las unidades tradicionales de revolución por minuto (rpm) y revolución por segundo (rev/s).[*]

Otras dos unidades derivadas que tienen nombres especiales en SI son el **watt** (W) y el **pascal** (Pa). El watt es la unidad de potencia, que es trabajo por unidad de tiempo, y un watt es igual a un joule por segundo (J/s) o un newton metro por segundo (N·m/s). El pascal es la unidad de presión y esfuerzo, o fuerza por unidad de área, y es igual a un newton por metro cuadrado (N/m^2).[**]

El **litro** no es una unidad SI aceptada, no obstante se usa tan comúnmente que no se puede descartar fácilmente. Por tanto, el SI permite su uso en condiciones limitadas para la capacidad volumétrica, medición seca y medición líquida. Los símbolos que se permiten son L y l para litro en el SI, pero en Estados Unidos sólo se permite el uso de L (para evitar confusión con el número 1). Los únicos prefijos permitidos con el litro son mili y micro.

Las **cargas sobre estructuras**, debidas a la gravedad o a otras acciones, usualmente se expresan en unidades de fuerza como newtons, newtons por metro o pascales (newtons por metro cuadrado). Ejemplos de cargas son una carga concentrada de 25 kN que actúa sobre un eje, una carga distribuida uniformemente con intensidad

---

[*]Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) fue un físico alemán que descubrió las ondas electromagnéticas y demostró que las ondas de luz y las ondas electromagnéticas son idénticas.

[**]James Watt (1736-1819) fue un inventor e ingeniero escocés que desarrolló un motor de vapor práctico y descubrió la composición del agua. Watt también propuso el término "caballo de potencia." Blaise Pascal (1623-1662) fue un matemático y filósofo francés. Inventó la teoría de la probabilidad, construyó la primera máquina calculadora y demostró experimentalmente que la presión atmosférica varía con la altitud.

de 800 N/m que actúa sobre una viga pequeña y presión de aire con intensidad 2.1 kPa que actúa sobre el ala de un aeroplano.

Sin embargo, hay una circunstancia en SI en la cual se permite expresar una carga en unidades de masa. Si la carga que actúa sobre una estructura se produce por la gravedad actuando sobre una masa, entonces esa carga se puede expresar en unidades de masa (kilogramos, kilogramos por metro o kilogramos por metro cuadrado). El procedimiento usual en esos casos es convertir la carga a unidades de fuerza multiplicándolo por la aceleración de la gravedad ($g = 9.81\ m/s^2$).

Prefijos SI

Los múltiplos y submúltiplos de unidades SI (tanto unidades base como unidades derivadas) se crean añadiendo prefijos a las unidades (consulte la **tabla A.3** donde se presenta una lista de prefijos). El uso de un prefijo evita manejar números demasiado grandes o pequeños. La regla general es que los prefijos se deben emplear para mantener los números en el intervalo de 0.1 a 1000.

Todos los prefijos recomendados cambian el tamaño de la cantidad por un múltiplo o submúltiplo de tres. De manera similar, cuando se utilizan potencias de 10 como multiplicadores, los exponentes de 10 deben ser múltiplos de tres (por ejemplo 40×10^3 N es satisfactorio pero 400×10^2 N no lo es). Además, el exponente sobre una unidad con un prefijo se refiere a toda la unidad; por ejemplo, el símbolo mm^2 significa $(mm)^2$ y no $m(m)^2$.

Manera de escribir las unidades SI

Las reglas para escribir las unidades SI se han establecido por acuerdo internacional y las más importantes se describen a continuación. Ejemplos de las reglas se muestran entre paréntesis.

(1) Las unidades siempre se escriben como símbolos (kg) en ecuaciones y cálculos numéricos. En el texto las unidades se escriben como palabras (kilogramos) a menos que se reporten valores numéricos, caso en el cual se pueden emplear palabras o símbolos (12 kg o 12 kilogramos).

(2) La multiplicación se muestra en una unidad compuesta por medio de un punto elevado (kN·m). Cuando la unidad se escribe con palabras, no se requiere el punto (kilonewton metro).

TABLA A.3 PREFIJOS SI

Prefijo	Símbolo	Factor de multiplicación		
tera	T	10^{12}	=	1,000,000,000,000
giga	G	10^{9}	=	1,000,000,000
mega	M	10^{6}	=	1,000,000
kilo	k	10^{3}	=	1,000
hecto	h	10^{2}	=	100
deca	da	10^{1}	=	10
deci	d	10^{-1}	=	0.1
centi	c	10^{-2}	=	0.01
mili	m	10^{-3}	=	0.001
micro	μ	10^{-6}	=	0.000 001
nano	n	10^{-9}	=	0.000 000 001
pico	p	10^{-12}	=	0.000 000 000 001

Nota: en el SI no se recomienda utilizar los prefijos hecto, deca, deci y centi.

(3) La división se muestra en una unidad compuesta por una diagonal o multiplicando empleando un exponente negativo (m/s o $m \cdot s^{-1}$). Cuando la unidad se escribe en palabras, la diagonal siempre se reemplaza con “por” (metro por segundo).

(4) Siempre se emplea un espacio entre un número y sus unidades (200 Pa o 200 pascales) con la excepción del símbolo de grado (ya sea para ángulo o temperatura), en donde no se utiliza espacio entre el número y el símbolo (45°, 20°C).

(5) Las unidades y sus prefijos siempre se escriben en tipo romano (es decir, tipo vertical) y nunca en cursivas (tipo inclinado), aun cuando el texto aledaño esté en cursivas.

(6) Cuando se escriben con palabras, las unidades no llevan mayúsculas excepto al inicio de una oración o en textos en mayúsculas como un título. Cuando se escriben como símbolo, las unidades se escriben con mayúsculas cuando se derivan del nombre de una persona (N). Una excepción es el símbolo para litro, que puede ser L o bien l, pero se prefiere el uso de L para evitar confusión con el número 1. Además, algunos prefijos se escriben con mayúsculas cuando se usan en símbolos (MPa) pero no cuando se usan en palabras (megapascales).

(7) Cuando se escriben como palabras, las unidades son singulares o plurales según sea apropiado en el contexto (1 kilómetro, 20 kilómetros, 6 segundos). Cuando se escriben como símbolos, las unidades siempre son singulares (1 km, 20 km, 6 s). El plural de hertz es hertz; los plurales de otras unidades se forman de la manera acostumbrada (newtons, watts).

(8) Los prefijos no se utilizan en el denominador de una unidad compuesta. Una excepción es el kilogramo (kg), que es una unidad base y, por tanto, la letra “k” no se considera como un prefijo. Por ejemplo, podemos escribir kN/m pero no N/mm y podemos escribir J/kg pero no mJ/g.

A.3 UNIDADES INGLESAS HABITUALES

Las unidades de medición de uso tradicional en Estados Unidos nunca han sido obligatorias de manera oficial; de aquí que debido a la falta de un nombre mejor se denominan unidades “habituales”. En este sistema las **unidades base** de importancia para la mecánica son el pie (ft) para la longitud, el segundo (s) para el tiempo y la libra (lb) para la fuerza. El **pie** se define como

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m (exactamente)} \tag{A.9}$$

El **segundo** es igual que en el SI y se describió en la sección anterior.

La **libra** se define como la **fuerza** que impartirá a cierta masa una aceleración igual a la aceleración de la gravedad. En otras palabras, la libra es el peso de la masa estándar, que se define como 0.45359237 kg (exactamente). El peso de esta cantidad de masa (consulte la ecuación A.4) es

$$W = (0.45359237 \text{ kg})(9.806650 \text{ m/s}^2) = 4.448222 \text{ N}$$

en donde se utilizó el valor internacional estándar de g (consulte la ecuación A.5). Por tanto, la libra se define como sigue:

$$1 \text{ lb} = 4.448222 \text{ N} \tag{A.10}$$

que muestra que la libra (al igual que el pie) en realidad se define en términos de unidades SI.

La unidad de **masa** en el sistema inglés, denominada **slug**, es una unidad derivada que se define como la masa que será acelerada un pie por segundo al cuadrado

al actuar sobre ella una fuerza de una libra. Al escribir la segunda ley de Newton en la forma $m = F/a$, obtenemos

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ libra}}{1 \text{ ft/s}^2} \tag{A.11}$$

que muestra que el slug se expresa en términos de unidades base mediante la fórmula

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb-s}^2\text{/ft}$$

Para obtener la masa de un objeto de peso conocido, utilizamos la segunda ley en la forma

$$m = \frac{W}{g} \tag{A.12}$$

donde m es la masa en slugs, W es el peso en libras y g es la aceleración de la gravedad en pies por segundo al cuadrado.

Como se indicó antes, el valor de g depende de la posición, pero en los cálculos en los que la ubicación no es importante, se puede emplear el valor internacional estándar de g:

$$g = 32.1740 \text{ ft/s}^2 \tag{A.13}$$

Para fines ordinarios, el valor recomendado es

$$g = 32.2 \text{ ft/s}^2 \tag{A.14}$$

De las ecuaciones anteriores concluimos que un objeto con masa de 1 slug pesará 32.2 libras en la superficie de la Tierra.

Otra unidad inglesa de masa es la libra-masa (lbm), que es la masa de un objeto que pesa 1 libra, es decir, 1 lbm = 1/32.2 slug.

Como ya se mencionó, la **presión atmosférica** varía considerablemente con las condiciones locales; sin embargo, para muchos fines se puede utilizar el valor internacional estándar:

$$1 \text{ atmósfera estándar} = 14.6959 \text{ libras por pulgada cuadrada} \tag{A.15}$$

o, para trabajos ordinarios de ingeniería:

$$1 \text{ atmósfera estándar} = 14.7 \text{ psi} \tag{A.16}$$

Estos valores son para emplearse en cálculos y es obvio que no representan la presión atmosférica real.

La unidad inglesa de **trabajo** y **energía** es el **pie-libra** (ft-lb), que se define como el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza de una libra se desplaza una distancia de un pie en la dirección de la fuerza. La unidad de **momento** o **par de torsión** es la **libra-pie** (lb-ft), que proviene del hecho de que ese momento se expresa en unidades de fuerza por longitud. Aunque en la realidad las mismas unidades se aplican al trabajo, la energía y el momento, es práctica común utilizar la libra-pie para el momento y el pie-libra para el trabajo y la energía.

Los símbolos y las fórmulas para las unidades inglesas más importantes usadas en mecánica se dan en la **taba A.1.**

Muchas unidades inglesas adicionales de los sistemas inglés e imperial aparecen en la bibliografía sobre mecánica; algunas de estas unidades se dan en la parte inferior de la **tabla A.2**.

A.4 UNIDADES DE TEMPERATURA

La temperatura se mide en el SI con una unidad denominada kelvin (K) y la escala correspondiente es la **escala de temperatura Kelvin.** La escala Kelvin es una escala absoluta, que significa que su origen (cero kelvin o 0 K) está a una temperatura de cero absoluto, una temperatura teórica que se caracteriza por la ausencia completa de calor. En la escala Kelvin el agua se congela aproximadamente a 273 K y su punto de ebullición es aproximadamente a 373 K.

Para fines no científicos la **escala de temperatura Celsius** es la de uso común. La unidad de temperatura correspondiente es el grado Celsius (°C), que es igual a un kelvin. En esta escala, el agua se congela aproximadamente a cero grados (0°C) y hierve aproximadamente a 100 grados (100°C) en ciertas condiciones estándar. La escala Celsius también se conoce como *escala de temperatura centígrada*.

La relación entre la temperatura Kelvin y la temperatura Celsius está dada por las siguientes ecuaciones:

Temperatura en grados Celsius = temperatura en kelvins – 273.15

o

$$T(°\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15 \qquad \text{(A.17)}$$

donde T denota la temperatura. Al trabajar con *cambios* de temperatura, o *intervalos de temperatura*, como es usualmente el caso en mecánica, cualquier unidad se puede emplear debido a que los intervalos son iguales.*

La unidad inglesa para la temperatura es el grado Fahrenheit (°F). En la **escala de temperatura Fahrenheit**, el agua se congela a aproximadamente 32 grados (32°F) y hierve aproximadamente a 212 grados (212°F). Cada grado Fahrenheit es exactamente 5/9 de un kelvin o grado Celsius. La escala absoluta correspondiente es la **escala de temperatura Rankine**, relacionada con la escala Fahrenheit por la ecuación

$$T(°\text{F}) = T(°\text{R}) - 459.67 \qquad \text{(A.18)}$$

Por tanto, el cero absoluto corresponde a –459.67°F.**

Las **fórmulas de conversión** entre las escalas Fahrenheit y Celsius son las siguientes:

$$T(°\text{C}) = \frac{5}{9}[T(°\text{F}) - 32] \qquad T(°\text{F}) = \frac{9}{5}T(°\text{C}) + 32 \qquad \text{(A.19a,b)}$$

Igual que antes, T denota la temperatura en la escala indicada.

*Lord Kelvin (1824-1907), William Thomson, fue un físico inglés que hizo muchos descubrimientos científicos, formuló teorías sobre el calor y propuso la escala absoluta de temperatura. Anders Celsius (1701-1744) fue un científico y astrónomo sueco. En 1742 desarrolló la escala de temperatura en la que 0 y 100 corresponden, respectivamente, a los puntos de congelamiento y ebullición del agua.

**William John Macquorn Rankine (1820-1872) fue un ingeniero y físico escocés que hizo contribuciones importantes en campos tan diversos como la termodinámica, teoría de la luz, acústica, análisis de esfuerzos y ingeniería de puentes. Gabriel Daniel Fahrenheit (1686-1736) fue un físico alemán que experimentó con termómetros y los hizo más exactos al emplear mercurio en el tubo. Fijó el origen (0°) de su escala de temperatura en el punto de congelamiento de una mezcla de hielo, sal y agua.

A.5 CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES

Las cantidades dadas en unidades inglesas o SI se pueden convertir rápidamente de un sistema a otro al emplear los **factores de conversión** que se dan en la tabla A.4.

Si la cantidad dada se expresa en unidades inglesas, se puede convertir en unidades SI *multiplicando* por el factor de conversión. Para ilustrar este proceso, suponga que el esfuerzo en una viga es de 10 600 psi y que deseamos convertir esta cantidad a unidades SI. De la tabla A.4 observamos que un esfuerzo de 1 psi se convierte en 6894.76 Pa. Por tanto, la conversión del valor dado se realiza de la manera siguiente:

$$(10\,600 \text{ psi})(6894.76) = 73{,}100{,}000 \text{ Pa} = 73.1 \text{ MPa}$$

Debido a que el valor original está dado con tres cifras significativas, hemos redondeado el resultado final también a tres cifras significativas (consulte el apéndice B para ver un análisis de las cifras significativas). Observe que el factor de conversión de 6894.76 tiene unidades de pascales divididos entre libras por pulgada cuadrada y, por tanto, la ecuación es dimensionalmente correcta.

Para invertir el proceso de conversión (es decir, para convertir de unidades SI en unidades inglesas), la cantidad en unidades SI se *divide* entre el factor de conversión. Por ejemplo, suponga que el momento de inercia del área transversal de una viga es de $94.73 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Entonces, el momento de inercia en unidades inglesas es

$$\frac{94.73 \times 10^6 \text{ mm}^4}{416\,231} = 228 \text{ in}^4$$

en donde el término 416.231 es el factor de conversión para el momento de inercia.

TABLA A.4 CONVERSIONES ENTRE UNIDADES INGLESAS Y UNIDADES SI

Unidad inglesa		Factor de conversión multiplicativo		Igual a unidad SI	
		Exacto	Práctico		
Aceleración (lineal)					
pie por segundo cuadrado	ft/s^2	0.3048*	0.305	metro por segundo cuadrado	m/s^2
pulgada por segundo cuadrado	in/s^2	0.0254*	0.0254	metro por segundo cuadrado	m/s^2
Área					
pie cuadrado	ft^2	0.09290304*	0.0929	metro cuadrado	m^2
pulgada cuadrada	in^2	645.16*	645	milímetro cuadrado	mm^2
Densidad (masa)					
slug por pie cúbico	$slug/ft^3$	515.379	515	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Densidad (peso)					
libra por pie cúbico	lb/ft^3	157.087	157	newton por metro cúbico	N/m^3
libra por pulgada cúbica	lb/in^3	271.447	271	kilonewton por metro cúbico	kN/m^3
Energía; trabajo					
pie-libra	ft-lb	1.35582	1.36	joule (N ·m)	J
pulgada-libra	in-lb	0.112985	0.113	joule	J
kilowatt-hora	kWh	3.6*	3.6	megajoule	MJ
Unidad térmica británica	Btu	1055.06	1055	joule	J
Fuerza					
libra	lb	4.44822	4.45	newton $(kg{\cdot}m/s^2)$N	N
kip (1000 libras)	k	4.44822	4.45	kilonewton	kN
Fuerza por unidad de longitud					
libra por pie	lb/ft	14.5939	14.6	newton por metro	N/m
libra por pulgada	lb/in	175.127	175	newton por metro	N/m
kip por pie	k/ft	14.5939	14.6	kilonewton por metro	kN/m
kip por pulgada	k/in	175.127	175	kilonewton por metro	kN/m
Longitud					
pie	ft	0.3048*	0.305	metro	m
pulgada	in	25.4*	25.4	milímetro	mm
milla	mi	1.609344*	1.61	kilómetro	km
Masa					
slug	$lb\text{-}s^2/ft$	14.5939	14.6	kilómetro	kg
Momento de una fuerza; par de torsión					
libra-pie	lb-ft	1.35582	1.36	newton metro	N·m
libra-pulgada	lb-in	0.112985	0.113	newton metro	N·m
kip-pie	k-ft	1.35582	1.36	kilonewton metro	kN·m
kip-pulgada	k-in	0.112985	0.113	kilonewton metro	kN·m

*Un asterisco denota un factor de conversión exacto

(Continúa)

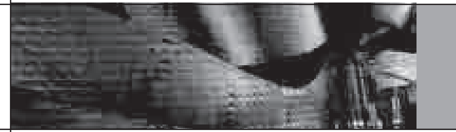
Nota: **para convertir unidades SI en unidades inglesas, *divida* entre el factor de conversión**

TABLA A-5 (Continuación)

Unidad inglesa		Factor de conversión multiplicativo		Igual a unidad SI	
		Exacto	Práctico		
Momento de inercia (área)					
pulgada a la cuarta potencia	in^4	416,231	416,000	milímetro a la cuarta potencia	mm^4
pulgada a la cuarta potencia	in^4	0.416231×10^{-6}	0.416×10^{-6}	metro a la cuarta potencia	m^4
Momento de inercia (masa)					
slug pie cuadrado	slug-ft^2	1.35582	1.36	kilogramo metro cuadrado	kg·m^2
Potencia					
pie-libra por segundo	ft-lb/s	1.35582	1.36	watt (J/s o N·m/s)	W
pie-libra por minuto	ft-lb/min	0.0225970	0.0226	watt	W
caballo de potencia (550 ft-lb/s)	hp	745.701	746	watt	W
Presión; esfuerzo					
libra por pie cuadrado	psf	47.8803	47.9	pascal (N/m^2)	Pa
libra por pulgada cuadrada	psi	6894.76	6890	pascal	Pa
kip por pie cuadrado	ksf	47.8803	47.9	kilopascal	kPa
kip por pulgada cuadrada	ksi	6.89476	6.89	megapascal	MPa
Módulo de sección					
pulgada al cubo	in^3	16387.1	16,400	milímetro a la tercera potencia	mm^3
pulgada al cubo	in^3	16.3871×10^{-6}	16.4×10^{-6}	metro a la tercera potencia	m^3
Velocidad (lineal)					
pie por segundo	ft/s	0.3048*	0.305	metro por segundo	m/s
pulgada por segundo	in/s	0.0254*	0.0254	metro por segundo	m/s
milla por hora	mph	0.44704*	0.447	metro por segundo	m/s
milla por hora	mph	1.609344*	1.61	kilómetro por hora	km/h
Volumen					
pie cúbico	ft^3	0.0283168	0.0283	metro cúbico	m^3
pulgada cúbica	in^3	16.3871×10^{-6}	16.4×10^{-6}	metro cúbico	m^3
pulgada cúbica	in^3	16.3871	16.4	centímetro cúbico (cc)	cm^3
galón (231 in^3)	gal	3.78541	3.79	litro	L
galón (231 in^3)	gal	0.00378541	0.00379	metro cúbico	m^3

*Un asterisco denota un factor de conversión exacto

***Nota:* para convertir unidades SI en unidades inglesas, *divida* entre el factor de conversión.**



B

Resolución de problemas

B.1 TIPOS DE PROBLEMAS

El estudio de la mecánica de materiales se divide naturalmente en dos partes: la primera, que es la *comprensión* de los conceptos y principios generales y la segunda que trata de la *aplicación* de los conceptos y principios a situaciones físicas. La comprensión de los conceptos generales se obtiene al estudiar los análisis y deducciones presentadas en libros como este. La destreza en la aplicación de los conceptos se adquiere resolviendo problemas por cuenta propia. Por supuesto, estos dos aspectos de la mecánica están muy relacionados y muchos expertos en mecánica argumentarán que en realidad no se comprenden los conceptos si no se aplican. Es fácil recitar los principios, pero aplicarlos a situaciones reales requiere una comprensión a fondo. Esa es la razón por la cual los maestros de mecánica ponen tanto énfasis en los problemas. La resolución de problemas da sentido a los conceptos y también proporciona una oportunidad para obtener experiencia y desarrollar un buen juicio.

Algunos de los problemas de tarea de este libro requieren resoluciones simbólicas y otros numéricas. En el caso de **problemas simbólicos** (también denominados *problemas analíticos, algebraicos* o *literales*) los datos se proporcionan en forma de símbolos para las diversas cantidades, como P para carga, L para longitud y E para módulo de elasticidad. Estos problemas se resuelven en términos de variables algebraicas y los resultados se expresan como fórmulas o expresiones matemáticas. Los problemas simbólicos por lo general no implican cálculos matemáticos, excepto cuando los datos numéricos se sustituyen en el resultado simbólico final a fin de obtener un valor numérico. Sin embargo, esta sustitución final de datos numéricos no debe ocultar el hecho de que el problema se resolvió en términos simbólicos.

Por el contrario, los **problemas numéricos** son aquellos en los que los datos se dan en forma de números (con unidades apropiadas); por ejemplo, una carga podría darse como 12 kN, una longitud como 3 m y una dimensión como 150 mm. La resolución de un problema numérico se lleva a cabo realizando cálculos desde el inicio y los resultados, tanto intermedios como finales, están en forma de números.

Una ventaja de los problemas numéricos es que las magnitudes de todas las cantidades son evidentes en cada etapa de la resolución, por lo que proporcionan una oportunidad para observar si los cálculos están produciendo resultados razonables. Además, una resolución numérica hace posible mantener las magnitudes de las cantidades dentro de límites prescritos. Por ejemplo, suponga que el esfuerzo en un punto particular en una viga no debe sobrepasar cierto valor permisible. Si este esfuerzo se calcula como un paso intermedio en la resolución numérica, puede verificarse de inmediato si excede o no el límite impuesto.

Los problemas simbólicos también tienen varias ventajas. Dado que los resultados son fórmulas o expresiones algebraicas, se puede ver de inmediato cómo las variables afectan a las respuestas. Por ejemplo, si una carga aparece elevada a la primera potencia en el numerador del resultado final, se sabe que duplicando la carga se duplicará el resultado. De igual importancia es el hecho de que una resolución simbólica muestra qué variables *no* afectan el resultado. Por ejemplo, cierta cantidad puede cancelarse en la resolución, un hecho que incluso no podría notarse en una resolución numérica. Además, en una solución simbólica es conveniente verificar la homogeneidad dimensional de todos los términos en la resolución. Y más importante, una resolución simbólica proporciona una fórmula general que es aplicable a muchos problemas diferentes, cada una con un conjunto diferente de datos numéricos. Por el contrario, una resolución numérica es adecuada sólo para un conjunto de circunstancias y se requiere una resolución completa si se cambian los datos. Por supuesto, las resoluciones simbólicas no son posibles cuando las fórmulas se vuelven muy complejas para su manejo; cuando eso ocurre, se requiere de una resolución numérica.

En trabajos más avanzados en mecánica, la resolución de problemas requiere el uso de **métodos numéricos**. Este término se refiere a una gran variedad de métodos computacionales, incluidos los procedimientos matemáticos estándar (como la integración numérica y la resolución numérica de ecuaciones diferenciales) y métodos numéricos de análisis (como el método del elemento finito). Es fácil disponer de programas de cómputo para estos métodos. También se cuenta con programas de cómputo especializados para realizar trabajo de rutina, como la determinación de deflexiones de vigas y la obtención de esfuerzos principales. Sin embargo, al estudiar mecánica de materiales nos concentramos más en los conceptos que en el uso de los programas de cómputo particulares.

B.2 PASOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los procedimientos empleados en la resolución de problemas variarán de persona en persona y también de acuerdo con el tipo de problema. No obstante, las siguientes sugerencias ayudarán a reducir los errores.

1. Enuncie con claridad el problema y dibuje una figura que represente el sistema mecánico o estructural que va a investigar. Una parte importante de este paso es identificar lo que se conoce y lo que debe encontrarse.

2. Simplifique el sistema mecánico o estructural al hacer suposiciones acerca de su naturaleza física. Este paso se denomina *modelado*, ya que comprende crear (en papel) un modelo idealizado del sistema real. El objetivo es crear un modelo que represente el sistema real con un grado de exactitud suficiente de manera que los resultados obtenidos del modelo se puedan aplicar al sistema real.

Los siguientes son algunos ejemplos de idealizaciones empleadas en el modelado de sistemas mecánicos. (a) Los objetos finitos en ocasiones se modelan como partículas, como cuando se determinan las fuerzas que actúan sobre el nodo de una armadura. (b) Los cuerpos deformables a veces se representan como cuerpo rígidos, como cuando se determinan las reacciones de una viga estáticamente determinada o las fuerzas en los elementos de una armadura estáticamente determinada. (c) La geometría y las formas de objetos se pueden simplificar, como cuando consideramos que la Tierra es una esfera o que una viga es perfectamente recta. (d) Las fuerzas distribuidas que actúan sobre máquinas y estructuras se pueden representar mediante fuerzas concentradas equivalentes. (e) Las fuerzas que son pequeñas comparadas con otras fuerzas, o fuerzas que se conoce que tienen sólo un efecto menor sobre los resultados, se pueden ignorar (a veces las fuerzas de fricción se encuentran en esta categoría). (f) Los soportes de estructuras a menudo se pueden considerar inmóviles.

3. Al resolver los problemas dibuje diagramas grandes y claros. Éstos siempre ayudan a comprender la situación física y con frecuencia resaltan aspectos del problema que de otra manera pasarían inadvertidos.

4. Aplique los principios de la mecánica de materiales al modelo idealizado para obtener las ecuaciones gobernantes. En estática las ecuaciones por lo general son ecuaciones de equilibrio obtenidas de la primera ley de Newton; en dinámica generalmente son ecuaciones de movimiento obtenidas de la segunda ley de Newton. En mecánica de materiales las ecuaciones están asociadas con esfuerzos, deformaciones unitarias, deformaciones y desplazamientos.

5. Utilice técnicas matemáticas y computacionales para resolver las ecuaciones y obtener resultados, ya sea en forma de fórmulas matemáticas o bien de valores numéricos.

6. Interprete los resultados en términos del comportamiento físico del sistema mecánico o estructural; es decir, déle sentido o significado a los resultados y saque conclusiones sobre el comportamiento del sistema.

7. Verifique sus resultados de tantas maneras como pueda. Dado que los errores pueden ser desastrosos y costosos, los ingenieros nunca se deben basar en una sola resolución.

8. Por último, presente su resolución de forma clara y ordenada de manera que pueda ser revisada y verificada con facilidad por otros.

B.3 HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

Los conceptos básicos en la mecánica son la longitud, el tiempo, la masa y la fuerza. Cada una de estas cantidades físicas tiene una **dimensión**, es decir, una unidad generalizada de medición. Por ejemplo, considere el concepto de longitud. Hay muchas unidades de longitud, como el metro, el kilómetro, la yarda, el pie y la pulgada y, sin embargo, todas estas unidades tienen algo en común, cada una representa una longitud distinta y no alguna otra cantidad como un volumen o una fuerza. Por tanto, podemos referirnos a la *dimensión de longitud* sin ser específicos con respecto a la unidad particular de medición. Se pueden hacer comentarios similares para las dimensiones de tiempo, masa y fuerza. Estas cuatro dimensiones se denotan comúnmente con los símbolos L, T, M y F, respectivamente.

Cada ecuación, ya sea que esté escrita en forma numérica o simbólica, debe ser **dimensionalmente homogénea**, es decir, las dimensiones de todos los términos en la ecuación deben ser las mismas. Para verificar la corrección dimensional de una ecuación, ignoramos las magnitudes numéricas y sólo escribimos las dimensiones de cada cantidad en la ecuación. La ecuación resultante debe tener dimensiones idénticas en todos los términos.

Por ejemplo, considere la ecuación siguiente para la deflexión δ en el centro del claro de una viga simple con una carga distribuida uniformemente:

$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI}$$

La ecuación dimensional correspondiente se obtiene reemplazando cada cantidad con sus dimensiones; por tanto, la deflexión δ se reemplaza con la dimensión L, la intensidad de la carga uniforme q se reemplaza con F/L (fuerza por unidad de longitud), la longitud L de la viga se reemplaza con la dimensión L, el módulo de elasticidad E se reemplaza con $\mathrm{F/L^2}$ (fuerza por unidad de área) y el momento de inercia I se reemplaza con $\mathrm{L^4}$. Por tanto, la ecuación dimensional es

$$\mathrm{L} = \frac{(\mathrm{F/L})\mathrm{L}^4}{(\mathrm{F/L}^2)\mathrm{L}^4}$$

Al simplificar, esta ecuación se reduce a la ecuación dimensional L = L, como se esperaba.

Las ecuaciones dimensionales se pueden escribir en términos generalizados al emplear la notación LTMF o en términos de las unidades reales que se usan en el problema. Por ejemplo, si estamos calculando la deflexión de la viga anterior en unidades inglesas, podemos escribir la ecuación dimensional como sigue:

$$\text{in} = \frac{(\text{lb/in})\text{in}^4}{(\text{lb/in}^2)\text{in}^4}$$

que se reduce a in = in, y es dimensionalmente correcta. Las revisiones frecuentes de la homogeneidad dimensional (o *consistencia de unidades*) ayudan a eliminar errores al realizar deducciones y cálculos.

B.4 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Los **cálculos en ingeniería** se realizan con calculadoras y computadoras que operan con gran precisión. Por ejemplo, algunas computadoras efectúan de manera rutinaria cálculos con más de 25 dígitos en cada valor numérico y se obtienen valores de salida con 10 o más dígitos, aun con las calculadoras de bolsillo más baratas. En estas condiciones es importante tener en cuenta que la precisión de los resultados obtenida a partir de un análisis de ingeniería se determina no sólo por los cálculos, sino también por factores como la precisión de los datos dados, las aproximaciones inherentes en los modelos analíticos y la validez de las suposiciones empleadas en las teorías. En muchas situaciones de ingeniería, estas consideraciones significan que los resultados son válidos con sólo dos o tres cifras significativas.

Por ejemplo, suponga que un cálculo produce el resultado R = 6287.46 lb para la reacción de una viga estáticamente indeterminada. Presentar el resultado de esta manera es engañoso, debido a que implica que la reacción se conoce con una aproximación de 1/100 de libra, aunque su magnitud sea mayor que 6000 lb. Esto implica una exactitud de aproximadamente 1/600 000 y precisión de 0.01 lb, ninguna de las cuales se justifica. En cambio, la exactitud de la reacción calculada depende de aspectos como los siguientes: (1) de la exactitud con se conozcan las cargas, las dimensiones y otros datos empleados en el análisis y (2) de las aproximaciones inherentes en las teorías del comportamiento de vigas. Es más probable que la reacción R en este ejemplo se conozca sólo hasta las 10 lb más cercanas o tal vez sólo hasta las 100 lb más cercanas. En consecuencia, el resultado del cálculo se debe expresar como R = 6290 lb o R = 6300 lb.

Para aclarar la precisión de un valor numérico dado, es práctica común emplear **cifras significativas**. Una cifra significativa es un dígito de 1 a 9 o cualquier cero no empleado para mostrar la posición del punto decimal; por ejemplo, los números 417, 8.29, 7.30 y 0.00254 tienen cada uno tres cifras significativas. Sin embargo, el número de cifras significativas en un número como 29 000 no es aparente. Puede tener dos cifras significativas, con los tres ceros sirviendo sólo para ubicar el punto decimal o puede tener tres, cuatro o cinco cifras significativas si uno o más de los ceros es válido. Al emplear potencias de diez, la precisión de un número como 29,000 se puede aclarar. Al escribir 29×10^3 o 0.29×10^6, se entiende que el número tiene dos cifras significativas; al escribir 29.0×10^3 o 0.0290×10^6, tiene tres cifras significativas.

Cuando un número se obtiene mediante un cálculo, su precisión depende de la precisión de los números utilizados al realizar los cálculos. Una regla práctica que sirve para **multiplicación y división** es la siguiente: el número de cifras significativas en el resultado calculado es el mismo que el número menor de cifras significativas en cualquiera de los números usado en el cálculo. Como ilustración, considere el producto de 2339.3 y 35.4. El resultado calculado es 82,811,220 cuando se registra con ocho dígitos. Sin embargo, dar el resultado de esta manera es confuso porque implica mucha más precisión que la garantizada por cualquiera de los números originales. Puesto que el número 35.4 tiene sólo tres cifras significativas, la manera adecuada de escribir el resultado es 82.8×10^3.

Para cálculos que comprenden **adición o resta** de una columna de números, la última cifra significativa en el resultado se encuentra en la última columna de dígitos que tiene cifras significativa en todos los números que se están sumando o restando. Para aclarar esta idea, considere los siguientes tres ejemplos:

	459.637	838.49	856,400
	+ 7.2	− 7	− 847,900
Resultado de la calculadora:	466.837	831.49	8,500
Escriba el resultado como:	466.8	831	8,500

En el primer ejemplo, el número 459.637 tiene seis cifras significativas y el número 7.2 tiene dos. Cuando se suman, el resultado tiene cuatro cifras significativas debido a que todos los dígitos en el resultado a la derecha de la columna que contiene el 2 no tienen sentido. En el segundo ejemplo, el número 7 es exacto sólo con una cifra significativa (es decir, no es un número exacto). Por tanto, el resultado final es exacto sólo hasta la columna que contiene el 7, lo que significa que tiene tres cifras significativas y se registra como 831. En el tercer ejemplo, los números 856,400 y 847,900 se suponen exactos hasta cuatro cifras significativas, pero el resultado de la resta es exacto sólo hasta dos cifras significativas dado que ninguno de los ceros es significativo. En general, la resta resulta en menor precisión.

Estos tres ejemplos muestran que los números que se obtienen mediante un cálculo pueden contener dígitos superfluos sin significado físico. Por tanto, cuando se reportan esos números como resultados finales, se deben dar sólo aquellos dígitos que sean significativos.

En mecánica de materiales, los datos para los problemas por lo general tiene una precisión aproximada al 1 por ciento, o en algunos casos al 0.1 por ciento y, por tanto, los resultados finales se deben reportar con una precisión comparable. Cuando se garantiza mayor precisión, ésta será obvia a partir del enunciado del problema.

Si bien el uso de cifras significativas proporciona una manera conveniente para tratar con el aspecto de **precisión numérica**, se debe reconocer que las cifras significativas no son indicadores válidos de precisión. Para ilustrar este hecho, considere los números 999 y 101. Tres cifras significativas en el número 999 corresponden a una exactitud de 1/999, o 0.1 por ciento, en tanto que el mismo número de cifras significativas en el número 101 corresponde a una exactitud de sólo 1/101, o 1.0 por ciento. Esta disparidad en la exactitud se puede reducir utilizando siempre una cifra significativa adicional para números que comiencen con el dígito 1. Entonces, cuatro cifras significativas en el número 101.1 dan casi la misma precisión que tres cifras significativas en el número 999.

En este libro seguiremos en general la regla que los resultados numéricos *finales* que comiencen con los dígitos 2 a 9 se deben registrar con tres cifras significativas y los que inicien con el dígito 1 se deben registrar con cuatro cifras significativas. Sin embargo, para preservar la exactitud numérica y evitar errores de redondeo durante el proceso de cálculo, los resultados de cálculos *intermedios* generalmente se registrarán con dígitos adicionales.

Muchos de los números que entran en nuestros cálculos son exactos, por ejemplo, el número π, fracciones como 1/2 y enteros como el número 48 en la fórmula $PL^3/48EI$ para la deflexión de una viga. Los números exactos son significativos con un número infinito de dígitos y por tanto no tienen ninguna función en la determinación de la precisión del resultado calculado.

B.5 REDONDEO DE NÚMEROS

El proceso de eliminación de las cifras no significativas y conservar sólo las significativas se denomina *redondeo*. Para ilustrar el proceso, suponga que un número se redondea a tres cifras significativas. Entonces se aplican las siguientes tres reglas:

(a) Si el cuarto dígito es menor que 5, los tres primeros dígitos se mantienen sin cambios y todos los dígitos siguientes se eliminan o reemplazan con ceros. Por ejemplo, 37.44 se redondea a 37.4 y 673.289 se redondea a 673.000.

(b) Si el cuarto dígito es mayor que 5, o si el cuarto dígito es 5 y está seguido al menos por otro dígito diferente de cero, entonces el tercer dígito se incrementa en 1 y todos los dígitos siguientes se eliminan o se reemplazan con ceros. Por ejemplo, 26.37 se redondea a 26.4 y 3.245002 se redondea a 3.25.

(c) Por último, si el cuarto dígito es 5 y todos los dígitos (en caso de que existan) son ceros, entonces el tercer dígito no se cambia si es un número par y se incrementa en 1 si es un número impar y el número 5 se reemplaza con un cero. (Los ceros antes y después de dígitos significativos se retienen sólo si se necesitan para localizar el punto decimal.) Este proceso por lo general se describe como "redondeo al dígito par". Como la existencia de dígitos pares e impares es más o menos aleatoria, el uso de esta regla significa que los números se redondean hacia arriba con la misma frecuencia que hacia abajo, reduciendo así la posibilidad de que se acumulen errores por redondeo.

Las reglas descritas en los párrafos anteriores para redondear hasta tres cifras significativas se aplican de la misma manera general al redondear hasta cualquier otro número de cifras significativas.

C

Fórmulas matemáticas

Constantes matemáticas

$\pi = 3.14159\ldots \qquad e = 2.71828\ldots \qquad 2\pi$ radianes $= 360$ grados

1 radián $= \dfrac{180}{\pi}$ grados $= 57.2958°$ 1 grado $= \dfrac{\pi}{180}$ radianes $= 0.0174533$ rad

Conversiones: Multiplique grados por $\dfrac{\pi}{180}$ para obtener radianes

Multiplique radianes por $\dfrac{180}{\pi}$ para obtener grados

Exponentes

$$A^nA^m = A^{n+m} \qquad \frac{A^m}{A^n} = A^{m-n} \qquad (A^m)^n = A^{mn} \qquad A^{-m} = \frac{1}{A^m}$$

$$(AB)^n = A^nB^n \qquad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n} \qquad A^{m/n} = \sqrt[n]{A^m} \qquad A^0 = 1 \ \ (A \neq 0)$$

Logaritmos

log ≡ logaritmo común (logaritmo base 10) $\qquad 10^{x} = y \qquad \log y = x$

ln ≡ logaritmo natural (logaritmo base e) $\qquad e^x = y \qquad \ln y = x$

$$e^{\ln A} = A \qquad 10^{\log A} = A \qquad \ln e^A = A \qquad \log 10^A = A$$

$$\log AB = \log A + \log B \qquad \log \frac{A}{B} = \log A - \log B \qquad \log \frac{1}{A} = -\log A$$

$$\log A^n = n \log A \qquad \log 1 = \ln 1 = 0 \qquad \log 10 = 1 \qquad \ln e = 1$$

$$\ln A = (\ln 10)(\log A) = 2.30259 \log A \qquad \log A = (\log e)(\ln A) = 0.434294 \ln A$$

Funciones trigonométricas

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen } x \cos y \pm \cos x \text{ sen } y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen } x \text{ sen } y$$

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen} x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

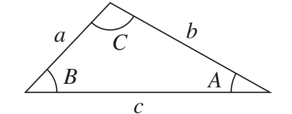
$$\tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\text{sen } 2x} = \frac{\text{sen } 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Para cualquier triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C:

Ley de los senos $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$

Ley de los cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



Ecuación cuadrática y fórmula cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Series infinitas

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Nota: Si x es muy pequeña comparada con 1, sólo se necesitan los primeros términos en la serie.

Derivadas

$$\frac{d}{dx}(ax) = a \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\log u) = \frac{\log e}{u}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Integrales indefinidas

Nota: debe agregar una constante al resultado de cada integración

$$\int a\,dx = ax \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \text{(integración por partes)}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} \quad (n \neq 1) \qquad \int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) \qquad \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)(b)(a+bx)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} \quad (x \text{ en radianes}) \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) \quad (x \text{ en radianes}) \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[bx - a\ln(a+bx)] \qquad \int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bx} + \ln(a+bx)\right]$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = -\frac{a+2bx}{2b^2(a+bx)^2} \qquad \int \frac{x\,dx}{(a+bx)^4} = -\frac{a+3bx}{6b^2(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a + bx} = \frac{1}{2b^3}[(a + bx)(-3a + bx) + 2a^2 \ln(a + bx)]$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{bx(2a + bx)}{a + bx} - 2a \ln (a + bx)\right]$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a + bx)^3} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{a(3a + 4bx)}{2(a + bx)^2} + \ln (a + bx)\right]$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a + bx)^4} = -\frac{a^2 + 3abx + 3b^2x^2}{3b^3(a + bx)^3}$$

$$\int \text{sen } ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax \, dx = \frac{\text{sen } ax}{a}$$

$$\int \tan ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\sec ax) \qquad \int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\text{sen } ax)$$

$$\int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\sec ax + \tan ax) \qquad \int \csc ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\csc ax - \cot ax)$$

$$\int \text{sen}^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen} 2ax}{4a} \qquad (x \text{ en radianes})$$

$$\int x \text{ sen } ax \, dx = \frac{\text{sen } ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} \qquad (x \text{ en radianes})$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \text{ sen } ax}{a} \qquad (x \text{ en radianes})$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \qquad \int xe^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) \qquad \int \ln ax \, dx = x(\ln ax - 1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) \qquad \int \sqrt{a + bx} \, dx = \frac{2}{3b}(a + bx)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{a^2}{2b} \ln\left(\frac{bx}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}} = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{bx}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2}}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^2}{2b} \text{sen}^{-1} \frac{bx}{a}$$

Integrales definidas

$$\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx \qquad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

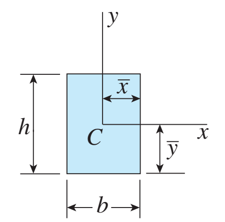


D

Propiedades de áreas planas

Notación: A = área
$\bar{x}, \bar{y}$ = distancias al centroide C
I_x, I_y = momentos de inercia con respecto a los ejes x y y, respectivamente
I_{xy} = producto de inercia con respecto a los ejes x y y
$I_P = I_x + I_y$ = momento polar de inercia con respecto al origen de los ejes x y y
I_{BB} = momento de inercia con respecto al eje B-B

1

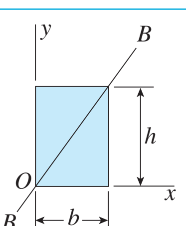


Rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = bh \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

2

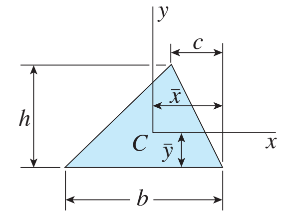


Rectángulo (origen de los ejes en una esquina)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad I_P = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

$$I_{BB} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$$

3

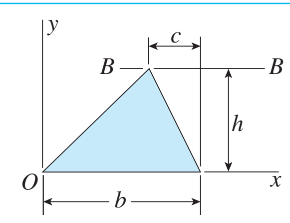


Triángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b + c}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

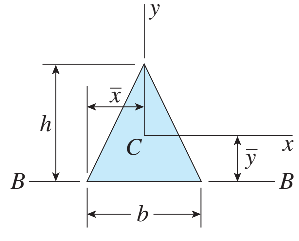
$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \qquad I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$$

4 

Triángulo (origen de los ejes en el vértice)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

5 

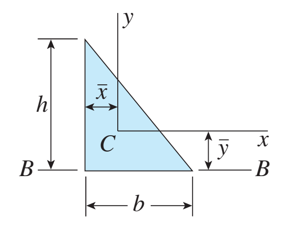
Triángulo isósceles (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{hb^3}{48} \qquad I_{xy} = 0$$

$$I_P = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{12}$$

(*Nota:* para un triángulo equilátero, $h = \sqrt{3}\, b/2$.)

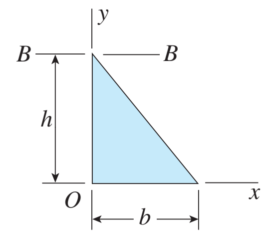
6 

Triángulo rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{hb^3}{36} \qquad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

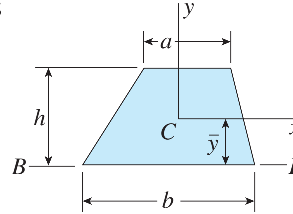
$$I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{12}$$

7 

Triángulo rectángulo (origen de los ejes en el vértice)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

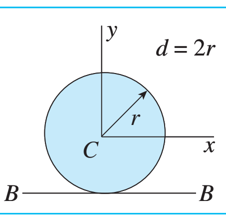
8 

Trapecio (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{h(a + b)}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h(2a + b)}{3(a + b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)} \qquad I_{BB} = \frac{h^3(3a + b)}{12}$$

9

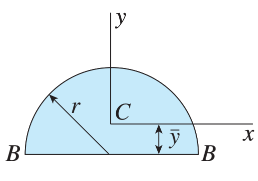


Círculo (origen de los ejes en el centro)

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \qquad I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

10

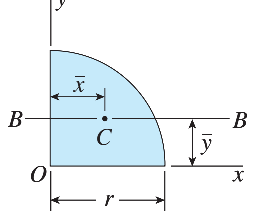


Semicírculo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \qquad I_y = \frac{\pi r^4}{8} \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

11

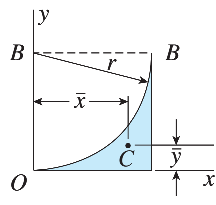


Cuarto de círculo (origen de los ejes en el centro del círculo)

$$A = \frac{\pi r^2}{4} \qquad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16} \qquad I_{xy} = \frac{r^4}{8} \qquad I_{BB} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \approx 0.05488r^4$$

12

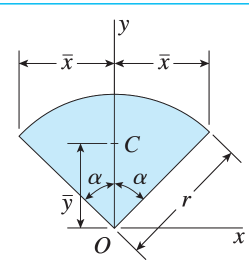


Tímpano cuadrante (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$$A = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 \qquad \bar{x} = \frac{2r}{3(4 - \pi)} \approx 0.7766r \qquad \bar{y} = \frac{(10 - 3\pi)r}{3(4 - \pi)} \approx 0.2234r$$

$$I_x = \left(1 - \frac{5\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.01825r^4 \qquad I_y = I_{BB} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.1370r^4$$

13



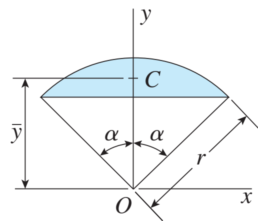
Sector circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

α = ángulo en radianess $(\alpha \leq \pi/2)$

$$A = \alpha r^2 \qquad \bar{x} = r \operatorname{sen} \alpha \qquad \bar{y} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \qquad I_y = \frac{r^4}{4}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\alpha r^4}{2}$$

14



Segmento circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

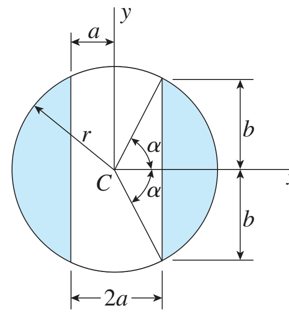
α = ángulo en radianes $\qquad (\alpha \leq \pi/2)$

$$A = r^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{3}\left(\frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha) \qquad I_{xy} = 0$$

$$I_y = \frac{r^4}{12}(3\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha)$$

15



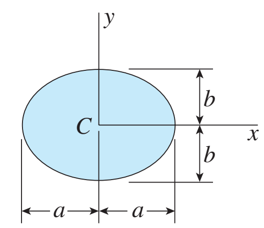
Círculo con núcleo removido (origen de los ejes en el centro del círculo)

α = ángulo en radianes $\qquad (\alpha \leq \pi/2)$

$$\alpha = \arccos\frac{a}{r} \qquad b = \sqrt{r^2 - a^2} \qquad A = 2r^2\left(\alpha - \frac{ab}{r^2}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{6}\left(3\alpha - \frac{3ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_y = \frac{r^4}{2}\left(\alpha - \frac{ab}{r^2} + \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_{xy} = 0$$

16



Elipse (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \pi ab \qquad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\pi ab}{4}(b^2 + a^2)$$

Circunferencia $\approx \pi[1.5(a + b) - \sqrt{ab}\,] \qquad (a/3 \leq b \leq a)$

$\approx 4.17b^2/a + 4a \qquad (0 \leq b \leq a/3)$

17

Semisegmento parabólico (origen de los ejes en la esquina)

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

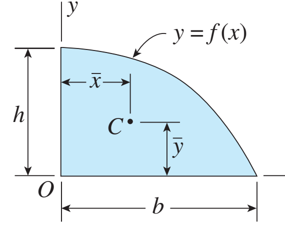
$$I_x = \frac{16bh^3}{105} \qquad I_y = \frac{2hb^3}{15} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

18 **Tímpano parabólico** (origen de los ejes en el vértice)

$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{21} \qquad I_y = \frac{hb^3}{5} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

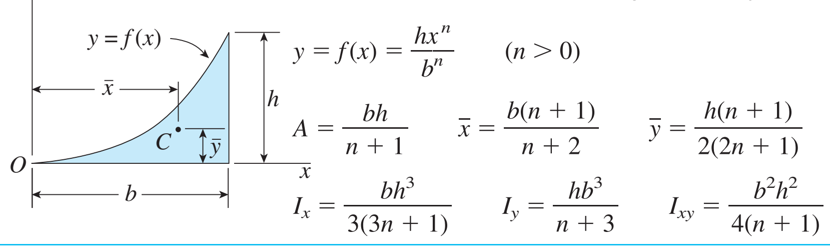
19 

Semisegmento de grado *n*-ésimo (origen de los ejes en la esquina)

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^n}{b^n}\right) \qquad (n > 0)$$

$$A = bh\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)} \qquad \bar{y} = \frac{hn}{2n+1}$$

$$I_x = \frac{2bh^3n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} \qquad I_y = \frac{hb^3n}{3(n+3)} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2n^2}{4(n+1)(n+2)}$$

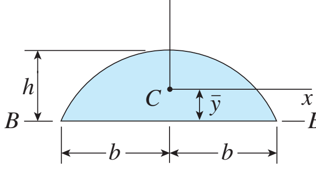
20 

Tímpano de grado *n*-ésimo (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$$y = f(x) = \frac{hx^n}{b^n} \qquad (n > 0)$$

$$A = \frac{bh}{n+1} \qquad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{n+2} \qquad \bar{y} = \frac{h(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)} \qquad I_y = \frac{hb^3}{n+3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4(n+1)}$$

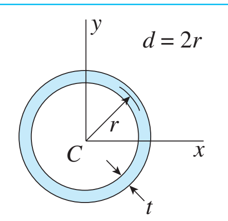
21 

Onda senoidal (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{4bh}{\pi} \qquad \bar{y} = \frac{\pi h}{8}$$

$$I_x = \left(\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{16}\right)bh^3 \approx 0.08659bh^3 \qquad I_y = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}\right)hb^3 \approx 0.2412hb^3$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{8bh^3}{9\pi}$$

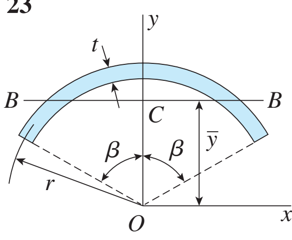
22 

Anillo circular delgado (origen de los ejes en el centro)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

$$A = 2\pi rt = \pi dt \qquad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

23



Arco circular delgado (origen de los ejes en el centro del círculo)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

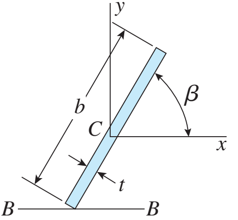
β = ángulo en radianes (*Note:* para un arco semicircular, $\beta = \pi/2$.)

$$A = 2\beta rt \qquad \bar{y} = \frac{r \operatorname{sen} \beta}{\beta}$$

$$I_x = r^3t(\beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta) \qquad I_y = r^3t(\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta)$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = r^3t\left(\frac{2\beta + \operatorname{sen}2\beta}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{\beta}\right)$$

24

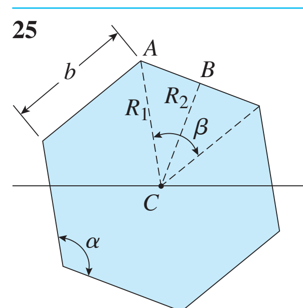


Rectángulo angosto (origen de los ejes en el centroide)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

$$A = bt$$

$$I_x = \frac{tb^3}{12}\operatorname{sen}^2 \beta \qquad I_y = \frac{tb^3}{12}\cos^2 \beta \qquad I_{BB} = \frac{tb^3}{3}\operatorname{sen}^2 \beta$$

25



Polígono regular con *n* lados (origen de los ejes en el centroide)

C = centroide (en el centro del polígono)

n = número de lados ($n \geq 3$) b = longitud de un lado

β = ángulo central para un lado α = longitud de un lado

$$\beta = \frac{360°}{n} \qquad \alpha = \left(\frac{n-2}{n}\right)180° \qquad \alpha + \beta = 180°$$

R_1 = radio del círculo circunscrito (línea CA) R_2 = radio del círculo circunscrito (línea CB)

$$R_1 = \frac{b}{2}\csc\frac{\beta}{2} \qquad R_2 = \frac{b}{2}\cot\frac{\beta}{2} \qquad A = \frac{nb^2}{4}\cot\frac{\beta}{2}$$

I_c = momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por C (el centroide es un punto principal y cada eje que pasa por C es un eje principal)

$$I_c = \frac{nb^4}{192}\left(\cot\frac{\beta}{2}\right)\left(3\cot^2\frac{\beta}{2} + 1\right) \qquad I_P = 2I_c$$



E

Propiedades de los perfiles estructurales de acero

En las siguientes tablas se presentan las propiedades de varios perfiles estructurales de acero como una ayuda para el lector en la resolución de los problemas del texto. Estas tablas se compilaron de las tablas extensas del *Manual of Steel Costruction*, publicado por el American Institute of Steel Construction, Inc. (Referencia 5.4).

Notación:

I = momento de inercia

S = módulo de sección

$r = \sqrt{I/A}$ = radio de giro

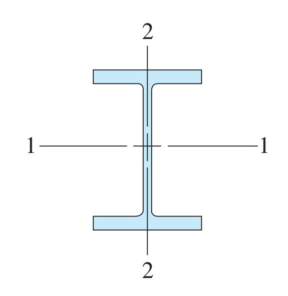


TABLA E.1(a) PROPIEDADES DE SECCIONES W DE PATÍN ANCHO: UNIDADES INGLESAS (LISTA CONDENSADA)

Designación	Peso por pie	Área	Peralte	Espesor del alma	Patín		Eje 1-1			Eje 2-2		
					Ancho	Espesor	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*
	lb	in^2	in	in	in	in	in^4	in^3	in	in^4	in^3	in
W 30 × 211	211	62.2	30.9	0.775	15.1	1.32	10300	665	12.9	757	100	3.49
W 30 × 132	132	38.9	30.3	0.615	10.5	1.00	5770	380	12.2	196	37.2	2.25
W 24 × 162	162	47.7	25.0	0.705	13.0	1.22	5170	414	10.4	443	68.4	3.05
W 24 × 94	94.0	27.7	24.3	0.515	9.07	0.875	2700	222	9.87	109	24.0	1.98
W 18 × 119	119	35.1	19.0	0.655	11.3	1.06	2190	231	7.90	253	44.9	2.69
W 18 × 71	71.0	20.8	18.5	0.495	7.64	0.810	1170	127	7.50	60.3	15.8	1.70
W 16 × 100	100	29.5	17.0	0.585	10.4	0.985	1490	175	7.10	186	35.7	2.51
W 16 × 77	77.0	22.6	16.5	0.455	10.3	0.760	1110	134	7.00	138	26.9	2.47
W 16 × 57	57.0	16.8	16.4	0.430	7.12	0.715	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
W 16 × 31	31.0	9.13	15.9	0.275	5.53	0.440	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
W 14 × 120	120	35.3	14.5	0.590	14.7	0.940	1380	190	6.24	495	67.5	3.74
W 14 × 82	82.0	24.0	14.3	0.510	10.1	0.855	881	123	6.05	148	29.3	2.48
W 14 × 53	53.0	15.6	13.9	0.370	8.06	0.660	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
W 14 × 26	26.0	7.69	13.9	0.255	5.03	0.420	245	35.3	5.65	8.91	3.55	1.08
W 12 × 87	87.0	25.6	12.5	0.515	12.1	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
W 12 × 50	50.0	14.6	12.2	0.370	8.08	0.640	391	64.2	5.18	56.3	13.9	1.96
W 12 × 35	35.0	10.3	12.5	0.300	6.56	0.520	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
W 12 × 14	14.0	4.16	11.9	0.200	3.97	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753
W 10 × 60	60.0	17.6	10.2	0.420	10.1	0.680	341	66.7	4.39	116	23.0	2.57
W 10 × 45	45.0	13.3	10.1	0.350	8.02	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
W 10 × 30	30.0	8.84	10.5	0.300	5.81	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
W 10 × 12	12.0	3.54	9.87	0.190	3.96	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785
W 8 × 35	35.0	10.3	8.12	0.310	8.02	0.495	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
W 8 × 28	28.0	8.24	8.06	0.285	6.54	0.465	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
W 8 × 21	21.0	6.16	8.28	0.250	5.27	0.400	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
W 8 × 15	15.0	4.44	8.11	0.245	4.01	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876

Nota: los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.

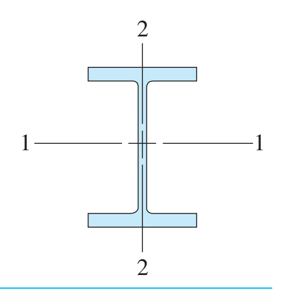


TABLA E.1(b) PROPIEDADES DE SECCIONES W DE PATÍN ANCHO: UNIDADES SI (LISTA CONDENSADA)

Designación	Masa por metro	Área	Peralte	Espesor del alma	Patín		Eje1-1			Eje2-2		
					Ancho	Espesor	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*
	kg	mm^2	mm	mm	mm	mm	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm
W 760 × 314	314	40100	785	19.7	384	33.5	4290	10900	328	315	1640	88.6
W 760 × 196	196	25100	770	15.6	267	25.4	2400	6230	310	81.6	610	57.2
W 610 × 241	241	30800	635	17.9	330	31.0	2150	6780	264	184	1120	77.5
W 610 × 140	140	17900	617	13.1	230	22.2	1120	3640	251	45.4	393	50.3
W 460 × 177	177	22600	483	16.6	287	26.9	912	3790	201	105	736	68.3
W 460 × 106	106	13400	470	12.6	194	20.6	487	2080	191	25.1	259	43.2
W 410 × 149	149	19000	432	14.9	264	25.0	620	2870	180	77.4	585	63.8
W 410 × 114	114	14600	419	11.6	262	19.3	462	2200	178	57.4	441	62.7
W 410 × 85	85.0	10800	417	10.9	181	18.2	316	1510	171	17.9	198	40.6
W 410 × 46.1	46.1	5890	404	6.99	140	11.2	156	773	163	5.16	73.6	29.7
W 360 × 179	179	22800	368	15.0	373	23.9	574	3110	158	206	1110	95.0
W 360 × 122	122	15500	363	13.0	257	21.7	367	2020	154	61.6	480	63.0
W 360 × 79	79.0	10100	353	9.40	205	16.8	225	1270	150	24.0	234	48.8
W 360 × 39	39.0	4960	353	6.48	128	10.7	102	578	144	3.71	58.2	27.4
W 310 × 129	129	16500	318	13.1	307	20.6	308	1930	137	100	651	78.0
W 310 × 74	74.0	9420	310	9.40	205	16.3	163	1050	132	23.4	228	49.8
W 310 × 52	52.0	6650	318	7.62	167	13.2	119	747	133	10.2	122	39.1
W 310 × 21	21.0	2680	302	5.08	101	5.72	36.9	244	117	0.982	19.5	19.1
W 250 × 89	89.0	11400	259	10.7	257	17.3	142	1090	112	48.3	377	65.3
W 250 × 67	67.0	8580	257	8.89	204	15.7	103	805	110	22.2	218	51.1
W 250 × 44.8	44.8	5700	267	7.62	148	13.0	70.8	531	111	6.95	94.2	34.8
W 250 × 17.9	17.9	2280	251	4.83	101	5.33	22.4	179	99.1	0.907	18.0	19.9
W 200 × 52	52.0	6650	206	7.87	204	12.6	52.9	511	89.2	17.7	174	51.6
W 200 × 41.7	41.7	5320	205	7.24	166	11.8	40.8	398	87.6	9.03	109	41.1
W 200 × 31.3	31.3	3970	210	6.35	134	10.2	31.3	298	88.6	4.07	60.8	32.0
W 200 × 22.5	22.5	2860	206	6.22	102	8.00	20.0	193	83.6	1.42	27.9	22.3

Nota: los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales.

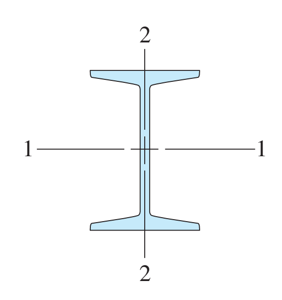


TABLA E.2(a) PROPIEDADES DE SECCIONES I (PERFILES S): UNIDADES INGLESAS (LISTA CONDENSADA)

Designación	Peso por pie	Área	Peralte	Espesor del alma	Patín		Eje 1-1			Eje 2-2		
					Ancho	Espesor promedio	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*
	lb	in^2	in	in	in	in	in^4	in^3	in	in^4	in^3	in
S 24 × 100	100	29.3	24.0	0.745	7.25	0.870	2380	199	9.01	47.4	13.1	1.27
S 24 × 80	80.0	23.5	24.0	0.500	7.00	0.870	2100	175	9.47	42.0	12.0	1.34
S 20 × 96	96.0	28.2	20.3	0.800	7.20	0.920	1670	165	7.71	49.9	13.9	1.33
S 20 × 75	75.0	22.0	20.0	0.635	6.39	0.795	1280	128	7.62	29.5	9.25	1.16
S 18 × 70	70.0	20.5	18.0	0.711	6.25	0.691	923	103	6.70	24.0	7.69	1.08
S 18 × 54.7	54.7	16.0	18.0	0.461	6.00	0.691	801	89.0	7.07	20.7	6.91	1.14
S 15 × 50	50.0	14.7	15.0	0.550	5.64	0.622	485	64.7	5.75	15.6	5.53	1.03
S 15 × 42.9	42.9	12.6	15.0	0.411	5.50	0.622	446	59.4	5.95	14.3	5.19	1.06
S 12 × 50	50.0	14.6	12.0	0.687	5.48	0.659	303	50.6	4.55	15.6	5.69	1.03
S 12 × 35	35.0	10.2	12.0	0.428	5.08	0.544	228	38.1	4.72	9.84	3.88	0.980
S 10 × 35	35.0	10.3	10.0	0.594	4.94	0.491	147	29.4	3.78	8.30	3.36	0.899
S 10 × 25.4	25.4	7.45	10.0	0.311	4.66	0.491	123	24.6	4.07	6.73	2.89	0.950
S 8 × 23	23.0	6.76	8.00	0.441	4.17	0.425	64.7	16.2	3.09	4.27	2.05	0.795
S 8 × 18.4	18.4	5.40	8.00	0.271	4.00	0.425	57.5	14.4	3.26	3.69	1.84	0.827
S 6 × 17.2	17.3	5.06	6.00	0.465	3.57	0.359	26.2	8.74	2.28	2.29	1.28	0.673
S 6 × 12.5	12.5	3.66	6.00	0.232	3.33	0.359	22.0	7.34	2.45	1.80	1.08	0.702
S 4 × 9.5	9.50	2.79	4.00	0.326	2.80	0.293	6.76	3.38	1.56	0.887	0.635	0.564
S 4 × 7.7	7.70	2.26	4.00	0.193	2.66	0.293	6.05	3.03	1.64	0.748	0.562	0.576

Nota: los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.

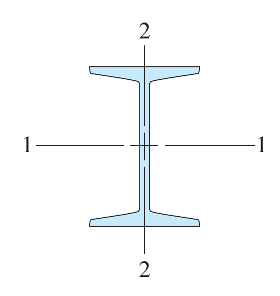


TABLA E-2(b) PROPIEDADES DE SECCIONES I (PERFIL S): UNIDADES SI (LISTA CONDENSADA)

Designación	Masa por metro	Área	Peralte	Espesor del alma	Patín		Eje 1-1			Eje 2-2		
					Ancho	Espesor promedio	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*
	kg	mm^2	mm	mm	mm	mm	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm
S 610 × 149	149	18900	610	18.9	184	22.1	991	3260	229	19.7	215	32.3
S 610 × 119	119	15200	610	12.7	178	22.1	874	2870	241	17.5	197	34.0
S 510 × 143	143	18200	516	20.3	183	23.4	695	2700	196	20.8	228	33.8
S 510 × 112	112	14200	508	16.1	162	20.2	533	2100	194	12.3	152	29.5
S 460 × 104	104	13200	457	18.1	159	17.6	384	1690	170	10.0	126	27.4
S 460 × 81.4	81.4	10300	457	11.7	152	17.6	333	1460	180	8.62	113	29.0
S 380 × 74	74.0	9480	381	14.0	143	15.8	202	1060	146	6.49	90.6	26.2
S 380 × 64	64.0	8130	381	10.4	140	15.8	186	973	151	5.95	85.0	26.9
S 310 × 74	74.0	9420	305	17.4	139	16.7	126	829	116	6.49	93.2	26.2
S 310 × 52	52.0	6580	305	10.9	129	13.8	94.9	624	120	4.10	63.6	24.9
S 250 × 52	52.0	6650	254	15.1	125	12.5	61.2	482	96.0	3.45	55.1	22.8
S 250 × 37.8	37.8	4810	254	7.90	118	12.5	51.2	403	103	2.80	47.4	24.1
S 200 × 34	34.0	4360	203	11.2	106	10.8	26.9	265	78.5	1.78	33.6	20.2
S 200 × 27.4	27.4	3480	203	6.88	102	10.8	23.9	236	82.8	1.54	30.2	21.0
S 150 × 25.7	25.7	3260	152	11.8	90.7	9.12	10.9	143	57.9	0.953	21.0	17.1
S 150 × 18.6	18.6	2360	152	5.89	84.6	9.12	9.16	120	62.2	0.749	17.7	17.8
S 100 × 14.1	14.1	1800	102	8.28	71.1	7.44	2.81	55.4	39.6	0.369	10.4	14.3
S 100 × 11.5	11.5	1460	102	4.90	67.6	7.44	2.52	49.7	41.7	0.311	9.21	14.6

Nota: los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.

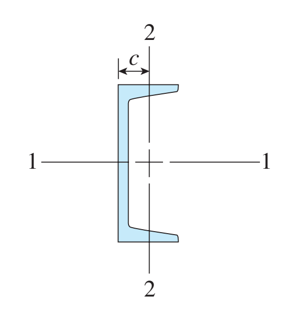


TABLA E.3(a) PROPIEDADES DE SECCIONES EN CANAL (PERFILES C): UNIDADES INGLESAS (LISTA CONDENSADA)

Designación	Peso por pie	Área	Peralte	Espesor del alma	Patín		Eje 1-1			Eje 2-2			
					Ancho	Espesor promedio	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*	*c*
	lb	in^2	in	in	in	in	in^4	in^3	in	in^4	in^3	in	in
C 15 × 50	50.0	14.7	15.0	0.716	3.72	0.650	404	53.8	5.24	11.0	3.77	0.865	0.799
C 15 × 40	40.0	11.8	15.0	0.520	3.52	0.650	348	46.5	5.45	9.17	3.34	0.883	0.778
C 15 × 33.9	33.9	10.0	15.0	0.400	3.40	0.650	315	42.0	5.62	8.07	3.09	0.901	0.788
C 12 × 30	30.0	8.81	12.0	0.510	3.17	0.501	162	27.0	4.29	5.12	2.05	0.762	0.674
C 12 × 25	25.0	7.34	12.0	0.387	3.05	0.501	144	24.0	4.43	4.45	1.87	0.779	0.674
C 12 × 20.7	20.7	6.08	12.0	0.282	2.94	0.501	129	21.5	4.61	3.86	1.72	0.797	0.698
C 10 × 30	30.0	8.81	10.0	0.673	3.03	0.436	103	20.7	3.42	3.93	1.65	0.668	0.649
C 10 × 25	25.0	7.34	10.0	0.526	2.89	0.436	91.1	18.2	3.52	3.34	1.47	0.675	0.617
C 10 × 20	20.0	5.87	10.0	0.379	2.74	0.436	78.9	15.8	3.66	2.80	1.31	0.690	0.606
C 10 × 15.3	15.3	4.48	10.0	0.240	2.60	0.436	67.3	13.5	3.87	2.27	1.15	0.711	0.634
C 8 × 18.7	18.7	5.51	8.00	0.487	2.53	0.390	43.9	11.0	2.82	1.97	1.01	0.598	0.565
C 8 × 13.7	13.7	4.04	8.00	0.303	2.34	0.390	36.1	9.02	2.99	1.52	0.848	0.613	0.554
C 8 × 11.5	11.5	3.37	8.00	0.220	2.26	0.390	32.5	8.14	3.11	1.31	0.775	0.623	0.572
C 6 × 13	13.0	3.81	6.00	0.437	2.16	0.343	17.3	5.78	2.13	1.05	0.638	0.524	0.514
C 6 × 10.5	10.5	3.08	6.00	0.314	2.03	0.343	15.1	5.04	2.22	0.860	0.561	0.529	0.500
C 6 × 8.2	8.20	2.39	6.00	0.200	1.92	0.343	13.1	4.35	2.34	0.687	0.488	0.536	0.512
C 4 × 7.2	7.20	2.13	4.00	0.321	1.72	0.296	4.58	2.29	1.47	0.425	0.337	0.447	0.459
C 4 × 5.4	5.40	1.58	4.00	0.184	1.58	0.296	3.85	1.92	1.56	0.312	0.277	0.444	0.457

Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.
2. La distancia *c* se mide desde centroide hasta la espalda del alma.
3. Para el eje 2-2 el valor tabulado de *S* es el menor de los dos módulos de sección para este eje.

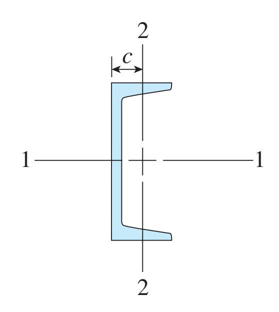


TABLA E.3(b) PROPIEDADES DE SECCIONES EN CANAL (PERFILES C): UNIDADES SI (LISTA CONDENSADA)

Designación	Masa por metro	Área	Peralte	Espesor del alma	Patín		Eje 1-1			Eje 2-2			
					Ancho	Espesor promedio	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*	*c*
	kg	mm^2	mm	mm	mm	mm	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm	mm
C 380 × 74	74.0	9480	381	18.2	94.5	16.5	168	882	133	4.58	61.8	22.0	20.3
C 380 × 60	60.0	7610	381	13.2	89.4	16.5	145	762	138	3.82	54.7	22.4	19.8
C 380 × 50.4	50.4	6450	381	10.2	86.4	16.5	131	688	143	3.36	50.6	22.9	20.0
C 310 × 45	45.0	5680	305	13.0	80.5	12.7	67.4	442	109	2.13	33.6	19.4	17.1
C 310 × 37	37.0	4740	305	9.83	77.5	12.7	59.9	393	113	1.85	30.6	19.8	17.1
C 310 × 30.8	30.8	3920	305	7.16	74.7	12.7	53.7	352	117	1.61	28.2	20.2	17.7
C 250 × 45	45.0	5680	254	17.1	77.0	11.1	42.9	339	86.9	1.64	27.0	17.0	16.5
C 250 × 37	37.0	4740	254	13.4	73.4	11.1	37.9	298	89.4	1.39	24.1	17.1	15.7
C 250 × 30	30.0	3790	254	9.63	69.6	11.1	32.8	259	93.0	1.17	21.5	17.5	15.4
C 250 × 22.8	22.8	2890	254	6.10	66.0	11.1	28.0	221	98.3	0.945	18.8	18.1	16.1
C 200 × 27.9	27.9	3550	203	12.4	64.3	9.91	18.3	180	71.6	0.820	16.6	15.2	14.4
C 200 × 20.5	20.5	2610	203	7.70	59.4	9.91	15.0	148	75.9	0.633	13.9	15.6	14.1
C 200 × 17.1	17.1	2170	203	5.59	57.4	9.91	13.5	133	79.0	0.545	12.7	15.8	14.5
C 150 × 19.3	19.3	2460	152	11.1	54.9	8.71	7.20	94.7	54.1	0.437	10.5	13.3	13.1
C 150 × 15.6	15.6	1990	152	7.98	51.6	8.71	6.29	82.6	56.4	0.358	9.19	13.4	12.7
C 150 × 12.2	12.2	1540	152	5.08	48.8	8.71	5.45	71.3	59.4	0.286	8.00	13.6	13.0
C 100 × 10.8	10.8	1370	102	8.15	43.7	7.52	1.91	37.5	37.3	0.177	5.52	11.4	11.7
C 100 × 8	8.00	1020	102	4.67	40.1	7.52	1.60	31.5	39.6	0.130	4.54	11.3	11.6

Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.
2. La distancia *c* se mide desde el centroide hasta la espalda del alma.
3. Para el eje 2-2 el valor tabulado de *S* es el menor de los dos módulos de sección para este eje.

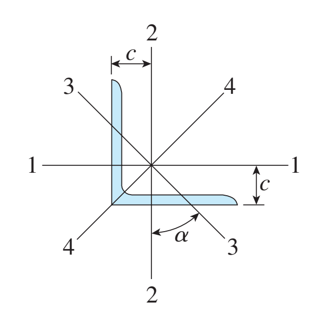


TABLA E.4(a) PROPIEDADES DE SECCIONES ANGULARES CON LADOS IGUALES (PERFILES L): UNIDADES INGLESAS (LISTA CONDENSADA)

Designación	Peso por pie	Área	Eje 1-1 y Eje 2-2				Eje 3-3
			I	S	r	c	$r_{mín}$
in	lb	in^2	in^4	in^3	in	in	in
L 8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.1	15.8	2.43	2.36	1.56
L 8 × 8 × 3/4	38.9	11.4	69.9	12.2	2.46	2.26	1.57
L 8 × 8 × 1/2	26.4	7.75	48.8	8.36	2.49	2.17	1.59
L 6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.4	8.55	1.79	1.86	1.17
L 6 × 6 × 3/4	28.7	8.46	28.1	6.64	1.82	1.77	1.17
L 6 × 6 × 1/2	19.6	5.77	19.9	4.59	1.86	1.67	1.18
L 5 × 5 × 7/8	27.2	7.98	17.8	5.16	1.49	1.56	0.971
L 5 × 5 × 1/2	16.2	4.75	11.3	3.15	1.53	1.42	0.980
L 5 × 5 × 3/8	12.3	3.61	8.76	2.41	1.55	1.37	0.986
L 4 × 4 × 3/4	18.5	5.44	7.62	2.79	1.18	1.27	0.774
L 4 × 4 × 1/2	12.8	3.75	5.52	1.96	1.21	1.18	0.776
L 4 × 4 × 3/8	9.80	2.86	4.32	1.50	1.23	1.13	0.779
L 3-1/2 × 3-1/2 × 3/8	8.50	2.48	2.86	1.15	1.07	1.00	0.683
L 3-1/2 × 3-1/2 × 1/4	5.80	1.69	2.00	0.787	1.09	0.954	0.688
L 3 × 3 × 1/2	9.40	2.75	2.20	1.06	0.895	0.929	0.580
L 3 × 3 × 1/4	4.90	1.44	1.23	0.569	0.926	0.836	0.585

Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales paralelos a los lados.
2. La distancia c se mide desde el centroide hasta la espalda de los lados.
3. Para los ejes 1-1 y 2-2, el valor tabulado de S es el menor de los dos módulos de sección para estos ejes.
4. Los ejes 3-3 y 4-4 son ejes centroidales principales.
5. El momento de inercia para el eje 3-3, que es el menor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{33} = Ar^2_{mín}$.
6. El momento de inercia para el eje 4-4, que es el mayor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

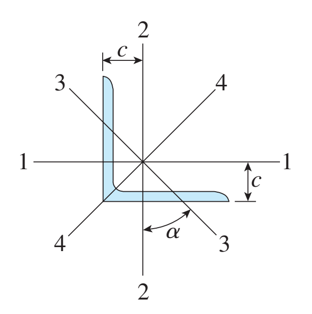


TABLA E.4(b) PROPIEDADES DE SECCIONES ANGULARES CON LADOS IGUALES (PERFILES L): UNIDADES SI (LISTA CONDENSADA)

Designación	Masa por metro	Área	Ejes 1-1 y 2-2				Eje 3-3
			I	S	r	c	$r_{\text{mín}}$
mm	kg	mm^2	$\times 10^6$ mm^4	$\times 10^3$ mm^3	mm	mm	mm
L 203 × 203 × 25.4	75.9	9680	37.1	259	61.7	59.9	39.6
L 203 × 203 × 19	57.9	7350	29.1	200	62.5	57.4	39.9
L 203 × 203 × 12.7	39.3	5000	20.3	137	63.2	55.1	40.4
L 152 × 152 × 25.4	55.7	7100	14.7	140	45.5	47.2	29.7
L 152 × 152 × 19	42.7	5460	11.7	109	46.2	45.0	29.7
L 152 × 152 × 12.7	29.2	3720	8.28	75.2	47.2	42.4	30.0
L 127 × 127 × 22.2	40.5	5150	7.41	84.6	37.8	39.6	24.7
L 127 × 127 × 12.7	24.1	3060	4.70	51.6	38.9	36.1	24.9
L 127 × 127 × 9.5	18.3	2330	3.65	39.5	39.4	34.8	25.0
L 102 × 102 × 19	27.5	3510	3.17	45.7	30.0	32.3	19.7
L 102 × 102 × 12.7	19.0	2420	2.30	32.1	30.7	30.0	19.7
L 102 × 102 × 9.5	14.6	1850	1.80	24.6	31.2	28.7	19.8
L 89 × 89 × 9.5	12.6	1600	1.19	18.8	27.2	25.4	17.3
L 89 × 89 × 6.4	8.60	1090	0.832	12.9	27.7	24.2	17.5
L 76 × 76 × 12.7	14.0	1770	0.916	17.4	22.7	23.6	14.7
L 76 × 76 × 6.4	7.30	929	0.512	9.32	23.5	21.2	14.9

Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales paralelos a los lados.
2. La distancia c se mide desde el centroide hasta la espalda de los lados.
3. Para los ejes 1-1 y 2-2, el valor tabulado de S es el menor de los dos módulos de sección para estos ejes.
4. Los ejes 3-3 y 4-4 son ejes centroidales principales.
5. El momento de inercia para el eje 3-3, que es el menor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{33} = Ar^2_{\text{mín}}$.
6. El momento de inercia para el eje 4-4, que es el mayor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

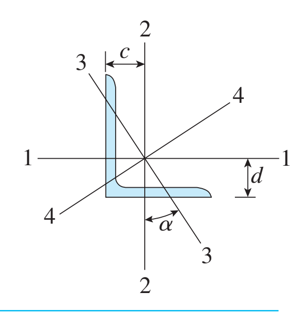


TABLA E.5(a) PROPIEDADES DE SECCIONES ANGULARES CON LADOS DESIGUALES (PERFILES L): UNIDADES INGLESAS (LISTA CONDENSADA)

Designación	Peso por pie	Área	Eje 1-1				Eje 2-2				Eje 3-3	
			I	*S*	*r*	*d*	*I*	*S*	*r*	*c*	$r_{mín}$	tan α
in	lb	in^2	in^4	in^3	in	in	in^4	in^3	in	in	in	
L 8 × 6 × 1	44.2	13.0	80.9	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.72	1.65	1.28	0.542
L 8 × 6 × 1/2	23.0	6.75	44.4	8.01	2.55	2.46	21.7	4.79	1.79	1.46	1.30	0.557
L 7 × 4 × 3/4	26.2	7.69	37.8	8.39	2.21	2.50	9.00	3.01	1.08	1.00	0.855	0.324
L 7 × 4 × 1/2	17.9	5.25	26.6	5.79	2.25	2.40	6.48	2.10	1.11	0.910	0.866	0.334
L 6 × 4 × 3/4	23.6	6.94	24.5	6.23	1.88	2.07	8.63	2.95	1.12	1.07	0.856	0.428
L 6 × 4 × 1/2	16.2	4.75	17.3	4.31	1.91	1.98	6.22	2.06	1.14	0.981	0.864	0.440
L 5 × 3-1/2 × 3/4	19.8	5.81	13.9	4.26	1.55	1.74	5.52	2.20	0.974	0.993	0.744	0.464
L 5 × 3-1/2 × 1/2	13.6	4.00	10.0	2.97	1.58	1.65	4.02	1.55	1.00	0.901	0.750	0.479
L 5 × 3 × 1/2	12.8	3.75	9.43	2.89	1.58	1.74	2.55	1.13	0.824	0.746	0.642	0.357
L 5 × 3 × 1/4	6.60	1.94	5.09	1.51	1.62	1.64	1.41	0.600	0.853	0.648	0.652	0.371
L 4 × 3-1/2 × 1/2	11.9	3.50	5.30	1.92	1.23	1.24	3.76	1.50	1.04	0.994	0.716	0.750
L 4 × 3-1/2 × 1/4	6.20	1.81	2.89	1.01	1.26	1.14	2.07	0.794	1.07	0.897	0.723	0.759
L 4 × 3 × 1/2	11.1	3.25	5.02	1.87	1.24	1.32	2.40	1.10	0.858	0.822	0.633	0.542
L 4 × 3 × 3/8	8.50	2.48	3.94	1.44	1.26	1.27	1.89	0.851	0.873	0.775	0.636	0.551
L 4 × 3 × 1/4	5.80	1.69	2.75	0.988	1.27	1.22	1.33	0.585	0.887	0.725	0.639	0.558

Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales paralelos a los lados.
2. Las distancias *c* y *d* se miden desde el centroide hasta las espaldas de los lados.
3. Para los ejes 1-1 y 2-2 el valor tabulado de *S* es el menor de los dos módulos de sección para estos ejes.
4. Los ejes 3-3 y 4-4 son ejes centroidales principales.
5. El momento de inercia para eje 3-3, que es el menor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{33} = Ar^2_{mín}$.
6. El momento de inercia para el eje 4-4, que es el mayor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

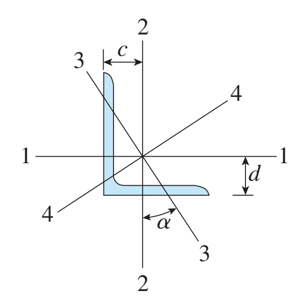


TABLA E.5(b) PROPIEDADES DE SECCIONES ANGULARES CON LADOS DESIGUALES (PERFILES L): UNIDADES SI (LISTA CONDENSADA)

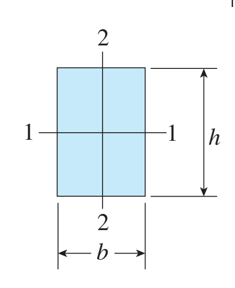
Designación	Masa por metro	Área	Eje 1-1				Eje 2-2			Eje 3-3		
			I	S	r	d	I	S	r	c	$r_{mín}$	tan α
mm	kg	mm^2	$\times 10^6$mm^4	$\times 10^3$mm^3	mm	mm	$\times 10^6$mm^4	$\times 10^3$mm^3	mm	mm	mm	
L 203 × 152 × 25.4	65.5	8390	33.7	247	63.2	67.3	16.1	146	43.7	41.9	32.5	0.542
L 203 × 152 × 12.7	34.1	4350	18.5	131	64.8	62.5	9.03	78.5	45.5	37.1	33.0	0.557
L 178 × 102 × 19	38.8	4960	15.7	137	56.1	63.5	3.75	49.3	27.4	25.4	21.7	0.324
L 178 × 102 × 12.7	26.5	3390	11.1	94.9	57.2	61.0	2.70	34.4	28.2	23.1	22.0	0.334
L 152 × 102 × 19	35.0	4480	10.2	102	47.8	52.6	3.59	48.3	28.4	27.2	21.7	0.428
L 152 × 102 × 12.7	24.0	3060	7.20	70.6	48.5	50.3	2.59	33.8	29.0	24.9	21.9	0.440
L 127 × 89 × 19	29.3	3750	5.79	69.8	39.4	44.2	2.30	36.1	24.7	25.2	18.9	0.464
L 127 × 89 × 12.7	20.2	2580	4.15	48.7	40.1	41.9	1.67	25.4	25.4	22.9	19.1	0.479
L 127 × 76 × 12.7	19.0	2420	3.93	47.4	40.1	44.2	1.06	18.5	20.9	18.9	16.3	0.357
L 127 × 76 × 6.4	9.80	1250	2.12	24.7	41.1	41.7	0.587	9.83	21.7	16.5	16.6	0.371
L 102 × 89 × 12.7	17.6	2260	2.21	31.5	31.2	31.5	1.57	24.6	26.4	25.2	18.2	0.750
L 102 × 89 × 6.4	9.20	1170	1.20	16.6	32.0	29.0	0.862	13.0	27.2	22.8	18.4	0.759
L 102 × 76 × 12.7	16.4	2100	2.09	30.6	31.5	33.5	0.999	18.0	21.8	20.9	16.1	0.542
L 102 × 76 × 9.5	12.6	1600	1.64	23.6	32.0	32.3	0.787	13.9	22.2	19.7	16.2	0.551
L 102 × 76 × 6.4	8.60	1090	1.14	16.2	32.3	31.0	0.554	9.59	22.5	18.4	16.2	0.558

Notas: 1. Los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales paralelos a los lados.
2. Las distancias c y d se miden desde el centroide hasta las espaldas de los lados.
3. Para los ejes 1-1 y 2-2 el valor tabulado de S es el menor de los dos módulos de sección para estos ejes.
4. Los ejes 3-3 y 4-4 son ejes centroidales principales.
5. El momento de inercia para el eje 3-3, que es el menor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{33} = Ar^2_{mín}$.
6. El momento de inercia para el eje 4-4, que es el menor de los dos momentos de inercia principales, se puede determinar con la ecuación $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$.



F

Propiedades de la madera estructural



PROPIEDADES DE MADERA CEPILLADA (LISTA CONDENSADA)

Dimensiones nominales $b \times h$	Dimensiones netas $b \times h$	Área $A = bh$	Eje 1-1		Eje 2-2		Peso por pie lineal (densidad en peso = 35 lb/ft^3)
			Momento de inercia $I_1 = \frac{bh^3}{12}$	Módulo de sección $S_1 = \frac{bh^2}{6}$	Momento de inercia $I_2 = \frac{hb^3}{12}$	Módulo de sección $S_2 = \frac{hb^2}{6}$	
in	in	in^2	in^4	in^3	in^4	in^3	lb
2×4	1.5×3.5	5.25	5.36	3.06	0.98	1.31	1.3
2×6	1.5×5.5	8.25	20.80	7.56	1.55	2.06	2.0
2×8	1.5×7.25	10.88	47.63	13.14	2.04	2.72	2.6
2×10	1.5×9.25	13.88	98.93	21.39	2.60	3.47	3.4
2×12	1.5×11.25	16.88	177.98	31.64	3.16	4.22	4.1
3×4	2.5×3.5	8.75	8.93	5.10	4.56	3.65	2.1
3×6	2.5×5.5	13.75	34.66	12.60	7.16	5.73	3.3
3×8	2.5×7.25	18.13	79.39	21.90	9.44	7.55	4.4
3×10	2.5×9.25	23.13	164.89	35.65	12.04	9.64	5.6
3×12	2.5×11.25	28.13	296.63	52.73	14.65	11.72	6.8
4×4	3.5×3.5	12.25	12.51	7.15	12.51	7.15	3.0
4×6	3.5×5.5	19.25	48.53	17.65	19.65	11.23	4.7
4×8	3.5×7.25	25.38	111.15	30.66	25.90	14.80	6.2
4×10	3.5×9.25	32.38	230.84	49.91	33.05	18.89	7.9
4×12	3.5×11.25	39.38	415.28	73.83	40.20	22.97	9.6
6×6	5.5×5.5	30.25	76.3	27.7	76.3	27.7	7.4
6×8	5.5×7.5	41.25	193.4	51.6	104.0	37.8	10.0
6×10	5.5×9.5	52.25	393.0	82.7	131.7	47.9	12.7
6×12	5.5×11.5	63.25	697.1	121.2	159.4	58.0	15.4
8×8	7.5×7.5	56.25	263.7	70.3	263.7	70.3	13.7
8×10	7.5×9.5	71.25	535.9	112.8	334.0	89.1	17.3
8×12	7.5×11.5	86.25	950.5	165.3	404.3	107.8	21.0

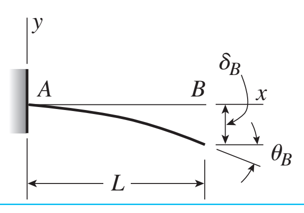
Nota: los ejes 1-1 y 2-2 son ejes centroidales principales.



G

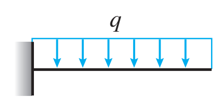
Deflexiones y pendientes de vigas

TABLA G.1 DEFLEXIONES Y PENDIENTES DE VIGAS EN VOLADIZO



v = deflexión en la dirección y (positiva hacia arriba)
$v' = dv/dx$ = pendiente de la curva de deflexión
$\delta_B = -v(L)$ = deflexión en el extremo B de la viga (positiva hacia abajo)
$\theta_B = -v'(L)$ = ángulo de rotación en el extremo B de la viga (positivo en el sentido de las manecillas del reloj)
EI = constante

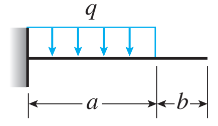
1



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

2



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

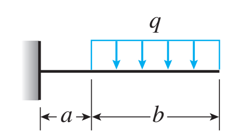
$$v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \qquad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{En } x = a\text{:} \quad v = -\frac{qa^4}{8EI} \qquad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \qquad \theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$$

3



$$v = -\frac{qbx^2}{12EI}(3L + 3a - 2x) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

$$v' = -\frac{qbx}{2EI}(L + a - x) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \qquad (a \leq x \leq L)$$

$$v' = -\frac{q}{6EI}(x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \qquad (a \leq x \leq L)$$

En $x = a$: $\quad v = -\frac{qa^2b}{12EI}(3L + a) \qquad v' = -\frac{qabL}{2EI}$

$$\delta_B = \frac{q}{24EI}(3L^4 - 4a^3L + a^4) \qquad \theta_B = \frac{q}{6EI}(L^3 - a^3)$$

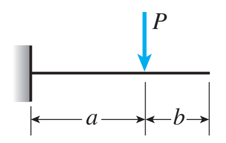
4



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

5



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \qquad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad (a \leq x \leq L)$$

En $x = a$: $\quad v = -\frac{Pa^3}{3EI} \qquad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \qquad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$

6

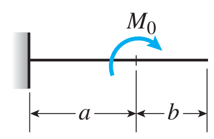


$$v = -\frac{M_0x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0L}{EI}$$

(Continúa)

7



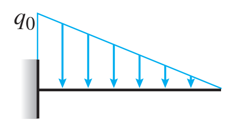
$$v = -\frac{M_0x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0x}{EI} \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{M_0a}{2EI}(2x - a) \qquad v' = -\frac{M_0a}{EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{En } x = a\text{:} \quad v = -\frac{M_0a^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0a}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0a}{2EI}(2L - a) \qquad \theta_B = \frac{M_0a}{EI}$$

8

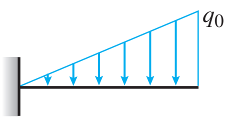


$$v = -\frac{q_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = -\frac{q_0x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_B = \frac{q_0L^4}{30EI} \qquad \theta_B = \frac{q_0L^3}{24EI}$$

9

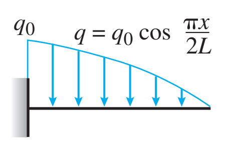


$$v = -\frac{q_0x^2}{120LEI}(20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = -\frac{q_0x}{24LEI}(8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_B = \frac{11q_0L^4}{120EI} \qquad \theta_B = \frac{q_0L^3}{8EI}$$

10

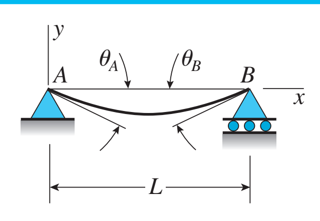


$$v = -\frac{q_0L}{3\pi^4EI}\left(48L^3 \cos\frac{\pi x}{2L} - 48L^3 + 3\pi^3Lx^2 - \pi^3x^3\right)$$

$$v' = -\frac{q_0L}{\pi^3EI}\left(2\pi^2Lx - \pi^2x^2 - 8L^2 \sin\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\delta_B = \frac{2q_0L^4}{3\pi^4EI}(\pi^3 - 24) \qquad \theta_B = \frac{q_0L^3}{\pi^3EI}(\pi^2 - 8)$$

TABLA G.2 DEFLEXIONES Y PENDIENTES DE VIGAS SIMPLES



EI = constante

v = deflexión en la dirección y (positiva hacia arriba)
$v' = dv/dx$ = pendiente de la curva de deflexión
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflexión en el punto medio C de la viga (positiva hacia abajo)
x_1 = distancia del apoyo A al punto de deflexión máxima
$\delta_{máx} = -v_{máx}$ = deflexión máxima (positiva hacia abajo)
$\theta_A = -v'(0)$ = ángulo de rotación en el extremo izquierdo de la viga (positivo en el sentido de las manecillas del reloj)
$\theta_B = v'(L)$ = ángulo de rotación en el extremo derecho de la viga (positivo en el sentido de las manecillas del reloj)

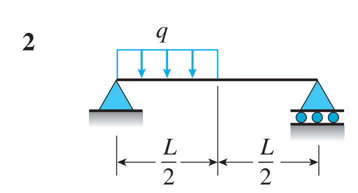
1

$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

2



$$v = -\frac{qx}{384EI}(9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

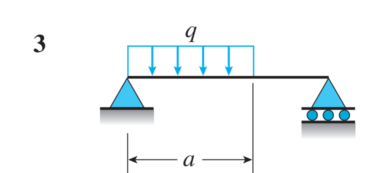
$$v' = -\frac{q}{384EI}(9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

$$v = -\frac{qL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3) \qquad \left(\frac{L}{2} \le x \le L\right)$$

$$v' = -\frac{qL}{384EI}(24x^2 - 48Lx + 17L^2) \qquad \left(\frac{L}{2} \le x \le L\right)$$

$$\delta_C = \frac{5qL^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{3qL^3}{128EI} \qquad \theta_B = \frac{7qL^3}{384EI}$$

3



$$v = -\frac{qx}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v' = -\frac{q}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \qquad (0 \le x \le a)$$

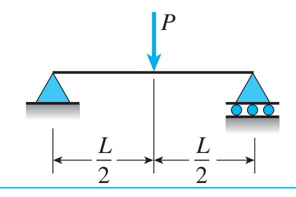
$$v = -\frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \qquad (a \le x \le L)$$

$$v' = -\frac{qa^2}{24LEI}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \qquad (a \le x \le L)$$

$$\theta_A = \frac{qa^2}{24LEI}(2L - a)^2 \qquad \theta_B = \frac{qa^2}{24LEI}(2L^2 - a^2)$$

(Continúa)

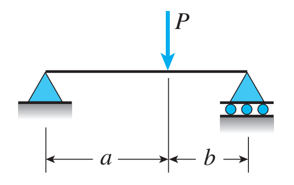
4



$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

5



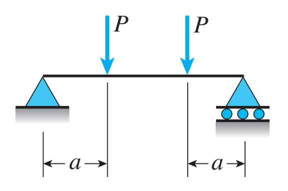
$$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad v' = -\frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

$$\theta_A = \frac{Pab(L + b)}{6LEI} \qquad \theta_B = \frac{Pab(L + a)}{6LEI}$$

$$\text{Si } a \geq b, \quad \delta_C = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \qquad \text{Si } a \leq b, \quad \delta_C = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI}$$

$$\text{Si } a \geq b, \quad x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad \text{y} \quad \delta_{\text{máx}} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\, LEI}$$

6

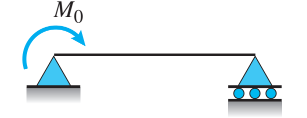


$$v = -\frac{Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2) \qquad v' = -\frac{P}{2EI}(aL - a^2 - x^2) \qquad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{Pa}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2) \qquad v' = -\frac{Pa}{2EI}(L - 2x) \qquad (a \leq x \leq L - a)$$

$$\delta_C = \delta_{\text{máx}} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{Pa(L - a)}{2EI}$$

7

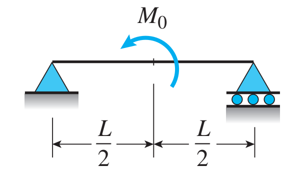


$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_C = \frac{M_0 L^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{y} \quad \delta_{\text{máx}} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}\, EI}$$

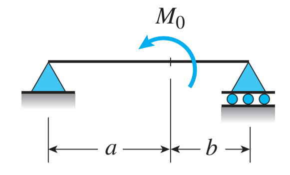
8



$$v = -\frac{M_0 x}{24LEI}(L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{24LEI}(L^2 - 12x^2) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = 0 \qquad \theta_A = \frac{M_0 L}{24EI} \qquad \theta_B = -\frac{M_0 L}{24EI}$$

9



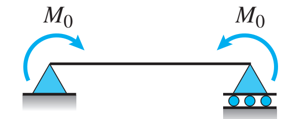
$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v' = -\frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

En $x = a$: $\quad v = -\frac{M_0 ab}{3LEI}(2a - L) \qquad v' = -\frac{M_0}{3LEI}(3aL - 3a^2 - L^2)$

$$\theta_A = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2) \qquad \theta_B = \frac{M_0}{6LEI}(3a^2 - L^2)$$

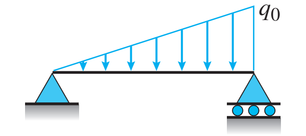
10



$$v = -\frac{M_0 x}{2EI}(L - x) \qquad v' = -\frac{M_0}{2EI}(L - 2x)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{M_0 L^2}{8EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{M_0 L}{2EI}$$

11



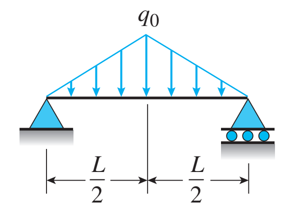
$$v = -\frac{q_0 x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

$$v' = -\frac{q_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_C = \frac{5q_0L^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{7q_0L^3}{360EI} \qquad \theta_B = \frac{q_0L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0.5193L \qquad \delta_{máx} = 0.00652\frac{q_0L^4}{EI}$$

12

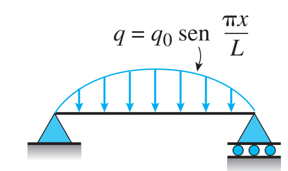


$$v = -\frac{q_0 x}{960LEI}(5L^2 - 4x^2)^2 \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

$$v' = -\frac{q_0}{192LEI}(5L^2 - 4x^2)(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

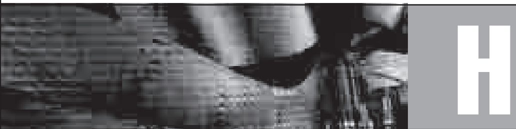
$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{q_0L^4}{120EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{5q_0L^3}{192EI}$$

13



$$v = -\frac{q_0L^4}{\pi^4EI}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \qquad v' = -\frac{q_0L^3}{\pi^3EI}\cos\frac{\pi x}{L}$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{q_0L^4}{\pi^4EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{q_0L^3}{\pi^3EI}$$



H

Propiedades de los materiales

Notas:

1. Las propiedades de los materiales varían en gran medida dependiendo de los procesos de manufactura, composición química, defectos internos, temperatura, antecedentes de carga, tiempo de uso, dimensiones de las muestras de prueba y otros factores. Los valores tabulados son representativos del material pero nunca se deben emplear para fines específicos de ingeniería o de diseño. Es preciso consultar la información proporcionada por los fabricantes y proveedores de los productos ofrecidos.

2. Excepto cuando se indique compresión o flexión, el módulo de elasticidad E, el esfuerzo de fluencia σ_Y y el esfuerzo último σ_U son para materiales en tensión.

TABLA H.1 PESOS Y DENSIDAD ESPECÍFICA

Material	Peso específico γ		Densidad específica ρ	
	lb/ft³	kN/m³	slugs/ft³	kg/m³
Acero	490	77.0	15.2	7850
Agua, dulce de mar	62.4 63.8	9.81 10.0	1.94 1.98	1000 1020
Aleaciones de aluminio 2014-T6, 7075-T6 6061-T6	160–180 175 170	26–28 28 26	5.2–5.4 5.4 5.2	2600–2800 2800 2700
Aleaciones de magnesio	75–135	12–21	2.3–4.2	1200–2200
Arena, suelo, grava	110–114	17–18	3.4–3.5	1760–1830
Bronce	510–550	80–86	16–17	8200–8800
Caucho	60–80	9–13	1.9–2.5	960–1300
Cobre	556	87	17	8900
Concreto Simple Reforzado De peso ligero	 145 150 70–115	 23 24 11–18	 4.5 4.7 2.2–3.6	 2300 2400 1100–1800
Fundición gris	435–460	68–72	13–14	7000–7400
Latón	520–540	82–85	16–17	8400–8600
Madera (secada al aire) Abeto Douglas Roble Pino del sur	 30–35 40–45 35–40	 4.7–5.5 6.3–7.1 5.5–6.3	 0.9–1.1 1.2–1.4 1.1–1.2	 480–560 640–720 560–640
Monel (67% Ni, 30% Cu)	550	87	17	8800
Níquel	550	87	17	8800
Plásticos Nailon Polietileno	 55–70 60–90	 8.6–11 9.4–14	 1.7–2.2 1.9–2.8	 880–1100 960–1400
Roca Granito, mármol, cuarzo Caliza, arenisca	 165–180 125–180	 26–28 20–28	 5.1–5.6 3.9–5.6	 2600–2900 2000–2900
Titanio	280	44	8.7	4500
Tungsteno	1200	190	37	1900
Vidrio	150–180	24–28	4.7–5.4	2400–2800

TABLA H.2 MÓDULOS DE ELASTICIDAD Y RELACIONES DE POISSON

Material	Módulo de elasticidad E		Módulo de elasticidad G		Relación de Poisson ν
	ksi	GPa	ksi	GPa	
Acero	28,000–30,000	190–210	10,800–11,800	75–80	0.27–0.30
Aleaciones de aluminio	10 ,000–1,400	70–79	3800–4300	26–30	0.33
2014-T6	10,600	73	4000	28	0.33
6061-T6	10,000	70	3800	26	0.33
7075-T6	10,400	72	3900	27	0.33
Aleaciones de magnesio	15,000–17,000	100–120	5600–6400	39–44	0.33
Aleaciones de titanio	6000–6500	41–45	2200–2400	15–17	0.35
Bronce	14,000–17,000	96–120	5200–6300	36–44	0.34
Concreto (compresión)	2500–4500	17–31			0.1–0.2
Cobre y aleaciones de cobre	16,000–18,000	110–120	5800–6800	40–47	0.33–0.36
Caucho	0.1–0.6	0.0007–0.004	0.03–0.2	0.0002–0.001	0.45–0.50
Fundición gris	12,000–25,000	83–170	4600–10,000	32–69	0.2–0.3
Latón	14,000–16,000	96–110	5200–6000	36–41	0.34
Madera (flexión)					
Abeto Douglas	1600–1900	11–13			
Roble	1600–1800	11–12			
Pino del sur	1600–2000	11–14			
Monel (67% Ni, 30% Cu)	25,000	170	9500	66	0.32
Níquel	30,000	210	11,400	80	0.31
Plástico					
Nailon	300–500	2.1–3.4			0.4
Polietileno	100–200	0.7–1.4			0.4
Roca (compresión)					
Granito, mármol, cuarzo	6000–14,000	40–100			0.2–0.3
Caliza, arenisca	3000–10,000	20–70			0.2–0.3
Tungsteno	50,000–55,000	340–380	21,000–23,000	140–160	0.2
Vidrio	7000–12,000	48–83	2700–5100	19–35	0.17–0.27

TABLA H.3 PROPIEDADES MECÁNICAS

Material	Esfuerzo de fluencia σ_Y		Esfuerzo último σ_U		Porcentaje de alargamiento (longitud calibrada 2 in)
	ksi	MPa	ksi	MPa	
Acero					
De alta resistencia	50–150	340–1000	80–180	550–1200	5–25
Para maquinaria	50–100	340–700	80–125	550–860	5–25
Para resortes	60–240	400–1600	100–270	700–1900	3–15
Inoxidable	40–100	280–700	60–150	400–1000	5–40
Para herramientas	75	520	130	900	8
Acero, estructural	30–100	200–700	50–120	340–830	10–40
ASTM-A36	36	250	60	400	30
ASTM-A572	50	340	70	500	20
ASTM-A514	100	700	120	830	15
Aleaciones de aluminio	5–70	35–500	15–80	100–550	1–45
2014-T6	60	410	70	480	13
6061-T6	40	270	45	310	17
7075-T6	70	480	80	550	11
Aleaciones de magnesio	12–40	80–280	20–50	140–340	2–20
Aleaciones de titanio	110–150	760–1000	130–170	900–1200	10
Alambre de acero	40–150	280–1000	80–200	550–1400	5–40
Bronce	12–100	82–690	30–120	200–830	5–60
Caucho	0.2–1.0	1–7	1–3	7–20	100–800
Cobre y aleaciones de cobre	8–110	55–760	33–120	230–830	4–50
Concreto (compresión)			1.5–10	10–70	
Fundición gris (compresión)			50–200	340–1400	
Fundición gris (tensión)	17–42	120–290	10–70	69–480	0–1
Latón	10–80	70–550	30–90	200–620	4–60
Madera (flexión)					
Abeto Douglas	5–8	30–50	8–12	50–80	
Roble	6–9	40–60	8–14	50–100	
Pino del sur	6–9	40–60	8–14	50–100	
Madera (compresión paralela a la veta)					
Abeto Douglas	4–8	30–50	6–10	40–70	
Roble	4–6	30–40	5–8	30–50	
Pino del sur	4–8	30–50	6–10	40–70	
Monel (67% Ni, 30% Cu)	25–160	170–1100	65–170	450–1200	2–50

(Continúa)

TABLA H.3 PROPIEDADES MECÁNICAS (Continuación)

Material	Esfuerzo de fluencia σ_Y		Esfuerzo último σ_U		Porcentaje de alargamiento (longitud calibrada 2 in)
	ksi	MPa	ksi	MPa	
Níquel	15–90	100–620	45–110	310–760	2–50
Plásticos					
Nailon			6–12	40–80	20–100
Polietileno			1–4	7–28	15–300
Roca (compresión)					
Granito, mármol, cuarzo			8–40	50–280	
Caliza, arenisca			3–30	20–200	
Tungsteno			200–600	1400–4000	0–4
Vidrio			5–150	30–1000	0
Vidrio cilindrado			10	70	
Fibra de vidrio			1000–3000	7000–20,000	

TABLA H.4 COEFICIENTES DE DILATACIÓN TÉRMICA

Material	Coeficiente de dilatación térmica α		Material	Coeficiente de dilatación térmica α	
	$10^{-6}/°F$	$10^{-6}/°C$		$10^{-6}/°F$	$10^{-6}/°C$
Acero	5.5–9.9	10–18	Fundición gris	5.5–6.6	9.9–12
De alta resistencia	8.0	14	Latón	10.6–11.8	19.1–21.2
Inoxidable	9.6	17	Monel (67% Ni, 30% Cu)	7.7	14
Estructural	6.5	12	Níquel	7.2	13
Aleaciones de aluminio	13	23	Plásticos		
Aleaciones de magnesio	14.5–16.0	26.1–28.8	Nailon	40–80	70–140
Aleaciones de titanio	4.5–6.0	8.1–11	Polietileno	80–160	140–290
Bronce	9.9–11.6	18–21	Roca	3–5	5–9
Concreto	4–8	7–14	Tungsteno	2.4	4.3
Cobre y aleaciones de cobre	9.2–9.8	16.6–17.6	Vidrio	3–6	5–11
Caucho	70–110	130–200			



Respuestas a los problemas

CAPÍTULO 1

1.2.1 (a) $\sigma_{AB} = 1443$ psi; (b) $P_2 = 1487.5$ lbs; (c) $t_{BC} = 0.5$ in

1.2.2 (a) $\sigma = 65$ MPa; (b) $\varepsilon = 4.652 \times 10^{-4}$

1.2.3 (a) $R_B = 127.3$ lb (en voladizo), 191.3 lb (frenos en V); $\sigma_c = 204$ psi (en voladizo), 306 psi (frenos en V); (b) (b) $\sigma_{\text{cable}} = 26{,}946$ psi (los dos)

1.2.4 (a) $\delta = 0.220$ mm; (b) $P = 34.6$ kN

1.2.5 (a) $\sigma_C = 2.128$ ksi; $x_C = 19.22$ in, $y_C = 19.22$ in

1.2.6 $\sigma_t = 133$ MPa

1.2.7 $\sigma_1 = 25.5$ ksi; $\sigma_2 = 35.8$ ksi;

1.2.8 $\sigma_c = 5.21$ MPa

1.2.9 (a) $T = 184$ lb, $\sigma = 10.8$ ksi; (b) $\epsilon_{\text{cable}} = 5 \times 10^{-4}$

1.2.10 (a) $T = 819$ N, $\sigma = 74.5$ MPa; (b) $\epsilon_{\text{cable}} = 4.923 \times 10^{-4}$

1.2.11 (a) $T_1 = 5877$ lb, $T_2 = 4679$ lb, $T_3 = 7159$ lb; (b) $\sigma_1 = 49$ ksi, $\sigma_2 = 39$ ksi, $\sigma_3 = 60$ ksi

1.2.12 (a) $\sigma_x = \gamma\omega^2(L^2 - x^2)/2g$; (b) $\sigma_{\text{máx}} = \gamma\omega^2 L^2/2g$

1.2.13 (a) $T_{AB} = 1620$ lb, $T_{BC} = 1536$ lb, $T_{CD} = 1640$ lb (b) $\sigma_{AB} = 13{,}501$ psi, $\sigma_{BC} = 12{,}799$ psi, $\sigma_{CD} = 13{,}667$ psi

1.2.14 (a) $T_{AQ} = T_{BQ} = 50.5$ kN; (b) $\sigma = 166$ MPa

1.3.1 (a) $L_{\text{máx}} = 11{,}800$ ft; (b) $L_{\text{máx}} = 13{,}500$ ft

1.3.2 (a) $L_{\text{máx}} = 7900$ m; (b) $L_{\text{máx}} = 8330$ m

1.3.3 Porcentaje de alargamiento = 6.5, 24.0, 39.0; Porcentaje de reducción = 8.1, 37.9, 74.9; Frágil, dúctil, dúctil

1.3.4 11.9×10^3 m; 12.7×10^3 m; 6.1×10^3 m; 6.5×10^3 m; 23.9×10^3 m

1.3.5 $\sigma \approx 31$ ksi

1.3.6 $\sigma_{\text{pl}} \approx 47$ MPa, Pendiente ≈ 2.4 GPa, $\sigma_Y \approx 53$ MPa; Frágil

1.3.7 $\sigma_{\text{pl}} \approx 65{,}000$ psi, Pendiente $\approx 30 \times 10^6$ psi, $\sigma_Y \approx 69{,}000$ psi, $\sigma_U \approx 113{,}000$ psi; Alargamiento = 6%, Reducción = 31%

1.4.1 0.13 in más larga

1.4.2 4.0 mm más larga

1.4.3 (a) 2.809 in; (b) 31.8 ksi

1.4.4 (a) 2.966 mm; (b) 180 MPa

1.4.5 (b) 0.71 in; (c) 0.58 in; (d) 49 ksi

1.5.1 $P_{\text{máx}} = 157$ k

1.5.2 $P = 27.4$ kN (tensión)

1.5.3 $P = -15.708$ kips

1.5.4 $\Delta L = 1.886$ mm; porcentaje de decremento en área sección transversal = 0.072%

1.5.5 $\Delta d = -1.56 \times 10^{-4}$ in, $P = 2.154$ kips

1.5.6 (a) $E = 104$ GPa; (b) $\nu = 0.34$

1.5.7 (a) $\Delta d_{BC\text{interior}} = 8 \times 10^{-4}$ in (b) $\nu_{\text{latón}} = 0.34$ (c) $\Delta t_{AB} = 2.732 \times 10^{-4}$ in, $\Delta d_{AB\text{interior}} = 1.366 \times 10^{-4}$ in

1.5.8 $\Delta V = 9789 \text{ mm}^3$

1.6.1 $\sigma_b = 7.04$ ksi, $\tau_{\text{prom}} = 10.756$ ksi

1.6.2 $\sigma_b = 139.86$ MPa; $P_{\text{últ}} = 144.45$ kN

1.6.3 (a) $\tau = 12.732$ ksi; (b) $\sigma_{bf} = 20$ ksi; $\sigma_{bg} = 26.667$ ksi

1.6.4 (a) $A_x = 254.6$ N, $A_y = 1072$ N, $B_x = -254.6$ N (b) $A_{\text{resultante}} = 1101.8$ N (c) $\tau = 5.48$ MPa, $\sigma_b = 6.886$ MPa

1.6.5 (a) $\tau_{\text{máx}} = 2979$ psi; (b) $\sigma_{b\text{máx}} = 936$ psi

1.6.6 $T_1 = 13.176$ kN, $T_2 = 10.772$ kN, $\tau_{1\text{prom}} = 25.888$ MPa, $\tau_{2\text{prom}} = 21.166$ MPa, $\sigma_{b1} = 7.32$ MPa, $\sigma_{b2} = 5.985$ MPa

1.6.7 Resultante = 1097 lb; (b) $\sigma_b = 4999$ psi (c) $\tau_{\text{tuerca}} = 2793$ psi, $\tau_{\text{pl}} = 609$ psi

1.6.8 $G = 2.5$ MPa

1.6.9 (a) $\gamma_{\text{prom}} = 0.004$; (b) $V = 89.6$ k

1.6.10 (a) $\gamma_{\text{prom}} = 0.50$; (b) $\delta = 4.50$ mm

1.6.11 (a) $\tau_{\text{prom}} = 6050$ psi; (b) $\sigma_b = 9500$ psi

1.6.12 $\tau_{\text{prom}} = 42.9$ MPa

1.6.13 (a) $A_x = 0$, $A_y = 170$ lb, $M_A = 4585$ in-lb (b) $B_x = 253.6$ lb, $B_y = 160$ lb, $B_{\text{res}} = 299.8$ lb, $C_x = -B_x$

(c) $\tau_B = 3054$ psi, $\tau_C = 1653$ psi
(d) $\sigma_{bB} = 4797$ psi, $\sigma_{bC} = 3838$ psi

1.6.14 Para una bicicleta con $L/R = 1.8$:
(a) $T = 1440$ N; (b) $\tau_{prom} = 147$ MPa

1.6.15 (a) $\tau = \dfrac{P}{2\pi rh}$; (b) $\delta = \dfrac{P}{2\pi hG}\ln\dfrac{b}{d}$

1.6.16 (a) $A_x = 0$, $B_y = 0$, $A_y = 490$ kN; $F_{BC} = 0$, $F_{AB} = 490$ kN, $F_{AC} = -693$ kN
(b) $\tau_p = 963$ MPa
(c) $\sigma_b = 1361$ MPa

1.6.17 (a) $O_x = 12.679$ lb, $O_y = 1.294$ lb, $O_{res} = 12.745$ lb
(b) $\tau_O = 519$ psi, $\sigma_{bO} = 816$ psi
(c) $\tau = 362$ psi

1.6.18 (a) $F_s = 154$ N, $\sigma = 3.06$ MPa
(b) $\tau_{prom} = 1.96$ MPa
(c) $\sigma_b = 1.924$ MPa

1.6.19 (a) $P = 394.6$ lb
(b) $C_x = 374$ lb, $C_y = -237$ lb, $C_{res} = 443$ lb
(c) $\tau = 18{,}038$ psi, $\sigma_{bC} = 4722$ psi

1.7.1 $P_{perm} = 3140$ lb

1.7.2 $T_{máx} = 5216$ kN·m

1.7.3 $P_{perm} = 607$ lb

1.7.4 (a) Tubo BC (fluencia) $P_a = 11$ kN
(b) P_a (fluencia) $= 7.6$ kN
(c) Tubo AB (fluencia): $P_a = 17.2$ kN

1.7.5 $P = 294$ k

1.7.6 (a) $F = 1.171$ kN
(b) Cortante: $F_a = 2.863$ kN

1.7.7 $W_{máx} = 5110$ lb

1.7.8 (a) $F_A = \sqrt{2}\,T$, $F_B = 2\,T$, $F_C = T$
(b) Cortante en A: $W_{máx} = 59.5$ kN

1.7.9 $P_a = 10.21$ kips

1.7.10 $C_{últ} = 5739$ N; $P_{máx} = 445$ N

1.7.11 $W_{máx} = 0.305$ kips

1.7.12 Rige cortante en remaches en CG y CD controla:
$P_{perm} = 45.8$ kN

1.7.13 (a) $P_a = \sigma_a\,(0.587\,d^2)$; (b) $P_a = 21.6$ kips

1.7.14 $P_{perm} = 96.5$ kN

1.7.15 $p_{máx} = 11.98$ psf

1.7.16 (a) $P_{perm} = \sigma_c(\pi d^2/4)\sqrt{1-(R/L)^2}$;
(b) $P_{perm} = 9.77$ kN

1.8.1 (a) $d_{mín} = 3.751$ in.; (b) $d_{mín} = 4.006$ in

1.8.2 (a) $d_{mín} = 225$ mm; (b) $d_{mín} = 242$ mm

1.8.3 (a) $d_{mín} = 0.704$ in; (b) $d_{mín} = 0.568$ in

1.8.4 $d_{mín} = 63.3$ mm

1.8.5 $d_{mín} = 0.651$ in

1.8.6 (b) $A_{mín} = 435$ mm^2

1.8.7 $d_{mín} = 0.372$ in

1.8.8 $d_{mín} = 5.59$ mm

1.8.9 $n = 11.6$, o 12 pernos

1.8.10 $(d_2)_{mín} = 131$ mm

1.8.11 $A_c = 1.189$ in^2

1.8.12 (a) $t_{mín} = 18.8$ mm, utilice $t = 20$ mm;
(b) $D_{mín} = 297$ mm

1.8.13 (a) $\sigma_{DF} = 10.375$ ksi $< \sigma_{perm}$; $\sigma_{bF} = 378$ psi $< \sigma_{ba}$
(b) nuevo $\sigma_{BC} = 25$ ksi para incrementar barra BC a $\dfrac{1}{4}$ in diámetro; incremente diámetro de arandela en B a 1.5625 in

1.8.14 (a) $d_m = 24.7$ mm; (b) $P_{máx} = 49.4$ kN

1.8.15 $\theta = \arccos 1/\sqrt{3} = 54.7°$

CAPÍTULO 2

2.2.1 $\delta = 6W/(5k)$

2.2.2 (a) $\delta = 12.5$ mm; (b) $n = 5.8$

2.2.3 (a) $\delta_c/\delta_s = 1.67$; (b) $d_c/d_s = 1.29$

2.2.4 $h = 13.4$ mm

2.2.5 $h = L - \pi\rho_{máx}d^2/4k$

2.2.6 $x = 118$ mm

2.2.7 $\delta_C = 16P/9k$

2.2.8 (a) $\delta_B = 2.5$ mm; (b) $P_{máx} = 390$ kN

2.2.9 $P_{máx} = 72.3$ lb

2.2.10 (a) $x = 134.7$ mm; (b) $k_1 = 0.204$ N/mm;
(c) $b = 74.1$ mm; (d) $k_3 = 0.638$ N/mm

2.2.11 (a) $t_{c,mín} = 0.024$ in; (b) $\delta_r = 0.031$ in;
(c) $h_{mín} = 0.049$ in

2.2.12 $\delta_A = 0.200$ mm, $\delta_D = 0.880$ mm

2.2.13 $\theta = 35.1°$, $\delta = 1.78$ in

2.2.14 $\theta = 35.1°$, $\delta = 44.5$ in

2.3.1 $\delta = 0.0276$ in

2.3.2 (a) $\delta = 0.675$ mm; (b) $P_{máx} = 267$ kN

2.3.3 (a) $\delta = 0.0131$ in (alargamiento); (b) $P = 1310$ lb

2.3.4 (a) $\delta = 7PL/6Ebt$; (b) $\delta = 0.500$ mm

2.3.5 (a) $\delta = 7PL/6Ebt$; (b) $\delta = 0.021$ in

2.3.6 (a) $\delta_{AC} = 3.72$ mm; (b) $P_0 = 44.2$ kN

2.3.7 (a) $\delta = 0.0589$ in; (b) $\delta = 0.0501$ in

2.3.8 (a) $d_{máx} = 23.871$ mm; (b) $b = 132.33$ mm;
(c) $x = 14.1$ mm

2.3.9 (a) $\delta = PL/2EA$; (b) $\sigma_c = Py/AL$

2.3.10 (a) $\delta_{2-4} = 0.024$ mm; (b) $P_{máx} = 8.154$ kN;
(c) $L_2 = 9.156$ mm

2.3.11 (a) $R_1 = -3P/2$; (b) $N_1 = 3P/2$ (tensión), $N_2 = P/2$ (tensión); (c) $x = L/3$; (d) $\delta_2 = 2PL/3EA$;
(e) $\beta = 1/11$

2.3.12 (a) $\delta_C = W(L^2 - h^2)/2EAL$;
(b) $\delta_B = WL/2EA$; (c) $\beta = 3$

2.3.13 (b) $\delta = 0.010$ in
2.3.14 $\delta = 2PH/3Eb^2$
2.3.15 $\delta = 2WL/\pi d^2E$
2.3.16 (a) $\delta = 2.185$ mm; (b) $\delta = 6.736$ mm
2.3.17 (b) $\delta = 11.14$ ft
2.4.1 (a) $P = 1330$ lb; (b) $P_{perm} = 1300$ lb
2.4.2 (a) $P = 104$ kN; (b) $P_{máx} = 116$ kN
2.4.3 (a) $P_B/P = 3/11$; (b) $\sigma_B/\sigma_A = 1/2$;
(c) Razón = 1
2.4.4 (a) Si $x \leq L/2$, $R_A = (-3PL)/(2(x + 3L))$,
$R_B = -P(2x + 3L)/(2(x + 3L))$
Si $x \geq L/2$, $R_A = (-P(x + L))/(x + 3L)$,
$R_B = (-2PL)/(x + 3L)$
(b) Si $x \leq L/2$, $\delta = PL(2x + 3L)/[(x + 3L)E\pi d^2]$
Si $x \geq L/2$, $\delta = 8PL(x + L)/[3(x + 3L)E\pi d^2]$
(c) $x = 3L/10$ o $x = 2L/3$
(d) $R_B = -0.434\ P$, $R_A = -0.566\ P$
(e) $R_B = \rho g\pi d^2L/8$, $R_A = 3\ \rho g\pi d^2L/32$
2.4.5 (a) 41.7%; (b) $\sigma_M = 32.7$ ksi, $\sigma_O = 51.4$ ksi
2.4.6 (a) $\delta = 1.91$ mm; (b) $\delta = 1.36$ mm;
(c) $\delta = 2.74$ mm
2.4.7 (a) $R_A = 2R_D = 2P/3$; (b) $\delta_B = 2\delta_C = PL/6EA_1$
2.4.8 (a) $R_A = 10.5$ kN a la izquierda;
$R_D = 2.0$ kN a la derecha
(b) $F_{BC} = 15.0$ kN (compresión)
2.4.9 (b) $\sigma_a = 1610$ psi (compresión),
$\sigma_s = 9350$ psi (tensión)
2.4.10 (a) $R_A = (37/70)\ \rho gAL$, $R_C = (19/70)\ \rho gAL$
(b) $\delta_B = (-17/70)\ \rho gL^2/E$
(c) $\sigma_B = -\rho gL/14$, $\sigma_C = -19\ \rho gL/35$
2.4.11 (a) $P_1 = PE_1/(E_1 + E_2)$;
(b) $e = b(E_2 - E_1)/[2(E_2 + E_1)]$;
(c) $\sigma_1/\sigma_2 = E_1/E_2$
2.4.12 (a) $P_{perm} = 1504$ N; (b) $P_{perm} = 820$ N;
(c) $P_{perm} = 703$ N
2.4.13 $d_2 = 0.338$ in, $L_2 = 48.0$ in
2.4.14 $\delta_{AC} = 0.176$ mm
2.4.15 (a) $\sigma_C = 10{,}000$ psi, $\sigma_D = 12{,}500$ psi;
(b) $\delta_B = 0.0198$ in
2.4.16 $P_{máx} = 1800$ N
2.4.17 $\sigma_s = 3$ ksi, $\sigma_b = 2$ ksi, $\sigma_c = 2$ ksi
2.5.1 $\sigma = 11{,}700$ psi
2.5.2 $T = 40.3°C$
2.5.3 $\Delta T = 185°F$
2.5.4 (a) $\Delta T = 24°C$; (b) horquilla: $\sigma_{bc} = 42.412$ MPa;
arandela $\sigma_{bw} = 51$ MPa
2.5.5 (a) $\sigma_c = E\alpha(\Delta T_B)/4$
(b) $\sigma_c = E\alpha(\Delta T_B)/[4(EA/kL) + 1]$
2.5.6 (a) $N = 51.78$ kN, máx. $\sigma_c = 26.37$ MPa,
$\delta_C = -0.314$ mm
(b) $N = 31.24$ kN, máx. $\sigma_c = 15.91$ MPa,
$\delta_C = -0.546$ mm
2.5.7 $\delta = 0.123$ in
2.5.8 $\Delta T = 34°C$
2.5.9 $\tau = 15.0$ ksi
2.5.10 $P_{perm} = 39.5$ kN
2.5.11 (a) $T_A = 400$ lb, $T_B = 200$ lb;
(b) $T_A = 454$ lb, $T_B = 92$ lb; (c) $\Delta T = 153°F$
2.5.12 (a) $\sigma = 98$ MPa; (b) $T = 35°C$
2.5.13 (a) $\sigma = -957$ psi; (b) $F_k = 3006$ lb (C);
(c) $\sigma = -2560$ psi
2.5.14 $s = PL/6EA$
2.5.15 (a) $P_1 = 231.4$ kips; $R_A = -55.2$ k, $R_B = 55.2$ k
(b) $P_2 = 145.1$ k; $R_A = -55.2$ k, $R_B = 55.2$ k
(c) Para P_1, $\tau_{máx} = 13.393$ ksi; Para P_2,
$\tau_{máx} = 19.444$ ksi
(d) $\Delta T = 65.8°F$; $R_A = 0$, $R_B = 0$
(e) $R_A = -55.2$ k, $R_B = 55.2$ k
2.5.16 (a) $R_A = [-s + \alpha\ \Delta T\ (L_1 + L_2)]/[(L_1/EA_1)$
$+ (L_2/EA_2) + (1/k_3)]$, $R_D = -R_A$
(b) $\delta_B = \alpha\ \Delta T\ (L_1) - R_A\ (L_1/EA_1)$, $\delta_C = \alpha\ \Delta T\ (L_1$
$+ L_2) - R_A\ [(L_1/EA_1) + (L_2/EA_2)]$
2.5.17 $T_B = 660$ lb, $T_C = 780$ lb
2.5.18 $P_{perm} = 1.8$ MN
2.5.19 (a) $\sigma_p = -0.196$ ksi, $\sigma_r = 3.42$ ksi
(b) $\sigma_b = 2.736$ ksi, $\tau_c = 0.285$ ksi
2.5.20 $\sigma_p = 25.0$ MPa
2.5.21 $\sigma_p = 2400$ psi
2.5.22 (a) $P_B = 25.367$ kN, $P_s = -P_B$
(b) $S_{req} = 25.674$ mm
(c) $\delta_{final} = 0.35$ mm
2.5.23 (a) $F_k = -0.174$ k; (b) $F_t = 0.174$ k;
(c) $L_f = 12.009$ in; (d) $\Delta T = 141.9°F$
2.5.24 $\sigma_s = 500$ MPa (tensión),
$\sigma_c = 10$ MPa (compresión)
2.5.25 (a) $F_k = 0.174$ k; (b) $F_t = -0.174$ k;
(c) $L_f = 11.991$ in; (d) $\Delta T = -141.6$ °F
2.6.1 $P_{máx} = 42{,}600$ lb
2.6.2 $d_{mín} = 6.813$ mm
2.6.3 $P_{máx} = 24{,}000$ lb
2.6.4 (a) $\Delta T_{máx} = -46°C$; (b) $\Delta T = +9.93°C$
2.6.5 (a) $\tau_{máx} = 10{,}800$ psi; (b) $\Delta T_{máx} = -49.9°F$;
(c) $\Delta T = +75.9°F$
2.6.6 (a) $\sigma_{máx} = 84.0$ MPa; (b) $\tau_{máx} = 42.0$ MPa
2.6.7 (a) $\sigma_{máx} = 18{,}000$ psi; (b) $\tau_{máx} = 9000$ psi

2.6.8 Elemento A: $\sigma_x = 105$ MPa (compresión); Elemento B: $\tau_{máx} = 52.5$ MPa

2.6.9 $N_{AB} = 90$ kips (C); (a) $\sigma_x = -10.91$ ksi; (b) $\sigma_\theta = -8.18$ ksi, $\tau_\theta = 4.72$ ksi; (c) $\sigma_\theta = -5.45$ ksi, $\tau_\theta = 5.45$ ksi;

2.6.10 (a) (1) $\sigma_x = -945$ kPa; (2) $\sigma_\theta = -807$ kPa, $\tau_\theta = 334$ kPa; (3) $\sigma_\theta = -472$ kPa, $\tau_\theta = 472$ kPa; $\sigma_{máx} = -945$ kPa, $\tau_{máx} = -472$ kPa (b) $\sigma_{máx} = -378$ kPa, $\tau_{máx} = -189$ kPa

2.6.11 (a) $\tau_{pq} = 1154$ psi; (b) $\sigma_{pq} = -1700$ psi, $\sigma(pq + \pi/2) = -784$ psi; (c) $P_{máx} = 14688$ lb

2.6.12 (a) $\Delta T_{máx} = 31.3$°C; (b) $\sigma_{pq} = -21.0$ MPa (compresión), $\tau_{pq} = 30$ MPa (sentido contrario al de las manecillas del reloj); (c) $\beta = 0.62$

2.6.13 $N_{AC} = 10$ kips; $d_{mín} = 1.42$ in

2.6.14 (a) $\sigma_\theta = 0.57$ MPa, $\tau_\theta = -1.58$ MPa; (b) $\alpha = 33.3°$; (c) $\alpha = 26.6°$

2.6.15 (a) $\theta = 35.26°$, $\tau_\theta = -7070$ psi; (b) $\sigma_{máx} = 15{,}000$ psi, $\tau_{máx} = 7500$ psi

2.6.16 $\sigma_{\theta 1} = 54.9$ MPa, $\sigma_{\theta 2} = 18.3$ MPa, $\tau_\theta = -31.7$ MPa

2.6.17 $\sigma_{máx} = 10{,}000$ psi, $\tau_{máx} = 5000$ psi

2.6.18 (a) $\theta = 30.96°$; (b) $P_{máx} = 1.53$ kN

2.6.19 (a) $\Delta T_{máx} = 21.7$°F; (b) $\Delta T_{máx} = 25.3$°F

2.7.1 (a) $U = 23P^2L/12EA$; (b) $U = 125$ in-lb

2.7.2 (a) $U = 5P^2L/4\pi Ed^2$; (b) $U = 1.036$ J

2.7.3 $U = 5040$ in-lb

2.7.4 (c) $U = P^2L/2EA + PQL/2EA + Q^2L/4EA$

2.7.5 Aluminio: 171 psi, 1740 in

2.7.6 (a) $U = P^2L/EA$; (b) $\delta_B = 2PL/EA$

2.7.7 (a) $U_1 = 0.0375$ in-lb; (b) $U_2 = 2.57$ in-lb; (c) $U_3 = 2.22$ in-lb

2.7.8 (a) $U = 5k\delta^2$; (b) $\delta = W/10k$; (c) $F_1 = 3W/10$, $F_2 = 3W/20$, $F_3 = W/10$

2.7.9 (a) $U = \dfrac{P^2L}{2Et(b_2 - b_1)} \ln \dfrac{b_2}{b_1}$; (b) $\delta = \dfrac{PL}{Et(b_2 - b_1)} \ln \dfrac{b_2}{b_1}$

2.7.10 (a) $P_1 = 270$ kN; (b) $\delta = 1.321$ mm; (c) $U = 243$ J

2.7.11 (a) $x = 2s$, $P = 2(k_1 + k_2)s$; (b) $U_1 = (2k_1 + k_2)s^2$

2.7.12 (a) $U = 6.55$ J; (b) $\delta_C = 168.8$ mm

2.8.1 (a) $\delta_{máx} = 0.0361$ in; (b) $\sigma_{máx} = 22{,}600$ psi; (c) Factor de impacto $= 113$

2.8.2 (a) $\delta_{máx} = 6.33$ mm; (b) $\sigma_{máx} = 359$ MPa; (c) Factor de impacto $= 160$

2.8.3 (a) $\delta_{máx} = 0.0312$ in; (b) $\sigma_{máx} = 26{,}000$ psi; (c) Factor de impacto $= 130$

2.8.4 (a) $\delta_{máx} = 215$ mm; (b) Factor de impacto $= 3.9$

2.8.5 (a) $\delta_{máx} = 29.21$ in; (b) Factor de impacto $= 4.6$

2.8.6 $v = 13.1$ m/s

2.8.7 $h_{máx} = 8.55$ in

2.8.8 $L_{mín} = 9.25$ m

2.8.9 $L_{mín} = 500$ in

2.8.10 $v_{máx} = 5.40$ m/s

2.8.11 $\delta_{máx} = 11.0$ in

2.8.12 $L = 25.5$ m

2.8.13 (a) Factor de impacto $= 1 + (1 + 2EA/W)^{1/2}$; (b) 10

2.8.14 $\sigma_{máx} = 33.3$ MPa

2.10.1 (a) $\sigma_{máx} \approx 6.2$ ksi y 6.9 ksi; (b) $\sigma_{máx} \approx 11.0$ ksi y 9.0 ksi

2.10.2 (a) $\sigma_{máx} \approx 26$ MPa y 29 MPa; (b) $\sigma_{máx} \approx 25$ MPa y 22 MPa

2.10.3 $P_{máx} = \sigma_t bt/3$

2.10.4 $\sigma_{máx} \approx 46$ MPa

2.10.5 $\sigma_{máx} \approx 6100$ psi

2.10.6 (a) No, lo debilita; $P_1 = 25.1$ kN; $P_2 \approx 14.4$ kN; (b) $d_0 \approx 15.1$ mm

2.10.7 $d_{máx} \approx 0.51$ in

2.11.2 (a) $\delta_C = 1.67$ mm; (b) $\delta_C = 5.13$ mm; (c) $\delta_C = 11.88$ mm

2.11.3 (b) $P = 17.7$ k

2.11.4 Para $P = 30$ kN: $\delta = 6.2$ mm; para $P = 40$ kN: $\delta = 12.0$ mm

2.11.5 Para $P = 24$ k: $\delta = 0.18$ in.; para $P = 40$ k: $\delta = 0.68$ in.

2.11.6 Para $P = 3.2$ kN: $\delta_B = 4.85$ mm; para $P = 4.8$ kN: $\delta_B = 17.3$ mm

2.12.1 $P_Y = P_P = 2\sigma_Y A \operatorname{sen}\theta$

2.12.2 $P_P = 201$ kN

2.12.3 (a) $P_P = 5\sigma_Y A$

2.12.4 $P_P = 2\sigma_Y A(1 + \operatorname{sen}\alpha)$

2.12.5 $P_P = 47.9$ k

2.12.6 $P_P = 82.5$ kN

2.12.7 $P_P = 20.4$ k

2.12.8 (a) $P_Y = \sigma_Y A$, $\delta_Y = 3\sigma_Y L/2E$; (b) $P_P = 4\sigma_Y A/3$, $\delta_P = 3\sigma_Y L/E$

2.12.9 (a) $P_Y = \sigma_Y A$, $\delta_Y = \sigma_Y L/E$; (b) $P_P = 5\sigma_Y A/4$, $\delta_P = 2\sigma_Y L/E$

2.12.10 (a) $W_Y = 28.8$ kN, $\delta_Y = 125$ mm; (b) $W_P = 48$ kN, $\delta_P = 225$ mm

2.12.11 (a) $P_Y = 70.1$ k, $\delta_Y = 0.01862$ in; (b) $P_P = 104.3$ k, $\delta_P = 0.02862$ in

CAPÍTULO 3

3.2.1 $d_{máx} = 0.413$ in

3.2.2 $L_{mín} = 162.9$ mm

3.2.3 (a) $\gamma_1 = 267 \times 10^{-6}$ radianes; (b) $r_{2,mín} = 2.2$ in

3.2.4 (a) $\gamma_1 = 393 \times 10^{-6}$ radianes; (b) $r_{2,máx} = 50.9$ mm

3.2.5 (a) $\gamma_1 = 195 \times 10^{-6}$ radianes; (b) $r_{2,máx} = 2.57$ in

3.3.1 $\tau_{máx} = 8340$ psi

3.3.2 (a) $\tau_{máx} = 23.8$ MPa;
(b) $\theta = 9.12°/\text{m}$

3.3.3 (a) $\tau_{máx} = 18{,}300$ psi;
(b) $\phi = 3.32°$

3.3.4 (a) $k_T = 2059$ N·m;
(b) $\tau_{máx} = 27.9$ MPa, $\gamma_{máx} = 997 \times 10^{-6}$ radianes

3.3.5 $L_{mín} = 38.0$ in

3.3.6 $T_{máx} = 6.03$ N·m, $\phi = 2.20°$

3.3.7 $\tau_{máx} = 15\,930$ psi; $\gamma_{máx} = 0.00509$ radianes;
$G = 3.13 \times 10^6$ psi

3.3.8 $T_{máx} = 9164$ N·m

3.3.9 $\tau_{máx} = 4840$ psi

3.3.10 $d_{mín} = 63.3$ mm

3.3.11 (a) $\tau_2 = 5170$ psi;
(b) $\tau_1 = 3880$ psi;
(c) $\theta = 0.00898°/\text{in}$

3.3.12 (a) $\tau_2 = 30.1$ MPa;
(b) $\tau_1 = 20.1$ MPa;
(c) $\theta = 0.306°/\text{m}$

3.3.13 $d_{mín} = 2.50$ in

3.3.14 $d_{mín} = 64.4$ mm

3.3.15 (a) $T_{1,máx} = 4.602$ in-kips;
(b) $T_{1,máx} = 4.314$ in-kips;
(c) par de torsión: 6.25%, peso: 25%

3.3.16 (a) $\phi = 5.19°$;
(b) $d = 88.4$ mm;
(c) razón $= 0.524$

3.3.17 $r_2 = 1.40$ in

3.4.1 (a) $\tau_{máx} = 7600$ psi;
(b) $\phi_C = 0.16°$

3.4.2 (a) $\tau_{barra} = 79.6$ MPa, $\tau_{tubo} = 32.3$ MPa;
(b) $\phi_A = 9.43°$

3.4.3 (a) $\tau_{máx} = 4.653$ ksi;
(b) $\phi_D = 0.98°$

3.4.4 $T_{perm} = 459$ N·m

3.4.5 $d_1 = 0.818$ in

3.4.6 $d = 77.5$ mm

3.4.7 (a) $d = 1.78$ in;
(b) $d = 1.83$ in

3.4.8 $d_B/d_A = 1.45$

3.4.9 Mínimo $d_A = 2.52$ in

3.4.10 Mínimo $d_B = 48.6$ mm

3.4.11 (a) $R_1 = -3T/2$;
(b) $T_1 = 1.5T$, $T_2 = 0.5T$;
(c) $x = 7L/17$;
(d) $\phi_2 = (12/17)(TL/GI_P)$

3.4.12 $\phi = 3TL/2\pi G t d_A^3$

3.4.13 (a) $\phi = 2.79°$;
(b) $\phi = 2.21°$

3.4.14 (a) $R_1 = \dfrac{-T}{2}$ (b) $\phi_3 = \dfrac{19}{8} \cdot \dfrac{TL}{\pi G t d^3}$

3.4.15
$$\phi_D = \frac{4Fd}{\pi G}\left[\frac{L_1}{t_{01}d_{01}^{\,3}} + \int_0^{L_2} \frac{L_2^{\,4}}{\left(d_{01}L_2 - d_{01}x + d_{03}x\right)^3\left(t_{01}L_2 - t_{01}x + t_{03}x\right)}dx + \frac{L_3}{t_{03}d_{03}^{\,3}}\right]$$
$\phi_D = 0.142°$

3.4.16 $\tau_{máx} = 16tL/\pi d^3$;
(b) $\phi = 16tL^2/\pi G d^4$

3.4.17 $\tau_{máx} = 8t_A L/\pi d^3$;
(b) $\phi = 16t_A L^2/3\pi G d^4$

3.4.18 (a) $R_A = -\dfrac{T_0}{6}$

(b) $T_{AB}(x) = \left(\dfrac{T_0}{6} - \dfrac{x^2}{L^2}T_0\right) \quad 0 \le x \le \dfrac{L}{2}$

$T_{BC}(x) = -\left[\left(\dfrac{x-L}{L}\right)^2 \cdot \dfrac{T_0}{3}\right] \quad \dfrac{L}{2} \le x \le L$

(c) $\phi_C = \dfrac{T_0 L}{144 G I_P}$

(d) $\tau_{máx} = \dfrac{8}{3\pi} \cdot \dfrac{T_0}{d_{AB}^{\,3}}$

3.4.19 $L_{máx} = 4.42$ m; (b) $\phi = 170°$

3.4.20 (a) $T_{0,máx} = \tau_{p,perm}\left(\dfrac{\pi d_2 d_p^{\,2}}{4}\right)$

(b) $T_{0,máx} = \tau_{t,perm}\left[\dfrac{\pi\left(d_3^{\,4} - d_2^{\,4}\right)}{16 d_3}\right]$

$T_{0,máx} = \tau_{t,perm}\left[\dfrac{\pi\left(d_2^{\,4} - d_1^{\,4}\right)}{16 d_2}\right]$

(c) $\phi_{C,máx} = \tau_{p,perm}\left(\dfrac{8 d_2 d_p^{\,2}}{G}\right)$

$$\left[\frac{L_A}{\left(d_3^4 - d_2^4\right)} + \frac{L_B}{\left(d_2^4 - d_1^4\right)}\right]$$

$$\phi_{C,\text{máx}} = \tau_{t,\text{perm}}\frac{\left(\dfrac{2\left(d_3^4 - d_2^4\right)}{Gd_3}\right)}{\left[\dfrac{L_A}{\left(d_3^4 - d_2^4\right)} + \dfrac{L_B}{\left(d_2^4 - d_1^4\right)}\right]}$$

$$\phi_{C,\text{máx}} = \tau_{t,\text{perm}}\frac{\left(\dfrac{2\left(d_2^4 - d_1^4\right)}{Gd_2}\right)}{\left[\dfrac{L_A}{\left(d_3^4 - d_2^4\right)} + \dfrac{L_B}{\left(d_2^4 - d_1^4\right)}\right]}$$

3.5.1 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 6280$ psi; (b) $T = 74{,}000$ lb-in
3.5.2 (a) $\epsilon_{\text{máx}} = 320 \times 10^{-6}$; (b) $\sigma_{\text{máx}} = 51.2$ MPa; (c) $T = 20.0$ kN·m
3.5.3 (a) $d_1 = 2.40$ in; (b) $\phi = 2.20°$; (c) $\gamma_{\text{máx}} = 1600 \times 10^{-6}$ rad
3.5.4 $G = 30.0$ GPa
3.5.5 $T = 4200$ lb-in
3.5.6 $d_{\text{mín}} = 37.7$ mm
3.5.7 $d_1 = 0.60$ in
3.5.8 $d_2 = 79.3$ mm
3.5.9 (a) $\tau_{\text{máx}} = 5090$ psi; (b) $\gamma_{\text{máx}} = 432 \times 10^{-6}$ rad
3.5.10 (a) $\tau_{\text{máx}} = 23.9$ MPa; (b) $\gamma_{\text{máx}} = 884 \times 10^{-6}$ rad
3.7.1 (a) $\tau_{\text{máx}} = 4950$ psi; (b) $d_{\text{mín}} = 3.22$ in
3.7.2 (a) $\tau_{\text{máx}} = 50.0$ MPa; (b) $d_{\text{mín}} = 32.3$ mm
3.7.3 (a) $H = 6560$ hp; (b) El esfuerzo cortante se reduce a la mitad
3.7.4 (a) $\tau_{\text{máx}} = 16.8$ MPa; (b) $P_{\text{máx}} = 267$ kW
3.7.5 $d_{\text{mín}} = 4.28$ in
3.7.6 $d_{\text{mín}} = 110$ mm
3.7.7 Mínimo $d_1 = 1.221d$
3.7.8 $P_{\text{máx}} = 91.0$ kW
3.7.9 $d = 2.75$ in
3.7.10 $d = 53.4$ mm
3.8.1 $\phi_{\text{máx}} = 3T_0L/5GI_P$
3.8.2 (a) $x = L/4$; (b) $\phi_{\text{máx}} = T_0L/8GI_P$
3.8.3 $\phi_{\text{máx}} = 2b\tau_{\text{perm}}/Gd$
3.8.4 $P_{\text{perm}} = 2710$ N
3.8.5 $(T_0)_{\text{máx}} = 3680$ lb-in
3.8.6 $(T_0)_{\text{máx}} = 150$ N·m
3.8.7 (a) $a/L = d_A/(d_A + d_B)$; (b) $a/L = d_A^4/(d_A^4 + d_B^4)$
3.8.8 $T_A = t_0L/6$, $T_B = t_0L/3$
3.8.9 $x = 30.12$ in
3.8.10 (a) $\tau_1 = 32.7$ MPa, $\tau_2 = 49.0$ MPa; (b) $\phi = 1.030°$; (c) $k_T = 22.3$ kN·m
3.8.11 (a) $\tau_1 = 1790$ psi, $\tau_2 = 2690$ psi; (b) $\phi = 0.354°$; (c) $k_T = 809$ k-in
3.8.12 $T_{\text{máx}} = 1520$ N·m
3.8.13 $T_{\text{máx}} = 9.13$ k-in
3.8.14 (a) $T_{1,\text{perm}} = 9.51$ N·m; (b) $T_{2,\text{perm}} = 6.35$ N·m; (c) $T_{3,\text{perm}} = 7.41$ N·m; (d) $T_{\text{máx}} = 6.35$ N·m
3.8.15 (a) $T_A = 15{,}292$ in-lb, $T_B = 24{,}708$ in-lb (b) $T_A = 8734$ in-lb, $T_B = 31{,}266$ in-lb
3.8.16 (a) $T_B = \dfrac{G\beta}{L}\left(\dfrac{I_{PA}I_{PB}}{I_{PA} + I_{PB}}\right) \qquad T_A = -T_B$

(b) $\beta_{\text{máx}} = \tau_{p,\text{perm}}\dfrac{L}{4G}\left[\left(\dfrac{I_{PB} + I_{PA}}{I_{PA}I_{PB}}\right) \cdot d_B\pi d_P^2\right]$

(c) $\beta_{\text{máx}} = \tau_{t,\text{perm}}\left(\dfrac{2L}{Gd_A}\right)\left(\dfrac{I_{PA} + I_{PB}}{I_{PB}}\right)$

$\beta_{\text{máx}} = \tau_{t,\text{perm}}\left(\dfrac{2L}{Gd_B}\right)\left(\dfrac{I_{PA} + I_{PB}}{I_{PA}}\right)$

(d) $\beta_{\text{máx}} = \sigma_{b,\text{perm}}\dfrac{L}{G}\left[\dfrac{\left(I_{PB} + I_{PA}\right)\left(d_A - t_A\right) \cdot d_P t_A}{I_{PA}I_{PB}}\right]$

$\beta_{\text{máx}} = \sigma_{b,\text{perm}}\dfrac{L}{G}\left[\dfrac{\left(I_{PB} + I_{PA}\right)\left(d_B - t_B\right) \cdot d_P t_B}{I_{PA}I_{PB}}\right]$

3.9.1 (a) $U = 32.0$ in-lb; (b) $\phi = 0.775°$
3.9.2 (a) $U = 5.36$ J; (b) $\phi = 1.53°$
3.9.3 $U = 22.6$ in-lb
3.9.4 $U = 1.84$ J
3.9.5 (c) $U_3 = T^2L/2GI_P + TtL^2/2GI_P + t^2L^3/6GI_P$
3.9.6 $U = 19T_0^2L/32GI_P$
3.9.7 $\phi = T_0 L_A L_B/[G(L_B I_{PA} + L_A I_{PB})]$
3.9.8 $U = t_0^2L^3/40GI_P$
3.9.9 (a) $U = \dfrac{T^2L(d_A + d_B)}{\pi Gtd_A^2d_B^2}$; (b) $\phi = \dfrac{2TL(d_A + d_B)}{\pi Gtd_A^2d_B^2}$
3.9.10 $U = \dfrac{\beta^2GI_{PA}I_{PB}}{2L(I_{PA} + I_{PB})}$
3.9.11 $\phi = \dfrac{2n}{15d^2}\sqrt{\dfrac{2\pi I_mL}{G}}$; $\tau_{\text{máx}} = \dfrac{n}{15d}\sqrt{\dfrac{2\pi GI_m}{L}}$
3.10.1 (a) $\tau_{\text{aprox}} = 6310$ psi; (b) $\tau_{\text{exacto}} = 6830$ psi
3.10.2 $t_{\text{mín}} = \pi d/64$
3.10.3 (a) $\tau = 1250$ psi; (b) $\phi = 0.373°$
3.10.4 (a) $\tau = 9.17$ MPa; (b) $\phi = 0.140°$
3.10.5 $U_1/U_2 = 2$
3.10.6 $\tau = 35.0$ MPa, $\phi = 0.570°$
3.10.7 $\tau = 2390$ psi, $\theta = 0.00480°$/in

3.10.8 $\tau = T\sqrt{3}/9b^2t$, $\theta = 2T/9Gb^3t$

3.10.9 (a) $\phi_1/\phi_2 = 1 + 1/4\beta^2$

3.10.10 $\tau = 2T(1 + \beta)^2/tL_m^2\beta$

3.10.11 $t_{\text{mín}} = 0.140$ in

3.10.12 (a) $t = 6.66$ mm; (b) $t = 7.02$ mm

3.11.1 $T_{\text{máx}} \approx 6200$ lb-in

3.11.2 $R_{\text{mín}} \approx 4.0$ mm

3.11.3 For $D_1 = 0.8$ in: $\tau_{\text{máx}} \approx 6400$ psi

3.11.4 $D_2 \approx 115$ mm; límite inferior

3.11.5 $D_1 \approx 1.31$ in

CAPÍTULO 4

4.3.1 $V = 333$ lb, $M = 50667$ lb-in

4.3.2 $V = -0.9375$ kN, $M = 4.125$ kN·m

4.3.3 $V = 0$, $M = 0$

4.3.4 $V = 7.0$ kN, $M = -9.5$ kN·m

4.3.5 $V = -1810$ lb, $M = -12{,}580$ lb-ft

4.3.6 $V = -1.0$ kN, $M = -7.0$ kN·m

4.3.7 $b/L = 1/2$

4.3.8 $M = 108$ N·m

4.3.9 $N = P \operatorname{sen}\theta$, $V = P\cos\theta$, $M = Pr \operatorname{sen}\theta$

4.3.10 $V = -6.04$ kN, $M = 15.45$ kN·m

4.3.11 $P = 1200$ lb

4.3.12 $V = -4.167$ kN, $M = 75$ kN·m

4.3.13 (a) $V_B = 6000$ lb, $M_B = 9000$ lb-ft;
(b) $V_m = 0$, $M_m = 21{,}000$ lb-ft

4.3.14 $N = 21.6$ kN (compresión), $V = 7.2$ kN,
$M = 50.4$ kN·m

4.3.15 $V_{\text{máx}} = 91wL^2\alpha/30g$, $M_{\text{máx}} = 229wL^3\alpha/75g$

4.5.1 $V_{\text{máx}} = P$, $M_{\text{máx}} = Pa$

4.5.2 $V_{\text{máx}} = M_0/L$, $M_{\text{máx}} = M_0a/L$

4.5.3 $V_{\text{máx}} = qL/2$, $M_{\text{máx}} = -3qL^2/8$

4.5.4 $V_{\text{máx}} = P$, $M_{\text{máx}} = PL/4$

4.5.5 $V_{\text{máx}} = -2P/3$, $M_{\text{máx}} = PL/9$

4.5.6 $V_{\text{máx}} = 2M_1/L$, $M_{\text{máx}} = 7\,M_1/3$

4.5.7 $V_{\text{máx}} = P/2$, $M_{\text{máx}} = 3PL/8$

4.5.8 $V_{\text{máx}} = P$, $M_{\text{máx}} = -Pa$

4.5.9 $V_{\text{máx}} = qL/2$, $M_{\text{máx}} = 5qL^2/72$

4.5.10 $V_{\text{máx}} = -q_0L/2$, $M_{\text{máx}} = -q_0L^2/6$

4.5.11 $R_B = 206.67$ lb, $R_A = 73.33$ lb
$V_{\text{máx}} = -206.67$ lb, $M_{\text{máx}} = 2933.33$ lb-in

4.5.12 $V_{\text{máx}} = 1200$ N, $M_{\text{máx}} = 960$ N·m

4.5.13 $V_{\text{máx}} = 200$ lb, $M_{\text{máx}} = -1600$ lb-ft

4.5.14 $V_{\text{máx}} = 4.5$ kN, $M_{\text{máx}} = -11.33$ kN·m

4.5.15 $V_{\text{máx}} = -1300$ lb, $M_{\text{máx}} = -28{,}800$ lb-in

4.5.16 $V_{\text{máx}} = 15.338$ kN, $M_{\text{máx}} = 9.802$ kN·m

4.5.17 El primer caso tiene el momento máximo más grande $\left(\frac{6}{5}PL\right)$

4.5.18 El tercer caso tiene el momento máximo más grande $\left(\frac{6}{5}PL\right)$

4.5.19 $V_{\text{máx}} = 900$ lb, $M_{\text{máx}} = -900$ lb-ft

4.5.20 $V_{\text{máx}} = -10.0$ kN, $M_{\text{máx}} = 16.0$ kN·m

4.5.21 Dos casos tienen el mismo momento máximo (PL)

4.5.22 $V_{\text{máx}} = 32.97$ kN, $M_{\text{máx}} = -61.15$ kN·m

4.5.23 $V_{\text{máx}} = -800$ lb, $M_{\text{máx}} = 4800$ lb-ft

4.5.24 $M_{Az} = -PL$ (en el sentido de las manecillas del reloj),
$A_x = 0$, $A_y = 0$
$C_y = \frac{1}{12}P$ (hacia arriba), $D_y = \frac{1}{6}P$ (hacia la izquierda)
$V_{\text{máx}} = P/12$, $M_{\text{máx}} = PL$

4.5.25 $V_{\text{máx}} = 6.25$ k, $M_{\text{máx}} = 46.875$ k-ft

4.5.26 $V_{\text{máx}} = 4.6$ kN, $M_{\text{máx}} = -6.24$ kN·m

4.5.27 $V_{\text{máx}} = -432.857$ lb, $M_{\text{máx}} = 776.47$ lb-ft

4.5.28 $V_{\text{máx}} = -2.8$ kN, $M_{\text{máx}} = 1.450$ kN·m

4.5.29 $a = 0.5858L$, $V_{\text{máx}} = 0.2929qL$,
$M_{\text{máx}} = 0.02145qL^2$

4.5.30 $V_{\text{máx}} = 2.5$ kN, $M_{\text{máx}} = 5.0$ kN·m

4.5.31 $M_A = -q_0L^2/6$ (en el sentido de las manecillas del reloj),
$A_x = 0$, $B_y = q_0L/6$ (hacia arriba)
$V_{\text{máx}} = -q_0L/2$, $M_{\text{máx}} = q_0L^2/6$

4.5.32 $M_{\text{máx}} = 12$ kN·m

4.5.33 $M_{\text{máx}} = M_{\text{pos}} = 2448$ lb-ft,
$M_{\text{neg}} = -2160$ lb-ft

4.5.34 $V_{\text{máx}} = -w_0L/3$, $M_{\text{máx}} = -w_0L^2/12$

4.5.35 $M_A = -7w_0L^2/60$ (en el sentido de las manecillas del reloj),
$A_x = -3\,w_0L/10$ (hacia la izquierda)
$A_y = -3\,w_0L/20$ (hacia abajo)
$C_y = w_0L/12$ (hacia arriba)
$D_y = w_0L/6$ (hacia arriba)
$V_{\text{máx}} = -3w_0L/20$, $M_{\text{máx}} = -7w_0L^2/60$

4.5.36 (a) $x = 9.6$ m, $V_{\text{máx}} = 28$ kN;
(b) $x = 4.0$ m, $M_{\text{máx}} = 78.4$ kN·m

4.5.37 $A_x = 50.38$ lb (a la derecha)
$A_y = 210$ lb (hacia arriba)
$B_x = -50.38$ lb (a la izquierda)
$N_{\text{máx}} = -214.8$ lb, $V_{\text{máx}} = -47.5$ lb,
$M_{\text{máx}} = 270$ lb-ft

4.5.38 (a) $A_x = -q_0L/2$ (hacia la izquierda)

$A_y = 17q_0L/18$ (hacia arriba)
$D_x = -q_0L/2$ (hacia la izquierda)
$D_y = -4q_0L/9$ (hacia abajo)
$M_D = 0$
$N_{máx} = q_0L/2, V_{máx} = 17q_0L/18,$
$M_{máx} = q_0L^2$
(b) $B_x = q_0L/2$ (hacia la derecha)
$B_y = -q_0L/2 + 5q_0L/3 = 7q_0L/6$ (hacia arriba)
$D_x = q_0L/2$ (hacia la derecha)
$D_y = -5q_0L/3$ (hacia abajo)
$M_D = 0$
$N_{máx} = 5q_0L/3, V_{máx} = 5q_0L/3, M_{máx} = q_0L^2$

4.5.39 $M_A = 0$
$R_{Ay} = q_0L/6$ (hacia arriba)
$R_{Cy} = q_0L/3$ (hacia arriba)
$R_{Ax} = 0$
$N_{máx} = -3w_0L/20, V_{máx} = -w_0L/3,$
$M_{máx} = 8w_0L^2/125$

4.5.40 $M_A = 0, A_x = 0$
$A_y = -4253.2$ N (hacia abajo)
$M_D = 0$
$D_x = -1400$ N (hacia la izquierda)
$D_y = -13{,}553.2$ N (hacia arriba)
$N_{máx} = -13{,}553.2$ N, $V_{máx} = 14{,}000$ N,
$M_{máx} = 55{,}200$ N·m

CAPÍTULO 5

5.4.1 $\epsilon_{máx} = 1300 \times 10^{-6}$
5.4.2 $L_{mín} = 3.93$ m
5.4.3 $\epsilon_{máx} = 6400 \times 10^{-6}$
5.4.4 $\rho = 68.75$ m; $\kappa = 1.455 \times 10^{-5}$ m^{-1};
$\delta = 29.1$ mm
5.4.5 $\epsilon = 255 \times 10^{-6}$
5.4.6 $\epsilon = 640 \times 10^{-6}$
5.5.1 (a) $\sigma_{máx} = 52.4$ ksi; (b) $\sigma_{máx}$ se incrementa 33%
5.5.2 (a) $\sigma_{máx} = 249.7$ MPa; (b) $\sigma_{máx}$ disminuye 20%
5.5.3 (a) $\sigma_{máx} = 38.2$ ksi; (b) $\sigma_{máx}$ se incrementa 10%
5.5.4 (a) $\sigma_{máx} = 8.63$ MPa; (b) $\sigma_{máx} = 6.49$ MPa
5.5.5 $\sigma_{máx} = 21.6$ ksi
5.5.6 $\sigma_{máx} = 203$ MPa
5.5.7 $\sigma_{máx} = 3420$ psi
5.5.8 $\sigma_{máx} = 121$ MPa
5.5.9 $\sigma_{máx} = 10.82$ ksi
5.5.10 $\sigma_{máx} = 7.0$ MPa
5.5.11 $\sigma_{máx} = 432$ psi
5.5.12 $\sigma_{máx} = 2.10$ MPa
5.5.13 (a) $\sigma_t = 30.93\ M/d^3$; (b) $\sigma_t = 360M/(73bh^2)$;
(c) $\sigma_t = 85.2\ M/d^3$
5.5.14 $\sigma_{máx} = 10.965M/d^3$
5.5.15 $\sigma_{máx} = 21.4$ ksi
5.5.16 $\sigma_c = 61.0$ MPa; $\sigma_t = 35.4$ MPa
5.5.17 $\sigma_c = 15{,}964$ psi; $\sigma_t = 4341$ psi
5.5.18 (a) $\sigma_c = 1.46$ MPa; $\sigma_t = 1.51$ MPa;
(b) $\sigma_c = 1.67$ MPa (+14%); $\sigma_t = 1.38$ MPa (−9%);
(c) $\sigma_c = 0.73$ MPa (−50%); $\sigma_t = 0.76$ MPa (−50%)
5.5.19 $\sigma_t = 7810$ psi; $\sigma_c = 13{,}885$ psi
5.5.20 $\sigma_{máx} = 3\rho L^2 a_0/t$
5.5.21 $\sigma_t = 18{,}509$ psi; $\sigma_c = 12{,}494$ psi
5.5.22 $\sigma = 25.1$ MPa, 17.8 MPa, −23.5 MPa
5.5.23 $d = 3$ ft, $\sigma_{máx} = 171$ psi; $d = 6$ ft,
$\sigma_{máx} = 830$ psi
5.5.24 $\sigma_t = -\sigma_c = 23\ q_0\ L^2\ r/(27\ EI)$
5.5.25 (a) $F = 104.8$ lb;
(b) $\sigma_{máx} = 36$ ksi
5.6.1 $d_{mín} = 4.00$ in
5.6.2 $d_{mín} = 11.47$ mm
5.6.3 W 8 × 28
5.6.4 W 200 × 41.7
5.6.5 S 10 × 25.4
5.6.6 $b_{mín} = 150$ mm
5.6.7 $S = 19.6$ in^3; use viguetas de 2 × 10 in
5.6.8 $s_{máx} = 450$ mm
5.6.9 $q_{0,perm} = 627.9$ lb/ft
5.6.10 $h_{mín} = 30.6$ mm
5.6.11 S 8 × 23
5.6.12 $d_{mín} = 31.6$ mm
5.6.13 (a) $q_{perm} = 1055$ lb/ft; (b) $q_{perm} = 282$ lb/ft
5.6.14 $b = 152$ mm, $h = 202$ mm
5.6.15 $b = 10.25$ in
5.6.16 $t = 13.6$ mm
5.6.17 1 : 1.260 : 1.408
5.6.18 $q_{máx} = 10.28$ kN/m
5.6.19 6.57%
5.6.20 (a) $b_{mín} = 11.91$ mm; (b) $b_{mín} = 11.92$ mm
5.6.21 $s_{máx} = 72.0$ in
5.6.22 (a) $\beta = 1/9$; (b) 5.35%
5.6.23 Se incrementa cuando $d/h > 0.6861$; disminuye cuando $d/h < 0.6861$
5.7.1 (a) $x = L/4$; $\sigma_{máx} = 4PL/9h_A^3$; $\sigma_{máx}/\sigma_B = 2$
(b) $x = 0.209L$, $\sigma_{máx} = 0.394\ PL/h_A^3$;
$\sigma_{máx}/\sigma_B = 3.545$
5.7.2 (a) $x = 4$ m; $\sigma_{máx} = 37.73$ MPa; $\sigma_{máx}/\sigma_B = 9/8$
(b) $x = 2$ m; $\sigma_{máx} = 25.15$ MPa; $\sigma_{máx}/\sigma_m = 4/3$
5.7.3 (a) $x = 8$ in; $\sigma_{máx} = 1250$ psi; $\sigma_{máx}/\sigma_B = 1.042$
(b) $x = 4.642$ in; $\sigma_{máx} = 1235$ psi;
$\sigma_{máx}/\sigma_m = 1.215$

5.7.4 (a) $\sigma_A = 209.6$ MPa; (b) $\sigma_B = 221.0$ MPa; (c) $x = 0.625$ m; (d) $\sigma_{máx} = 231.0$ MPa; (e) $\sigma_{máx} = 213.8$ MPa
5.7.5 (a) $1 \leq d_B/d_A \leq 1.5$; (b) $\sigma_{máx} = \sigma_B = 32PL/\pi d_B^3$
5.7.6 $h_x = h_B x/L$
5.7.7 $b_x = 2b_B x/L$
5.7.8 $h_x = h_B \sqrt{x/L}$
5.8.2 (a) $\tau_{máx} = 715$ kPa, $\sigma_{máx} = 4.65$ MPa (b) $\tau_{máx} = 1430$ kPa, $\sigma_{máx} = 18.6$ MPa
5.8.3 $M_{máx} = 25.4$ k-ft
5.8.4 $\tau_{máx} = 500$ kPa
5.8.5 $\tau_{máx} = 2400$ psi
5.8.6 (a) $L_0 = h(\sigma_{perm}/\tau_{perm})$; (b) $L_0 = (h/2)(\sigma_{perm}/\tau_{perm})$
5.8.7 $P_{perm} = 2.027$ k
5.8.8 (a) $M_{máx} = 72.3$ N·m (b) $M_{máx} = 9.02$ N·m
5.8.9 (a) viga de 8 × 12 in (b) viga de 8 × 12 in
5.8.10 (a) $P = 38.0$ kN; (b) $P = 35.6$ kN
5.8.11 (a) $w_1 = 121$ lb/ft^2; (b) $w_2 = 324$ lb/ft^2; (c) $w_{perm} = 121$ lb/ft^2
5.8.12 (a) $b = 87.8$ mm (b) $b = 89.1$ mm
5.9.1 $d_{mín} = 5.7$ in
5.9.2 (a) $W = 28.6$ kN; (b) $W = 38.7$ kN
5.9.3 (a) $d = 10.52$ in; (b) $d = 2.56$ in
5.9.4 (a) $d = 266$ mm; (b) $d = 64$ mm
5.10.1 (a) $\tau_{máx} = 5795$ psi; (b) $\tau_{mín} = 4555$ psi; (c) $\tau_{prom} = 5714$ psi; (d) $V_{alma} = 28.25$ k
5.10.2 (a) $\tau_{máx} = 28.43$ MPa; (b) $\tau_{mín} = 21.86$ MPa; (c) $\tau_{prom} = 27.41$ MPa; (d) $V_{alma} = 119.7$ kN
5.10.3 (a) $\tau_{máx} = 4861$ psi; (b) $\tau_{mín} = 4202$ psi; (c) $\tau_{prom} = 4921$ psi; (d) $V_{alma} = 9.432$ k
5.10.4 (a) $\tau_{máx} = 32.28$ MPa; (b) $\tau_{mín} = 21.45$ MPa; (c) $\tau_{prom} = 29.24$ MPa; (d) $V_{alma} = 196.1$ kN
5.10.5 (a) $\tau_{máx} = 2634$ psi; (b) $\tau_{mín} = 1993$ psi; (c) $\tau_{prom} = 2518$ psi; (d) $V_{alma} = 20.19$ k
5.10.6 (a) $\tau_{máx} = 28.40$ MPa; (b) $\tau_{mín} = 19.35$ MPa; (c) $\tau_{prom} = 25.97$ MPa; (d) $V_{alma} = 58.63$ kN
5.10.7 $q_{máx} = 1270$ lb/ft
5.10.8 $q_{máx} = 123.7$ kN/m
5.10.9 S 8 × 23
5.10.10 $V = 273$ kN
5.10.11 $\tau_{máx} = 1.42$ ksi, $\tau_{mín} = 1.03$ ksi
5.10.12 $\tau_{máx} = 19.7$ MPa
5.10.13 $\tau_{máx} = 2221$ psi
5.11.1 $V_{máx} = 676$ lb
5.11.2 $V_{máx} = 1.924$ MN
5.11.3 $F = 1994$ lb/in
5.11.4 $V_{máx} = 10.7$ kN
5.11.5 (a) $s_{máx} = 5.082$ in (b) $s_{máx} = 3.472$ in
5.11.6 (a) $s_A = 78.3$ mm; (b) $s_B = 97.9$ mm
5.11.7 (a) $s_{máx} = 2.77$ in; (b) $s_{máx} = 1.85$ in
5.11.8 $s_{máx} = 92$ mm
5.11.9 $V_{máx} = 18.3$ k
5.11.10 $s_{máx} = 235$ mm
5.11.11 (a) caso (1) (b) caso (2) (c) caso (3) (d) caso (3)
5.11.12 $s_{máx} = 180$ mm
5.12.1 $\sigma_t = 14{,}660$ psi, $\sigma_c = -14{,}990$ psi
5.12.2 $\sigma_t = 5770$ kPa $\sigma_c = 6668$ kPa
5.12.3 $t_{mín} = 0.477$ in
5.12.4 $\sigma_t = -11.83$ MPa, $\sigma_c = -12.33$ MPa $t_{mín} = 12.38$ mm
5.12.5 $\sigma_t = 302$ psi, $\sigma_c = -314$ psi
5.12.6 $T_{máx} = 108.6$ kN
5.12.7 $\alpha = \arctan\,[(d_2^2 + d_1^2)/(4hd_2)]$
5.12.8 (a) $d = 70$ mm (b) $d = 76.5$ mm
5.12.9 $H_{máx} = 32.2$ ft
5.12.10 $W = 33.3$ kN
5.12.11 (a) $\sigma_t = 87.6$ psi, $\sigma_c = -99.6$ psi; (b) $d_{máx} = 28.9$ in
5.12.12 (a) $b = \pi \cdot d/6$ (b) $b = \pi \cdot d/3$ (c) Poste rectangular
5.12.13 (a) $\sigma_t = 1900$ psi, $\sigma_c = -1100$ psi; (b) Los dos esfuerzos aumentan su magnitud
5.12.14 (a) $\sigma_t = 8P/b^2$, $\sigma_c = -4P/b^2$; (b) $\sigma_t = 9.11P/b^2$, $\sigma_c = -6.36P/b^2$
5.12.15 (a) $\sigma_t = 856.8$ psi, $\sigma_c = -5711$ psi (b) $y_0 = -4.62$ in (c) $\sigma_t = 453$ psi, $\sigma_c = -2951$ psi, $y_0 = -6.33$ in
5.12.16 (a) $\sigma_t = 3.266$ MPa, $\sigma_c = -24.226$ MPa (b) $y_0 = -76.241$ mm (c) $\sigma_t = 1.587$ MPa, $\sigma_c = -20.33$ MPa, $y_0 = -100.8$ mm
5.12.17 (a) $\sigma_t = 15.483$ ksi (b) $\sigma_t = 2.909$ ksi
5.12.18 (a) $y_0 = -21.5$ mm (b) $P = 67.3$ kN (c) $y_0 = 148.294$ mm, $P = 149.6$ kN

5.13.1 (a) $d = 0.50$ in, $\sigma_{máx} = 15{,}500$ psi;
(b) $R = 0.10$ in, $\sigma_{máx} \approx 49{,}000$ psi

5.13.2 (a) $d = 16$ mm, $\sigma_{máx} = 81$ MPa;
(b) $R = 4$ mm, $\sigma_{máx} \approx 200$ MPa

5.13.3 $b_{mín} \approx 0.24$ in

5.13.4 $b_{mín} \approx 33$ mm

5.13.5 (a) $R_{mín} \approx 0.45$ in; (b) $d_{máx} = 4.13$ in

CAPÍTULO 6

6.2.1 $\sigma_{cara} = \pm 1980$ psi, $\sigma_{núcleo} = \pm 531$ psi

6.2.2 (a) $M_{máx} = 58.7$ kN·m; (b) $M_{máx} = 90.9$ kN·m

6.2.3 (a) $M_{máx} = 172$ k-in; (b) $M_{máx} = 96$ k-in

6.2.4 $M_{perm} = \dfrac{\pi d^3 \sigma_s}{2592}\left(65 + 16\dfrac{E_b}{E_s}\right)$

6.2.5 (a) $\sigma_w = 666$ psi, $\sigma_s = 13897$ psi
(b) $q_{máx} = 665$ lb/ft
(c) $M_{0,máx} = 486$ lb-ft

6.2.6 $M_{perm} = 768$ N·m

6.2.7 (a) $\sigma_{cara} = 3610$ psi, $\sigma_{núcleo} = 4$ psi;
(b) $\sigma_{cara} = 3630$ psi, $\sigma_{núcleo} = 0$

6.2.8 (a) $\sigma_{cara} = 14.1$ MPa, $\sigma_{núcleo} = 0.21$ MPa;
(b) $\sigma_{cara} = 14.9$ MPa, $\sigma_{núcleo} = 0$

6.2.9 $\sigma_a = 4120$ psi, $\sigma_c = 5230$ psi

6.2.10 $\sigma_w = 5.1$ MPa (comp.), $\sigma_s = 37.6$ MPa (tens.)

6.2.11 (a) $\sigma_{contrachapada} = 1131$ psi, $\sigma_{pino} = 969$ psi
(b) $q_{máx} = 95.52$ lb/ft

6.2.12 $Q_{0,máx} = 15.53$ kN/m

6.3.1 (a) $M_{máx} = 442$ k-in (b) $M_{máx} = 189$ k-in

6.3.2 $t_{mín} = 15.0$ mm

6.3.3 (a) $q_{perm} = 454$ lb/ft
(b) $\sigma_{madera} = 277$ psi, $\sigma_{acero} = 11{,}782$ psi

6.3.4 $\sigma_s = 49.9$ MPa, $\sigma_w = 1.9$ MPa

6.3.5 $\sigma_a = 1860$ psi, $\sigma_p = 72$ psi

6.3.6 $\sigma_a = 12.14$ MPa, $\sigma_p = 0.47$ MPa

6.3.7 (a) $q_{perm} = 264.5$ lb/ft
(b) $q_{perm} = 281.5$ lb/ft

6.3.8 $\sigma_s = 93.5$ MPa

6.3.9 $M_{máx} = 81.1$ k-ft

6.3.10 $S_A = 50.6$ mm^3; Metal A

6.3.11 $\sigma_s = 13{,}400$ psi (tensión),
$\sigma_c = 812$ psi (compresión)

6.3.12 $M_{perm} = 16.2$ kN·m

6.4.1 $\tan \beta = h/b$ de modo que NA se encuentra a lo largo de otra diagonal

6.4.2 $\beta = 51.8°$, $\sigma_{máx} = 17.5$ MPa

6.4.3 $\beta = 42.8°$, $\sigma_{máx} = 1036$ psi

6.4.4 $\beta = 78.9°$, $\sigma_A = -\sigma_E = 102$ MPa,
$\sigma_B = -\sigma_D = -48$ MPa

6.4.5 $\beta = 72.6°$, $\sigma_A = -\sigma_E = 14{,}554$ psi,
$\sigma_B = -\sigma_D = -4953$ psi

6.4.6 $\beta = -79.3°$, $\sigma_{máx} = 8.87$ MPa

6.4.7 $\beta = -78.83°$, $\sigma_{máx} = 1660$ psi

6.4.8 $\beta = -81.77°$, $\sigma_{máx} = 69.4$ MPa

6.4.9 $\beta = 72.91°$, $\sigma_{máx} = 8600$ psi

6.4.10 $\beta = 60.65°$, $\sigma_{máx} = 20.8$ MPa

6.4.11 (a) $\sigma_A = 45{,}420 \operatorname{sen}\alpha + 3629 \cos\alpha$ (psi);
(b) $\tan\beta = 37.54 \tan\alpha$

6.4.12 $\beta = 79.0°$, $\sigma_{máx} = 16.6$ MPa

6.4.13 (a) $\beta = -76.2°$, $\sigma_{máx} = 8469$ psi
(b) $\beta = -79.4°$, $\sigma_{máx} = 8704$ psi

6.5.1 $\beta = 83.07°$, $\sigma_t = 5060$ psi, $\sigma_c = -10{,}420$ psi

6.5.2 $\beta = 83.39°$, $\sigma_t = 10.5$ MPa, $\sigma_c = -23.1$ MPa

6.5.3 $\beta = 75.56°$, $\sigma_t = 3080$ psi, $\sigma_c = -3450$ psi

6.5.4 $\beta = 75.78°$, $\sigma_t = 31.7$ MPa, $\sigma_c = -39.5$ MPa

6.5.5 (a) $\beta = -28.73°$, $\sigma_t = 4263$ psi, $\sigma_c = -4903$ psi
(b) $\beta = -38.47°$, $\sigma_t = 5756$ psi, $\sigma_c = -4868$ psi

6.5.6 $\beta = 78.06°$, $\sigma_t = 40.7$ MPa, $\sigma_c = -40.7$ MPa

6.5.7 $\beta = 82.3°$, $\sigma_t = 1397$ psi, $\sigma_c = -1157$ psi

6.5.8 $\beta = 2.93°$, $\sigma_t = 6.56$ MPa$\sigma_c = -6.54$ MPa

6.5.9 Para $\theta = 0$: $\sigma_t = -\sigma_c = 2.546M/r^3$;
para $\theta = 45°$: $\sigma_t = 4.535M/r^3$, $\sigma_c = -3.955M/r^3$;
para $\theta = 90°$: $\sigma_t = 3.867M/r^3$, $\sigma_c = -5.244M/r^3$

6.5.10 $\beta = -78.88°$, $\sigma_t = 131.07$ MPa,
$\sigma_c = -148.49$ MPa

6.5.11 $\beta = -11.7°$, $\sigma_t = 28.0$ ksi, $\sigma_c = -24.2$ ksi

6.5.12 $\beta = -56.47°$, $\sigma_t = 31.00$ MPa,
$\sigma_c = -28.95$ MPa

6.8.1 (a) $\tau_{máx} = 3584$ psi, (b) $\tau_B = 430$ psi

6.8.2 (a) $\tau_{máx} = 29.7$ MPa,
(b) $\tau_B = 4.65$ MPa

6.8.3 (a) $\tau_{máx} = 3448$ psi,
(b) $\tau_{máx} = 3446$ psi

6.8.4 (a) $\tau_{máx} = 27.04$ MPa,
(b) $\tau_{máx} = 27.02$ psi

6.9.1 $e = 1.027$ in

6.9.2 $e = 22.104$ mm

6.9.6 (b) $e = \dfrac{63\pi r}{24\pi + 38} = 1.745r$

6.9.8 (a) $e = \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{2h + 3b}{h + 3b}\right)$ (b) $e = \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{43h + 48b}{23h + 48b}\right)$

6.10.1 $f = 2(2b_1 + b_2)/(3b_1 + b_2)$

6.10.2 (a) $f = 16r_2(r_2^3 - r_1^3)/3\pi(r_2^4 - r_1^4)$;
(b) $f = 4/\pi$

6.10.3 $q = 1000$ lb/in

6.10.4 (a) 56.7%; (b) $M = 12.3$ kN·m

6.10.5 $f = 1.12$
6.10.6 $f = 1.15$
6.10.7 $Z = 17.0 \text{ in}^3, f = 1.14$
6.10.8 $Z = 1.209 \times 10^6 \text{ mm}^3, f = 1.11$
6.10.9 $M_Y = 525.0$ k-ft, $M_P = 591.3$ k-ft, $f = 1.13$
6.10.10 $M_Y = 377.5$ kN·m, $M_P = 427.1$ kN·m, $f = 1.13$
6.10.11 $M_Y = 4320$ k-in, $M_P = 5450$ k-in; $f = 1.26$
6.10.12 $M_Y = 672$ kN·m, $M_P = 878$ kN·m, $f = 1.31$
6.10.13 $M_Y = 1619$ k-in, $M_P = 1951$ k-in, $f = 1.21$
6.10.14 $M_Y = 122$ kN·m, $M_P = 147$ kN·m; $f = 1.20$
6.10.15 (a) $M = 5977$ k-in; (b) 22.4%
6.10.16 (a) $M = 524$ kN·m ; (b) 36%
6.10.17 (a) $M = 2551$ k-in; (b) 7.7%
6.10.18 $Z = 136 \times 10^3 \text{ mm}^3, f = 1.79$
6.10.19 $M_P = 1120$ k-in
6.10.20 $M_P = 295$ kN·m

CAPÍTULO 7

7.2.1 Para $\theta = 60°$: $\sigma_{x1} = 2910$ psi, $\tau_{x1y1} = -2012$ psi
7.2.2 Para $\theta = 30°$: $\sigma_{x1} = 119.2$ MPa, $\tau_{x1y1} = 5.30$ MPa
7.2.3 Para $\theta = 50°$: $\sigma_{x1} = -1243$ psi, $\tau_{x1y1} = 1240$ psi
7.2.4 Para $\theta = 52°$: $\sigma_{x1} = -31.8$ MPa, $\tau_{x1y1} = -110.1$ MPa
7.2.5 Para $\theta = 30°$: $\sigma_{x1} = -3041$ psi, $\tau_{x1y1} = -12{,}725$ psi
7.2.6 Para $\theta = -35°$: $\sigma_{x1} = -6.4$ MPa, $\tau_{x1y1} = -18.9$ MPa
7.2.7 Para $\theta = 40°$: $\sigma_{x1} = -13{,}032$ psi, $\tau_{x1y1} = 4954$ psi
7.2.8 Para $\theta = -42.5°$: $\sigma_{x1} = -51.9$ MPa, $\tau_{x1y1} = -14.6$ MPa
7.2.9 Esfuerzo normal en la costura, 187 psi en tensión. Esfuerzo cortante, 163 psi en el sentido de las manecillas del reloj.
7.2.10 Esfuerzo normal en la costura, 1440 kPa en tensión. Esfuerzo cortante, 1030 Kpa en el sentido de las manecillas del reloj.
7.2.11 $\sigma_w = -125$ psi, $\tau_w = 375$ psi
7.2.12 $\sigma_w = 10.0$ MPa, $\tau_w = -5.0$ MPa
7.2.13 $\theta = 56.31°$
7.2.14 $\theta = 38.66°$
7.2.15 $\sigma_x = -12{,}813$ psi, $\sigma_y = -6037$ psi, $\tau_{xy} = -4962$ psi
7.2.16 $\sigma_x = 56.5$ MPa, $\sigma_y = -18.3$ MPa, $\tau_{xy} = -32.6$ MPa
7.2.17 $\sigma_y = 3805$ psi, $\tau_{xy} = 2205$ psi
7.2.18 $\sigma_y = -60.7$ MPa, $\tau_{xy} = -27.9$ MPa
7.2.19 $\sigma_b = -3700$ psi, $\tau_b = 3282$ psi, $\theta_1 = 43.66°$
7.3.1 $\sigma_1 = 4988$ psi, $\theta_{p1} = 14.08°$
7.3.2 $\sigma_1 = 120$ MPa, $\theta_{p1} = -35.17°$
7.3.3 $\sigma_1 = -977$ psi, $\theta_{p1} = 62.11°$
7.3.4 $\sigma_1 = 54$ MPa, $\theta_{p1} = -14.18°$
7.3.5 $\tau_{máx} = 13{,}065$ psi, $\theta_{s1} = -53.45°$
7.3.6 $\tau_{máx} = 19.3$ MPa, $\theta_{s1} = 61.43°$
7.3.7 $\tau_{máx} = 6851$ psi, $\theta_{s1} = 61.85°$
7.3.8 $\tau_{máx} = 26.7$ MPa, $\theta_{s1} = 19.08°$
7.3.9 (a) $\sigma_1 = 180$ psi, $\theta_{p_1} = -20.56°$; (b) $\tau_{máx} = 730$ psi, $\theta_{s_1} = -65.56°$
7.3.10 (a) $\sigma_1 = 27.8$ MPa, $\theta_{p1} = 116.4°$; (b) $\tau_{máx} = 70.3$ MPa, $\theta_{s1} = 71.4°$
7.3.11 (a) $\sigma_1 = 2925$ psi, $\theta_{p1} = -25.29°$; (b) $\tau_{máx} = 1165$ psi, $\theta_{s1} = -70.29°$
7.3.12 (a) $\sigma_1 = 2262$ kPa, $\theta_{p1} = -13.70°$; (b) $\tau_{máx} = 1000$ kPa, $\theta_{s1} = -58.70°$
7.3.13 (a) $\sigma_1 = 14{,}764$ psi, $\theta_{p1} = 7.90°$; (b) $\tau_{máx} = 6979$ psi, $\theta_{s1} = -37.10°$
7.3.14 (a) $\sigma_1 = 29.2$ MPa, $\theta_{p1} = -17.98°$; (b) $\tau_{máx} = 66.4$ MPa, $\theta_{s1} = -62.98°$
7.3.15 (a) $\sigma_1 = -1228$ psi, $\theta_{p1} = 24.73°$; (b) $\tau_{máx} = 5922$ psi, $\theta_{s1} = -20.27°$
7.3.16 (a) $\sigma_1 = 76.3$ MPa, $\theta_{p1} = 107.47°$; (b) $\tau_{máx} = 101.3$ MPa, $\theta_{s1} = 62.47°$
7.3.17 2771 psi $\leq \sigma_y \leq$ 9029psi
7.3.18 18.7 MPa $\leq \sigma_y \leq$ 65.3 MPa
7.3.19 (a) $\sigma_y = 1410$ psi; (b) $\sigma_1 = 6700$ psi, $\theta_{p1} = -23.50°$
7.3.20 (a) $\sigma_y = 11.7$ MPa; (b) $\sigma_1 = 33.0$ MPa, $\theta_{p1} = 63.15°$
7.4.1 (a) Para $\theta = 24°$: $\sigma_{x1} = 9493$ psi, $\tau_{x1y1} = -4227$ psi; (b) $\tau_{máx} = 5688$ psi, $\theta_{s1} = -45.0°$
7.4.2 (a) Para $\theta = -27°$: $\sigma_{x1} = 38.9$ MPa, $\tau_{x1y1} = 19.8$ MPa; (b) $\tau_{máx} = 24.5$ MPa, $\theta_{s1} = -45.0°$
7.4.3 (a) Para $\theta = 26.57°$: $\sigma_{x1} = -4880$ psi, $\tau_{x1y1} = 2440$ psi; (b) $\tau_{máx} = 3050$ psi, $\theta_{s1} = 45.0°$
7.4.4 (a) Para $\theta = 25°$: $\sigma_{x1} = -36.0$ MPa, $\tau_{x1y1} = -25.7$ MPa; (b) $\tau_{máx} = 33.5$ MPa, $\theta_{s1} = 45.0°$
7.4.5 (a) Para $\theta = 55°$: $\sigma_{x1} = 250$ psi, $\tau_{x1y1} = -3464$ psi; (b) $\tau_{máx} = 4000$ psi, $\theta_{s1} = -45.0°$
7.4.6 (a) Para $\theta = 21.80°$: $\sigma_{x1} = -17.1$ MPa, $\tau_{x1y1} = 29.7$ MPa; (b) $\tau_{máx} = 43.0$ MPa, $\theta_{s1} = 45.0°$

7.4.7 (a) Para $\theta = 52°$: $\sigma_{x1} = 2620$ psi, $\tau_{x1y1} = -653$ psi; (b) $\sigma_1 = 2700$ psi, $\theta_{p1} = 45.0°$

7.4.8 (a) Para $\theta = 22.5°$: $\sigma_{x1} = -9.32$ MPa, $\tau_{x1y1} = -11.11$ MPa; (b) $\sigma_1 = 14.50$ MPa, $\theta_{p1} = 135.0°$

7.4.9 (a) Para $\theta = 36.87°$: $\sigma_{x1} = 3600$ psi, $\tau_{x1y1} = 1050$ psi; (b) $\sigma_1 = 3750$ psi, $\theta_{p1} = 45.0°$

7.4.10 Para $\theta = 40°$: $\sigma_{x1} = 27.54$ MPa, $\tau_{x1y1} = -5.36$ MPa

7.4.11 Para $\theta = -51°$: $\sigma_{x1} = 11{,}982$ psi, $\tau_{x1y1} = -3569$ psi

7.4.12 Para $\theta = -33°$: $\sigma_{x1} = -61.74$ MPa, $\tau_{x1y1} = -51.70$ MPa

7.4.13 Para $\theta = 14°$: $\sigma_{x1} = -1481$ psi, $\tau_{x1y1} = 580$ psi

7.4.14 Para $\theta = 35°$: $\sigma_{x1} = 46.43$ MPa, $\tau_{x1y1} = -9.81$ MPa

7.4.15 Para $\theta = 65°$: $\sigma_{x1} = -1846$ psi, $\tau_{x1y1} = 3897$ psi

7.4.16 (a) $\sigma_1 = 39.99$ MPa, $\theta_{p1} = 68.77°$; (b) $\tau_{máx} = 39.99$ MPa, $\theta_{s1} = 23.77°$

7.4.17 (a) $\sigma_1 = 7525$ psi, $\theta_{p1} = 9.80°$; (b) $\tau_{máx} = 3875$ psi, $\theta_{s1} = -35.2°$

7.4.18 (a) $\sigma_1 = 3.43$ MPa, $\theta_{p1} = -19.83°$; (b) $\tau_{máx} = 15.13$ MPa, $\theta_{s1} = -64.68°$

7.4.19 (a) $\sigma_1 = 7490$ psi, $\theta_{p1} = 63.18°$; (b) $\tau_{máx} = 3415$ psi, $\theta_{s1} = -18.20°$

7.4.20 (a) $\sigma_1 = 10{,}865$ kPa, $\theta_{p1} = 115.21°$; (b) $\tau_{máx} = 4865$ kPa, $\theta_{s1} = 70.21°$

7.4.21 (a) $\sigma_1 = -6923$ psi, $\theta_{p1} = -32.44°$; (b) $\tau_{máx} = 7952$ psi, $\theta_{s1} = 102.6°$

7.4.22 (a) $\sigma_1 = 18.2$ MPa, $\theta_{p1} = 123.3°$; (b) $\tau_{máx} = 15.4$ MPa, $\theta_{s1} = 78.3°$

7.4.23 (a) $\sigma_1 = 25\ 65$ psi, $\theta_{p1} = 31.33°$; (b) $\tau_{máx} = 3265$ psi, $\theta_{s1} = -13.70°$

7.5.1 $\sigma_x = 26{,}040$ psi, $\sigma_y = -13{,}190$ psi, $\Delta t = -32.1 \times 10^{-6}$ in (disminuye)

7.5.2 $\sigma_x = 114.1$ MPa, $\sigma_y = 60.2$ MPa, $\Delta t = -2610 \times 10^{-6}$ mm (disminuye)

7.5.3 (a) $\epsilon_z = -\nu(\epsilon_x + \epsilon_y)/(1 - \nu)$; (b) $e = (1 - 2\nu)(\epsilon_x + \epsilon_y)/(1 - \nu)$

7.5.4 $\nu = 0.35$, $E = 45$ GPa

7.5.5 $\nu = 1/3$, $E = 30 \times 10^6$ psi

7.5.6 (a) $\gamma_{máx} = 715 \times 10^{-6}$; (b) $\Delta t = -2100 \times 10^{-6}$ mm (disminuye); (c) $\Delta V = 896$ mm^3 (aumenta)

7.5.7 (a) $\gamma_{máx} = 1900 \times 10^{-6}$; (b) $\Delta t = -141 \times 10^{-6}$ in (disminuye); (c) $\Delta V = 0.0874$ in^3 (aumenta)

7.5.8 $\Delta V = -56$ mm^3 (disminuye); $U = 4.04$ J

7.5.9 $\Delta V = -0.0603$ in^3 (disminuye); $U = 60.0$ in-lb

7.5.10 $\Delta V = 2640$ mm^3 (aumenta); $U = 67.0$ J

7.5.11 $\Delta V = 0.0423$ in^3 (aumenta); $U = 373$ in-lb

7.5.12 (a) $\Delta ac = 0.0745$ mm (aumenta); (b) $\Delta bd = -0.000560$ mm (disminuye); (c) $\Delta t = -0.00381$ mm (disminuye); (d) $\Delta V = 573$ mm^3 (aumenta); (e) $U = 25.0$ J

7.6.1 (a) $\tau_{máx} = 8000$ psi; (b) $\Delta a = 0.0079$ in (aumenta), $\Delta b = -0.0029$ in (disminuye), $\Delta c = -0.0011$ in (disminuye); (c) $\Delta V = 0.0165$ in^3 (aumenta); (d) $U = 685$ in-lb

7.6.2 (a) $\tau_{máx} = 10.0$ MPa; (b) $\Delta a = -0.0540$ mm (disminuye), $\Delta b = -0.0075$ mm (disminuye), $\Delta c = -0.0075$ mm (disminuye); (c) $\Delta V = -1890$ mm^3 (disminuye); (d) $U = 50.0$ J

7.6.3 (a) $\sigma_x = -4200$ psi, $\sigma_y = \sigma_z = -2100$ psi; (b) $\tau_{máx} = 1050$ psi; (c) $\Delta V = -0.0192$ in^3 (disminuye); (d) $U = 35.3$ in-lb

7.6.4 (a) $\sigma_x = -64.8$ MPa, $\sigma_y = \sigma_z = -43.2$ MPa; (b) $\tau_{máx} = 10.8$ MPa; (c) $\Delta V = -532$ mm^3 (disminuye); (d) $U = 14.8$ J

7.6.5 $K = 10.0 \times 10^6$ psi

7.6.6 $K = 5.0$ GPa

7.6.7 (a) $p = \nu F/[A(1 - \nu)]$; (b) $\delta = FL(1 + \nu)(1 - 2\nu)/[EA(1 - \nu)]$

7.6.8 (a) $p = \nu p_0$; (b) $e = -p_0(1 + \nu)(1 - 2\nu)/E$; (c) $u = p_0^2(1 - \nu^2)/2E$

7.6.9 $\Delta d = 0.00104$ in (disminuye); $\Delta V = 0.198$ in^3 (disminuye); $U = 438$ in-lb

7.6.10 (a) $p = 700$ MPa; (b) $K = 175$ GPa; (c) $U = 2470$ J

7.6.11 $\epsilon_0 = 276 \times 10^{-6}$, $e = 828 \times 10^{-6}$, $u = 4.97$ psi

7.7.1 (a) $\Delta d = 0.00117$ in (aumenta); (b) $\Delta\phi = 128 \times 10^{-6}$ rad (disminuye); (c) $\Delta\psi = 128 \times 10^{-6}$ rad (aumenta)

7.7.2 (a) $\Delta d = 0.0547$ mm (aumenta); (b) $\Delta\phi = 240 \times 10^{-6}$ rad (disminuye); (c) $\Delta\psi = 240 \times 10^{-6}$ rad (aumenta)

7.7.3 (a) $\Delta d = 0.00458$ in (aumenta); (b) $\Delta\phi = 157 \times 10^{-6}$ rad (disminuye); (c) $\gamma = -314 \times 10^{-6}$ rad (el ángulo *ced* aumenta)

7.7.4 (a) $\Delta d = 0.168$ mm (aumenta);
(b) $\Delta\phi = 317 \times 10^{-6}$ rad (disminuye);
(c) $\gamma = -634 \times 10^{-6}$ rad (el ángulo *ced* disminuye)

7.7.5 Para $\theta = 50°$: $\epsilon_{x_1} = 461 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = 225 \times 10^{-6}$

7.7.6 Para $\theta = 37.5°$: $\epsilon_{x_1} = 351 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = -490 \times 10^{-6}$

7.7.7 $\epsilon_1 = 554 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = -22.9°$;
$\gamma_{máx} = 488 \times 10^{-6}$

7.7.8 $\epsilon_1 = 172 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 163.9°$;
$\gamma_{máx} = 674 \times 10^{-6}$

7.7.9 (a) Para $\theta = 75°$: $\epsilon_{x_1} = 202 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = -569 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = 568 \times 10^{-6}$,
$\theta_{p_1} = 22.8°$; (c) $\gamma_{máx} = 587 \times 10^{-6}$

7.7.10 (a) Para $\theta = 45°$: $\epsilon_{x_1} = -385 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = 690 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = -254 \times 10^{-6}$,
$\theta_{p_1} = 65.7°$; (c) $\gamma_{máx} = 1041 \times 10^{-6}$

7.7.11 $(\tau_{máx})_{xy} = 7800$ psi, $(\gamma_{máx})_{xy} = 676 \times 10^{-6}$,
$(\gamma_{máx})_{xz} = 780 \times 10^{-6}$, $(\gamma_{máx})_{yz} = 104 \times 10^{-6}$

7.7.12 $(\tau_{máx})_{xy} = 32.4$ MPa, $(\gamma_{máx})_{xy} = 1200 \times 10^{-6}$,
$(\gamma_{máx})_{xz} = 1600 \times 10^{-6}$, $(\gamma_{máx})_{yz} = 399 \times 10^{-6}$

7.7.13 (a) Para $\theta = 30°$: $\epsilon_{x_1} = -756 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = 868 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = 426 \times 10^{-6}$,
$\theta_{p_1} = 99.8°$; (c) $\gamma_{máx} = 1342 \times 10^{-6}$

7.7.14 (a) Para $\theta = 50°$: $\epsilon_{x_1} = -1469 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = -717 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = -732 \times 10^{-6}$,
$\theta_{p_1} = 166.0°$; (c) $\gamma_{máx} = 911 \times 10^{-6}$

7.7.15 $\epsilon_1 = 551 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 12.5°$;
$\gamma_{máx} = 662 \times 10^{-6}$

7.7.16 $\epsilon_1 = 332 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 12.0°$;
$\gamma_{máx} = 515 \times 10^{-6}$

7.7.17 (a) $P = 5300$ lb, $T = 1390$ lb-in;
(b) $\gamma_{máx} = 222 \times 10^{-6}$, $\tau_{máx} = 2580$ psi

7.7.18 $P = 125$ kN, $\alpha = 30°$

7.7.19 $P = 5000$ lb, $\alpha = 38°$

7.7.20 $\epsilon_x = \epsilon_a$, $\epsilon_y = (2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)/3$,
$\gamma_{xy} = 2(\epsilon_b - \epsilon_c)/\sqrt{3}$

7.7.21 Para $\theta_{p_1} = 30°$: $\epsilon_1 = 1550 \times 10^{-6}$,
$\epsilon_2 = -250 \times 10^{-6}$, $\sigma_1 = 10{,}000$ psi,
$\sigma_2 = 2000$ psi

7.7.22 $\sigma_x = 91.6$ MPa

7.7.23 Para $\theta = 50°$: $\epsilon_{x_1} = 461 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = 225 \times 10^{-6}$

7.7.24 Para $\theta = 37.5°$: $\epsilon_{x_1} = 351 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = -490 \times 10^{-6}$

7.7.25 $\epsilon_1 = 554 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 157.1°$;
$\gamma_{máx} = 488 \times 10^{-6}$

7.7.26 $\epsilon_1 = 172 \times 10^{-6}$, $\theta_{p_1} = 163.9°$;
$\gamma_{máx} = 674 \times 10^{-6}$

7.7.27 (a) Para $\theta = 75°$: $\epsilon_{x_1} = 202 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = -569 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = 568 \times 10^{-6}$,
$\theta_{p_1} = 22.8°$; (c) $\gamma_{máx} = 587 \times 10^{-6}$

7.7.28 (a) Para $\theta = 45°$: $\epsilon_{x_1} = -385 \times 10^{-6}$,
$\gamma_{x_1y_1} = 690 \times 10^{-6}$; (b) $\epsilon_1 = -254 \times 10^{-6}$,
$\theta_{p_1} = 65.7°$; (c) $\gamma_{máx} = 1041 \times 10^{-6}$

CAPÍTULO 8

8.2.1 $t = 2.48$ in, $t_{mín} = 2.5$ in

8.2.2 $t = 93.75$ mm, $t_{mín} = 94$ mm

8.2.3 $F = 684$ lb, $\sigma = 280$ psi

8.2.4 $\sigma_{máx} = 2.88$ MPa, $\epsilon_{máx} = 0.452$

8.2.5 $\sigma_{máx} = 405$ psi, $\epsilon_{máx} = 0.446$

8.2.6 $p = 2.93$ MPa

8.2.7 (a) $f = 26.4$ k/in
(b) $\tau_{máx} = 7.543 \times 10^3$ psi
(c) $\epsilon_{máx} = 3.57 \times 10^{-4}$

8.2.8 (a) $f = 5.5$ MN/m
(b) $\tau_{máx} = 57.292$ MPa
(c) $\epsilon_{máx} = 3.874 \times 10^{-4}$

8.2.9 $t_{mín} = 0.294$ in

8.2.10 $t_{mín} = 6.7$ mm

8.2.11 $D_0 = 90$ ft

8.3.1 $t_{mín} = 0.350$ in

8.3.2 (a) $h = 22.24$ m
(b) cero

8.3.3 $n = 2.25$

8.3.4 $F = 3\pi pr^2$

8.3.5 $p = 50$ psi

8.3.6 $\epsilon_{máx} = 6.556 \times 10^{-5}$

8.3.7 $t_{mín} = 0.113$ in

8.3.8 $t_{mín} = 3.71$ mm

8.3.9 (a) $h = 25$ ft; (b) $\sigma_1 \approx 125$ psi

8.3.10 (a) $\sigma_h = 24.858$ MPa
(b) $\sigma_c = 49.716$ MPa
(c) $\sigma_w = 24.858$ MPa
(d) $\tau_h = 12.429$ MPa
(e) $\tau_c = 24.858$ MPa

8.3.11 (a) $t_{mín} = 0.675$ in (b) $t_{mín} = 0.338$ in

8.3.12 (a) $\sigma_1 = 93.333$ MPa, $\sigma_2 = 46.667$ MPa
(b) $\tau_1 = 23.333$ MPa, $\tau_2 = 46.667$ MPa
(c) $\epsilon_1 = 3.967 \times 10^{-4}$, $\epsilon_2 = 9.333 \times 10^{-5}$
(d) $\theta = 35°$, $\sigma_{x_1} = 62.02$ MPa,
$\sigma_{y_1} = 77.98$ MPa, $\tau_{x_1y_1} = 21.926$ MPa

8.3.13 (a) $\sigma_1 = 7015$ psi, $\sigma_2 = 3508$ psi
(b) $\tau_1 = 1754$ psi, $\tau_2 = 3508$ psi
(c) $\epsilon_1 = 1.988 \times 10^{-4}$, $\epsilon_2 = 4.677 \times 10^{-5}$
(d) $\theta = 28°$, $\sigma_{x1} = 4281$ psi, $\sigma_{y1} = 6242$ psi,
$\tau_{x_1y_1} = 1454$ psi

8.4.1 $\sigma_1 = -77.97$ psi
$\sigma_2 = 3620$ psi
$\tau_{\text{máx}} = 1849$ psi

8.4.2 $\sigma_1 = 60.306$ MPa
$\sigma_2 = -0.395$ MPa
$\tau_{\text{máx}} = 30.351$ MPa

8.4.3 (b) $\sigma_1 = 25.696$ psi, $\sigma_2 = -889.696$ psi,
$\tau_{\text{máx}} = 457.696$ psi

8.4.4 $P = 11.1$ kN

8.4.5 $P = 2.547$ k

8.4.6 (b) $\sigma_1 = 4.5$ MPa, $\sigma_2 = -76.1$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 40.3$ MPa

8.4.7 (b) $\sigma_1 = 14{,}100$ psi, $\sigma_2 = -220$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 7160$ psi

8.4.8 (b) $\sigma_1 = 8.272$ MPa, $\sigma_2 = -64.292$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 36.282$ MPa

8.4.9 (b) $\sigma_1 = 159.758$ psi, $\sigma_2 = -3393$ psi,
$\tau_{\text{máx}} = 1777$ psi

8.4.10 $\sigma_1 = 17.861$ MPa, $\sigma_2 = -0.145$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 9.003$ MPa

8.4.11 Parte superior de la viga $\sigma_1 = 251.838$ psi,
$\sigma_2 = -29{,}160$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 14{,}700$ psi

8.4.12 Parte superior de la viga $\sigma_1 = 0$ MPa, $\sigma_2 = -325$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 162.5$ MPa

8.5.1 $\sigma_t = 5100$ psi, $\sigma_c = -5456$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 5456$ psi

8.5.2 $d_{\text{mín}} = 48.4$ mm

8.5.3 $\sigma_t = 3963$ psi, $\sigma_c = -8791$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 6377$ psi

8.5.4 $\sigma_t = 16.432$ MPa, $\sigma_c = -41.434$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 28.933$ MPa

8.5.5 $P = 194.234$ k

8.5.6 $p_{\text{máx}} = 9.60$ MPa

8.5.7 $t_{\text{mín}} = 0.125$ in

8.5.8 $\phi_{\text{máx}} = 0.5522$ rad $= 31.6°$

8.5.9 $\sigma_t = 39{,}950$ psi, $\sigma_c = -2226$ psi,
$\tau_{\text{máx}} = 21{,}090$ psi

8.5.10 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 56.4$ MPa, $\tau_{\text{máx}} = 18.9$ MPa;
(b) $T_{\text{máx}} = 231$ kN·m

8.5.11 $\sigma_t = 4320$ psi, $\sigma_c = -1870$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 3100$ psi

8.5.12 $\sigma_t = 29.15\ qR^2/d^3$, $\sigma_c = -8.78\ qR^2/d^3$,
$\tau_{\text{máx}} = 18.97\ qR^2/d^3$

8.5.13 $d = 1.50$ in

8.5.14 $P = 34.1$ kN

8.5.15 (a) $\sigma_{\text{máx}} = 4534$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 2289$ psi
(b) $P_{\text{perm}} = 629.07$ lb

8.5.16 $\tau_A = 76.007$ MPa, $\tau_B = 19.943$ MPa,
$\tau_C = 23.738$ MPa

8.5.17 (a) $\sigma_x = 0$ psi, $\sigma_y = 6145$ psi, $\tau_{xy} = 291.477$ psi
(b) $\sigma_1 = 6159$ psi, $\sigma_2 = -13.794$ psi,
$\tau_{\text{máx}} = 3086$ psi

8.5.18 Cortante puro $\tau_{\text{máx}} = 0.804$ MPa

8.5.19 $\sigma_t = 10{,}680$ psi; No hay esfuerzos de compresión;
$\tau_{\text{máx}} = 5340$ psi

8.5.20 (a) $\sigma_1 = 31.183$ MPa, $\sigma_2 = -187.155$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 109.169$ MPa
(b) $\sigma_1 = 184.794$ MPa, $\sigma_2 = -35.188$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 109.99$ MPa

8.5.21 (a) $\sigma_1 = 0$ psi, $\sigma_2 = -20{,}730$ psi, $\tau_{\text{máx}} = 10{,}365$ psi
(b) $\sigma_1 = 988$ psi, $\sigma_2 = -21{,}719$ psi,
$\tau_{\text{máx}} = 11{,}354$ psi

8.5.22 Máximo $\sigma_t = 18.346$ MPa, $\sigma_c = -18.346$ MPa,
$\tau_{\text{máx}} = 9.415$ MPa

8.5.23 Parte superior de la viga
$\sigma_1 = 8591$ psi, $\sigma_2 = 0$ psi,
$\tau_{\text{máx}} = 4295$ psi

CAPÍTULO 9

9.2.1 $q = q_0 x/L$; carga triangular que actúa hacia abajo

9.2.2 (a) $q = q_0 \sin \pi x/L$, carga senoidal;
(b) $R_A = R_B = q_0 L/\pi$; (c) $M_{\text{máx}} = q_0 L^2/\pi^2$

9.2.3 $q = q_0(1 - x/L)$; carga triangular, que actúa hacia abajo;

9.2.4 (a) $q = q_0(L^2 - x^2)/L^2$; carga parabólica que actúa hacia abajo;
(b) $R_A = 2q_0 L/3$; $M_A = -q_0 L^2/4$

9.3.1 $\delta_{\text{máx}} = 0.182$ in, $\theta = 0.199°$

9.3.2 $h = 96$ mm

9.3.3 $L = 120$ in. $= 10$ ft

9.3.4 $\delta_{\text{máx}} = 15.4$ mm

9.3.5 $\delta/L = 1/400$

9.3.6 $E_g = 80.0$ GPa

9.3.7 Sea $\beta = a/L$: $\dfrac{\delta_C}{\delta_{\text{máx}}} = \dfrac{3\sqrt{3}(-1 + 8\beta - 4\beta^2)}{16(2\beta - \beta^2)^{3/2}}$
La deflexión en el punto medio es cercana a la deflexión máxima. La diferencia máxima es de sólo 2.6%.

9.3.11 $v = -mx^2(3L - x)/6EI$, $\delta_B = mL^3/3EI$,
$\theta_B = mL^2/2EI$

9.3.12 $v(x) = -\dfrac{q}{48EI}\left(2x^4 - 12x^2L^2 + 11L^4\right)$

$\delta_B = \dfrac{qL^4}{48EI}$

9.3.15 $v(x) = \frac{q_0 L}{24EI}(x^3 - 2Lx^2)$ para $0 \le x \le \frac{L}{2}$

$v(x) = \frac{-q_0}{960LEI}$

$(-160L^2x^3 + 160L^3x^2 + 80Lx^4 - 16x^5$

$- 25L^4x + 3L^5)$ para $\frac{L}{2} \le x \le L$

$\delta_B = \frac{7}{160}\frac{q_0L^4}{EI}$; $\delta_C = \frac{1}{64}\frac{q_0L^4}{EI}$

9.3.16 $v(x) = \frac{q_0 x}{5760LEI}(200x^2L^2 - 240x^3L$

$+ 96x^4 - 53L^4)$ para $0 \le x \le \frac{L}{2}$

$v(x) = \frac{-q_0L}{5760EI}(40x^3 - 120Lx^2 + 83L^2x - 3L^3)$

para $\frac{L}{2} \le x \le L$

$\delta_C = \frac{3q_0L^4}{1280EI}$

9.3.17 $v(x) = -\frac{PL}{10{,}368EI}(-4104x^2 + 3565L^2)$

para $0 \le x \le \frac{L}{3}$

$v(x) = -\frac{P}{1152EI}(-648Lx^2 + 192x^3 +$

$+ 64L^2x + 389L^3)$ para $\frac{L}{3} \le x \le \frac{L}{2}$

$v(x) = -\frac{P}{144EIL}(-72L^2x^2 + 12Lx^3 + 6x^4$

$+ 5L^3x + 49L^4)$ para $\frac{L}{2} \le x \le L$

$\delta_A = \frac{3565PL^3}{10{,}368EI}$; $\delta_C = \frac{3109PL^3}{10{,}368EI}$

9.4.3 $v = -M_0x(L - x)^2/2LEI$;
$\delta_{máx} = 2M_0L^2/27EI$ (hacia abajo)

9.4.4 $v(x) = -\frac{q}{48EI}(2x^4 - 12x^2L^2 + 11L^4)$

$\theta_B = -\frac{qL^3}{3EI}$

9.4.6 $v = -q_0x^2(45L^4 - 40L^3x + 15L^2x^2$
$- x^4)/360L^2EI$;
$\delta_B = 19q_0L^4/360EI$; $\theta_B = q_0L^3/15EI$

9.4.7 $v = -q_0x(3L^5 - 5L^3x^2 + 3Lx^4 - x^5)/90L^2EI$;
$\delta_{máx} = 61q_0L^4/5760EI$

9.4.8 $v(x) = \frac{q_0}{120EIL}(x^5 - 5Lx^4 + 20L^3x^2 - 16L^5)$

$\delta_{máx} = \frac{2q_0L^4}{15EI}$

9.4.9 $v(x) = -\frac{qL^2}{16EI}(x^2 - L^2)$ para $0 \le x \le L$

$v(x) = -\frac{q}{48EI}(-20L^3x + 27L^2x^2 - 12Lx^3 +$

$+ 2x^4 + 3L^4)$ para $L \le x \le \frac{3L}{2}$

$\delta_C = \frac{9qL^4}{128EI}$; $\theta_C = \frac{7qL^3}{48EI}$

9.4.10 $v(x) = -\frac{q_0L^2}{480EI}(-20x^2 + 19L^2)$ para $0 \le x \le \frac{L}{2}$

$v(x) = -\frac{q_0}{960EIL}(80Lx^4 - 16x^5 - 120L^2x^3$

$+ 40L^3x^2 - 25L^4x + 41L^5)$

para $\frac{L}{2} \le x \le L$

$\delta_A = \frac{19q_0L^4}{480EI}$; $\theta_B = -\frac{13q_0L^3}{192EI}$; $\delta_C = \frac{7q_0L^4}{240EI}$

9.5.1 $\theta_B = 7PL^2/9EI$; $\delta_B = 5PL^3/9EI$

9.5.2 (a) $\delta_1 = 11PL^3/144EI$; (b) $\delta_2 = 25PL^3/384EI$;
(c) $\delta_1/\delta_2 = 88/75 = 1.173$

9.5.3 (a) $a/L = 2/3$; (b) $a/L = 1/2$

9.5.4 (a) $\delta_c = 6.25$ mm (hacia arriba)
(b) $\delta_c = 18.36$ mm (hacia abajo)

9.5.5 $y = Px^2(L - x)^2/3LEI$

9.5.6 $\theta_B = 7qL^3/162EI$; $\delta_B = 23qL^4/648EI$

9.5.7 $\delta_C = 0.0905$ in, $\delta_B = 0.293$ in

9.5.8 (a) $\delta_A = PL^2(10L - 9a)/324EI$ (positiva hacia arriba);
(b) Hacia arriba cuando $a/L < 10/9$, hacia abajo
cuando $a/L > 10/9$

9.5.9 (a) $\delta_C = PH^2(L + H)/3EI$;
(b) $\delta_{máx} = PHL^2/9\sqrt{3}EI$

9.5.10 $\delta_C = 3.5$ mm

9.5.11 $\theta_B = q_0L^3/10EI$, $\delta_B = 13q_0L^4/180EI$

9.5.12 $\theta_A = q(L^3 - 6La^2 + 4a^3)/24EI$;
$\delta_{máx} = q(5L^4 - 24L^2a^2 + 16a^4)/384EI$

9.5.13 (a) $P/Q = 9a/4L$
(b) $P/Q = 8a(3L + a)/9L^2$
(c) $P/qa = 9a/8L$ para $\delta_B = 0$;
$P/qa = a(4L + a)/3L^2$ para $\delta_D = 0$

9.5.14 $\delta = 19WL^3/31{,}104EI$

9.5.15 $k = 3.33$ lb/in

9.5.16 $M_1 = 7800$ N·m, $M_2 = 4200$ N·m

9.5.17 $\delta = \frac{6Pb^3}{EI}$

9.5.18 $\delta_E = \frac{47Pb^3}{12EI}$

9.5.19 $\delta_C = 0.120$ in

9.5.20 $q = 16cEI/7L^4$

9.5.21 $\delta_h = Pcb^2/2EI, \delta_v = Pc^2(c + 3b)/3EI$

9.5.22 $\delta = PL^2(2L + 3a)/3EI$

9.5.23 (a) $b/L = 0.4030$; (b) $\delta_C = 0.002870qL^4/EI$

9.5.24 $\alpha = 22.5°, 112.5°, -67.5°$, o $-157.5°$

9.6.4 $\theta_B = 7qL^3/162EI, \delta_B = 23qL^4/648EI$

9.6.5 $\delta_B = 0.443$ in, $\delta_C = 0.137$ in

9.6.6 $\delta_B = 11.8$ mm, $\delta_C = 4.10$ mm

9.6.8 $P = 64$ kN

9.6.9 $\theta_A = M_0L/6EI, \theta_B = M_0L/3EI,$
$\delta = M_0L^2/16EI$

9.6.10 $\theta_A = Pa(L - a)(L - 2a)/6LEI,$
$\delta_1 = Pa^2(L - 2a)^2/6LEI, \delta_2 = 0$

9.6.11 $\theta_A = M_0L/6EI, \theta_B = 0, \delta = M_0L^2/27EI$ (hacia abajo)

9.7.1 (a) $\delta_B = PL^3(1 + 7I_1/I_2)/24EI_1$;
(b) $r = (1 + 7I_1/I_2)/8$

9.7.2 (a) $\delta_B = qL^4(1 + 15I_1/I_2)/128EI_1$;
(b) $r = (1 + 15I_1/I_2)/16$

9.7.3 (a) $\delta_c = 0.31$ in (hacia arriba)
(b) $\delta_c = 0.75$ in (hacia abajo)

9.7.4 $v = -qx(21L^3 - 64Lx^2 + 32x^3)/768EI$ para $0 \leq x \leq L/4$;
$v = -q(13L^4 + 256L^3x - 512Lx^3 + 256x^4)/12{,}288EI$ para $L/4 \leq x \leq L/2$;
$\theta_A = 7qL^3/256EI; \delta_{\text{máx}} = 31qL^4/4096EI$

9.7.5 $\theta_A = 8PL^2/243EI, \theta_B = 8PL^3/729EI,$
$\delta_{\text{máx}} = 0.01363PL^3/EI$

9.7.6 $v = -2Px(19L^2 - 27x^2)/729EI$ para $0 \leq x \leq L/3$;
$v = P(13L^3 - 175L^2x + 243Lx^2 - 81x^3)/1458EI$ para $L/3 \leq x \leq L$;
$\theta_A = 38PL^2/729EI, \theta_C = 34PL^2/729EI,$
$\delta_B = 32PL^3/2187EI$

9.7.7 $v = \dfrac{PL^3}{EI_A}\left[\dfrac{L}{2(L + x)} - \dfrac{3x}{8L} + \dfrac{1}{8} + \ln\left(\dfrac{L + x}{2L}\right)\right]$;
$\delta_A = \dfrac{PL^3}{8EI_A}(8\ln 2 - 5)$

9.7.8 $v = \dfrac{PL^3}{24EI_A}\left[7 - \dfrac{4L(2L + 3x)}{(L + x)^2} - \dfrac{2x}{L}\right]$;
$\delta_A = \dfrac{PL^3}{24EI_A}$

9.7.9 $v = \dfrac{8PL^3}{EI_A}\left[\dfrac{L}{2L + x} - \dfrac{2x}{9L} - \dfrac{1}{9} + \ln\left(\dfrac{2L + x}{3L}\right)\right]$;
$\delta_A = \dfrac{8PL^3}{EI_A}\left(\ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{18}\right)$

9.7.10 $v(x) = \dfrac{19{,}683PL^3}{2000EI_A}\left(\dfrac{81L}{81L + 40x} + 2\ln\left(\dfrac{81}{121} + \dfrac{40x}{121L}\right) - \dfrac{6440x}{14641L} - \dfrac{3361}{14641}\right)$
$\delta_A = \dfrac{19{,}683PL^3}{7{,}320{,}500EI_A}\left(-2820 + 14{,}641\ln\left(\dfrac{11}{9}\right)\right)$

9.7.11 $v(x) = -\dfrac{19{,}683PL^3}{2000EI_A}\left(\dfrac{81L}{81L + 40x} + 2\ln\left(1 + \dfrac{40x}{81L}\right) - \dfrac{6440x}{14{,}641L} - 1\right)$
$\delta_B = \dfrac{19{,}683\,PL^3}{7{,}320{,}500\,EI_A}\left(-2820 + 14{,}641\ln\left(\dfrac{11}{9}\right)\right)$

9.7.12 (a) $v' = -\dfrac{qL^3}{16EI_A}\left[1 - \dfrac{8Lx^2}{(L + x)^3}\right]$ para $0 \leq x \leq L$,
$v = -\dfrac{qL^4}{2EI_A}\left[\dfrac{(9L^2 + 14Lx + x^2)x}{8L(L + x)^2} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{L}\right)\right]$ para $0 \leq x \leq L$;
(b) $\theta_A = \dfrac{qL^3}{16EI_A}, \delta_C = \dfrac{qL^4(3 - 4\ln 2)}{8EI_A}$

9.8.1 $U = 4bhL\,\sigma^2_{\text{máx}}/45E$

9.8.2 (a) y (b) $U = P^2L^3/96EI$; (c) $\delta = PL^3/48EI$

9.8.3 (a) y (b) $U = \dfrac{q^2L^5}{15EI}$

9.8.4 (a) $U = 32EI\delta^2/L^3$; (b) $U = \pi^4EI\delta^2/4L^3$

9.8.5 (a) $U = P^2a^2(L + a)/6EI$;
(b) $\delta_C = Pa^2(L + a)/3EI$;
(c) $U = 241$ in-lb, $\delta_C = 0.133$ in

9.8.6 $U = \dfrac{L}{15\,360\,EI}\left(17L^4q^2 + 280qL^2M_0 + 2560M_0^2\right)$

9.8.7 $\delta_B = 2PL^3/3EI + 8\sqrt{2}PL/EA$

9.9.2 $\delta_D = Pa^2b^2/3LEI$

9.9.3 $\delta_C = Pa^2(L + a)/3EI$

9.9.6 $\delta_C = L^3(2P_1 + 5P_2)/48EI,$
$\delta_B = L^3(5P_1 + 16P_2)/48EI$

9.9.7 $\theta_A = 7qL^3/48EI$

9.9.8 $\delta_C = Pb^2(b + 3h)/3EI, \theta_C = Pb(b + 2h)/2EI$

9.9.9 $\delta_C = 31qL^4/4096EI$

9.9.10 $\theta_A = M_A(L + 3a)/3EI, \delta_A = M_Aa(2L + 3a)/6EI$

9.9.11 $\delta_C = Pa^2(L + a)/3EI + P(L + a)^2/kL^2$

9.9.12 $\delta_D = 37qL^4/6144EI$ (hacia arriba)

9.10.1 $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{est}}[1 + (1 + 2h/\delta_{\text{est}})^{1/2}]$

9.10.2 $\sigma_{\text{máx}} = \sqrt{18WEh/AL}$

9.10.3 $\delta_{\text{máx}} = 0.302$ in, $\sigma_{\text{máx}} = 21{,}700$ psi

9.10.4 $d = 281$ mm

9.10.5 W 14 × 53

9.10.6 $h = 360$ mm

9.10.7 $R = \sqrt{3EIm\,\omega^2/L^3}$

9.11.1 $v = -\alpha(T_2 - T_1)(x)(L - x)/2h$ (positiva hacia arriba);
$\theta_A = \alpha L(T_2 - T_1)/2h$ (en el sentido de las manecillas del reloj);
$\delta_{\text{máx}} = \alpha L^2(T_2 - T_1)/8h$ (hacia abajo)

9.11.2 $v = \alpha(T_2 - T_1)(x^2)/2h$ (hacia arriba);
$\theta_B = \alpha L(T_2 - T_1)/h$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj);
$\delta_B = \alpha L^2(T_2 - T_1)/2h$ (hacia arriba)

9.11.3 $v(x) = \dfrac{\alpha(T_2 - T_1)(x^2 - L^2)}{2h}$

$\theta_C = \dfrac{\alpha(T_2 - T_1)(L + a)}{h}$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

$\delta_C = \dfrac{\alpha(T_2 - T_1)(2La + a^2)}{2h}$ (hacia arriba)

9.11.4 (a) $\delta_{\text{máx}} = \dfrac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$ (hacia abajo)

(b) $\delta_{\text{máx}} = \dfrac{\alpha T_0 L^4(2\sqrt{2} - 1)}{48h}$ (hacia abajo)

9.11.5 (a) $\delta_{\text{máx}} = \dfrac{\alpha T_0 L^3}{6h}$ (hacia abajo)

(b) $\delta_{\text{máx}} = \dfrac{\alpha T_0 L^3}{12h}$ (hacia abajo)

(c) $\delta_{\text{máx}} = \dfrac{\alpha T_0 L^3}{6h}$ (hacia abajo)

$\delta_{\text{máx}} = \dfrac{\alpha T_0 L^3}{12h}$ (hacia abajo)

CAPÍTULO 10

10.3.1 $R_A = -R_B = 3M_0/2L$, $M_A = M_0/2$;
$v = -M_0 x^2(L - x)/4LEI$

10.3.2 $R_A = R_B = qL/2$, $M_A = M_B = qL^2/12$;
$v = -qx^2(L - x)^2/24EI$

10.3.3 $R_A = R_B = 3EI\delta_B/L^3$, $M_A = 3EI\delta_B/L^2$;
$v = -\delta_B x^2(3L - x)/2L^3$

10.3.4 $\theta_B = \dfrac{qL^3}{6(k_R L - EI)}$ $\quad \delta_B = -\dfrac{1}{8}qL^4 + \dfrac{k_R qL^5}{12(k_R L - EI)}$

10.3.5 $R_A = V(0) = \dfrac{9}{40}q_0 L$

$R_B = -V(L) = \dfrac{11}{40}q_0 L$

$M_A = \dfrac{7}{120}q_0 L^2$

10.3.6 (a) $R_A = V(0) = \dfrac{7}{60}q_0 L$

$R_B = -V(L) = \dfrac{13}{60}q_0 L$

$M_A = \dfrac{1}{30}q_0 L^2$

$v = \dfrac{q_0}{360L^2EI}\left(-x^6 + 7L^3x^3 - 6q_0L^4x^2\right)$

(b)

$R_A = V(0) = 0.31 \cdot q_0 L = \left(\dfrac{2}{\pi} - 6\dfrac{\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^4}\right) \cdot q_0 L$

$R_B = -V(L) = 0.327 q_0 L = \left(6\dfrac{\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^4}\right) \cdot q_0 L$

$M_A = -2q_0L^2\dfrac{\pi^2 - 12\pi + 24}{\pi^4}$

$$v = \frac{1}{EI}\left[-q_0\left(\frac{2L}{\pi}\right)^4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - 6q_0 L\frac{\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^4} \cdot \frac{x^3}{6} + 2q_0L^2 \cdot \frac{\pi^2 - 12\pi + 24}{\pi^4} \cdot \frac{x^2}{2} + q_0\left(\frac{2L}{\pi}\right)^3 x\right]$$

10.3.7 (a) $R_A = V(0) = \dfrac{24}{\pi^4}q_0 L$

$R_B = -V(L) = -\dfrac{24}{\pi^4}q_0 L$

$M_A = \left(\dfrac{12}{\pi^4} - \dfrac{1}{\pi^2}\right)q_0L^2$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

$M_B = \left(\dfrac{12}{\pi^4} - \dfrac{1}{\pi^2}\right)q_0L^2$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

$$v = \frac{1}{\pi^4 EI}\left[-q_0L^4\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4q_0Lx^3 - 6q_0L^2x^2 + q_0L^4\right]$$

(b) $R_A = R_B = q_0L/\pi$, $M_A = M_B = 2q_0L^2/\pi^3$;
$v = -q_0L^2(L^2 \operatorname{sen}\pi x/L + \pi x^2 - \pi Lx)/\pi^4EI$

10.3.8 (a) $R_A = V(0) = \dfrac{48(4 - \pi)}{\pi^4} \cdot q_0 L$

$R_B = -V(L) = \left(\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{48(4 - \pi)}{\pi^4}\right) \cdot q_0 L$

$M_A = -q_0\left(\dfrac{2L}{\pi}\right)^2 + \dfrac{16(6 - \pi)}{\pi^4}q_0L^2$

$M_B = -\dfrac{32(\pi - 3)}{\pi^4}q_0L^2$

$$v = \frac{1}{\pi^4 EI}\left[-16q_0L^4\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + 8(4-\pi)q_0Lx^3 - 8(6-\pi)q_0L^2x^2 + 16q_0L^4\right]$$

(b) $R_A = V(0) = \frac{13}{30}q_0L$

$R_B = -V(L) = \frac{7}{30}q_0L$

$M_A = \frac{1}{15}q_0L^2$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

$M_B = -\frac{1}{20}q_0L^2$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

$v = \frac{q_0}{360L^2EI}\left[x^6 - 15L^2x^4 + 26L^3x^3 - 12L^4x^2\right]$

10.3.9 $R_A = V(0) = \frac{3}{20}q_0L$

$R_B = -V(L) = \frac{7}{20}q_0L$

$M_A = \frac{1}{30}q_0L^2$

$v = \frac{1}{120LEI}\left(-q_0x^5 + 3q_0Lx^3 - 2q_0L^2x^2\right)$

10.3.10 $R_A = -R_B = 3M_0/2L$, $M_A = -M_B = M_0/4$; $v = -M_0x^2(L - 2x)/8LEI$ para $0 \le x \le L/2$

10.3.11 $R_B = -\frac{9}{8}\frac{M_0}{L}$

$R_A = \frac{9}{8}\frac{M_0}{L}$

$M_A = \frac{1}{8}\frac{M_0}{L}$

$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{9M_0}{48L}x^3 - \frac{M_0}{16}x^2\right) \quad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{9M_0}{48L}x^3 - \frac{9M_0}{16}x^2 + \frac{M_0L}{2}x - \frac{M_0L^2}{8}\right) \quad \left(\frac{L}{2} \le x \le L\right)$

10.4.1 $R_A = Pb(3L^2 - b^2)/2L^3$, $R_B = Pa^2(3L - a)/2L^3$, $M_A = Pab(L + b)/2L^2$

10.4.2 $R_A = qL$, $M_A = \frac{qL^2}{3}$, $M_B = \frac{qL^2}{6}$

10.4.3 $R_A = -\frac{1}{8}qL$, $R_B = \frac{17}{8}qL$, $M_A = -\frac{1}{8}qL^2$

10.4.4 $t_{AB}/t_{CD} = L_{AB}/L_{CD}$

10.4.5 $R_A = \frac{7}{12}qL$, $R_B = \frac{17}{12}qL$, $M_A = \frac{7}{12}qL^2$

10.4.6 $R_A = 2qL$, $M_B = \frac{7}{12}qL^2$

10.4.7 $R_A = R_B = q_0L/4$, $M_A = M_B = 5q_0L^2/96$

10.4.8 $R_A = qL/8$, $R_B = 33qL/16$, $R_C = 13qL/16$

10.4.9 $R_A = 1100$ lb (hacia abajo), $R_B = 2800$ lb (hacia arriba), $M_A = 30{,}000$ lb-in (en el sentido de las manecillas del reloj)

10.4.10 $R_B = 6.436$ kN

10.4.11 (a) La fuerza de tensión en la barra $= R_D = 604.3$ lb (b) $R_A = 795.7$ lb $M_A = 1307.5$ lb-ft $= 1.567 \times 10^4$ lb-in

10.4.12 $R_A = 31qL/48$, $R_B = 17qL/48$, $M_A = 7qL^2/48$

10.4.13 (a) $R_A = -23P/17$, $R_D = R_E = 20P/17$, $M_A = 3PL/17$; (b) $M_{máx} = PL/2$

10.4.14 $R_A = R_D = 2qL/5$, $R_B = R_C = 11qL/10$

10.4.15 $M_B(q) = (-800 \cdot q)$ lb-in for $q < 250$ lb/in

$M_B(q) = (-200 \cdot q - 150{,}000)$ lb-in para $q \ge 250$ lb/in

10.4.16 $R_A = -R_B = 6M_0ab/L^3$; $M_A = M_0b(3a - L)/L^2$, $M_B = -M_0a(3b - L)/L^2$

10.4.17 $\sigma = 509$ psi

10.4.18 $(M_{AB})_{máx} = 121qL^2/2048 = 6.05$ kN·m; $(M_{CD})_{máx} = 5qL^2/64 = 8.0$ kN·m

10.4.19 $F = 3160$ lb, $M_{AB} = 18{,}960$ lb-ft, $M_{DE} = 7320$ lb-ft

10.4.20 $k = 48EI(6 + 5\sqrt{2})/7L^3 = 89.63EI/L^3$

10.4.21 (a) $V_A = V_C = 3P/32$, $H_A = P$, $M_A = 13PL/32$; (b) $M_{máx} = 13PL/32$

10.4.22 $H_A = -\frac{35}{64}P$, $H_C = -\frac{29}{64}P$, $M_{máx} = \frac{35}{128}PL$

10.4.23 $R_A = R_B = 3000$ lb, $R_C = 0$

10.4.24 (a) $M_A = M_B = qb(3L^2 - b^2)/24L$; (b) $b/L = 1.0$, $M_A = qL^2/12$; (c) Para $a = b = L/3$, $(M_{máx})_{pos} = 19qL^2/648$

10.4.25 (a) $d_2/d_1 = \sqrt[4]{8} = 1.682$; (b) $M_{máx} = qL^2(3 - 2\sqrt{2})/2 = 0.08579qL^2$; (c) El punto C está debajo de los puntos A y B por la cantidad $0.01307\ qL^4/EI$

10.4.26 $M_{máx} = 19q_0L^2/256$, $\sigma_{máx} = 13.4$ MPa, $\delta_{máx} = 19q_0L^4/7680EI = 0.00891$ mm

10.5.1 $S = \frac{243E_SE_WIAH\alpha(\Delta T)}{4AL^3E_S + 243IHE_W}$

10.5.2 (a) $R_A = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h}\cdot\left(\frac{3EI \cdot k}{3EI + L^3 \cdot k}\right)$

$R_B = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{3EI + L^3 \cdot k}\right)$

$M_A = R_B L = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^3}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{3EI + L^3 \cdot k}\right)$

(b) $R_A = -R_B = -\frac{3EI\alpha(T_2 - T_1)}{2hL}$ (hacia arriba)

$R_B = \frac{3EI\alpha(T_2 - T_1)}{2hL}$ (hacia abajo)

$M_A = R_B L = \frac{3EI\alpha(T_2 - T_1)}{h}$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

2

10.5.3 $R_A = -R_B = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{3EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia arriba)

$R_B = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{3EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia abajo)

$M_A = R_B L = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^3}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{3EI + L^3 \cdot k}\right)$ (en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

10.5.4 (a) $R_B = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{h} \cdot \left(\frac{6EI \cdot k}{36EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia abajo)

$R_A = -\frac{1}{4}R_B = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{36EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia arriba)

$R_C = -\frac{3}{4}R_B = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{9EI \cdot k}{36EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia arriba)

(b) $R_B = -\frac{6EI\alpha(T_1 - T_2)}{Lh}$ (hacia abajo)

$R_A = \frac{3EI\alpha(T_1 - T_2)}{2Lh}$ (hacia arriba)

$R_C = \frac{9EI\alpha(T_1 - T_2)}{2Lh}$ (hacia arriba)

10.5.5 $R_B = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{h} \cdot \left(\frac{6EI \cdot k}{36EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia abajo)

$R_A = -\frac{1}{4}R_B = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{3EI \cdot k}{36EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia arriba)

$R_C = -\frac{3}{4}R_B = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2h} \cdot \left(\frac{9EI \cdot k}{36EI + L^3 \cdot k}\right)$ (hacia arriba)

10.6.1 (a) $H = \pi^2 EA\delta^2/4L^2$, $\sigma_t = \pi^2 E\delta^2/4L^2$; (b) σ_t = 617, 154 y 69 psi

10.6.2 (a) $\lambda = 17q^2L^7/40{,}320E^2I^2$; $\sigma_b = qhL^2/16I$; (b) $\sigma_t = 17q^2L^6/40{,}320EI^2$; (c) $\lambda = 0.01112$ mm, $\sigma_b = 117.2$ MPa, $\sigma_t = 0.741$ MPa

CAPÍTULO 11

11.2.1 $P_{cr} = \beta_R/L$

11.2.2 (a) $P_{cr} = \frac{\beta a^2 + \beta_R}{L}$ (b) $P_{cr} = \frac{\beta a^2 + 2\beta_R}{L}$

11.2.3 $P_{cr} = 6\beta_R/L$

11.2.4 (a) $P_{cr} = \frac{(L - a)(\beta a^2 + \beta_R)}{aL}$ (b) $P_{cr} = \frac{\beta L^2 + 20\beta_R}{4L}$

11.2.5 $P_{cr} = \frac{3\beta_R}{L}$

11.2.6 $P_{cr} = \frac{3}{5}\beta L$

11.2.7 $P_{cr} = \frac{7}{4}\beta L$

11.3.1 (a) $P_{cr} = 453$ k; (b) $P_{cr} = 152$ k

11.3.2 (a) $P_{cr} = 2803$ kN; (b) $P_{cr} = 953$ kN

11.3.3 (a) $P_{cr} = 650$ k; (b) $P_{cr} = 140$ k

11.3.4 $M_{perm} = 1143$ kN·m

11.3.5 $Q_{perm} = 23.8$ k

11.3.6 (a) $Q_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

(b) $Q_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{9L^2}$

11.3.7 (a) $Q_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$

(b) $M_{cr} = \frac{3d\pi^2 EI}{L^2}$

11.3.8 $\Delta T = \pi^2 I/\alpha AL^2$

11.3.9 $h/b = 2$

11.3.10 (a) $P_{cr} = 3\pi^3 Er^4/4L^2$; (b) $P_{cr} = 11\pi^3 Er^4/4L^2$

11.3.11 $P_1 : P_2 : P_3 = 1.000 : 1.047 : 1.209$

11.3.12 $P_{perm} = 604$ kN

11.3.13 $F_{perm} = 54.40$ k

11.3.14 $W_{máx} = 124$ kN

11.3.15 $t_{mín} = 0.165$ in

11.3.16 $P_{cr} = 497$ kN

11.3.17 $W_{cr} = 51.90$ k
11.3.18 $\theta = \arctan 0.5 = 26.57°$
11.3.19 (a) $q_{máx} = 142.4$ lb/ft
(b) $I_{b,mín} = 38.52$ in^4
(c) $s = 0.264$ ft, 2.424 ft
11.4.1 $P_{cr} = 235$ k, 58.7 k, 480 k, 939 k
11.4.2 $P_{cr} = 62.2$ kN, 15.6 kN, 127 kN, 249 kN
11.4.3 $P_{perm} = 253$ k, 63.2 k, 517 k, 1011 k
11.4.4 $P_{perm} = 678.0$ kN, 169.5 kN, 1387 kN, 2712 kN
11.4.5 $P_{cr} = 229$ k
11.4.6 $T_{perm} = 18.1$ kN
11.4.7 (a) $Q_{cr} = 4575$ lb; (b) $Q_{cr} = 10{,}065$ lb, $a = 0$ in
11.4.8 $P_{cr} = 447$ kN, 875 kN, 54.7 kN, 219 kN
11.4.9 $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$, $v = \delta(1 - \cos 2\pi x/L)/2$
11.4.10 $t_{mín} = 10.0$ mm
11.4.11 (b) $P_{cr} = 13.89EI/L^2$
11.5.1 $\delta = 0.112$ in, $M_{máx} = 1710$ lb-in
11.5.2 $\delta = 8.87$ mm, $M_{máx} = 2.03$ kN·m
11.5.3 Para $P = 0.3P_{cr}$: $M/Pe = 1.162(\text{sen } 1.721x/L$
$+ \cos 1.721x/L$
11.5.4 $P = 583.33 \{\text{arccos } [5/(5 + \delta)]\}^2$, en donde
P = kN y δ = mm;
$P = 884$ kN cuando
$\delta = 10$ mm
11.5.5 $P = 125.58 \{\text{arccos } [0.2/(0.2 + \delta)]\}^2$, en donde
P = kips y δ = in; $P = 190$ k cuando $\delta = 0.4$ in
11.5.6 $P_{perm} = 49.91$ kN
11.5.7 $L_{máx} = 150.5$ in $= 12.5$ ft
11.5.8 $L_{máx} = 3.14$ m
11.5.9 $\delta = e(\sec kL - 1)$, $M_{máx} = Pe \sec kL$
11.5.10 $L_{máx} = 2.21$ m
11.5.11 $L_{máx} = 130.3$ in $= 10.9$ ft
11.5.12 $T_{máx} = 8.29$ kN
11.5.13 (a) $q_0 = 2230$ lb/ft $= 186$ lb/in;
(b) $M_{máx} = 37.7$ k-in, razón $= 0.47$
11.6.1 (a) $\sigma_{máx} = 17.3$ ksi; (b) $L_{máx} = 46.2$ in
11.6.2 $P_{perm} = 37.2$ kN
11.6.3 $b_{mín} = 4.10$ in
11.6.4 (a) $\sigma_{máx} = 38.8$ MPa; (b) $L_{máx} = 5.03$ m
11.6.5 (a) $\sigma_{máx} = 9.65$ ksi; (b) $P_{perm} = 3.59$ k
11.6.6 $d_2 = 131$ mm
11.6.7 (a) $\sigma_{máx} = 10.9$ ksi; (b) $P_{perm} = 160$ k
11.6.8 (a) $\sigma_{máx} = 104.5$ MPa; (b) $L_{máx} = 3.66$ m
11.6.9 (a) $\sigma_{máx} = 9.60$ ksi; (b) $P_{perm} = 53.6$ k
11.6.10 (a) $\sigma_{máx} = 47.6$ MPa; (b) $n = 5.49$
11.6.11 (a) $\sigma_{máx} = 13.4$ ksi; (b) $n = 2.61$
11.6.12 (a) $\sigma_{máx} = 120.4$ MPa; (b) $P_2 = 387$ kN
11.6.13 (a) $\sigma_{máx} = 17.6$ ksi; (b) $n = 1.89$
11.6.14 (a) $\sigma_{máx} = 106.7$ MPa; (b) $P_2 = 314$ kN
11.9.1 $P_{perm} = 247$ k, 180 k, 96.7 k, 54.4 k
11.9.2 $P_{perm} = 2927$ kN, 2213 kN, 1276 kN, 718 kN
11.9.3 $P_{perm} = 328$ k, 243 k, 134 k, 75.3 k
11.9.4 W 250 × 67
11.9.5 W 12 × 87
11.9.6 W 360 × 122
11.9.7 $P_{perm} = 58.9$ k, 43.0 k, 23.1 k, 13.0 k
11.9.8 $P_{perm} = 1070$ kN, 906 kN, 692 kN, 438 kN
11.9.9 $P_{perm} = 95$ k, 75 k, 51 k, 32 k
11.9.10 $P_{perm} = 235$ kN, 211 kN, 186 kN, 163 kN
11.9.11 $L_{máx} = 5.23$ ft
11.9.12 $L_{máx} = 3.59$ m
11.9.13 $L_{máx} = 166.3$ in $= 13.9$ ft
11.9.14 $P_{perm} = 5634$ kN
11.9.15 (a) $L_{máx} = 254.6$ in $= 21.2$ ft;
(b) $L_{máx} = 173.0$ in $= 14.4$ ft
11.9.16 (a) $L_{máx} = 6.41$ m, (b) $L_{máx} = 4.76$ m
11.9.17 $d = 4.89$ in
11.9.18 $d = 99$ mm
11.9.19 $d = 5.23$ in
11.9.20 $d = 194$ mm
11.9.21 $P_{perm} = 142$ k, 122 k, 83 k, 58 k
11.9.22 $P_{perm} = 312$ kN, 242 kN, 124 kN, 70 kN
11.9.23 $P_{perm} = 18.1$ k, 14.7 k, 8.3 k, 5.3 k
11.9.24 $P_{perm} = 96$ kN, 84 kN, 61 kN, 42 kN
11.9.25 (a) $L_{máx} = 25.2$ in; (b) $d_{mín} = 2.12$ in
11.9.26 (a) $L_{máx} = 457$ mm; (b) $d_{mín} = 43.1$ mm
11.9.27 (a) $L_{máx} = 14.8$ in; (b) $d_{mín} = 1.12$ in
11.9.28 (a) $L_{máx} = 469$ mm; (b) $d_{mín} = 33.4$ mm
11.9.29 $P_{perm} = 25.4$ k, 14.1 k, 8.4 k
11.9.30 $P_{perm} = 154$ kN, 110 kN, 77 kN
11.9.31 $P_{perm} = 16.8$ k, 11.3 k, 7.7 k
11.9.32 $P_{perm} = 212$ kN, 127 kN, 81 kN
11.9.33 (a) $L_{máx} = 75.2$ in $= 6.27$ ft;
(b) $b_{mín} = 6.71$ in
11.9.34 (a) $L_{máx} = 2.08$ m; (b) $b_{mín} = 184$ mm
11.9.35 (a) $L_{máx} = 74.3$ in $= 6.19$ ft; (b) $b_{mín} = 4.20$ in
11.9.36 (a) $L_{máx} = 1.51$ m; (b) $b_{mín} = 165$ mm

CAPÍTULO 12

12.3.2 $\bar{x} = \bar{y} = 5a/12$
12.3.3 $\bar{y} = 1.10$ in
12.3.4 $2c^2 = ab$
12.3.5 $\bar{y} = 13.94$ in
12.3.6 $\bar{y} = 52.5$ mm
12.3.7 $\bar{x} = 0.99$ in, $\bar{y} = 1.99$ in
12.3.8 $\bar{x} = 137$ mm, $\bar{y} = 132$ mm

12.4.6 $I_x = 518 \times 10^3 \text{mm}^4$
12.4.7 $I_x = 36.1 \text{ in}^4$, $I_y = 10.9 \text{ in}^4$
12.4.8 $I_x = I_y = 194.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $r_x = r_y = 80.1$ mm
12.4.9 $I_1 = 1480 \text{ in}^4$, $I_2 = 186 \text{ in}^4$, $r_1 = 7.10$ in, $r_2 = 2.52$ in
12.5.1 $I_b = 940 \text{ in}^4$
12.5.2 $I_c = 11a^4/192$
12.5.3 $I_{x_c} = 7.23 \text{ in}^4$
12.5.4 $I_2 = 405 \times 10^3 \text{ mm}^4$
12.5.5 $I_{x_c} = 6050 \text{ in}^4$, $I_{y_c} = 475 \text{ in}^4$
12.5.6 $I_{x_c} = 106 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.5.7 $I_{x_c} = 17.40 \text{ in}^4$, $I_{y_c} = 6.27 \text{ in}^4$
12.5.8 $b = 250$ mm
12.6.1 $I_P = bh(b^2 + 12h^2)/48$
12.6.2 $(I_P)_C = r^4(9\alpha^2 - 8 \text{ sen}^2 \alpha)/18\alpha$
12.6.3 $I_P = 233 \text{ in}^4$
12.6.4 $I_P = bh(b^2 + h^2)/24$
12.6.5 $(I_P)_C = r^4(176 - 84\pi + 9\pi^2)/[72(4 - \pi)]$
12.7.2 $I_{xy} = r^4/24$
12.7.3 $b = 2r$
12.7.4 $I_{xy} = t^2(2b^2 - t^2)/4$
12.7.5 $I_{12} = -20.5 \text{ in}^4$
12.7.6 $I_{xy} = 24.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.7.7 $I_{x_c y_c} = -6.079 \text{ in}^4$
12.8.1 $I_{x_1} = I_{y_1} = b^4/12$, $I_{x_1 y_1} = 0$
12.8.2 $I_{x_1} = \dfrac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$, $I_{y_1} = \dfrac{bh(b^4 + h^4)}{12(b^2 + h^2)}$,

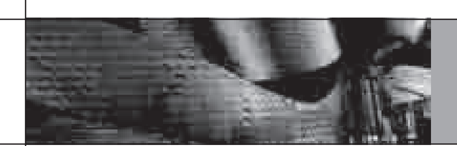
$$I_{x_1 y_1} = \frac{b^2h^2(h^2 - b^2)}{12(b^2 + h^2)}$$

12.8.3 $I_d = 159 \text{ in}^4$
12.8.4 $I_{x_1} = 12.44 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{y_1} = 9.68 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{x_1 y_1} = 6.03 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.8.5 $I_{x_1} = 13.50 \text{ in}^4$, $I_{y_1} = 3.84 \text{ in}^4$, $I_{x_1 y_1} = 4.76 \text{ in}^4$
12.8.6 $I_{x_1} = 8.75 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{y_1} = 1.02 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{x_1 y_1} = -0.356 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.9.1 (a) $c = \sqrt{a^2 - b^2}/2$; (b) $a/b = \sqrt{5}$; (c) $1 \leq a/b < \sqrt{5}$
12.9.2 Demuestra que existen dos conjuntos de ejes principales en cada punto.
12.9.3 $\theta_{p_1} = -29.87°$, $\theta_{p_2} = 60.13°$, $I_1 = 311.1 \text{ in}^4$, $I_2 = 88.9 \text{ in}^4$
12.9.4 $\theta_{p_1} = -8.54°$, $\theta_{p_2} = 81.46°$, $I_1 = 17.24 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_2 = 4.88 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.9.5 $\theta_{p_1} = 37.73°$, $\theta_{p_2} = 127.73°$, $I_1 = 15.45 \text{ in}^4$, $I_2 = 1.89 \text{ in}^4$
12.9.6 $\theta_{p_1} = 32.63°$, $\theta_{p_2} = 122.63°$, $I_1 = 8.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_2 = 1.00 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.9.7 $\theta_{p_1} = 16.85°$, $\theta_{p_2} = 106.85°$, $I_1 = 0.2390b^4$, $I_2 = 0.0387b^4$
12.9.8 $\theta_{p_1} = 74.08°$, $\theta_{p_2} = -15.92°$, $I_1 = 8.29 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_2 = 1.00 \times 10^6 \text{ mm}^4$
12.9.9 $\theta_{p_1} = 75.73°$, $\theta_{p_2} = -14.27°$, $I_1 = 20.07 \text{ in}^4$, $I_2 = 2.12 \text{ in}^4$



Índice onomástico

Notas: los números en paréntesis son números de referencia.
Un asterisco denota una referencia que contiene información bibliográfica.
La letra n indica material al pie.



Índice

D

E

F

H

I

P

R

S

T

U

V

W

CONVERSIONES ENTRE UNIDADES INGLESAS Y UNIDADES SI

Unidad inglesa		Factor de conversión multiplicativo		Igual a la unidad SI	
		Exacto	Práctico		
Aceleración (lineal)					
pie por segundo al cuadrado	ft/s^2	0.3048*	0.305	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
pulgada por segundo al cuadrado	in/s^2	0.0254*	0.0254	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
Área					
pie cuadrado	ft^2	0.09290304*	0.0929	metro cuadrado	m^2
pulgada cuadrada	in^2	645.16*	645	milímetro cuadrado	mm^2
Densidad (masa)					
slug por pie cúbico	$slug/ft^3$	515.379	515	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Densidad (peso)					
libra por pie cúbico	lb/ft^3	157.087	157	newton por metro cúbico	N/m^3
libra por pulgada cúbica	lb/in^3	271.447	271	kilonewton por metro cúbico	kN/m^3
Energía; trabajo					
pie-libra	ft-lb	1.35582	1.36	joule (N·m)	J
pulgada-libra	in-lb	0.112985	0.113	joule	J
kilowatt-hora	kWh	3.6*	3.6	megajoule	MJ
unidad térmica británica	Btu	1055.06	1055	joule	J
Fuerza					
libra	lb	4.44822	4.45	newton $(kg \cdot m/s)^2$	N
kip (1000 libras)	k	4.44822	4.45	kilonewton	kN
Fuerza por unidad de longitud					
libra por pie	lb/ft	14.5939	14.6	newton por metro	N/m
libra por pulgada	lb/in	175.127	175	newton por metro	N/m
kip por pie	k/ft	14.5939	14.6	kilonewton por metro	kN/m
kip por pulgada	k/in	175.127	175	kilonewton por metro	kN/m
Longitud					
pie	ft	0.3048*	0.305	metro	m
pulgada	in	25.4*	25.4	milímetro	mm
milla	mi	0.609344*	1.61	kilómetro	km
Masa					
slug	$lb\text{-}s^2/ft$	14.5939	14.6	kilogramo	kg
Momento de una fuerza; par de torsión					
libra-pie	lb-ft	1.35582	1.36	newton metro	N·m
libra-pulgada	lb-in	0.112985	0.113	newton metro	N·m
kip-pie	k-ft	1.35582	1.36	kilonewton metro	kN·m
kip-pulgada	k-in	0.112985	0.113	kilonewton metro	kN·m

CONVERSIONES ENTRE UNIDADES INGLESAS Y UNIDADES SI (Continuación)

Unidad inglesa		Factor de conversión multiplicativo		Igual a la unidad SI	
		Exacto	Práctico		
Momento de inercia (área)					
pulgada a la cuarta potencia	in^4	416,231	416,000	milímetro a la cuarta potencia	mm^4
pulgada a la cuarta potencia	in^4	0.416231×10^{-6}	0.416×10^{-6}	metro a la cuarta potencia	m^4
Momento de inercia (masa)					
slug pie al cuadrado	slug-ft^2	1.35582	1.36	kilogramo metro cuadrado	kg·m^2
Potencia					
pie-libra por segundo	ft-lb/s	1.35582	1.36	watt (J/s o N·m/s)	W
pie-libra por minuto	ft-lb/min	0.0225970	0.0226	watt	W
caballo de potencia (550 ft-lb/s)	hp	745.701	746	watt	W
Presión; esfuerzo					
libra por pie cuadrado	psf	47.8803	47.9	pascal (N/m^2)	Pa
libra por pulgada cuadrada	psi	6894.76	6890	pascal	Pa
kip por pie cuadrado	ksf	47.8803	47.9	kilopascal	kPa
kip por pulgada cuadrada	ksi	6.89476	6.89	megapascal	MPa
Módulo de sección					
pulgada al cubo	in^3	16,387.1	16,400	milímetro al cubo	mm^3
pulgada al cubo	in^3	16.3871×10^{-6}	16.4×10^{-6}	metro al cubo	m^3
Velocidad (lineal)					
pie por segundo	ft/s	0.3048*	0.305	metro por segundo	m/s
pulgada por segundo	in/s	0.0254*	0.0254	metro por segundo	m/s
milla por hora	mph	0.44704*	0.447	metro por segundo	m/s
milla por hora	mph	1.609344*	1.61	kilometro por hora	km/h
Volumen					
pie cúbico	ft^3	0.0283168	0.0283	metro cúbico	m^3
pulgada cúbica	in^3	16.3871×10^{-6}	16.4×10^{-6}	metro cúbico	m^3
pulgada cúbica	in^3	16.3871	16.4	centímetro cúbico (cc)	cm^3
galón (231 in^3)	gal	3.78541	3.79	litro	L
galón (231 in^3)	gal	0.00378541	0.00379	metro cúbico	m^3

*Un asterisco denota un factor de conversión *exacto*.

Nota: **para convertir unidades SI en unidades inglesas, *divida* entre el factor de conversión.**

Fórmulas de conversión de temperatura

$$T(°C) = \frac{5}{9}[T(°F) - 32] = T(K) - 273.15$$

$$T(K) = \frac{5}{9}[T(°F) - 32] + 273.15 = T(°C) + 273.15$$

$$T(°F) = \frac{9}{5}T(°C) + 32 = \frac{9}{5}T(K) - 459.67$$

PRINCIPALES UNIDADES EMPLEADAS EN MECÁNICA

Cantidad	Sistema Internacional (SI)			Sistema Inglés		
	Unidad	Símbolo	Fórmula	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración (angular)	radián por segundo al cuadrado		rad/s^2	radián por segundo al cuadrado		rad/s^2
Aceleración (lineal)	metro por segundo al cuadrado		m/s^2	pie por segundo al cuadrado		ft/s^2
Área	metro cuadrado		m^2	pie cuadrado		ft^2
Densidad (masa) (masa específica)	kilogramo por metro cúbico		kg/m^3	slug por pie cúbico		$slug/ft^3$
Densidad (peso) (peso específico)	newton por metro cúbico		N/m^3	libra por pie cúbico	pcf	lb/ft^3
Energía; trabajo	joule	J	N·m	pie-libra		ft-lb
Fuerza	newton	N	$kg{\cdot}m/s^2$	libra	lb	(unidad base)
Fuerza por unidad de longitud (intensidad de fuerza)	newton por metro		N/m	libra por pie		lb/ft
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	hertz	Hz	s^{-1}
Longitud	metro	m	(unidad base)	pie	ft	(unidad base)
Masa	kilogramo	kg	(unidad base)	slug		$lb\text{-}s^2/ft$
Momento de una fuerza; par de torsión	newton metro		N·m	libra-pie		lb-ft
Momento de inercia (área)	metro a la cuarta potencia		m^4	pulgada a la cuarta potencia		in^4
Momento de inercia (masa)	kilogramo metro al cuadrado		$kg{\cdot}m^2$	slug pie cuadrado		$slug\text{-}ft^2$
Potencia	watt	W	J/s (N·m/s)	pie libra por segundo		ft-lb/s
Presión	pascal	Pa	N/m^2	libra por pie cuadrado	psf	lb/ft^2
Módulo de sección	metro al cubo		m^3	pulgada al cubo		in^3
Esfuerzo	pascal	Pa	N/m^2	libra por pulgada cuadrada	psi	lb/in^2
Tiempo	segundo	s	(unidad base)	segundo s		(unidad base)
Velocidad (angular)	radián por segundo		rad/s	radián por segundo		rad/s
Velocidad (lineal)	metro por segundo		m/s	pie por segundo	fps	ft/s
Volumen (líquidos)	litro	L	$10^{-3}\ m^3$	galón	gal	$231\ in^3$
Volumen (sólidos)	metro cúbico		m^3	pie cúbico	cf	ft^3

PROPIEDADES FÍSICAS SELECCIONADAS

Propiedad	SI	Sistema Inglés
Agua (dulce)		
Peso específico	9.81 kN/m^3	62.4 lb/ft^3
Masa específica	1000 kg/m^3	1.94 slugs/ft^3
Agua de mar		
peso específico	10.0 kN/m^3	63.8 lb/ft^3
masa específica	1020 kg/m^3	1.98 slugs/ft^3
Aluminio (aleaciones estructurales)		
peso específico	28 kN/m^3	175 lb/ft^3
masa específica	2800 kg/m^3	5.4 slugs/ft^3
Acero		
peso específico	77.0 kN/m^3	490 lb/ft^3
masa específica	7850 kg/m^3	15.2 slugs/ft^3
Concreto reforzado		
peso específico	24 kN/m^3	150 lb/ft^3
masa específica	2400 kg/m^3	4.7 slugs/ft^3
Presión atmosférica (nivel del mar)		
Valor recomendado	101 kP	14.7 psi
Valor internacional estándar	101.325 kP	14.6959 psi
Aceleración de la gravedad (nivel del mar, aprox. 45° latitud)		
Valor recomendado	9.81 m/s^2	32.2 ft/s^2
Valor internacional estándar	9.80665 m/s^2	32.1740 ft/s^2

PREFIJOS SI

Prefijo	Símbolo	Factor multiplicativo
tera	T	10^{12} = 1,000,000,000,000
giga	G	10^{9} = 1,000,000,000
mega	M	10^{6} = 1,000,000
kilo	k	10^{3} = 1,000
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10^{1} = 10
deci	d	10^{-1} = 0.1
centi	c	10^{-2} = 0.01
mili	m	10^{-3} = 0.001
micro	μ	10^{-6} = 0.000 001
nano	n	10^{-9} = 0.000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0.000 000 000 001

Nota: el uso de los prefijos, hecto, deca, deci y centi no se recomienda en el SI.


FreeLibros